Universität Heidelberg

Masterarbeit

Frobeniusregularisierung und Limites L-kristalliner Darstellungen

Rustam Steingart

Betreut durch
Prof. Dr. Otmar Venjakob

25. Februar 2019

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die hier vorliegende Masterarbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

25. Februar 2019

(Rustam Steingart)

Zusammenfassung

Deutsch

Sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung und G_L die absolute Galoisgruppe von L. In dieser Arbeit verallgemeinern wir Ergebnisse über kristalline Darstellungen und ihre Limites aus [Ber04] auf den Fall kristalliner und L-analytischer G_L-Darstellungen. Wir zeigen, dass ein Limes von Faktordarstellungen von Gittern kristalliner und L-analytischer G_L-Darstellungen mit Hodge-Tate-Gewichten in $[a, b]$ wieder kristallin und L-analytisch mit Hodge-Tate-Gewichten in $[a, b]$ ist. Ein wichtiges Zwischenergebnis ist die Frobeniusregularisierung über verzweigten Wittvektoren.

English

Let $L/\mathbb{Q}_p$ be a finite extension and denote by G_L the absolute Galois group of L. In this thesis, we generalize results regarding limits of quotients of lattices of crystalline representations from [Ber04] to the crystalline and L-analytic case. We show that a limit of quotients of lattices of crystalline and L-analytic representations with Hodge-Tate weights in $[a, b]$ is crystalline and L-analytic with Hodge-Tate weights in $[a, b]$. We also prove an important intermediate result about the Frobenius regularisation for ramified Wittvectors.

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Einleitung

Wir geben eine Übersicht über die Resultate im zyklotomischen Fall und das Vorgehen in dieser Arbeit. Eine ausführliche Erklärung der Objekte im Lubin-Tate-Fall geben wir im nächsten Kapitel. In [Ber04] zeigt Berger, dass der Limes von Gittern kristalliner Darstellungen mit Hodge-Tate-Gewichten in einem Intervall $[a, b]$ ebenfalls kristallin ist mit Hodge-Tate-Gewichten in $[a, b]$. Eine wichtige Rolle bei dem Beweis dieser Aussage spielt die Kategorienäquivalenz zwischen Gittern kristalliner Darstellungen und der Kategorie der Wachmoduln. Einem Gitter einer kristallinen Darstellung T kann man seinen (φ, Γ)-Modul

$$D(T) = (\mathrm{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{\mathrm{Ker}(\chi_{cyc})}$$

zuordnen. Dieser ist ein Modul über der p-adischen Vervollständigung $\mathrm{A}_{\mathbb{Q}_p}$ des Laurentreihenrings $\mathbb{Z}_p((X))$. [1] Der Wachmodul einer kristallinen Darstellung T ist ein $\mathbb{Z}_p[[X]]$-Untermodul $\mathrm{N}(T)$ von $D(T)$, der alle Informationen über T enthält. Man erhält einerseits T aus

$$D(T) = \mathrm{A}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} \mathrm{N}(T)$$

zurück. Andererseits gibt es einen Isomorphismus

$$D_{cris}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T) \cong (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{N}(T))/X(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{N}(T)).$$

Die Strategie bei dem Beweis von [Ber04, Theorem IV.2.1] besteht darin, für einen Limes kristalliner Darstellungen einen Wachmodul zu konstruieren und aus oben erwähnter Äquivalenz zu folgern, dass der Limes bereits kristallin ist. Dabei ist es wichtig, dass für zwei Gitter kristalliner Darstellungen T_1, T_2 mit

$$T/p^nT = T_1/U_1 = T_2/U_2$$

der Schnitt der Bilder

$$N(T_i) \to D(T/p^nT)$$

genügend Informationen enthält. Dazu zeigt Berger, dass für Gitter positiver Darstellungen $U \subset T$ mit Hodge-Tate-Gewichten in $[-r, 0]$

$$X^r(\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} T/p^nT)^{\mathrm{Ker}(\chi_{cyc})} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{N}(T) \to D(T/U))$$

gilt (vgl. [Ber04, Cor. IV.2.3.]). Dieses Resultat leitet Berger aus dem entsprechenden Ergebnis über A^+ ab. Dabei wird der Kokern der Inklusion $\mathrm{N}(T) \subset (\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} T)$ durch

$$X^r(\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} T) \subset (\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} \mathrm{N}(T))$$

