Können ζ-Funktionen Diophantische Gleichungen lösen?

Eine Hinführung zur (nicht-kommutativen) Iwasawa Theorie

Otmar Venjakob

Mathematisches Institut
Universität Heidelberg

Kassel, 17.12.2007

Leibniz (1673)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(vorher bereits GREGORY and MADHAVA bekannt)

Spezielle Werte von L-Funktionen

$N \geq 1, \qquad (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \qquad$ Einheiten des Rings $\qquad \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Dirichlet-Character (modulo N) :

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$$

setzt sich fort auf $\mathbb{N}$

$$\chi(n) := \begin{cases} \chi(n \bmod N), & (n, N) = 1; \\ 0, & \text{andererseits.} \end{cases}$$

Dirichlet L-Funktion bezüglich χ :

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 1.$$

erfüllt:

- Euler Produkt

$$L(s,\chi) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}},$$

- Meromorph Fortsetzung auf $\mathbb{C}$,
- Funktionalgleichung.

Beispiele

$\chi \equiv 1$: Riemannsche ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

Beispiele

$\chi \equiv 1$: Riemannsche ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}},$$

$$\chi_1 : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{3}\} \to \mathbb{C}^\times, \quad \chi_1(\bar{1}) = 1, \quad \chi_1(\bar{3}) = -1$$

$$L(1, \chi_1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Diophantische Gleichungen

Vermutungen von Catalan und Fermat

p, q Primzahlen

Catalan(1844), Theorem(MIHĂILESCU, 2002):

$$x^p - y^q = 1,$$

hat als einzige Lösung

$$3^2 - 2^3 = 1$$

in $\mathbb{Z}$ mit $x, y > 0$.

Vermutungen von Catalan and Fermat

p, q Primzahlen

Catalan(1844), Theorem(MIHĂILESCU, 2002):

$$x^p - y^q = 1,$$

hat als einzige Lösung

$$3^2 - 2^3 = 1$$

in $\mathbb{Z}$ mit $x, y > 0$.

Fermat(1665), Theorem(WILES et al., 1994):

$$x^p + y^p = z^p, \quad p > 2,$$

hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$ mit $xyz \neq 0$.

Faktorisierung über größerem Ring ganzer Zahlen

ζ_m primitive $m$te Einheitswurzel

$\mathbb{Z}[\zeta_m]$ Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\zeta_m)$,

z.B. für $m = 4$ mit $i^2 = -1$ haben wir in $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$:

$$x^3 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^3 = (y + i)(y - i)$$

und für $m = p^n$ haben wir in $\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}]$:

$$x^{p^n} + y^{p^n} = (x + y)(x + \zeta_{p^n} y)(x + \zeta_{p^n}^2 y) \cdot \ldots \cdot (x + \zeta_{p^n}^{p^n - 1} y) = z^{p^n}.$$

Die Strategie

Hoffnung: Benutze *eindeutige Primfaktorzerlegung*, um einen Widerspruch zu der Annahme zu erreichen, dass die Catalansche oder Fermatsche Gleichung eine nicht-triviale Lösung hat.

Die Strategie

Hoffnung: Benutze *eindeutige Primfaktorzerlegung*, um einen Widerspruch zu der Annahme zu erreichen, dass die Catalansche oder Fermatsche Gleichung eine nicht-triviale Lösung hat.

Problem: Im Allgemeinen ist $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ *kein* Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung (faktorieller Ring), z.B. $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$!

Ideale

Kummer: Ersetze Zahlen durch ‘Ideale Zahlen’:

Für Ideale (=$\mathbb{Z}[\zeta_m]$-Untermoduln) $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Z}[\zeta_m]$ haben wir eine eindeutige Faktorisierung in Primideale $\mathfrak{P}_i \neq 0$:

$$\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i^{n_i}$$

Hauptideale: $(a) = \mathbb{Z}[\zeta_m]a$

Idealklassengruppe

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) : &= \{ \text{ Ideale von } \mathbb{Z}[\zeta_m]\} / \{ \text{ Hauptideal von } \mathbb{Z}[\zeta_m]\} \\ &\cong Pic(\mathbb{Z}[\zeta_m]) \end{aligned}$$

Idealklassengruppe

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) : &= \{\text{ Ideale von } \mathbb{Z}[\zeta_m]\}/\{\text{ Hauptideal von } \mathbb{Z}[\zeta_m]\} \\ &\cong Pic(\mathbb{Z}[\zeta_m]) \end{aligned}$$

