

AG Venjakob

Hauptseminar Arithmetische Geometrie
WS 20/21

Kato's lokale ϵ -Vermutung für (φ, Γ) -Moduln über dem Robba Ring nach Nakamura

Zeit: Donnerstag 11:15 **Ort:** je nach Teilnehmerzahl virtuell oder SR 4

Nakamuras Verallgemeinerung der ϵ -Isomorphismus-Vermutung von (Fukaya und) Kato besagt grob gesprochen, dass sich der lokale ϵ -Faktor, der in der Funktionsgleichung der L -Funktion eines Motivs auftritt, p -adisch zu allen Familien p -adischer Galois Darstellungen sowie *rigid-analytisch* zu allen Familien von (φ, Γ) -Moduln in kompatibler Weise interpolieren lässt.

Etwas konkreter ordnet diese Vermutung Paaren $(B, N) = (\Lambda, T)$ bzw. (A, M) einen B -linearen Isomorphismus

$$\epsilon_B(N) : \mathbf{1} \xrightarrow{\cong} \Delta_B(N)$$

(graduierter) invertierbarer B -Moduln zu. Hierbei bezeichnet im ersten Fall, der auf Kato zurückgeht, Λ einen semi-lokalen Ring (mit $\Lambda/Jac(\Lambda)$ endlich von p -Potenzordnung) und T einen endlich erzeugten projektiven Λ -Modul mit einer stetigen Λ -linearen $G_{\mathbb{Q}_p}$ -Wirkung. Im zweiten Fall ist A eine \mathbb{Q}_p -affinoide Algebra und M ein (φ, Γ) -Modul über dem relativen Robba ring \mathcal{R}_A über A . Ferner bezeichnet $\Delta_B(N)$ die sogenannte fundamentale Gerade, die im wesentlichen aus der Determinante von Komplexen, die stetige Galois- bzw. Herr-Kohomologie berechnen, gebildet wird; es gilt die folgende Komptabilität für stetige Homomorphismen $f : \Lambda \rightarrow A$:

$$\Delta_\Lambda(T) \otimes_\Lambda A \cong \Delta_A(D_{rig}(T \otimes_\Lambda A)),$$

wenn D_{rig} den Funktor bezeichnet, der einer Galois-Darstellung seinen (φ, Γ) -Modul (hier über \mathcal{R}_A) zuordnet. Gemäß der Vermutung legen die folgenden Eigenschaften die Zuordnung $\epsilon_B(N)$ eindeutig fest: Verträglichkeit mit Basiswechsel $B \rightarrow B'$, kurzen exakten Sequenzen, Tate Dualität, "gemischtem Basiswechsel"

$$\epsilon_\Lambda(T) \otimes \text{id}_A = \epsilon_A(D_{rig}(T \otimes_\Lambda A))$$

für f wie oben und für de Rham Punkte, d.h. $L = A$ eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p sowie M eine de Rham Darstellung von $G_{\mathbb{Q}_p}$, liefert $\epsilon_L(M)$ den de Rham ϵ -Isomorphismus $\epsilon_L^{dR}(M)$, der mittels der Bloch-Kato Exponentialabbildung und der

dualen Exponentialabbildung zu M sowie den lokalen ϵ - und Γ -Faktoren assoziiert zu $D_{pst}(M)$ bzw. $D_{pst}(M^*)$ gebildet wird.

Der Aufbau des Seminars folgt Nakamuras Artikel [R] (die Beschreibung unten bezieht sich auf diese Quelle, wenn nichts anderes gesagt wird), teilweise werden Resultate aus [I] und anderen Quellen benötigt.

Vorträge

1. Einführung aus Introduction von [I] and [R], dann §2A, S. 325 unten -332 bis vor "The aim of this subsection..."
2. S. 332 beginnend mit "The aim of this subsection..." bis S. 345 vor "We next ..."; aus [I] wird Lem. 2.9 benötigt, vgl. auch Thm. [I]2.8. Ferner §2.4 aus [I] über die duale Exponential-Abbildung behandeln, speziell Prop. 2.16.
3. S. 345 beginnend mit "We next ..." bis S. 350; aus [I] wird 2.13 und § 2.5 über B-Paare, speziell 2.19 (ohne Beweis) und 2.21 benötigt.
4. §3 bis - S. 365 unten
5. (Rustam) Theorem 3.11 formulieren, dann weiter auf Seite 368 - 377
6. (Otmars) 4B: S.377-392
7. (optional) S. 392 - 402 (The exceptional case plus Appendix)
8. (optional) Ausblick auf den Rank 2 Fall aus [Rk2].

Für das Setting von Familien könnte es nützlich sein, auch [KPX] und [P] heranzuziehen und so weit möglich Beweise von dort zu präsentieren.

References

- [KPX] Kedlaya K., Pottharst J. and Xiao L.: *Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ) -modules*. J. Amer. Math. Soc. 27 (2014), no. 4, 1043–1115. <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~otmar/lehre/seminare/KPX.pdf>
- [I] Nakamura, Kentaro. Iwasawa theory of de Rham (φ, Γ) -modules over the Robba ring. J. Inst. Math. Jussieu 13 (2014), no. 1, 65–118. <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~otmar/lehre/seminare/Iwasawa.pdf>

- [R] Nakamura, Kentaro. A generalization of Kato's local ε -conjecture for (φ, Γ) -modules over the Robba ring. *Algebra Number Theory* 11 (2017), no. 2, 319–404. <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~otmar/lehre/seminare/Robba.pdf>
- [Rk2] Nakamura, Kentaro. Local ε -isomorphisms for rank two p -adic representations of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system. *Camb. J. Math.* 5 (2017), no. 3, 281–368. available at <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~otmar/lehre/seminare/Rank2.pdf>
- [P] J. Pottharst, Cyclotomic Iwasawa theory of motives, preprint, 2012, available at <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~otmar/lehre/seminare/cyc.pdf>