Topologische Gruppen

Programm des Seminars im SS 2006

1. Mengentheoretische Topologie I

Dieser Vortrag sollte sich an den Vorkenntnissen der Teilnehmer orientieren und die elementarsten Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie erklären oder in Erinnerung rufen:
• topologische Räume, Unterräume und Produkte, Basen und Subbasen, Stetigkeit, Zusammenhang, Trennungsaxiome, Kompaktheit, Quotiententopologie (Quellen: z.B. [J] 1.1,1.3 - 1.8, 3.1 - 3.3; oder [B] I.2 - I.5, I.6, I.13)
(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

2. Mengentheoretische Topologie II

Hier sollten einige schwierigere Sätze der mengentheoretischen Topologie diskutiert und bewiesen werden:
• Begriff des lokal kompakten Raumes und Satz von Baire ([M] Ch.1, Theorem 1)
• Satz von Tychonoff (z.B. [J] 10.1, 10.3)
(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

3. Allgemeines über topologische Gruppen

Die folgenden Vorträge (außer dem 6.Vortrag) orientieren sich am Buch [M]; dieser hier (eventuell zu splitten) deckt Ch.1 ab:
• Def. der topologischen Gruppe und viele Beispiele: außer den Beispielen in [M] Ch.1 sollten erwähnt werden: Liegruppen (als Verallgemeinerung von linearen Gruppen über topologischen Körpern); absolute Galoisgruppen von Körpern in der Krulltopologie (vgl. z.B. [N] IV, 1)
• Translation und Inversion, Trennungseigenschaften bei topologischen Gruppen, Untergruppen, kompakte Erzeugtheit, lokale Kompaktheit (einschl. Korollar zum Satz von Baire und Satz von der offenen Abbildung), Produkte, Divisibilität, Th 1 von [M] Ch.1
(• Dauer: ca. 2 Sitzungen)

4. Untergruppen und Quotienten von $\mathbb{R}^n$

Dieser Vortrag soll [M] Ch.2 behandeln. Die Klassifikation der abg. Untergruppen und hausdorffschen Quotienten von $\mathbb{R}^n$ illustriert sehr schön das Zusammenspiel von Algebra und Topologie, und liefert gleichzeitig erste Schritte für die späteren Klassifikationsresultate.
(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

5. Die Charaktergruppe

Dieser Vortrag deckt [M] Ch. 3 ab, man orientiere sich wie folgt an dem Hauptresultat (Theorem 10) :
• Man definiere zunächst die Charaktergruppe einer abelschen topologischen Gruppe und behandle die Beispiele [M] S. 47 - 48.
• Für lokal kompakte Gruppen ist die Charaktergruppe in der kompakt-offen-Topologie wieder lokal kompakt. (Theorem 10 in [M]). Für den Beweis benötigt man den Satz von Arzela-Ascoli (Theorem 9), auf dessen Beweis eigegangen werden sollte, falls genügend Zeit ist.
(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

6. Pontryagin-Dualität

Man orientiere sich an Ch.4 und Ch.5 von [M], eine Behandlung in einer Sitzung sollte - bei gutem Zeitmanagement - möglich sein. Hauptpunkte sind:
• Aussage des Dualitätssatzes ([M] S.53); erste Beobachtungen ([M] S.56 - 60)
• Für kompakte und diskrete LCA-Gruppen folgt der Satz (wie auf [M] S. 65 - 66 beschrieben) aus der Existenz genügend vieler Charaktere (Peter-Weyl-van Kampen-Theorem; [M] S.62) [1]
• Das Klassifikationsresultat [M] Theorem 18 sollte kurz skizziert werden.
(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

7. Proendliche Gruppen

Dieser Vortrag soll einen nichttrivialen Spezialfall des Satzes von Pontryagin vollständig beweisen: unter der (allgemeinen) Pontryagin-Dualität korrespondiert die Klasse der diskreten abelschen Torsionsgruppen mit der Klasse der abelschen proendlichen Gruppen.
• Definition und universelle Eigenschaft direkter und inverser Limites, Limites topologischer Gruppen (vgl. [N] IV 2; (2.1) - (2.8)), eventuell zu ergänzen mittels [NSW] I 1).
• Als Beispiele proendlicher Gruppen betrachte man Galoisgruppen und die Ringe $\widehat{\mathbb{Z}}$ und $\mathbb{Z}_p$ (vgl. [N] IV 2, Bsp. 1,2,4,5)
• Nun beweise man ad hoc das obenstehende Resultat: zunächst die algebraische Seite (das ist eine sehr leichte Übungsaufgabe), dann muss man sorgfältig prüfen, dass man die richtigen Topologien bekommt.
(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

8. Strukturtheorie lokal kompakter abelscher Gruppen

Zu präsentieren ist (eventuell auf zwei Vortragende gesplittet) das Kapitel 6 aus [M].
• Der erste Teil behandelt Strukturaussagen (Existenz von Charakteren, kompakt erzeugte Gruppen und Untergruppen), die für den Beweis des Satzes von Pontryagin (modulo Peter-Weyl-Theorem) erforderlich sind ([M] S. 71 -76)
• Dieser Beweis erfolgt dann in zwei Schritten: zuerst für kompakt erzeugte Gruppen ([M] Th. 22), dann allgemein ([M] Th. 23).
• Es schließt sich die zentrale Strukturaussage [M] Th. 25 an.
(• Dauer: ca. 2 Sitzungen)

9. Anwendungen und weitere Strukturaussagen

Das Kapitel 7 behandelt einige Anwendungen und Vertiefungen der behandelten Theorie:
• als verblüffende zahlentheoretische Anwendung der Satz von Kronecker über diophantische Approximation ([M] Th. 28)
• diverse Strukturaussagen innerhalb der Theorie der lokal kompakten abelschen Gruppen (Metrisierbarkeit [M] Th. 29, zusammenhängende kompakte abelsche Gruppen [M] S. 96 - 101)
(• Dauer: ca. 1 Sitzung)

---

[1] Leider verschweigt Morris, dass der Beweis dieses Satzes bereits sehr tief ist; zumeist wird er im wesentlichen mit denselben funktionalanalytischen Methoden bewiesen, die auch beim direkten Beweis des Satzes von Pontryagin eingehen. Nichtsdestoweniger ist die Darstellung der Strukturtheorie und ihres Zusammenhanges mit dem Dualitätssatz bei Morris sehr erhellend. Für "ehrliche" Beweise des Satzes von Pontryagin vgl. etwa die Bücher [R], [RV].

Literatur:

[B] Bredon, G., Topology and Geometry, Springer, New York 1993

[J] Jänich, K., Topologie, Springer, Heidelberg 1980

[M] Morris, S., Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups, LMS **29**, Cambridge 1977

[N] Neukirch, J., Algebraische Zahlentheorie, Springer, Heidelberg 1992

[NSW] Neukirch, J.; Schmidt, A.; Wingberg, K., Cohomology of Number Fields, Springer, Heidelberg 2000

[R] Rudin, W., Fourier Analysis on Groups, Interscience, New York 1962

[RV] Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., Fourier Analysis on Number Fields, Springer, Berlin 1998