RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MATHEMATISCHES INSTITUT

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 20.05.2016

ÜBUNGSBLATT 6

Vektorfelder

Abzugeben bis Freitag, 27.05.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $X, Y \in V(M)$, und sei die Lieklammer $[X, Y]$ definiert durch:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

(a) Zeigen Sie, dass $[X, Y]$ noch ein Vektorfeld ist. So haben wir eine Abbildung $[\cdot, \cdot] : V(M) \times V(M) \to V(M)$.

(b) Zeigen Sie, dass $(V(M), [\cdot, \cdot])$ eine Liealgebra bildet, also die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $[\cdot, \cdot] : V(M) \times V(M) \to V(M)$ ist $\mathbb{R}$-bilinear
- $[X, X] = 0 \ \ \forall X \in V(M)$
- $[X, Y] = -[Y, X] \ \ \forall X, Y \in V(M)$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \ \ \forall X, Y, Z \in V(M)$ (Jacobi Identität)

(c) Für $X \in V(M)$ und eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ bezeichnet fX das Vektorfeld mit Wert $f(p)X_p$ am Punkt p. Weiterhin bezeichnet $X(f)$ die Funktion mit Wert $X_p(f) = \mathrm{d}f_p(X_p)$ am Punkt p. Zeigen Sie, dass für $X, Y \in V(M)$ und $f, g \in \mathcal{F}(M)$ die folgende Gleichung gilt:

$$[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]$$

Aufgabe 2. Seien $E \xrightarrow{\pi} M$, $F \xrightarrow{\pi'} M$ Vektorbündel und $\mathcal{L} : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ eine tensorielle Abbildung. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Bündelabbildung $L : E \to F$ existiert, so dass

$$\mathcal{L}(s) = L \circ s \quad \forall s \in \Gamma(E)$$

gilt.

Aufgabe 3. Sei G eine n-dimensionale Lie-Grupppe (Übungsblatt 3, Aufgabe 4).
Jede Element $g \in G$ definiert eine Abbildung $L_g : G \to G$ durch $L_g(h) = g \cdot h$, für $h \in G$.
Ein Vektorfeld X auf G heißt links-invariant, wenn für jede $g, h \in G$, $DL_g(X(h)) = X(g \cdot h)$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Lie-Gruppe parallelisierbar ist.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ links-invariante Vektorfelder die linear-unabhängig sind. Sie definieren eine Zusammenhang $\nabla^{(X_1,\ldots,X_n)}$, wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, dass wenn $Y_1, \ldots, Y_n$ noch linear-unabhängige links-invariante Vektorfelder sind, wir haben

$$\nabla^{(X_1,\ldots,X_n)} = \nabla^{(Y_1,\ldots,Y_n)}.$$

Diese Zusammenhang heißt der links-invarante Zusammenhang auf G.