RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 01.07.2016

Übungsblatt 12

Abstandsfunktion

Abzugeben bis Freitag, 08.07.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1.

(a) Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre (von Radius 1) und d_{S^n} die durch die Riemannsche Metrik induzierte Pfadmetrik auf der Sphäre (Infimum von Kurvenlängen auf der Sphäre).
Zeigen Sie, dass der Abstand $d_{S^n}(x, y)$ (für $x, y \in S^n$) gerade der Winkel zwischen x und y als Vektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Beschreibung von Geodätischen als kritische Punkte des Längenfunktionals und Ihr Wissen über Geodätische auf S^n.

(b) Sei $d_{\mathbb{R}^{n+1}}$ die Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$.
Zeigen Sie, dass für $x \neq y \in S^n$ stets $d_{\mathbb{R}^{n+1}}(x, y) < d_{S^n}(x, y)$ gilt.

(c) Sei H^n der hyperbolische Raum und d die induzierte Pfadmetrik.
Zeigen Sie, dass $d(x, y) = \cosh^{-1}(-\langle x, y\rangle)$ gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie auf Blatt 9 die nichtentartete Bilinearform bezeichnet, mittels derer H^n definiert wird.

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei d die Pfadmetrik, die von g induziert wird.
Zeigen Sie, dass für eine C^1-Kurve $\gamma : [0, 1] \to M$ die Definitionen der Kurvenlänge mittels Riemannscher Metrik und Pfadmetrik übereinstimmen, dass also folgende Gleichheit gilt:

$$\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \mathrm{d}t = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ 0 = t_0 < \ldots < t_n = 1 \right\}$$

Aufgabe 3. Sei (M, g) eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, die als Teilmenge von M abgeschlossen ist. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein Punkt $q \in N$ mit $d(p, q) = d(p, N) = \inf_{x \in N} d(p, x)$.

(b) Es existiert ein geodätisches Segment γ von p nach q mit Länge $L(\gamma) = d(p, q)$.

(c) Das Segment γ trifft N in einem rechten Winkel.

Aufgabe 4.

(a) Betrachten Sie $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der Riemannschen Metrik $\frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, also der (indefiniten) Metrik, die bezüglich der Standardbasis $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ von $\mathrm{T}_{(x,y)}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Kurve $\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right)$ eine Geodätische ist, also die Geodätischen-Gleichung $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ bzgl. Levi-Civita-Zusammenhang erfüllt.
Hinweis: Mithilfe der Koszul-Formel lässt sich $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}$ einfach berechnen.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : (x, y) \mapsto (2x, 2y)$ eine Isometrie bzgl. obiger Metrik ist. Folgern Sie, dass der Quotient $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \big/ (x, y) \sim (2x, 2y)$ ein Beispiel einer kompakten, geodätisch unvollständigen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit ist.