EINFÜHRUNG IN DIE IWASAWA-THEORIE
(VORLÄUFIGES PROGRAMM)

Dies ist ein vorläufiges Programm für das Seminar. Abhängig von der Anzahl der Teilnehmer und den Vorkenntnissen kann es sich noch ein wenig ändern. Nachfolgend werden die einzelnen Vorträge kurz beschrieben und ergänzende Literatur vorgeschlagen. Es wird dringend empfohlen sich mindestens eine Woche vor dem Vortrag mit dem Betreuer des Seminars in Verbindung zu setzen.

1. Einführungsvortrag (21.10.2004) (Sebastian Schmidt)

In der ersten Sitzung werden - sofern noch nicht geschehen - die Vorträge vergeben. Zuvor soll in einem kurzen Übersichtsvortrag das Seminarthema vorgestellt werden. Als Anleitung kann hier [Tam78, §2] dienen.

2. Vorbereitungssatz für Potenzreihenringe (28.10.2004)

Zu einem lokalen noetherschen Ring $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ wird der Potenzreihenring $\mathcal{O}[[T]]$ betrachtet. Man zeigt dann, dass $\mathcal{O}[[T]]$ ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal $(\mathfrak{m}, T)$ und Restklassenkörper $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ ist, der vollständig bezüglich seines maximalen Ideals ist.
Das Divisionslemma zeigt, dass in diesem Ring Division mit Rest möglich ist und als eine Folgerung erhält man den Weierstraßschen Vorbereitungssatz [Tam78, §3],[Was97, §7.1],[NSW00, §5.3]. Ein wichtiges Beispiel für Weierstraß-Polynome sind die Polynome $\omega_n(T)$ aus [Tam78, §4]. Eventuell kann man auch noch die Bemerkung am Ende von [Tam78, §4] erklären, dass der Potenzreihenring in gewissen Fällen (u.a. $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_\ell$) ein 2-dimensionaler regulärer lokaler Ring ist.

3. Vollständige Gruppenringe (4.11.2004)

Für einen vollständigen lokalen Ring $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ mit endlichem Restklassenkörper und eine pro-endliche Gruppe G wird der vollständige Gruppenring $\mathcal{O}[[G]]$ eingeführt. Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}[G] \to \mathcal{O}[[G]]$ ist eine Einbettung mit dichtem Bild und die Augmentationsabbildung auf $\mathcal{O}[G]$ setzt sich fort.
Im zweiten Teil des Vortrags soll die speziellere Situation $G = \Gamma \simeq \mathbb{Z}_\ell$ untersucht werden. Das Hauptresultat ist eine Isomorphie $\mathcal{O}[[T]] \simeq \mathcal{O}[[\Gamma]]$ [Tam78, §4],[Was97, §7.1],[NSW00, §5.2,5.3]. Damit weiß man insbesondere, dass $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ ein 2-dimensionaler regulärer lokaler Ring ist (vgl. Vortrag 2).

4. Moduln über ganzabgeschlossenen noetherschen Ringen (11.11.2004 & 18.11.2004)

(Kann auch aufgeteilt werden auf zwei Teilnehmer.) Ein Ziel des Seminars ist es Moduln über $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ zu verstehen. Als erste Etappe soll in diesem Vortrag ein Struktursatz für Moduln über noetherschen ganzabgeschlossenen Ringen A gezeigt werden.
Dazu werden zwei Konzepte eingeführt. Zum einen die reflexiven Moduln. Man zeigt ein Kriterium für Reflexivität [Tam78, §6, Satz 1],[NSW00, Lemma 5.1.2] und

