Prof. Dr. K. Wingberg Dr. O. Venjakob

# $p$-adische Galois Darstellungen abelscher Varietäten über $\mathbb{Q}_p$

Seminar

**Beginn:** 20.04.04 **Raum:** M HS 4 **Zeit:** Di. 11-13 Uhr

In [12] charakterisiert M. Volkov (zahm) potentiell kristalline $p$-adische Darstellungen $V$ der absoluten Galoisgruppe $G$ von $\mathbb{Q}_p$, die von abelschen Varietäten $\mathcal{A}$ über $\mathbb{Q}_p$ herkommen, d.h. $V \cong V_p(\mathcal{A})$, durch notwendige und hinreichende Bedingungen an die zu $V$ assoziierten filtrierten $(\phi, G)$-Moduln. Zur Beschreibung und für den Beweis dieses Zusammenhangs spielt die klassische Honda-Tate Theorie abelscher Varietäten über endlichen Körpern, die Theorie der $p$-divisiblen Gruppen und ihrer Dieudonné-Moduln sowie offensichtlich Fontaines's Beschreibungen $p$-adischer Darstellungen eine zentrale Rolle. Eine wichtige Motivation für dieses Seminar, in dem wir die obige Arbeit verstehen wollen, besteht darin, diese grundlegenden Theorien und Methoden “im Einsatz” zu sehen.

Im einzelnen: Sei $V$ eine $p$-adische Darstellung, die über einer zahmen (Galois-) Erweiterung $K$ kristallin wird, $D$ der assoziierte filtrierte $(\phi, G(K/\mathbb{Q}_p))$-Modul und $\Delta$ die zu $D$ assoziierte Weil-Darstellung. Es ist mehr oder weniger bekannt, dass $D = (D, Fil)$ die folgenden Bedingungen erfüllt, falls $V = V_p(\mathcal{A})$ von einer abelschen Varietät $\mathcal{A}$ über $\mathbb{Q}_p$ herkommt:

(1) Ein Lift des geometrischen Frobenius operiert halbeinfach auf $\Delta$ und sein charakteristisches Polynom ist ein $p$-Weil-Polynom,
(2) $\Delta$ ist über $\mathbb{Q}$ definiert und hat Tate-Typ (s. Vortrag 5),
(3) Es existiert eine nichtausgeartete schiefsymmetrische Form $D \times D \to K_0\{-1\}$, wobei $K_0$ die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $K$ bezeichnet,
(4) $D$ hat Hodge-Tate Typ $(0,1)$.

Der schwierige Teil besteht in der Umkehrung, d.h. zu jedem $V$ wie oben mit den Bedingungen (1)-(4) eine abelsche Varietät $\mathcal{A}$ über $\mathbb{Q}_p$ zu konstruieren, so dass $V = V_p(\mathcal{A})$ gilt. Die Strategie ist die folgende: Honda-Tate Theorie impliziert wegen (1) die Existenz einer abelsche Varietät $A_0$ über $\mathbb{F}_p$, die den richtigen Frobenius besitzt. Wegen (2) produzieren Tate's Theoreme einen Automorphismus von $A = A_0 \times k$, der ein geometrisches Abstiegsdatum beinhaltet, wobei $k$ der Restklassenkörper von $K$ ist. (4) erlaubt es, ein Ergebnis von Breuil anzuwenden, dass die Existenz einer $p$-divisiblen Gruppe über $O_K$ zur Folge hat, die $A(p)$ liftet; nach der Liftungstheorie von Serre und Tate entspricht dies einem formalen abelschen Schema über $O_K$. Schließlich garantiert (3), dass sich eine geeignete Polarisierung von $A$ liften läßt, die mit Grothendiecks Kriterium gewährleistet, dass dieses formale Schema von einem algebraischen, d.h. einer abelschen Varietät, über $K$

herkommt. Das mitgelieferte Abstiegsdatum besagt schließlich, dass diese Varietät über $\mathbb{Q}_p$ definiert ist und per Konstruktion den vorgegebenen Tate-Modul hat.

