Programm zum Seminar: Einführung in die Iwasawa-Theorie

Prof. Dr. Otmar Venjakob, Max Witzelsperger

Wintersemester 2023/24

Vortrag 1: Unendliche Galoistheorie und proendliche Gruppen

Behandle [Neu, Kap. IV, §§1 und 2]: Definiere die **Krulltopologie** auf Galoisgruppen und beweise den Hauptsatz der Galoistheorie für unendliche Erweiterungen (Theorem (1.2)).
Definiere dann allgemein **proendliche Gruppen**, und führe §2 folgend **projektive Limiten** ein. Beweise Satz (2.8). Anschließend behandle so viele der Beispiele für proendliche Gruppen am Ende von §2 wie möglich, insbesondere $\mathbb{Z}_p$.

Vortrag 2: Verzweigungstheorie und $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen

Definiere für (nicht notwendig endliche) Galoiserweiterungen über $\mathbb{Q}$ die Grundbegriffe der Verzweigungstheorie: **Zerlegunsgruppen**, **Trägheitsgruppen**, **Verzweigungsindex**, **unverzweigte Erweiterungen**. Siehe dazu [Nic, §1] und [Was, Appendix §2]. Für den Vergleich mit dem endlichen Fall siehe auch [Neu, Kap. I §9].
Behandle $\mathbb{Z}_p$-**Erweiterungen** von Zahlkörpern im Umfang von [Nic, §2]. Zur Ergänzung siehe auch [Lan, Ch. 5 §4] und [Was, §13.1].
Dafür ist es notwendig, einige Konzepte und Ergebnisse der globalen und lokalen **Klassenkörpertheorie** als Blackbox einzuführen, etwa gemäß [Was, Appendix §3], insbesondere den **Hilbertschen Klassenkörper** (Theorem 4), sowie die Beziehung zwischen Einseinheiten und Verzweigungsgruppen (Theorem 7).

Vortrag 3: Die Iwasawa-Algebra I

Behandle [Nic, §4] bis Lemma 4.9: Definiere **vervollständigte Gruppenringe** und die **Iwasawa-Algebra** Λ für $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen. Beschreibe die allgemeine Beobachtung aus [Lan, S. 125 unten], wie man Λ-Moduln als projektive Limiten $\varprojlim V_n$ von gegebenen V_n gewinnen kann. Als Beispiel behandle den Limes der p-Klassengruppen, etwa gemäß [Lan, S. 138-139] (behandle hier auch das Diagramm auf S. 139 oben).
Anschließend wollen wir Potenzreihenringe untersuchen, als Vorbereitung für den Beweis der Isomorphie $\Lambda \cong \mathcal{O}[[X]]$ im nächsten Vortrag. Behandle Division mit Rest und den Weierstraßschen Vorbereitungssatz für $\mathcal{O}[[X]]$, siehe dazu auch [Was, §7.1].

Vortrag 4: Die Iwasawa-Algebra II

Führe den Beweis von $\Lambda \cong \mathcal{O}[[X]]$ [Nic, Satz 4.3] aus (s. auch [Was, Thm. 7.1]).
Zeige dass die Iwasawa-Algebra noethersch, faktoriell sowie regulär und lokal ist und bestimme ihre sämtlichen Primideale, siehe [Nic, Satz 4.10] (oder auch [Was, 13.9 und 13.11]).
Wenn noch Zeit bleibt, behandle in [Sha, Lem. 2.3.8], um die Topologie von Λ zu beschreiben (siehe hierzu auch [Nic, Lem. (6.1)]).

Vortrag 5: Der Struktursatz I

Dieser und der nächste Vortrag sollen zusammen den Inhalt von [Nic, §5] abdecken. Behandle noethersche, ganzabgeschlossene Ringe (bei der Aussage die Aussage $\bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}} = A$ für $A = \mathcal{O}[[X]]$ zu beweisen), **reflexive Moduln** und **Pseudo-Isomorphismen**. Fahre dann etwa bis zur Aussage von Lemma (5.13) fort. Es könnten auch [NSW, §5.1 bis (5.1.6)] bzw. [Tam, §5.1 und 5.2] hilfreich sein.

Vortrag 6: Der Struktursatz II

Beweise die Sätze 5.14 und 5.15 in [Nic] (siehe auch [NSW, Prop. (5.1.7) und (5.1.8)] oder [Tam, §5.2]). Spezialisiere dann die Ergebnisse des vorherigen Vortrages auf den Fall der Iwasawa-Algebra (bzw. etwas allgemeiner, auf 2-dimensionale reguläre lokale Ringe), siehe [Tam, §5.3, insbesondere das Korollar nach Thm. II], oder auch [Nic, §5 ab Def. (5.16), insbesondere Kor. (5.18)]. Entscheidend ist, wie pseudo-null Moduln und wie reflexive Moduln über Λ aussehen. Um konkret den **Struktursatz für Moduln über** Λ zu formulieren, müssen unter Rückgriff auf Vortrag 4 die Primideale der Höhe 1 beschrieben werden.
Definiere dann die **Iwasawa-Invarianten** von [NSW, Def. (5.3.9)] und behandle deren Eigenschaften bzgl. exakter Sequenzen und Pseudo-Isomorphismen.