folgert, dass für endlich erzeugte Moduln das Dual reflexiv ist [Tam78, §6, Korollar zu Satz 1], [NSW00, 5.1.3]. Der andere Begriff sind die pseudo-null Moduln und Pseudo-Isomorphismen [Tam78, S.40/41 bzw. S.46/47][1], [NSW00, 5.1.4,5.1.5].
Mit Hilfe von [Tam78, Satz 2 (S.41) bzw. Satz 3 (S.47)],[NSW00, 5.1.7 (i)] kann man im weiteren die Torsionsmoduln [Tam78, Satz 5 (S.50)],[NSW00, 5.1.7 (ii)] und die torsionsfreien Moduln [Tam78, Satz 3 (S.44) bzw. Satz 4 (S.49)],[NSW00, 5.1.8] getrennt betrachten. Wenn es die Zeit erlaubt, kann man die Bemerkungen [Tam78, S.52f],[NSW00, S.225 unten] noch erklären.
Zum Schluß soll noch der wichtige Spezialfall (vgl. Vortrag 2/3) betrachtet werden, dass A ein regulärer lokaler Ring von Dimension 2 ist. Wenn diese Begriffe noch nicht geklärt wurden, so sollte dies jetzt kurz geschehen. Dann soll [Tam78, Satz 5 (S.54], [NSW00, 5.1.9] bewiesen werden. Der Beweis sollte sich an [NSW00] bzw. [Die86] orientieren.

5. Moduln über $\mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$ I (25.11.2004)

Die Ergebnisse des letzten Vortrags werden jetzt auf Iwasawa-Moduln, d.h. $\mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$-Moduln angewendet. Dazu muss man wissen, was in diesem Ring die Primideale der Höhe 1 sind. [Tam78, §6, Lemma 1],[NSW00, Lemma 5.3.7]. Der Zerlegungssatz motiviert die Definition von μ- und λ-Invariante und charakteristischem Polynom [NSW00, 5.3.9], [Tam78, §6.1]. Beweis einiger Eigenschaften [Tam78, §6.2 Prop.1+2],[NSW00, Rem.1.-3.]. Mit Hilfe des topogischen Nakayama-Lemmas kann ein Kriterium für die endliche Erzeugbarkeit von Iwasawa-Moduln bewiesen werden. [Tam78, §6 Prop.3+Lemma],[NSW00, 5.3.10,5.2.18]. Schließlich sollen noch zwei Aussagen über den Rang bewiesen werden [Tam78, §6 Prop.4+5].

6. Moduln über $\mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$ II (2.12.2004)

Es sollen zwei Propositionen bewiesen werden. Für einen (endlich erzeugten) Torsionsmodul M wird zunächst ein Kriterium für $\mu(M) = 0$ bewiesen [Tam78, §6 Prop.6]. Im zweiten Teil soll der konstante Term des charakteristischen Polynoms (kohomologisch) interpretiert werden [Tam78, §6 Prop.7 und Folgerungen]. Da nur die Kohomologiegruppen kleiner Dimension gebraucht werden, reicht es diese ad hoc anzugeben, wie zum Beispiel in [Ser94, I.2].

7. Existenz und Anzahl von $\mathbb{Z}_\ell$-Erweiterungen (9.12.2004 & 16.12.2004)

(Dies ist ein etwas umfangreicherer Vortrag, der eventuell auch geteilt werden kann. Vorkenntnisse in Zahlentheorie (Klassenkörpertheorie) könnten hilfreich sein.)
Definition von $\mathbb{Z}_\ell$-Erweiterungen, das wichtigste Beispiel wird durch die zyklotomischen Erweiterungen eines Zahlkörpers gegeben [Tam78, §1 Satz 1]. Diese Erweiterungen haben die wichtige Eigenschaft, dass sie außerhalb von ℓ unverzweigt sind [Tam78, §1 Satz 2]. Der Beweis, der im Tamme-Skript bzw. im Washington gegeben wird, benutzt Klassenkörpertheorie, deren Ergebnisse kurz referiert werden sollen [Tam78, Anhang zu §1]. Man erhält damit eine Abschätzung für die minimale Anzahl (unabhängiger) $\mathbb{Z}_\ell$-Erweiterungen eines Zahlkörpers, die Leopold-Vermutung besagt, dass sogar Gleichheit gilt [Tam78, §1 Satz 3 ff],[Was97, §13.1]

[1] Hier gibt es in [Tam78] eine kleine Redundanz.