1. VORTRAG: **Einführung ins Thema und Vortragsvergabe** (90 min.)

*Die beiden folgenden Vorträge sollen Übersichtsvorträge sein, in denen grundlegende Begriffe eingeführt (bzw. wiederholt) und einige Zusammenhänge plausibel gemacht werden sollen. Bei den wichtigsten Resultaten wären Beweisskizzen schön, sofern es die Zeit erlaubt.*

2. VORTRAG: **$p$-divisible Gruppen und Dieudonné-Moduln** (180 min.)

Ein guter, aber knapper Überblick über Dieudonné-Moduln stellt §3 aus [6] dar, die genauen Details finden sich in [2]. Insbesondere benötigen wir: endliche (affine) kommutative Gruppen-Schemata über Körpern der char $p > 0$ mit wichtigen Eigenschaften (z.B.: Verschiebung und Frobenius, Cartier-Dual, Zerlegung in étale und zshgd.(=infinitesimal) bzw. multiplikativ und unipotent: [2, ch.2 § 9, insbesondere S. 39, prop 2)]), $p$-divisible Gruppen (Def. über kommutativen Ringe, alles weitere über Körpern), Witt-Vektoren (als Ring und Gruppenschema), der Funktor $M(-) : \{p\text{-divisible Gruppen}\} \to \{\text{Dieudonné-Moduln}\}$ (loc. cit. S. 62-72, siehe auch [7, §3 bis S. 89]); eine äquivalente, einheitliche Beschreibung von $M$ findet sich in [3, ch. III, §1.1 und Prop. 6.1]

Die Klassifikation $p$-divisibler Gruppen via Iso-Kristalle erfolgt in [2, ch. IV], wichtige Ergebnisse sind die Theoreme und Korollare von Manin auf S. 85, 90 sowie die Beschreibung durch Newton-Polygone bzw. die Folge der Steigungen (loc. cit., S. 86), Teile dieser Ergebnisse sind in [8, S.2f] übersichtlich dargestellt; schließlich ist § IV.8 in [2] mit dem Bsp. auf Seite 93 von Interesse.

3. VORTRAG: **Honda-Tate Theorie abelscher Varietäten über endlichen Körpern** (120-180 min.)

Anknüpfend an den vorherigen Vortrag soll als erstes die Struktur der $p$-divisiblen Gruppe $A(p)$ einer ableschen Varietät $A$ über Körper der Charakteristik $p$ diskutiert werden, [2, ch. V]. Anschließend soll die Klassifikation abelscher Varietäten über endlichen Körpern bis auf Isogenie skizziert werden, am besten nach [13, §I, II], vgl. auch [10, 9]. Dabei soll der Inhalt von [12, §2.1] mit abgedeckt werden.

4. VORTRAG: **Potentiell kristalline Darstellungen und ihre assoziierten Weil-Darstellungen** (120-180 min.)

Dieser Vortrag soll § 1 von [12] abdecken, vgl. auch [11, §1]: die Kategorie der filtrierten $(\phi, G)$-Moduln [4, §4.3], "funktorielle" Def. von $B_{cris}$ (keine explizite Konstruktion!), der Funktor (kontravariante) $\mathbf{D}^*_{cris,K}(V)(= \mathbf{D}_{cris,K}(V^*)$ + induzierte Kategorienäquivalenz, Eigenschaften von $V_p(\mathcal{A}_0)$ ausführlich erläutern (vgl. den Fall elliptischer Kurven [11, 2.2.1, rem. 2.11/2]), Beziehung zum Dieudonné-Modul der Reduktion, assoziierte Weil-Darstellung, Operation der Trägheitsgruppe, Galois-Abstieg abelscher Varietäten (den Beweis von Thm. 1.2 in Falle elliptischer Kurven skizzieren: [11, 4.1.1 (Serre-Tate Liftungstheorie) und thm. 4.5]), Polarisierungen

5. Vortrag: **Weil-Darstellungen vom Tate-Typ**(120 min.)

Eine Weil-Darstellung $\Delta$ hat Tate-Typ, falls die Dimension eines gewissen Unterobjektes von $\Delta$ durch eine bestimmte arithmetische Invariante davon teilbar ist. Dies ist eine notwendige Bedingung dafür, dass $\Delta$ von einer abelschen Varietät herkommt. Der Vortrag knüpft anfangs an die Honda-Tate-Theorie an, § 2.2, und diskutiert dann halbeinfache Weil-Darstellungen, §4.1 und §4.2 bis Rem. 4.7 einschließlich.