Fundamentales Theorem der Algebraischen Zahlentheorie:

$$\#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) < \infty$$

und

$$h_{\mathbb{Q}(\zeta_m)} := \#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z}[\zeta_m] \text{ ist ein faktorieller Ring}$$

Idealklassengruppe

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) : &= \{ \text{ Ideale von } \mathbb{Z}[\zeta_m]\}/\{ \text{ Hauptideal von } \mathbb{Z}[\zeta_m]\} \\ &\cong Pic(\mathbb{Z}[\zeta_m]) \end{aligned}$$

Fundamentales Theorem der Algebraischen Zahlentheorie:

$$\#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) < \infty$$

und

$$h_{\mathbb{Q}(\zeta_m)} := \#Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m)) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z}[\zeta_m] \text{ ist ein faktorieller Ring}$$

Trotzdem ist $Cl(\mathbb{Q}(\zeta_m))$ schwierig zu bestimmen, zu viele Relationen!

Die L-Funktion löst das Problem

Wie können wir

$$h_{\mathbb{Q}(i)}$$

berechnen?

Die L-Funktion löst das Problem

Wie können wir

$$h_{\mathbb{Q}(i)}$$

berechnen?

Es ist fast ein Wunder, dass

$$L(s, \chi_1)$$

die Antwort weiß!

Der zyklotomische Charakter

Gauß:

$$G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \xrightarrow[\cong]{\kappa_N} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

mit $g(\zeta_N) = \zeta_N^{\kappa_N(g)}$ für alle $g \in G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$

Der zyklotomische Charakter

Gauß:

$$G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \xrightarrow[\cong]{\kappa_N} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

mit $g(\zeta_N) = \zeta_N^{\kappa_N(g)}$ für alle $g \in G(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$

$N = 4$:

$\Rightarrow \chi_1$ ist ein Charakter der Galois Gruppe $G(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q})$

$\Rightarrow L(s, \chi_1)$ (analytische) Invariante von $\mathbb{Q}(i)$.

Analytische Klassenzahlformel für imaginär-quadratische Zahlkörper:

$$h_{\mathbb{Q}(i)} \quad = \quad \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1, \chi_1)$$

Analytische Klassenzahlformel für imaginär-quadratische Zahlkörper:

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{Q}(i)} &= \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1, \chi_1) \\ &= \frac{4 \cdot 2}{2\pi} L(1, \chi_1) \end{aligned}$$

Analytische Klassenzahlformel für imaginär-quadratische Zahlkörper:

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{Q}(i)} &= \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4\cdot 2}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4}{\pi} L(1,\chi_1) = 1 \quad \text{(Leibniz Formel)} \end{aligned}$$

Analytische Klassenzahlformel für imaginär-quadratische Zahlkörper:

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{Q}(i)} &= \frac{\#\mu(\mathbb{Q}(i))\sqrt{N}}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4\cdot 2}{2\pi} L(1,\chi_1) \\ &= \frac{4}{\pi} L(1,\chi_1) = 1 \quad \text{(Leibniz Formel)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}[i]$ ist ein faktorieller Ring.

Ein spezieller Fall der Catalan Gleichung

Da '$L(s, \chi_1)$ die Arithmetik´ von $\mathbb{Q}(i)$ kennt, ist sie in der Lage unser Problem zu lösen:

Ziel: $x^3 - y^2 = 1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$.

In der Zerlegung $x^3 = (y+i)(y-i)$ sind die Faktoren $(y+i)$ und $(y-i)$ teilerfremd (leicht zu sehen!)

$\Rightarrow y + i = (a+bi)^3$ für geeignete $a, b \in \mathbb{Z}$

nimmt man $\mathrm{Re}(-)$ und $\mathrm{Im}(-)$ ergibt dies: $y = 0$, also einen Widerspruch!

Reguläre Primzahlen

Ebenso ‘weiß’ die Funktion $\zeta(s)$ für welche p

$$Cl(\mathbb{Q}(\zeta_p))(p) = 1$$

gilt! Nämlich genau dann, wenn p keinen der Zähler der (rationalen!) Werte $\zeta(-1), \zeta(-3), \ldots, \zeta(4-p)$ teilt (Kummer).