[1] Die Definition von A und A^+ kann man im nächsten Kapitel nachlesen.

abgeschätzt in dem Sinne, dass

$$X^r \operatorname{coker}(\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} \mathrm{N}(T) \hookrightarrow \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} T) = 0$$

gilt (vgl. [Ber04, Theorem III.3.1.]). Eine wichtige Zutat bei diesem Theorem ist die Frobeniusregularisierung (*regularisation par le Frobenius*), welche in [Ber02] entwickelt wird. Da es sich bei $\mathrm{A}^+ \otimes T$ und $\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p[[X]]} \mathrm{N}(T)$ um freie A^+-Moduln handelt, besteht der Beweis der obigen Inklusion darin, zu zeigen, dass eine gewisse Matrix Koeffizienten in A^+ hat. Die Frobeniusregularisierung besagt, dass für Matrizen $X, Y \in \mathrm{Mat}(\tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}, d)$ und $M \in \mathrm{Mat}(\tilde{\mathrm{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}, d)$ mit

$$\varphi(M) = XMY$$

bereits $M \in \mathrm{Mat}(\tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}, d)$ gilt. Dieses Ergebnis ist von analytischer Natur und die Ringe $\tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}, \tilde{\mathrm{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ werden durch einen Vervollständigungsprozess aus Unterringen des Wittrings $W(\mathbb{C}_p^\flat)$ gewonnen. Durch geschickte Argumentation erhält man daraus ein entsprechendes Kriterium für Matrizen über $\mathrm{B}^+ = \mathrm{A}^+[\frac{1}{p}]$.

Sei $L \subset \mathbb{C}_p$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Ganzheitsring o_L und Uniformisierendem π_L. Unter einem Gitter einer L-linearen G_L-Darstellung verstehen wir einen freien Modul T über o_L mit einer stetigen Operation der absoluten Galoisgruppe G_L von L. Ist $V = L \otimes_{o_L} T$ Hodge-Tate, so zerfällt $\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ in ein Produkt

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \prod_\sigma \mathbb{C}_p \otimes_{\sigma, L} V,$$

wobei σ die $\mathbb{Q}_p$-Einbettungen $L \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ durchläuft. Die Darstellung V heißt L-analytisch, wenn die Hodge-Tate-Gewichte für alle Einbettungen $\sigma \neq \mathrm{id}$ trivial sind. In [KR09] zeigen Kisin und Ren eine analoge Äquivalenz zwischen Gittern kristalliner und L-analytischer G_L-Darstellungen[2], welche in [KR09] als L-kristalline Darstellungen bezeichnet werden, und einer analog definierten Kategorie von Wachmoduln. Ziel dieser Arbeit ist es, die Konstruktion aus [Ber04] mit den Objekten aus [KR09] zu verbinden und so entsprechende Resultate im Lubin-Tate-Fall zu erhalten. Wir stützen unsere Betrachtungen auf Ergebnisse aus [SV18]. Nach einer Einführung in die benötigten Begriffe aus der p-adischen Hodge-Theorie und der Theorie von Lubin-Tate (φ_L, Γ_L)-Moduln konstruieren wir über den verzweigten Wittvektoren $\tilde{\mathrm{B}} = W(\mathbb{C}_p^\flat)_L[1/\pi_L]$ den Ring der überkonvergenten Wittvektoren $\tilde{\mathrm{B}}^\dagger$ und seine Vervollständigung $\tilde{\mathrm{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$. Der Ring $\tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ ist die Vervollständigung des Rings der ganzen Wittvektoren $\tilde{\mathrm{B}}^+ = W(o_{\mathbb{C}_p^\flat})_L[1/\pi_L]$ bezüglich einer Fréchet-Topologie. Der relative Frobenius $x \mapsto x^q$ induziert durch komponentenweise Anwendung einen Frobenius φ auf $\tilde{\mathrm{B}}$, welcher sich auf $\tilde{\mathrm{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ fortsetzt. Wir zeigen ein entsprechendes Regularisierungsresultat und erhalten, dass für Matrizen $X, Y \in \mathrm{Mat}(\tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}, d)$ und $M \in \mathrm{Mat}(\tilde{\mathrm{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}, d)$ mit

$$\varphi(M) = XMY$$

[2] Kisin und Ren behandeln allgemeiner L-lineare G_K-Darstellungen. Wir machen die vereinfachende Annahme $L = K$.

