Vorlesung Differentialgeometrie I

Heidelberg, 24.04.2018

Übungsblatt 1
Mannigfaltigkeiten, Atlanten, differenzierbare Abbildungen, Tangentialräume

Abzugeben bis Dienstag, 08.05.18, 9:15 Uhr

(Insgesamt 60 Punkte)

Aufgabe 1 (3+3+3+3+3 Punkte)**.** Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, mit der Teilraumtopologie ausgestattet, sind topologische Mannigfaltigkeiten?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2 - y^2 = 0\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^2 = 0\}$.

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ und } z \geq 0\}$.

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ or } y = 0\}$.

Aufgabe 2 (7+8 Punkte)**.**

(a) Finden Sie einen C^∞-Atlas für $\mathbb{R}$, so dass die dadurch gegebene glatte Struktur nicht die übliche (durch den Atlas $\mathcal{A} = \{(\mathrm{Id}, \mathbb{R})\}$ definierte) ist, jedoch diffeomorph zu dieser.

(b) Finden Sie einen C^∞-Atlas für den Torus

$$T^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe 3 (10+5 Punkte)**.**

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; y = \lambda x,\; \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Der Quotient $\left(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$ mit der Quotiententopologie ist der *projektive Raum* $\mathbb{KP}^n$. Wir schreiben $[x_0 : \ldots : x_n]$ für die Äquivalenzklasse des Punktes $(x_0, \ldots, x_n)$ (*homogene Koordinaten*). Sei

$$\mathcal{U}_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_i \neq 0\}$$

und $b_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{K}^n$ durch

$$b_i([x_0 : \ldots : x_n]) = \frac{1}{x_i}\,(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$$

gegeben, wobei „Hut“ das Weglassen des Eintrags an der entsprechenden Stelle bedeutet. Zeigen Sie, dass $\{(b_i, \mathcal{U}_i)\}$ ein C^∞-Atlas für $\mathbb{KP}^n$ ist.

(b) Sei S_r^n die Sphäre und $\mathbb{RP}^n$ der reell projektive Raum (siehe vorige Aufgabe). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : S_r^n \to \mathbb{RP}^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$$

glatt ist. Untersuchen Sie zusätzlich, ob sie ein lokaler Diffeomorphismus oder sogar ein Diffeomorphismus ist.
(„lokaler Diffeomorphismus" bedeutet, dass es für alle $x \in S_r^n$ eine Umgebung U_x gibt, so dass $\phi|_{U_x} : U_x \to \phi(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist)

Aufgabe 4 (7+8 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass S_r^n eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist und dass diese differenzierbare Struktur mit derjenigen von der Präsenzaufgabe übereinstimmt (das bedeutet, dass die Identitätsabbildung $id : S_r^n \to S_r^n$ einen Diffeomorphismus zwischen den beiden Strukturen liefert).

(b) Sei $\iota : S_r^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Einbettung. Für jeden Punkt $p \in S_r^n$ ist $\mathrm{d}\iota_p(\mathrm{T}_p S_r^n)$ ein Unterraum des Tangentialraums $\mathrm{T}_{\iota(p)}\mathbb{R}^{n+1}$, den wir wie in der Vorlesung mit $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation

$$\mathrm{d}\iota_p(\mathrm{T}_p S_r^n) = \iota(p)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, \iota(p) \rangle = 0\}$$

gilt.

Präsenzaufgaben

Im Folgenden finden Sie ein paar Aufgaben, die in den Übungen besprochen werden können.

Aufgabe 5.

(a) Die n-dimensionale Sphäre vom Radius r ist

$$S_r^n = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = r^2 \right\}.$$

Sei $N = (r, 0, \ldots, 0)$ der Nordpol, $S = (-r, 0, \ldots, 0)$ der Südpol, und $\mathcal{U}_N = S_r^n \setminus N$, $\mathcal{U}_S = S_r^n \setminus S$. Wir definieren die Projektionen $p_N : \mathcal{U}_N \to \mathbb{R}^n$ und $p_S : \mathcal{U}_S \to \mathbb{R}^n$ folgendermaßen: $p_N(x)$ sei der Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit der Hyperebene $\{0\} \times \mathbb{R}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 0\}$, die mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert wird; analog für p_S.
Finden Sie eine explizite Formel für p_N und p_S und zeigen Sie, dass $\{(p_N, \mathcal{U}_N), (p_S, \mathcal{U}_S)\}$ ein C^∞-Atlas für S_r^n ist.

(b) Seien M_1, M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: $M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und die Projektionen
$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ sowie die Inklusionen $\iota_i : M_i \hookrightarrow M_1 \times M_2$ sind glatt (dabei werden für die Inklusionen willkürlich Fußpunkte fixiert, z.B. $\iota_1 : M_1 \to M_1 \times \{x\}$ mit $x \in M_2$).

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die folgenden Matrixgruppen C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ sind:

(a) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

(b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^{\mathrm{T}} = I_n\}$ (wobei I_n die Einheitsmatrix bezeichnet)

(c) $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$

Aufgabe 7. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit von Dimension n. Der Tangentialraum T_pM (mit $p \in M$) wurde als Raum der Derivationen in p eingeführt. Wir betrachten nun eine alternative Beschreibung als Äquivalenzklassen von Kurven: Sei

$$\mathrm{K}_pM = \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \mid \epsilon > 0, \gamma \text{ ist } C^1, \gamma(0) = p\}$$

die Menge der differenzierbaren Kurven durch p. Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \exists \text{ Karte } \varphi : U \to \mathbb{R}^n,\ p \in U,\ \text{so dass } (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

und setzen $\widehat{\mathrm{T}}_pM = \mathrm{K}_pM/\sim$.
Zeigen Sie: $\widehat{\mathrm{T}}_pM$ besitzt eine Struktur als $\mathbb{R}$-Vektorraum und ist auf natürliche Weise isomorph zu T_pM. Unter dieser Identifikation ist das Differential einer (differenzierbaren) Abbildung $g : M \to N$ in eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit N durch $\mathrm{d}g_p([\gamma]) = [g \circ \gamma]$ gegeben.