RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 17.06.2016

Übungsblatt 10

Zusammenhänge

Abzugeben bis Freitag, 24.06.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, und $f : N \to M$ ein Immersion. Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, und ∇ ihr Levi-Civita Zusammenhang. Für $X, Y \in V(N)$ haben wir $f_*(X) \in V_f(M)$, und ist $\nabla_Y(f_*(X)) \in V_f(M)$ die kovariante Ableitung Vektorfelder längst f.

(a) Für jede $p \in N$ sei π_p die orthogonale Projektion $\pi_p : T_{f(p)}M \to df_p(T_pN)$. Für $Z \in V_f(M)$ sei $\pi(Z) \in V(N)$ der Vektorfeld auf dem Punkt $p \in N$ durch $df_p^{-1}(\pi_p(Z(p)))$ definiert. Überprüfen Sie dass $\pi(Z)$ ein wohldefiniert Vektorfeld ist.

(b) Für Vectorfelder $X, Y \in V(N)$ sei $\nabla^f_Y(X) = \pi(\nabla_Y(f_*(X)))$. Zeigen Sie, dass $\nabla^f_Y(X)$ ein Zusammenhang auf N ist.

(c) Sei f^*g der pull-back der Metrik g unter der Abbildung f: $f^*g(p)(v, w) = \langle df_p(v), df_p(w)\rangle$. Zeigen Sie, dass $\nabla^f_Y(X)$ der Levi-Civita Zusammenhang der Metrik f^*g ist.

Aufgabe 2. Sei M eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\widehat{T} : V(M) \times V(M) \to V(M)$ eine schiefsymmetrische, tensorielle Abbildung. Zeigen Sie: Es gibt einen eindeutigen metrischen Zusammenhang auf $\mathrm{T}M$ mit Torsion $\widehat{T}$.

Aufgabe 3.

(a) Sei $a \in (0, \infty)$ ein Parameter, und sei K_a der Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = a\sqrt{x^2 + y^2}, z \neq 0\}$ und sei m_a die Gerade $(0, t, at) \mid t > 0$. Sei g die Riemannsche Metrik auf K_a als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $K_a \setminus m_a$ isometrisch mit einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei γ eine Kurve auf K_a mit konstante z Koordinate und konstante Geschwindigkeit (d.h. $g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$ konstant ist.) Sei U ein parallel Vektorfeld längst γ. Die Winkel zwischen zwei Vektoren v, w ist definiert durch $\frac{g(v,w)}{\sqrt{g(v,v)g(w,w)}}$. Zeigen Sie dass, die Ableitung der Winkel zwischen $U(t)$ und $\dot\gamma(t)$ konstant ist.

(c) Berechnen Sie die Integral der Winkel zwischen $U(t)$ und $\dot\gamma(t)$, als $\gamma(t)$ geht einmal rund der Kegel um.

(d) Sei S^2_1 die Sphäre in $\mathbb{R}^3$. Sei γ eine Kurve auf S^2_1 mit konstante z koordinate und konstante Geschwindigkeit. Sei U ein parallel Vektorfeld längst γ. Berechnen Sie die Integral Compute der Winkel zwischen $U(t)$ und $\dot\gamma(t)$, als $\gamma(t)$ geht einmal rund der Kegel um. (Hinweis: finden Sie ein Kegel, der tangent der Sphäre um γ ist. Benutzen Sie Übung 1, und Zeigen Sie dass, ein Vectorfeld längst γ parallel für den Kegel ist, genau wenn er Parallel für die Sphäre ist.)