Proseminar: p-ADISCHE ZAHLEN

Prof. Dr. Otmar Venjakob, Max Witzelsperger

Sommersemester 2022

Bekanntlich entsteht der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch *Vervollständigung* der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Anschaulich bilden die Elemente von $\mathbb{Q}$ eine Gerade voller „Lücken“, und der Übergang zum vollständigen Körper $\mathbb{R}$ bedeutet, diese Lücken zu „schließen“.
Mathematisch präzise ausgedrückt bedeutet dies, dass Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ im allgemeinen nicht konvergieren, und dieses Defizit wird durch hinzufügen aller „fehlenden“ Grenzwerte behoben. Die Notwendigkeit dafür ergibt sich aus dem Bedürfnis, Analysis zu betreiben, für deren Methoden die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ essentiell ist.
Um Konzepte wie *Konvergenz* und *Cauchy-Folgen*, welche den obigen Überlegungen zugrunde liegen, überhaupt definieren zu können, ist der *Absolutbetrag* $|\cdot|$ auf $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ entscheidend. Dieser ermöglicht es, den Abstand zwischen zwei Punkten x, y durch $|x-y|$ zu definieren. Dass dieser Abstandsbegriff sinnvoll ist, liegt an folgenden Eigenschaften des Betrages:

(a) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(c) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).

Allgemein nennt man für einen Körper F eine Abbildung $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften (a)-(c) einen *Absolutbetrag auf F*. Ein solcher Betrag auf F liefert immer einen Abstandsbegriff und damit ein Konzept von Konvergenz, Cauchy-Folgen, Stetigkeit etc.
Nun stellt sich heraus, dass es auf $\mathbb{Q}$ neben dem „üblichen“ Betrag noch andere interessante Beträge gibt, nämlich die *p-adischen Beträge* $|\cdot|_p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist. Beispielsweise liegen zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ bzgl. $|\cdot|_p$ genau dann „nahe beieinander“, wenn $x-y$ durch p^N teilbar ist für ein „großes“ $N \in \mathbb{N}$. Daher ist etwa die Folge $(p^n)_{n\geq 1}$ bzgl. $|\cdot|_p$ eine Nullfolge, die Folge $(1/n)_{n\geq 1}$ hingegen nicht!
Aufgrund ihrer Beziehung zu Teilbarkeitsfragen spielen die p-adischen Beträge eine große Rolle in der Zahlentheorie.
Vervollständigt man nun $\mathbb{Q}$ bzgl. des p-adischen Betrages analog wie bei $\mathbb{R}$, so erhält man den Körper $\mathbb{Q}_p$ der *p-adischen Zahlen*. In $\mathbb{Q}_p$ kann man nun wie in $\mathbb{R}$ Analysis betreiben, allerdings unterscheiden sich die Analysis und die *Topologie* von $\mathbb{Q}_p$ erheblich von der reellen Welt. Der Grund dafür ist, dass $|\cdot|_p$ die *verschärfte Dreiecksungleichung* erfüllt:

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{Q}_p.$$

Absolutbeträge mit dieser Eigenschaft nennt man *nicht-archimedisch* oder *ultrametrisch*. Konsequenzen daraus sind z.B., dass im nicht-Archimedischen jedes Dreieck gleichschenklig ist, und dass jeder Punkt in einer offenen (oder abgeschlossenen) Kugel Mittelpunkt der Kugel ist.

Weiter bildet die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius 1 einen Unterring von $\mathbb{Q}_p$, den Ring der *ganzen p-adischen Zahlen* $\mathbb{Z}_p$, welcher mit dem Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$ übereinstimmt. Hierfür gibt es keine Entsprechung im Reellen.
Auch Differenzierbarkeit verhält sich im nicht-Archimedischen anders als gewohnt; so gibt es etwa auf $\mathbb{Q}_p$ differenzierbare Funktionen, die nicht-konstant (sogar injektiv) sind, deren Ableitung aber trotzdem konstant Null ist. Aus diesem Grund herrscht in der nicht-archimedischen Analysis ein stärkerer Fokus auf Entwickelbarkeit in Potenzreihen („Analytizität") als auf Differenzierbarkeit.

In diesem Proseminar sollen zunächst Absolutbeträge auf Körpern sowie Vervollständigungen in einiger Allgemeinheit eingeführt werden. Danach wenden wir uns speziell dem Körper $\mathbb{Q}_p$ zu, behandeln einige seiner topologischen und algebraischen Eigenschaften, insbesondere das zentrale Henselsche Lemma. Weiter gewinnen wir durch das lokal-global-Prinzip einen Eindruck von der Bedeutung der p-adischen Zahlen für die Zahlentheorie.
Die zweite Hälfte des Proseminars befasst sich mit p-adischer Analysis und deren Unterschieden zur reellen Analysis. So werden wir feststellen, dass sich viele Konvergenzbetrachtungen in $\mathbb{Q}_p$ sehr viel einfacher darstellen als in $\mathbb{R}$. Viel Augenmerk wird auf die Theorie der Potenzreihen gelegt. Mit Hilfe dieser werden wir ein p-adisches Analogon zur Exponentialfunktion und zum Logarithmus konstruieren.
Schließlich befassen wir uns mit Interpolationsproblemen und beweisen zum Abschluss des Proseminars als krönendes Resultat das Theorem von Mahler, welches beschreibt, wann man eine Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ stetig auf $\mathbb{Z}_p$ fortsetzen und durch eine sogenannte Interpolationsreihe darstellen kann.

Voraussetzungen: Lineare Algebra 1, Analysis I

Zeit und Ort: Donnerstags, 14-16 Uhr, Raum wird noch bekannt gegeben

Kontakt:
Max Witzelsperger
INF 205, Raum 4.231
Email: mwitzelsperger@mathi.uni-heidelberg.de