Programm zum Proseminar: p-Adische Zahlen

Prof. Dr. Otmar Venjakob, Max Witzelsperger

Sommersemester 2022

Anmerkungen: Die Vorträge sind jeweils auf eine *Dauer von 80 Minuten* ausgerichtet, gefolgt von 10 Minuten Nachbesprechung.
Unsere Hauptquelle ist das Buch [Gou20] von F. Gouvéa. Referenzen ohne Quellenangabe beziehen sich daher immer auf [Gou20] (außer in den letzten beiden Vorträgen).

Vortrag 1: Nicht-archimedische Absolutbeträge auf Körpern

- Definiere allgemeine und nicht-archimedische Absolutbeträge auf einem Körper (Def. 2.1.1). Siehe auch Def. 1.5 und 1.12 in [Kat07]).[1]
  Beweise die elementaren Eigenschaften [Kat07, Prop. 1.6].
  Behandle die Beispiele für Absolutbeträge von dem Absatz nach Def. 2.1.1 bis zur Prop. 2.1.5.
- Beweise die Charakterisierung [Kat07, Prop. 1.14] nicht-archimedischer Beträge (mache Dir in [Kat07] vorher den Absatz vor Prop. 1.6 klar, und diskutiere im Anschluss kurz den Absatz nach Prop. 1.14 über das *Archimedische Prinzip*.)
- Definiere metrische Räume [Kat07, Anfang von §1.1] und erkläre, wie man aus einem Absolutbetrag eine Metrik auf einem Körper erhält.
  Definiere dann offene und abgeschlossene Teilmengen [Kat07, Def. 1.2], Stetigkeit [Gou20, Def. 2.3.2], sowie Folgen und deren Eigenschaften aus [Kat07, Def. 1.7]. Beweise [Gou20, Lem. 3.1.2].
  All dies soll im Kontext metrischer Räume formuliert werden.
- Definiere den Begriff der Äquivalenz von Absolutbeträgen auf einem Körper (Def. 3.1.1), nenne die Charakterisierungen in Prop. 3.1.3 und beweise die einfacheren davon (falls Zeit übrig bleibt, auch die schwierige; s. dazu auch [Kat07, Prop. 1.10]).

Vortrag 2: Ultrametrische Topologie und Bewertungsringe

- Beweise Lemma 2.3.3 und definiere ultrametrische Räume (s. Absatz nach dem Lemma).

[1] bei Katok heißen Absolutbeträge „*norms*“, bei Gouvêa „*absolute values*“.

- Beweise Proposition 2.3.4 („der stärkere gewinnt“) und erkläre als Interpretation Corollary 2.3.5 für ultrametrische Räume.
  Beweise Prop. 2.3.7, insbesondere die Punkte (i),(ii), (iii).
  Definiere (un-)zusammenhängende Teilmengen (Def. 2.3.8 und Absatz darunter) und beweise Prop. 2.3.9.
- Definiere Ideale eines Ringes sowie maximale Ideale, und zeige dass ein Restklassenring nach einem maximalen Ideal stets ein Körper ist (s. z.B. §§14.1, 14.5 und 14.8 in [KM10]).
- Definiere Bewertungsringe, Bewertungsideale und Restklassenkörper (Prop. 2.4.1 und Def. 2.4.2) und beweise Prop. 2.4.3 über den Fall des p-adischen Betrages.

Vortrag 3: Vervollständigungen

- Definiere Cauchy-Folgen, Vollständigkeit und Dichtheit im Kontext metrischer Räume (Def. 3.2.1); erwähne als Beispiel, dass $\mathbb{R}$ vollständig und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist (bzgl. des gewöhnlichen Betrages).
  Charakterisiere Cauchy-Folgen im nicht-Archimedischen (Lem. 3.2.2), und begründe anhand des Beispiels der harmonischen Reihe, dass das Lemma im Archimedischen nicht gilt.
- Führe für einen Körper F mit einem Absolutbetrag die Konstruktion der Vervollständigung $\widehat{F}$ aus; folge dazu §1.3 in [Kat07].[2] Behandle insbesondere 1.19 - 1.22 in [Kat07].
  Beweise die Eindeutigkeit der Vervollständigung, s. den Beweis von [Gou20, Thm. 3.2.14].
- Erwähne als Beispiel, dass $\mathbb{R} = \widehat{\mathbb{Q}}$ bzgl. des gewöhnlichen Betrages ist.
  Falls noch Zeit bleibt, formuliere den Satz von Ostrowski [Gou20, Thm. 3.1.4] ohne Beweis und definiere $\mathbb{Q}_p$.