Vortrag 7: Iwasawa-Moduln I

Dieser und der nächste Vortrag sollen den Inhalt von [Nic, §6] bzw. [NSW, §5.3 ab (5.3.10)] abdecken. Definiere **Iwasawa-Moduln** und beweise das **topologische Nakayama-Lemma** (6.2 und 6.3), vgl. auch [NSW, Lem. 5.2.18].
Als Folgerung beweise das Kriterium [NSW, Prop. 5.3.10] für die endliche Erzeugtheit von Iwasawa-Moduln. Fahre dann fort bis etwa [Nic, Prop. 6.6] bzw. [NSW, Lem. (5.3.14)].

Vortrag 8: Iwasawa-Moduln II

Untersuche das **asymptotische Verhalten von Iwasawa-Moduln** [Nic, Prop. 6.7] bzw. [NSW, Prop. (5.3.17)]. Behandle dann den Rest der Abschnitte [Nic, §6] und [NSW, §5.3].
Falls noch Zeit bleibt, beweise das Kriterium für $\mu(M) = 0$ in [Tam, §6 Prop. 6].

Vortrag 9: Asymptotisches Verhalten der p-Klassengruppen

Wir behandeln [Nic, §7]. Ziel des Vortrages, und eines der Hauptergebnisse des Seminars, ist der Beweis von Satz 7.5, **Iwasawas fundamentales Theorem** über das Wachstum der p-Torsionsteile der Klassengruppen in einer $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung. Siehe auch [JW, Theorem 8.4] und [Was, Theorem 13.13].

Vortrag 10: Stetige Distributionen

Behandle [JW, §2]: Wir wollen vervollständigte Gruppenringe als Räume von **Maßen** (auch **stetige Distributionen** genannt) auffassen und insbesondere den Isomorphismus $\mathcal{O}[\![\mathbb{Z}_p]\!] \cong \mathcal{O}[[X]]$ aus einer neuen Perspektive betrachten, in Gestalt der **Mahler-Transformation** (Thm. 2.11). Ein Blick in [Sch, Ch. IV §21] könnte hilfreich sein.

Vortrag 11: Die p-adische Zetafunktion

Behandle [JW, §§3 und 4.1]: Konstruiere die **p-adische Zetafunktion** und beweise ihre Interpolationseigenschaften, insbesondere an **Dirichlet-Charakteren** von p-Potenz-Führer.

Vortrag 12: Die Coleman-Abbildung und Euler-Systeme

Wir wollen uns einen Überblick über [JW, §6] verschaffen. Dazu sollen §6.1 und das zentrale Beispiel §6.2 detailliert behandelt werden. Beweise so viel wie möglich aus §6.3 und führe gemäß §6.4 die nötigen Objekte ein, um die **Coleman-Abbildung** (Def. 6.18) zu definieren. Hierbei muss aus Zeitgründen vieles als Blackbox behandelt werden.
Gib eine Übersicht zu §6.6 über **Euler-Systeme** und deren Rolle in Bezug auf p-adische L-Funktionen.

Vortrag 13: Die Iwasawa-Hauptvermutung

Zum Abschluss des Seminars wollen wir die **Iwasawa-Hauptvermutung** [JW, Theorem 7.11] formulieren und in einem Spezialfall beweisen, nämlich für solche Primzahlen p, welche die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\mu_p)^+$ nicht teilen.
Folge dazu dem Vorgehen von §7, insbesondere muss die Beziehung zwischen **zyklotomischen Einheiten** (§7.4) und Klassenzahlen untersucht werden. Das Ziel ist der Beweis von Theorem 7.28, aus dem die Hauptvermutung für diese speziellen Primzahlen folgt.

Literatur

[Lan] Serge Lang. *Cyclotomic Fields*. Springer-Verlag, 1978.

[Neu] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer-Verlag, 1992.

[NSW] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt und Kay Wingberg. *Cohomology of Number Fields*. 2. Aufl. Springer-Verlag, 2015.

[Nic] Andreas Nickel. *Iwasawa-Theorie*. Vorlesungsmanuskript. 2014.

[JW] Joaquín Rodrigues Jacinto und Chris Williams. *An Introduction to p-adic L-Functions*. https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/cwilliams/lecturenotes/lecture_notes_part_i.pdf. Online Lecture Notes.

[Sch] Peter Schneider. *p-Adic Lie groups*. Bd. 344. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 2011.

[Sha] Romyar Sharifi. *Iwasawa Theory*. https://www.math.ucla.edu/~sharifi/iwasawa.pdf. Online Lecture Notes.

[Tam] Günter Tamme. *$\mathbb{Z}_\ell$-Erweiterungen*. Vorlesungsmanuskript. WS 1977/78.

[Was] Lawrence Washington. *Introduction to Cyclotomic Fields*. Springer-Verlag, 1982.