RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 13.05.2016

Übungsblatt 5

Bündel und Schnitte

Abzugeben bis Freitag, 20.05.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Bündel $\mathrm{T}S^n \oplus (S^n \times \mathbb{R})$ und $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ isomorph sind. Dabei bezeichnet $M \times V$ generell das triviale V-Bündel über M.

(b) Sei *Möb* das Möbiusbündel aus Übungsblatt 4, Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\textit{Möb} \oplus \textit{Möb} \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ gilt (wie üblich steht „$\cong$“ für „isomorph“).

Aufgabe 2.

(a) Sei $E \to M$ ein glattes Vektorbündel. Zeigen Sie, dass der Nullschnitt $s : M \to E,\ s(p) = 0_p \in E_p$ glatt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{T}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 3.

(a) Finden Sie ein Vektorfeld auf S^2 mit genau einer Nullstelle.
Hinweis: Betrachten Sie die stereographische Projektion.

(b) Finden Sie ein Vektorfeld auf S^2 mit genau zwei Nullstellen.

Aufgabe 4. Eine glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n heißt *parallelisierbar*, wenn es n Vektorfelder $X_1, \ldots, X_n$ auf M gibt, so dass für jeden Punkt $p \in M$ die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_n(p) \in \mathrm{T}_pM$ linear unabhängig sind.

Zeigen Sie, dass S^1 und S^3 parallelisierbar sind.

Hinweis: S^1 kann in $\mathbb{C}$ eingebettet werden, als $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$. Analog kann S^3 in $\mathbb{H}$, die Quaternionen (siehe Webseite des Kurses), eingebettet werden. Nutzen Sie die dadurch gegebene zusätzliche Struktur (Multiplikation mit i, bzw. mit i, j, k).