Vortrag 4: Erste Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Z}_p$

- Wiederhole kurz die in Vortrag 1 behandelten Beträge auf $\mathbb{Q}$ und formuliere dann den Satz von Ostrowski (Thm. 3.1.4) ohne Beweis. Formuliere und beweise die Produktformel (Prop. 3.1.5).
- Definiere $\mathbb{Q}_p$ und liste die Eigenschaften aus [Gou20, §4.1] auf. Definiere $\mathbb{Z}_p$ (Def. 4.2.1) und beweise Prop. 4.2.2. Füge hier die Behandlung von $\mathbb{Z}_p^\times$ vom Ende von §4.2 ein.
- Behandle die restlichen algebraischen und topologischen Eigenschaften von $\mathbb{Z}_p$ aus §4.2 (4.2.3 - 4.2.7).
- Stelle die Elemente von $\mathbb{Q}_p$ durch p-adische Entwicklungen dar (S. 82 oben und Lem. 4.3.2 - Cor. 4.3.4).

Vortrag 5: Das Henselsche Lemma und Anwendungen

- Formuliere und beweise das Henselsche Lemma (Def. 4.5.1 & Thm. 4.5.2).
- Diskutiere den Zusammenhang zum Newton-Verfahren (Thm. 4.5.3 und Absatz darüber).

[2] vgl. auch [Gou20, §3.2]: Dort wird dieselbe Konstruktion im Spezialfall $F = \mathbb{Q}$ mit p-adischem Betrag durchgeführt.

- Definiere Einheitswurzeln eines Körpers und bestimme die prim-zu-p-Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}_p$ (§4.6 bis Prop. 4.6.1).
  Verwende dies um im Fall $p \neq 2$ einzusehen, dass $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}_p$ gilt, d.h. $\mathbb{Q}$ ist für den p-adischen Betrag nicht vollständig.
- Bestimme die Quadrate in $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Z}_p$ für $p \neq 2$ (4.6.2 & 4.6.3).

Vortrag 6: Lokal-global-Prinzipien

- Erkläre das lokal-global-Prinzip zur Lösbarkeit rationaler Gleichungen (Anfang §4.8). Beweise Proposition 4.8.1.
- Formuliere das Theorem von Hasse-Minkowski 4.8.2 ohne Beweis.
- Wende dieses Theorem zusammen mit dem Henselschen Lemma an, um die rationale Lösbarkeit der Gleichung $aX^2+bY^2+cZ^2 = 0$ in Abhängigkeit von a, b, c zu untersuchen (Rest von §4.8 bis Prop. 4.8.6).
  Beweise insbesondere Lemma 4.8.4 und danach Prop. 4.8.3 sowie Cor. 4.8.5.

Vortrag 7: p-Adische Analysis

- Behandle Folgen und Reihen in $\mathbb{Q}_p$ und beweise Cor. 5.1.2 zur Konvergenz von Reihen.
- Behandle den Absatz über Lemma 5.1.3 und beweise das Lemma sowie Theorem 5.1.4 über das Vertauschen der Summation bei Reihen.
- Definiere (gleichmäßig) stetige und differenzierbare Funktionen (Def. 5.2.1 & 5.2.2). Behandle die Beispiele 4.2 und 4.26 („*Pseudo-konstante Funktionen*“) in [Kat07].
- Beweise, dass im p-Adischen die Mittelwerteigenschaft nicht gilt (Prop. 5.2.3).
  Beweise, dass das Theorem von Rolle im p-Adischen nicht gilt [Kat07, Ex. 4.28 und Absatz darüber].

Vortrag 8: Formale Potenzreihen

- Definiere Potenzreihen über $\mathbb{Q}_p$ und beweise Prop. 5.4.1 über den Konvergenzbereich. Bestimme als Beispiele die Konvergenzbereiche der Reihen (i) und (ii) aus Problem 155 und aus [Kat07, Ex. 3.12].
- Definiere Summen und Produkte von Potenzreihen und beweise Prop. 5.4.2 über deren Konvergenz. Siehe dazu auch [Con, Cor. 2.10].
- Behandle nun das schwierigere Problem der Verkettung: Erkläre, wann die Verkettung als formale Reihe wohldefiniert ist und beweise dann Theorem 5.4.3 über deren Konvergenz.

Vortrag 9: Funktionen definiert durch Potenzreihen

- Betrachte *analytische Funktionen*, d.h. Funktionen die durch eine Potenzreihe gegeben sind, und beweise deren Beschränktheit und gleichmäßige Stetigkeit (Lem. 5.5.1), sowie Cor. 5.5.2.
- Behandle Theorem 5.5.3 ohne Beweis und erkläre damit, dass analytische Fortsetzung durch Wechseln des Entwicklungspunktes im p-Adischen nicht funktioniert.

Nenne die auf S. 133 oben definierte Funktion als Beispiel dafür, dass der Begriff „*lokal-analytisch*“ im p-Adischen weniger nützlich als im Archimedischen ist. Wir werden daher ab jetzt nur noch „*global-analytische*“ Funktionen auf Kugeln betrachten.