In diesem Fall hat die Fermat-Gleichung keine nicht-triviale Lösung. Aber $37 | h_{Cl(\mathbb{Q}(\zeta_{37}))}$!

Iwasawa:

$$Cl(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))(p) =? \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Der Funktionenkörper-Fall

Zahlkörper versus Funktionenkörper

$$\mathbb{Q} \longleftrightarrow \mathbb{F}_l(X) = K(\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_l})$$

$$K/\mathbb{Q} \ \text{Zahlkörper} \longleftrightarrow K(C)/\mathbb{F}_l(X) \ \text{Funktionenkörper}$$

$C \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_l}$ glatte, projektive Kurve, d.h.

$K(C)/\mathbb{F}_l(X)$ endliche Erweiterung

Punkte zählen auf C

$N_r := \#C(\mathbb{F}_{l^r})$ Kardinalität von $\mathbb{F}_{l^r}$-rationalen Punkten

$$\begin{aligned} \phi : C &\to C \\ x_i &\mapsto x_i^l \end{aligned}$$ Frobenius-Automorphismus

Lefschetz-Spur-Formel

$$\begin{aligned} N_r &= \#\{\text{Fixpunkte von } C(\overline{\mathbb{F}_l}) \text{ unter } \phi^r\} \\ &= \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \mathrm{Tr}\left(\phi^r | \mathbb{H}^n(C)\right) \end{aligned}$$

ζ-Funktion von C, WEIL (1948)

$$\begin{aligned}
\zeta_C(s) : &= \prod_{x\,\epsilon\,|C|} \frac{1}{1-(\#k(x))^{-s}}, \quad s \,\epsilon\, \mathbb{C},\ \ \Re(s) > 1,\\
&= \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right), \qquad t = l^{-s}\\
&= \prod_{n=0}^{2} \det(1-\phi t|\mathbb{H}^n(C))^{(-1)^{n+1}}\\
&= \frac{\det(1-\phi t|\text{“}Pic^0(\overline{C})\text{”})}{(1-t)(1-lt)} \quad \epsilon\, \mathbb{Q}(t)
\end{aligned}$$

Riemannsche Vermutung für C

ζ_C ist eine rationale Funktion in t und hat

Pole bei: $s = 0, \ s = 1$

Nullstellen bei bestimmten $s = \alpha$, die $\Re(\alpha) = \frac{1}{2}$ erfüllen.

Riemannsche Vermutung für C

ζ_C ist eine rationale Funktion in t und hat

Pole bei: $s = 0, \ s = 1$

Nullstellen bei bestimmten $s = \alpha$, die $\Re(\alpha) = \frac{1}{2}$ erfüllen.

Kann die Riemannsche ζ-Funktion auch als rationale Funktion in solch einer geschlossenen Form ausgedrückt werden?

Klassische Iwasawa Theorie

Zahlkörperturm

Gleichzeitiges Studium der Klassenzahlformel in einem ganzen Turm von Zahlkörpern:

$$\mathbb{Q} \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq F_\infty := \bigcup_{n \geq 0} F_n.$$

mit $F_n := \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),\ 1 \leq n \leq \infty,$

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ \subseteq\ \mathbb{Q}_p := \mathrm{Quot}(\mathbb{Z}_p),$$

$$\kappa : G := G(F_\infty/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p^\times,$$

$$g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\kappa(g)} \text{ für alle } g \in G, n \geq 0$$

$$\begin{tikzcd} F_\infty \arrow[d, no head] \arrow[dd, bend left, no head, "G"] \\ F_n \arrow[d, no head] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$G = \Delta \times \Gamma$ mit

$$\Delta = G(F_1/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \quad \text{und}$$
$$\Gamma = G(F_\infty/F_1) = \overline{<\gamma>} \cong \mathbb{Z}_p.$$

Iwasawa-Algebra

$$\Lambda(G) := \varprojlim_{G' \trianglelefteq G \text{ offen}} \mathbb{Z}_p[G/G'] \cong \mathbb{Z}_p[\Delta][[T]]$$

mit $T := \gamma - 1$.

p-adische Funktionen

Maximaler Quotientenring von $\Lambda(G)$: $\quad Q(G) \cong \prod_{i=1}^{p-1} Q(\mathbb{Z}_p[[T]]).$