8. Iwasawa-Moduln I (13.1.2005 & 20.1.2005)

Sei jetzt K/k eine $\mathbb{Z}_\ell$-Erweiterung eines endlichen Zahlkörpers und Ω/K eine *abelsche* ℓ-Erweiterung, so dass Ω/k ebenfalls galoisch ist. In dieser Situation erhält man eine Operation von $\Gamma = \mathrm{Gal(K/k)}$ auf $G = \mathrm{Gal}(\Omega/\mathrm{K})$ und damit hat G die Struktur eines $\mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$-Moduls. Dieser soll in den Spezialfällen, dass Ω die maximale außerhalb ℓ unverzweigte abelsche ℓ-Erweiterung von K ist bzw. dass Ω der Hilbertsche ℓ-Klassenkörper von K ist untersucht werden [Tam78, §7 Satz1-3, Lemma 4, einschließlich Hilfssatz S.103].

9. Iwasawa-Moduln II (20.1.2005 & 27.1.2005)

Fortsetzung des letzten Vortrags, insbesondere Beweis von [Tam78, Satz 5+6].

10. ℓ-adische Zetafunktionen I (3.2.2005)

Als Einführung zu den Zetafunktionen sollen zunächst Zetafunktionen zu Kurven diskutiert werden. Diese Potenzreihe erhält als Dirichlet-L-Reihe des Funktionenkörpers der Kurve. Es stellt sich heraus, dass die Potenzreihe eine rationale Funktion ist, deren Nullstellen gewisse Abschätzungen erfüllen. Betrachtet man die Jacobische der Kurve, so ist die durch die Erweiterung, die durch Adjunktion der ℓ-Torsionspunkte entsteht eine ℓ-Erweiterung und man hat eine Galoisdarstellung, deren charakteristisches Polynom eng mit der Zetafunktion zusammenhängt. Ersetzt man die ℓ-Torsionspunkte durch die ℓ-Klassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers, so kann man analoge Konstruktionen ausführen [Tam78, §8.1 bis S.127 oben], [Was97, §7], [Iwa69]

11. ℓ-adische Zetafunktionen II (10.2.2005)

Um den im letzten Vortrag aufgetretenen Faktor ℓ^n in der Zetafunktion in geeigneter Weise interpretieren zu können, ist es notwendig die Tate-Twists eines Moduls einzuführen. Dies wird in [Tam78, §6.4] behandelt. Danach kann man das kohomologische Kriterium für das Verschwinden des charakteristischen Polynoms formulieren und die verschiedenen Iwasawa L-Funktionen einführen [Tam78, §8.1+8.2], [Iwa69].

12. ℓ-adische Zetafunktionen III (17.2.2005)

Im letzten Vortrag soll zunächst der Spezialfall der totalen reellen Körper diskutiert werden bevor die Kubota-Leopold-Serre L-Funktion eingeführt wird. Es wird wohl nicht möglich sein viel zu beweisen. Statt dessen soll versucht werden die Aussage der Hauptvermutung die diese L-Funktion mit der zuvor definierten in Beziehung setzt zu erklären [Tam78, §8.3+8.4], [Was97, §13].

References

[Die86] Volker Diekert. Eine Bemerkung zu freien Moduln über regulären lokalen Ringen. *J. Algebra*, 101(1):188–189, 1986.

[Iwa69] Kenkichi Iwasawa. On p-adic L-functions. *Ann. of Math. (2)*, 89:198–205, 1969.

[NSW00] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1994. Cinquème édition, revisée et complétée.

[Tam78] Günter Tamme. $\mathbb{Z}_\ell$-Erweiterungen. Vorlesungsmanuskript Regensburg, 1977/78.

[Was97] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

E-mail address: wortmann@mathi.uni-heidelberg.de

Sigrid Wortmann, Zi.224, INF 288, Tel.06221-545697