- Beweise den Identitätssatz 5.5.4. Nenne anschließend Prop. 5.5.5 über die Ableitung von Potenzreihen ohne Beweis, und beweise anschließend Cor. 5.5.6, welches zeigt, dass Potenzreihen sich gutartig bzgl. Differentiation verhalten (z.B. gibt es keine Problematik mit *pseudo-konstanten Funktionen*, vgl. Vortrag 7).
- Beweise das Theorem 5.6.1 von Strassman über die Nullstellen von Potenzreihen, sowie die Korollare 5.6.2 - 5.6.6.

Vortrag 10: p-Adische Exponential-und Logarithmusfunktion

- Definiere die formale Logarithmus-Reihe, berechne ihren Konvergenzbereich (s. dazu [Kat07, Ex. 3.12] aus Vortrag 8) und definiere die *p-adische Logarithmusfunktion* (§5.7 bis Def. 5.7.2). Beweise die bekannte Rechenregel Prop. 5.7.3.
- Beweise Problems 176-178, um mit Hilfe des Logarithmus und des Theorems von Strassman die in Vortrag 5 begonnene Klassifikation der Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}_p$ zu vollenden.
- Bestimme den Konvergenzbereich der Exponentialreihe und definiere die *p-adische Exponentialfunktion* (Lem. 5.7.4 - Def. 5.7.6).
  Beweise die Rechenregel 5.7.7 und zeige, dass exp und log invers zueinander sind (Prop. 5.7.8).
- Bestimme die Struktur von $\mathbb{Z}_p^\times$ (§5.8 bis Cor. 5.8.2).

ANMERKUNG: In den letzten beiden Vorträgen ist der Artikel von S. Katok unsere Hauptquelle. Daher beziehen sich im Folgenden alle Referenzen ohne Quellenangabe auf [Kat07].

Vortrag 11: Gleichmäßige Stetigkeit

- Wiederhole die Definition gleichmäßig stetiger Funktionen; definiere lokal-konstante Funktionen und beweise, dass diese gleichmäßig stetig sind (Def. 4.1, 4.3 und Prop. 4.5 - Cor. 4.7).
  Als Beispiel für eine stetige Funkion, die nicht gleichmäßig stetig ist, behandle Ex. 4.12; an dieser Stelle darf auch auf Thm. 4.15 vorgegriffen werden, welches später im Vortrag bewiesen wird. (vgl. auch Problem 198 in [Gou20]).
- Definiere Treppenfunktionen und beweise, dass jede gleichmäßig stetige Funktion sich durch solche approximieren lässt (Def. 4.8 & Thm. 4.10).
- Erwähne bei Bedarf das elementare Thm. 4.11 über stetige Funktionen und Thm. 4.14 über den Zusammenhang kompakter Mengen mit gleichmäßig stetigen Funktionen.
  Beweise Theorem 4.15 über die Fortsetzbarkeit gleichmäßig stetiger Funktionen. Dieses Resultat ist entscheidend für den nächsten Vortrag.

Vortrag 12: Das Theorem von Mahler

- Erkläre die Fragestellung zur Interpolation einer Folge in $\mathbb{Q}_p$ und beweise Kriterien für Interpolierbarkeit (§4.6 bis Prop. 4.39).
- Beweise, dass Cauchy-Folgen nicht interpoliert werden können (Prop. 4.40).
  Untersuche die Interpolierbarkeit der Folge $(a^n)_{n\geq 0}$, $a \in \mathbb{Z}_p$ (Thm. 4.43).
- Definiere Binomialkoeffizienten und Interpolationsreihen (Cor. 4.42 und Def. 4.44). Beweise Prop. 4.45.
- Beweise Thm. 4.46 und das Theorem 4.47 von Mahler (für das Verständnis des Beweises kann die etwas konzisere Darstellung in [Boj74] hilfreich sein).
  Wende zum Abschluss in Thm. 4.49 die Ergebnisse auf die Folgen $(a^n)_{n\geq 0}$ an.

Literatur

[Boj74] Ranko Bojanic. “A simple proof of Mahler’s theorem on approximation of continuous functions of a p-adic variable by polynomials”. In: *Journal on number theory* 6 (1974).

[Con] Keith Conrad. *Infinite series in p-adic fields.* URL: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/infseriespadic.pdf`.

[Gou20] Fernando Gouvêa. *p-Adic Numbers: An Introduction.* 3. Aufl. Springer-Verlag, 2020.

[Kat07] Svetlana Katok. “p-Adic Analysis compared with Real”. In: *AMS Student Mathematical Library* 37 (2007).

[KM10] Christian Karpfinger und Kurt Meyberg. *Algebra: Gruppen-Ringe-Körper.* 2. Aufl. Spektrum, 2010.