RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 27.05.2016

Übungsblatt 7

Zusammenhänge

Abzugeben bis Freitag, 3.06.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $c : (0,1) \to M$ eine glatte Kurve.

(a) Zeigen Sie, dass $\dot{c} : (0,1) \to \mathrm{T}M,\ t \mapsto \mathrm{d}c_t(1)$ ein glatter Schnitt von $\mathrm{T}M$ längs c ist.

(b) Sei für diese Teilaufgabe $M = \mathbb{R}^2$ und $\dot{c}(t) \neq 0\ \forall t$. Die Orthogonale zu c, $\dot{c}_\perp : (0,1) \to \mathrm{T}\mathbb{R}^2$, wird durch folgende Eigenschaften definiert:

- $\dot{c}_\perp(t) \in \mathrm{T}_{c(t)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$
- $\langle \dot{c}_\perp(t), \dot{c}(t)\rangle = 0$
- $\langle \dot{c}_\perp(t), \dot{c}_\perp(t)\rangle = 1$
- $\det\left(\dot{c}(t), \dot{c}_\perp(t)\right) > 0$

Zeigen Sie, dass $\dot{c}_\perp$ ein glatter Schnitt von $\mathrm{T}\mathbb{R}^2$ längs c ist.

Aufgabe 2. Sei $M \times \mathbb{R}^k$ das triviale reelle Vektorbündel von Rang k über M. Wir definieren darauf wie folgt einen Zusammenhang:
Sei $s : M \to M \times \mathbb{R}^k,\ s(p) = (p, \sigma(p))$ ein Schnitt mit Hauptteil σ, $X \in V(M)$ ein Vektorfeld und $\omega \in \Gamma\left(\mathrm{T}^*M \otimes M_k(\mathbb{R})\right) = \Omega^1(M; M_k(\mathbb{R}))$ eine 1-Form mit Werten in den $k \times k$-Matrizen. Dann ist der Hauptteil des Schnittes $D^\omega_X s$ durch $X(\sigma) + \omega(X)\sigma$ gegeben, es gilt also

$$\left(D^\omega_X s\right)(p) = \left(p, X(\sigma)(p) + \omega(X)(p) \cdot \sigma(p)\right).$$

Zeigen Sie, dass D^ω ein Zusammenhang auf $M \times \mathbb{R}^k$ ist.

Aufgabe 3. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel über M. Seien $D, D' : V(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ Zusammenhänge. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$D - D' : V(M) \times \Gamma(E) \ni (X, s) \to D_X s - {D'}_X s \in \Gamma(E)$$

tensoriell ist, und eine 1-Form mit Werten in $End(E)$ ist.

Aufgabe 4. Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ und $i : M \to \mathbb{R}^k$ die Inklusion. Wir identifizieren T_pM mit einem Unterraum von $\mathbb{R}^k$ und bezeichnen mit $\mathrm{pr}_p : \mathbb{R}^k \to \mathrm{T}_pM$ die orthogonale Projektion auf T_pM.

Seien X, Y Vektorfelder auf M. Dann sind $di(X), di(Y)$ Vektorfelder entlang i. Wir setzen $(\nabla_X Y)(p) := \mathrm{pr}_p(D_{di(X)} di(Y))$ für jedes $p \in M$, wobei D der kanonische Zusammenhang auf $\mathbb{R}^k$ ist. Zeigen Sie, dass ∇ einen Zusammenhang auf M definiert.