RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 08.07.2016

Übungsblatt 13

Jacobifelder

Abzugeben bis Freitag, 15.07.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung. Sei J ein Jacobifeld entlang eine Geodätische für (M, g).

(a) Zeigen Sie, dass $g(J, D_t D_t J)$ ist eine nichtnegative Funktion.

(b) Zeigen Sie, dass die zweite ableitung von der Funktion $g(J, J)$ ist nichtnegative.

(c) Zeigen Sie, dass wenn J nicht null ist, dann hat J höchstens eine Nullstelle.

Aufgabe 2. Sei (S, g) eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\gamma : I \to S$ eine Geodätische mit Einheitsgeschwindigkeit. Sei Y ein Vektorfeld entlang γ, mit $g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ und $g(Y(t), Y(t)) = 1$ für jede $t \in I$.

(a) Zeigen Sie, dass Y parallel entlang γ ist.

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Zeigen Sie, dass $f \cdot Y$ ein Jacobifeld entlang γ ist, genau wenn f die Gleichung $K \cdot f + f'' = 0$ erfüllt, wobei K die Schnittkrümmung von (S, g) ist.

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine n-dimensionale zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, wobei $n \geq 3$. Sei weiterhin die Schnittkrümmung punktweise konstant, d.h. für $p \in M$ beliebig und alle Ebenen $E, E' \subset \mathrm{T}_p M$ gilt $K(E) = K(E')$, wobei K die Schnittkrümmung bezeichnet. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $\kappa : M \to \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle Vektorfelder X, Y, Z, T die Gleichheit

$$\langle R(X, Y)Z, T\rangle = \kappa \cdot (g(X, T)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, T))$$

gilt.

Aufgabe 4. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt symmetrischer Raum, falls in jedem Punkt $p \in M$ ein $\sigma \in \mathrm{Isom}(M, g)$ mit $\sigma(p) = p$ und $d_p\sigma = -\mathrm{Id}_{T_pM}$ existiert.

Zeigen Sie, dass symmetrischer Räume geodätisch vollständig sind.