RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MATHEMATISCHES INSTITUT

Vorlesung Differentialgeometrie I

Heidelberg, 22.04.2014

ÜBUNGSBLATT 2

Glatte Abbildungen

Abzugeben bis Freitag, 29.04.14, 14:00 Uhr

Aufgabe 1.

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; y = \lambda x,\;\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Der Quotient $\left(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$ mit der Quotiententopologie ist der *projektive Raum* $\mathbb{KP}^n$.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{KP}^n$ ein Hausdorff-Raum ist, und er das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Wir schreiben $[x_0 : \ldots : x_n]$ für die Äquivalenzklasse des Punktes $(x_0, \ldots, x_n)$ (*homogene Koordinaten*). Sei

$$\mathcal{U}_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_i \neq 0\}$$

und $b_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{K}^n$ durch

$$b_i([x_0 : \ldots : x_n]) = \frac{1}{x_i}\,(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$$

gegeben, wobei „Hut“ das Weglassen der Stelle bedeutet.

Zeigen Sie, dass $\{(b_i, \mathcal{U}_i)\}$ ein C^∞-Atlas für $\mathbb{KP}^n$ ist.

Aufgabe 2. Sei S_r^n die Sphäre (siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 2b) und $\mathbb{RP}^n$ der reell projektive Raum (siehe vorige Aufgabe). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : S_r^n \to \mathbb{RP}^n, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : \ldots : x_n]$$

glatt ist. Untersuchen Sie zusätzlich, ob sie ein lokaler Diffeomorphismus oder sogar ein Diffeomorphismus ist.
(„lokaler Diffeomorphismus“ bedeutet, dass es für alle $x \in S_r^n$ eine Umgebung U_x gibt, so dass $\phi|_{U_x} : U_x \to \phi(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass S_r^n eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist und dass diese differenzierbare Struktur mit derjenigen vom letzten Blatt übereinstimmt (das bedeutet, dass die Identitätsabbildung $id : S_r^n \to S_r^n$ einen Diffeomorphismus zwischen den beiden Strukturen liefert).