$Z = (Z_1(T), \ldots, Z_{p-1}(T)) \in Q(G)$ sind Funktionen von $\mathbb{Z}_p$:
für $n \in \mathbb{N}$

$$Z(n) := Z_{i(n)}(\kappa(\gamma)^n - 1) \in \mathbb{Q}_p \cup \{\infty\}, \quad i(n) \equiv n \bmod (p-1)$$

Analytische p-adische ζ-Funktion

KUBOTA, LEOPOLDT and IWASAWA:

Es gibt genau ein $\zeta_p \in Q(G)$ derart, dass für $k < 0$

$$\zeta_p(k) = (1 - p^{-k})\zeta(k)$$

gilt, d.h. ζ_p interpoliert - bis auf den Euler-Faktor bei p - die Riemannsche ζ-Funktion p-adisch.

Idealklassengruppe über F_∞

IWASAWA: $\#Cl(F_n)(p) = p^{n\,\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}(X)+\mathrm{const}}$ wobei

$$X := X(F_\infty) = \varprojlim_n Cl(F_n)(p) \quad \text{mit } G\text{-Operation,}$$

Idealklassengruppe über F_∞

IWASAWA: $\#Cl(F_n)(p) = p^{n \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}(X) + \mathrm{const}}$ wobei

$$X := X(F_\infty) = \varprojlim_n Cl(F_n)(p) \quad \text{mit } G\text{-Operation},$$

$$\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n} \quad \text{mit } G\text{-Operation},$$

$$X^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p, \qquad \mathbb{Q}_p(1) := \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

endlich-dimensionale $\mathbb{Q}_p$-Vektorräume mit Operation von γ.

Iwasawa Hauptvermutung

MAZUR and WILES (1986):

$$\zeta_p \equiv \frac{\det(1-\gamma T|X^- \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)}{\det(1-\gamma T|\mathbb{Q}_p(1))} \mod \Lambda(G)^\times$$

$$\equiv \prod_i \det(1-\gamma T|\mathbb{H}^i)^{(-1)^{i+1}} \mod \Lambda(G)^\times$$

analytische *algebraische* p-adische ζ-Funktion

"Spurformel"

Die Analogie

Funktionenkörper	Zahlkörper
$\overline{\mathbb{F}_l} = \mathbb{F}_l(\mu)$	$F_\infty = \mathbb{Q}(\mu(p))$
ϕ	γ
C	$\mathbb{G}_m$
ζ_C	ζ_p
$Pic^0(\overline{C})$	X‘$=$’ $Pic(F_\infty)$

Nicht-kommutative Iwasawa Theorie

Von $\mathbb{G}_m$ zu beliebigen Darstellungen

bisher:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Koeffizienten in Kohomologie: } \mathbb{Z}_p(1) \\
\mathbb{G}_m,\ \mu(p) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{Zahlkörperturm: } F_\infty = \mathbb{Q}(\mu(p))
\end{tikzcd}$$

Verallgemeinerungen

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V)$$

(Stetige) Darstellung mit $V \cong \mathbb{Q}_p^n$
und einem Galois-stabilen Gitter $T \cong \mathbb{Z}_p^n$.

ρ

Koeffizienten in Kohomologie: T

Turm von Körpern: $K_\infty = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho)}$

Beispiel: E elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$,
$T = T_pE = \varprojlim_n E[p^n] \cong \mathbb{Z}_p^2, \quad V := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$

p-adische Lie Erweiterungen

$F_\infty \subseteq K_\infty$, so dass

$$\mathcal{G} := G(K_\infty/\mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$$

eine *p-adische Lie Gruppe* ist

mit Untergruppe H, so dass

$$\Gamma := \mathcal{G}/H \cong \mathbb{Z}_p$$

$$\begin{tikzcd}
 & K_\infty \arrow[dl, dash, "H"'] \arrow[ddl, dash, bend left, "\mathcal{G}"] \\
F_\infty \arrow[d, dash, "\Gamma"'] & \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Philosophie

Assoziiere zu einer Darstellung (ρ, V)

- *analytische* p-adische L-Funktion $\mathcal{L}(V, K_\infty)$ mit Interpretationseigenschaft

$$\mathcal{L}(V, K_\infty)(\chi) \sim L(1, V \otimes \chi)$$

  für $\chi : \mathcal{G} \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$ mit endlichem Bild.
- *algebraische* p-adische L-Funktion $F(V, K_\infty)$.

