RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 24.06.2016

Übungsblatt 11

Geodätische

Abzugeben bis Freitag, 01.07.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Seien $(M, g), (N, h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine lokale Isometrie. Zeigen Sie, dass $c : (0, 1) \to M$ genau dann eine Geodätische ist, wenn $f \circ c : (0, 1) \to N$ eine Geodätische ist.

Aufgabe 2. Der Katenoid ist das Bild der Immersion

$$(s, t) \mapsto (\cosh s \cos t, \cosh s \sin t, s),$$

der Helicoid ist das Bild der Immersion

$$(s, t) \mapsto (s \cos t, s \sin t, t).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Metrik (erste Fundamentalform) auf dem Katenoid durch die Matrix $\begin{pmatrix} \cosh^2 s & 0 \\ 0 & \cosh^2 s \end{pmatrix}$ beschrieben ist, die auf dem Helicoid durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie die Christoffelsymbole in beiden Fällen (f_1 und f_2 liefern nach geeigneter Einschränkung des Definitionsbereichs Karten).

(c) Sind die Kurven $s \mapsto f_i(s, 0)$ und $t \mapsto f_i(0, t)$ Geodätische?

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ die obere Halbebene und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die euklidische Metrik. Wir versehen $\mathbb{H}$ mit der Riemannschen Metrik g, die durch $g_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle$ gegeben ist, wobei $(x, y) \in \mathbb{H}$ und $v, w \in \mathrm{T}_{(x,y)}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs auf $\mathbb{H}$, bezüglich der Koordinaten x, y.

(b) Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}, \gamma(t) = (t, 1)$ und $V(t)$ die Parallelverschiebung des Vektors $V(0) = (0, 1) \in \mathrm{T}_{(0,1)}\mathbb{H}$ entlang γ. Zeigen Sie, dass $V(t)$ den Winkel t mit der y-Achse einschließt. Ist γ eine Geodätische?

Aufgabe 4. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \to M$ eine stückweise C^1-Kurve.

(a) Zeigen Sie, dass $L(\gamma)^2 \leq 2(b - a)E(\gamma)$ gilt, wobei $L(\gamma) = \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\| \mathrm{d}t$ die Länge und $E(\gamma) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\|^2 \mathrm{d}t$ die Energie bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass Gleichheit in (a) genau dann gilt, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.