6. Vortrag: **Galois Paare und ihre $(\phi, G)$-Moduln** (120-180 min.)

Galois-Paare bestehen aus einer abelschen Varietät über $\mathbb{F}_p$ zusammen mit einer endlichen Untergruppe von $\overline{\mathbb{F}_p}$-Automorphismen und gewissen Bedingungen, sie liefern Darstellungen mit geometrischem Abstiegsdatum, §3. Als Vorstufe des Hauptergebnisses charakterisiert Thm. 4.8 die zahmen p-adischen Darstellungen bzw. $(\phi, G)$-Moduln (ohne Filtrierung!), die von solchen Galois-Paaren herkommen, §4.2 nach Rem. 4.7. Abschließend kurze Diskussion der Beispiele in §4.3.

7. Vortrag: **Liften von Polarisierungen und Rosati-Involutionen**(90-120 min.)

Jede Polarisation induziert aus der Weil-Paarung eine $G$-äquivariante symplektische Form $V \times V \to \mathbb{Q}_p(1)$, die einer nichtausgearteten schief-symmetrischen Form des assoziierten filtrierten $(\phi, G)$-Moduls entspricht. Daher ist es entscheidend, dass jedes zahme Galois-Paar eine Polarisierung besitzt (die mit der Struktur des Paares verträglich ist) §5.1-2 und dass sich solche Polarisierungen in Charakteristik 0 hochheben lassen, §3.2.

*Der folgende Vortrag kann bei Zeitknappheit mit Vortrag 7 zusammengefasst werden, indem die dort verwendeten Zitate nicht diskutiert werden.*

8. Vortrag: **Beweis des Hauptsatzes** (90-120 min.)

Zum Beweis des Hauptsatzes, §5.4, müssen jetzt nur noch die Ergebnisse aus Vortrag 6 und 7 aufgesammelt und mit folgenden Resultaten kombiniert werden, deren Aufbereitung und Diskussion die Hauptarbeit ausmachen dürfte: 1. Breuils Liftungssatz ([1, 5.3.2], *Achtung:* Volkov verweist auf falsches Volume!) über $p$-divisible Gruppen, 2. Raynaud's Satz, dass jedes Galois-stabile Gitter von $V$ von einer $p$-divisiblen Gruppe herkommt, 3. Tate's Volltreuheitssatz über die Tate-Moduln $p$-divisibler Gruppen, 4. Serre-Tate Liftungs-Theorie (wie in Vortrag 4, siehe [5] und [11, 4.1.1]) sowie 5. Grothendiecks Algebraisierungstheorem formaler Schemata, siehe Verweise in [12, Beweis von Thm. 5.8,S. 26].

## References


1. C. Breuil, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. (2) **152** (2000), no. 2, 489–549.
2. M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 302, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
3. J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Société Mathématique de France, Paris, 1977.
4. ———, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque (1994), no. 223, 113–184.
5. N. Katz, *Serre-Tate local moduli*, Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), Lecture Notes in Math., vol. 868, Springer, Berlin, 1981, pp. 138–202.
6. J. S. Milne, *Points on Shimura varieties mod p*, Automorphic forms, representations and $L$-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 165–184.
7. T. Oda, *The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 63–135. MR 39 #2775
8. M. Rapoport, *On the newton stratification*, Sem. Bourbaki **903** (2001-2002).
9. J. Tate, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.
10. ———, *Classes d'isogenie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'apres T. Honda)*, Sem. Bourbaki **352** (1968), 15p.
11. M. Volkov, *Les représentations $l$-adiques associées aux courbes elliptiques sur* $\mathbb{Q}_p$, J. Reine Angew. Math. **535** (2001), 65–101.
12. ———, *A class of p-adic galois representations arising from abelian varieties over* $\mathbb{Q}_p$, Preprint, arXiv:math.NT/0305314v2 (2003), 1–28.
13. W. C. Waterhouse and J. S. Milne, *Abelian varieties over finite fields*, 1969 Number Theory Institute (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XX, State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1969), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, pp. 53–64.