RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 10.06.2016

Übungsblatt 9

Zusammenhänger

Abzugeben bis Freitag, 17.06.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1.

(a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Kein Zusammenhang ∇ auf $\mathrm{T}M$ erfüllt $\nabla_X Y = \nabla_Y X \ \forall X, Y \in V(M)$.

(b) Sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang auf $\mathrm{T}M$ mit Torsion T. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} T(X, Y)$ ein torsionsfreier Zusammenhang ist.

(c) Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, $X, Y \in V(N)$ Vektorfelder, die entlang M tangential an M sind, also genauer: Für alle $p \in M$ gilt $X_p, Y_p \in \mathrm{T}_p M \subset \mathrm{T}_p N$. Zeigen Sie, dass dann für $p \in M$ auch $[X, Y]_p \in \mathrm{T}_p M$ gilt.
Hinweis: Überlegen Sie sich die folgende Äquivalenz: X_p tangential an $M \Leftrightarrow X_p(f) = 0$ für alle Funktionen f, die auf M konstant sind.

Aufgabe 2.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $g = f^* g_{eukl}$ der Pullback der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$, also $g(p)(v, w) = \langle \mathrm{d}f_p(v), \mathrm{d}f_p(w) \rangle$. Berechnen Sie die erste Fundamentalform g_{ij} in Termen von f.

(b) Der Katenoid ist das Bild der Immersion

$$(s, t) \mapsto (\cosh s \cos t, \cosh s \sin t, s),$$

der Helicoid ist das Bild der Immersion

$$(s, t) \mapsto (s \cos t, s \sin t, t).$$

Berechnen Sie explizit die erste Fundamentalform für beide Immersionen.

Aufgabe 3. Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der indefiniten Bilinearform

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Sei

$$H^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0 \right\}$$

eine Komponente des n-dimensionalen Hyperboloid, und

$$dS^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1 \right\}$$

der n-dimensionale de Sitter Raum.
Zeigen Sie:

(a) Das Bild des Tangentialraums $\mathrm{T}_x H^n$ unter dem Differential der Einbettung $\iota : H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist das orthogonale Komplement von x, $x^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$. Analog für dS^n.

(b) Die Einschränkung der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathrm{T}_x H^n$ an jedem Punkt $x \in H^n$ (unter Verwendung der Identifikation mit $x^\perp$) bestimmt eine glatte Riemannsche Metrik auf H^n. Die Einschränkung auf $\mathrm{T}_x dS^n$ für alle $x \in dS^n$ bestimmt eine glatte Lorentz Metrik auf dS^n.

Aufgabe 4. Betrachten Sie $M = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ und die 1-Form $\omega = \mathrm{d}x \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{d}y \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Ist der zugehörige Zusammenhang D^ω flach?
Hinweis: Zur Berechnung von $\mathrm{d}\omega$ dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{d}\omega(X, Y)(p)$ nur von den Werten X_p, Y_p abhängt. In der Formel für $\mathrm{d}\omega$ können die Vektoren X_p, Y_p daher auf beliebige Weise zu Vektorfeldern X, Y ergänzt werden.