RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 29.04.2014

Übungsblatt 3

Mannigfaltigkeiten und Gruppen

Abzugeben bis Freitag, 6.04.14, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit von Dimension n. Der Tangentialraum T_pM (mit $p \in M$) wurde als Raum der Derivationen in p eingeführt. Wir betrachten nun eine alternative Beschreibung als Äquivalenzklassen von Kurven: Sei

$$\mathrm{K}_pM = \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \mid \epsilon > 0, \gamma \text{ ist } C^1, \gamma(0) = p\}$$

die Menge der differenzierbaren Kurven durch p. Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \exists \text{ Karte } \varphi : U \to \mathbb{R}^n,\ p \in U,\ \text{so dass } (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

und setzen $\widehat{\mathrm{T}}_pM = \mathrm{K}_pM/\sim$.
Zeigen Sie: $\widehat{\mathrm{T}}_pM$ besitzt eine Struktur als $\mathbb{R}$-Vektorraum und ist auf natürliche Weise isomorph zu T_pM. Unter dieser Identifikation ist das Differential einer (differenzierbaren) Abbildung $g : M \to N$ in eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit N durch $\mathrm{d}g_p([\gamma]) = [g \circ \gamma]$ gegeben.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der folgende Unterraum eine C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist:

$$\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a_0x_0^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1\}$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die folgenden Matrixgruppen C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ sind:

(a) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

(b) $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

(c) $\mathrm{Sp(2n}, \mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Aufgabe 4. Eine Lie-Gruppe ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit G, die zusätzlich die Struktur einer Gruppe besitzt, so dass die Gruppenverknüpfung $G \times G \to G$ und die Inversion $G \to G$ glatte Abbildungen sind.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Gruppe ist.