RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 19.04.2016

Übungsblatt 1

Topologische und glatte Mannigfaltigkeiten

Abzugeben bis Montag, 25.04.14, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, mit der Teilraumtopologie ausgestattet, sind topologische Mannigfaltigkeiten?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2 - y^2 = 0\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^2 = 0\}$

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ und } z \geq 0\}$

Aufgabe 2.

(a) Finden Sie einen C^∞-Atlas für $\mathbb{R}$, so dass die dadurch gegebene glatte Struktur nicht die übliche (durch den Atlas $\mathcal{A} = \{(\mathrm{Id}, \mathbb{R})\}$ definierte) ist, jedoch diffeomorph zu dieser.

(b) Die n-dimensionale Sphäre vom Radius r ist

$$S^n_r = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = r^2 \right\}.$$

Sei $N = (r, 0, \ldots, 0)$ der Nordpol, $S = (-r, 0, \ldots, 0)$ der Südpol, und $\mathcal{U}_N = S^n_r \setminus N$, $\mathcal{U}_S = S^n_r \setminus S$. Wir definieren die Projektionen $p_N : \mathcal{U}_N \to \mathbb{R}^n$ und $p_S : \mathcal{U}_S \to \mathbb{R}^n$ folgendermaßen: $p_N(x)$ sei der Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit der Hyperebene $\{0\} \times \mathbb{R}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 0\}$, die mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert wird; analog für p_S.
Finden Sie eine explizite Formel für p_N und p_S und zeigen Sie, dass $\{(p_N, \mathcal{U}_N), (p_S, \mathcal{U}_S)\}$ ein C^∞-Atlas für S^n_r ist.

Aufgabe 3.

(a) Finden Sie einen C^∞-Atlas für den Torus

$$T^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

(b) Seien M_1, M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: $M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und die Projektionen
$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ sowie die Inklusionen $\iota_i : M_i \hookrightarrow M_1 \times M_2$ sind glatt (dabei werden für die Inklusionen willkürlich Fußpunkte fixiert, z.B. $\iota_1 : M_1 \to M_1 \times \{x\}$ mit $x \in M_2$).

(c) Zeigen Sie: Die Mannigfaltigkeit $S^1 \times S^1$ ist diffeomorph zum Torus T^2 aus Teil (a).

Wiederholungsaufgabe *(nicht Teil des Übungsblatts)*
Bitte sehen Sie sich den Umkehrsatz und den Satz über implizite Funktionen aus der Analysis noch einmal an und stellen Sie sicher, dass Sie beide gut verstanden haben. Eine mögliche Referenz dazu findet sich auf der Vorlesungsseite.