Philosophie

Assoziiere zu einer Darstellung (ρ, V)

- *analytische* p-adische L-Funktion $\mathcal{L}(V, K_\infty)$ mit Interpretationseigenschaft

$$\mathcal{L}(V, K_\infty)(\chi) \sim L(1, V \otimes \chi)$$

  für $\chi : \mathcal{G} \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$ mit endlichem Bild.
- *algebraische* p-adische L-Funktion $F(V, K_\infty)$.

Problem: $\Lambda(\mathcal{G})$ ist im Allgemeinen nicht kommutativ! Was sind nicht-kommutative Determinanten?

Nicht-kommutative Iwasawa Hauptvermutung

COATES, FUKAYA, KATO, SUJATHA, V.:

Es existiert eine kanonische Lokalisierung $\Lambda(\mathcal{G})_S$ von $\Lambda(\mathcal{G})$, so dass $F(V, K_\infty)$ in

$$K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S)$$

existiert.
Außerdem sollte $\mathcal{L}(V, K_\infty)$ in dieser K-Gruppe leben.

Hauptvermutung:

$$\mathcal{L}(V, K_\infty) \equiv F(V, K_\infty) \mod K_1(\Lambda(\mathcal{G})).$$

Nicht-kommutative charakteristische Polynome

M $\Lambda(\mathcal{G})$-Modul, der als $\Lambda(H)$-Modul endlich erzeugt ist.

BURNS, SCHNEIDER, V.:

$$\Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M \xrightarrow[\cong]{\text{``}1-\gamma\text{''}} \Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M$$

induziert "$\det(1-\gamma T|M)$" $\in K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S)$.

Nicht-kommutative charakteristische Polynome

M $\Lambda(\mathcal{G})$-Modul, der als $\Lambda(H)$-Modul endlich erzeugt ist.

BURNS, SCHNEIDER, V.:

$$\Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M \xrightarrow[\cong]{\text{“}1-\gamma\text{”}} \Lambda(\mathcal{G})_S \otimes_{\Lambda(H)} M$$

induziert “$\det(1-\gamma T|M)$” $\in K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S)$.

Hauptvermutung über K_∞ :

“Spurformel" in $K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S)$ mod $K_1(\Lambda(\mathcal{G}))$:

$$\mathcal{L}(K_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) \equiv \det(1-\gamma T|\mathbb{H}^\bullet(K_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$$

Neue Kongruenzen

Für $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times$ und Koeffizienten $\mathbb{Z}_p(1)$:

KATO:

$$\begin{tikzcd}
K_1(\Lambda(\mathcal{G})) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod_{\chi_i} \mathcal{O}_i[[T]]^\times \arrow[d] \\
K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S) \arrow[r] & \prod_{\chi_i} \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_i[[T]])^\times
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{L}(K_\infty/\mathbb{Q}) \longmapsto (L_p(\chi_i, F_\infty))_i$$

Neue Kongruenzen

Für $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times$ und Koeffizienten $\mathbb{Z}_p(1)$:

KATO:
$$\begin{array}{ccc} K_1(\Lambda(\mathcal{G})) & \hookrightarrow & \prod_{\chi_i} \mathcal{O}_i[[T]]^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_1(\Lambda(\mathcal{G})_S) & \longrightarrow & \prod_{\chi_i} \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_i[[T]])^\times \\ & & \\ \mathcal{L}(K_\infty/\mathbb{Q}) & \longmapsto & (L_p(\chi_i, F_\infty))_i \end{array}$$

Existenz von $\mathcal{L}(K_\infty/\mathbb{Q})$ $\iff$ Kongruenzen zwischen $L_p(\chi_i, F_\infty)$
Hauptvermutung $/K_\infty$ $\iff$ Hauptvermutung $/F_\infty$ für alle χ_i

Ähnliche Resultate von RITTER, WEISS für endliches H.

Ein Theorem für total reelle Körper

F total reell, $F_{cyc} \subseteq K_\infty$ total reell,

$\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$

MAHESH KAKDE, ein Student von Coates, hat kürzlich angekündigt:

Theorem (Kakde)

Unter der Annahme der Leopoldt-Vermutung für F gilt die nicht-kommutative Hauptvermutung für das Tate Motiv (d.h. für $\mathbb{G}_m$) über K_∞/F.

Vielen Dank!