RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MATHEMATISCHES INSTITUT

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 03.06.2016

ÜBUNGSBLATT 8

Paralleltransport

Abzugeben bis Freitag, 10.06.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre (von Radius 1), mit dem Zusammenhang ∇ in Übungsblatt 7, Aufgabe 4 definiert.

(a) Sei $R \in \mathrm{SO}(3)$ eine Rotation, $\gamma : [0,1] \to S^2$ eine glatte Kurve und $P_\gamma : \mathrm{T}_{\gamma(0)} \to \mathrm{T}_{\gamma(1)}$ die Paralleltransport entlang γ. Tangentialräume werden wie früher mit linearen Unterräumen von $\mathbb{R}^3$ identifiziert. Zeigen Sie, dass die Parallelverschiebung äquivariant bzgl. R ist, dass also folgende Gleichung gilt:

$$P_{R(\gamma)}(R(v)) = R(P_\gamma(v))$$

(b) Leiten Sie eine explizite Formel für den Paralleltransport längs einer Longitude

$$t \mapsto (\cos(t)\cos(\phi), \sin(t)\cos(\phi), \sin(\phi))$$

in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ her, wobei $\phi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(c) Wir betrachten für $\theta \in (0,\pi)$ die 3 Segmente

$$\begin{aligned}
\alpha : [0,\pi/2] &\to S^2,\ t \mapsto (-\sin t, 0, \cos t)\\
\beta : [0,\theta] &\to S^2,\ t \mapsto (-\cos t, -\sin t, 0)\\
\gamma : [0,\pi/2] &\to S^2,\ t \mapsto (-\cos\theta\cos t, -\sin\theta\cos t, \sin t).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass der Paralleltransport entlang der stückweise glatten Kurve $\alpha * \beta * \gamma$ (die Verkettung der drei Segmente) eine Rotation um den Winkel θ in $\mathrm{T}_{(0,0,1)}S^2$ ist.

Aufgabe 2. Seien N, M glatte Mannigfaltigkeiten und $f : N \to M$ eine glatte Abbildung. Sei D ein Zusammenhang auf M und $\nabla : V(N) \times V_f(M) \to V_f(M)$ die durch D definierte kovariante Ableitung von Vektorfeldern längs f. Seien $X, Y \in V(N)$ und $f_*X, f_*Y \in V_f(M)$ die entsprechenden tangentialen Vektorfelder längs f, und sei $Z \in V_f(M)$ beliebig. Sei R der Krümmungstensor von D. Dann ist $R(f_*X, f_*Y)Z \in V_f(M)$ wohldefiniert (Warum?). Zeigen Sie, dass $R(f_*X, f_*Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$.

Aufgabe 3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $E \to M$ ein Vektorbündel über M und D ein Zusammenhang auf E. Sei $\gamma : [0,1] \to M$ eine glatte Kurve, and $s \in \Gamma(E)$ eine Schnitte. Sei $P_t : E_{\gamma(t)} \to E_{\gamma(0)}$ der Paralleltransport entlang γ. Zeigen Sie, dass

$$D_{\gamma'(0)}s = \lim_{t\to 0} \frac{P_t(s(\gamma(t))) - s(\gamma(0))}{t}$$

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass jede Vektorbündel über eine Mannigfaltigkeit M einen Zusammenhang trägt. (Hinweis: Benutzen Sie eine glatte Zerlegung der Eins, d.h. gegeben eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M, können Sie eine Familie $(f_i)_{i \in I}$ glatter Funktionen finden, $f_i : M \to [0,1]$, so dass für jede Punkt $x \in M$, nur endliche viele $f_i(x)$ nicht null sind, und $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.)

(b) Zeigen Sie, dass jede Vektorbündel E über $\mathbb{R}^n$ eine Trivialization besitzt. (Hinweis: Wählen Sie einen Zusammenhang auf E, und benutzen Sie den Paralleltransport entlang die Strahlen tv, $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. Sie können, ohne beweis, den Folgenden Lemma benutzen: Sei $F : [0,1] \times N \to M$ eine glatte Abbildung, und V ein Vektorfeld entlang N. Für jede $x \in N$ sei $W(x) \in T_{F(1,x)}M$ der Paralleltransport von $dF(V(x))$ entlang $F(\cdot, x)$. Denn ist W ein glattes Vektorfeld entlang $F(1, \cdot)$).