bereits $M \in \mathrm{Mat}(\tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}, d)$ gilt. Einer Darstellung T kann man ihren Lubin-Tate (φ_L, Γ_L)-Modul $D_{LT}(T)$ durch

$$D_{LT}(T) := (\mathrm{A} \otimes_{o_L} T)^{\mathrm{Ker}(\chi_{LT})}$$

zuordnen, wobei $\chi_{LT}\colon G_L \to o_L^\times$ den Lubin-Tate-Charakter bezeichnet. Dieser ist ein Modul über dem Ring A_L, welcher die π_L-adische Vervollständigung des Laurentreihenrings $o_L((\omega_{LT}))$ ist. Für ein Gitter T einer kristallinen und L-analytischen G_L-Darstellung $V = L \otimes_{o_L} T$ konstruieren Kisin und Ren einen Wachmodul, welchen wir mit $\mathrm{N}(T) \subset D_{LT}(T)$ bezeichnen. Ist die Darstellung zusätzlich positiv mit Hodge-Tate-Gewichten in $[-r, 0]$, so gilt

$$\mathrm{N}(T) \subset D^+_{LT}(T) = (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T)^{\mathrm{Ker}(\chi_{LT})}.$$

Fassen wir den Vergleichsisomorphismus

$$\mathrm{A} \otimes_{o_L} T \cong \mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_L} D_{LT}(T)$$

als Identifikation auf, erhalten wir eine Inklusion

$$\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \subset \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T.$$

Mithilfe der Frobeniusregularisierung können wir den Kokern dieser Inklusion durch

$$\omega_{LT}^r(\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T) \subset \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$$

abschätzen. Dies verschärft [SV18, Proposition 1.22]. Dort wird gezeigt, dass für die Summe $s \geq r$ der additiven Inversen der Hodge-Tate-Gewichte von T

$$\omega_{LT}^s(\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T) \subset \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$$

gilt. Für zwei kristalline L-analytische Darstellungen mit Hodge-Tate-Gewichten in $[-r, 0]$, welche modulo π_L^n für $n \gg 0$ isomorph sind, zeigen wir, dass ihre Wachmoduln modulo $\pi_L^{n-\alpha(r)}$ isomorph sind mit einem Korrekturterm $\alpha(r)$. Im Anschluss untersuchen wir für ein Untergitter $U \subset T$ das Bild von

$$\mathrm{N}(T) \to D_{LT}(T/U)$$

und zeigen

$$\omega_{LT}^r(\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U)^{\mathrm{Ker}(\chi_{LT})} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{N}(T) \to D_{LT}(T/U)).$$

Diese Aussage spielt technisch eine besonders wichtige Rolle, da die linke Seite definiert werden kann, ohne den Wachmodul zu kennen, weshalb man für ein beliebiges Gitter T einer L-linearen Darstellung und Gitter kristalliner L-analytischer Darstellungen T_i mit $T/\pi_L^i T = T_i/U_i$, einen Wachmodul für T aus den Wachmoduln der T_i rekonstruieren kann. Der Fall $U_i = \pi_L^i T_i$ lässt sich besonders leicht behandeln, da man den projektiven Limes der $\mathrm{N}(T_i)$ bilden kann und dieser sich für i groß genug stabilisiert, da die $\mathrm{N}(T_i)$ für große i isomorph werden modulo $\pi_L^{i-\alpha(r)}$. Sind die U_i beliebige Untergitter und der Rang der T_i nicht bekannt, können wir obige Inklusion nutzen, um die Bilder der $\mathrm{N}(T_i)$ besser zu verstehen. Dies führt uns zu dem zentralen Ergebnis über Limites kristalliner L-analytischer Darstellungen.

Theorem (vgl.4.13, 5.5)**.** *Sei T ein Gitter einer L-linearen G_L-Darstellung und für $i \in \mathbb{N}$ seien T_i Gitter kristalliner L-analytischer Darstellungen. Seien $a \leq b \in \mathbb{Z}$ und es gelte:*

1. *Die T_i bilden ein projektives System von G_L-Darstellungen.*
2. *$U_i \subset T_i$ seien Untergitter, sodass $V_i = U_i \otimes_{o_L} L = T_i \otimes_{o_L} L$ gilt.*
3. *Die Hodge-Tate-Gewichte von V_i liegen in $[a, b]$.*
4. *Es gibt Isomorphismen*
$$T/\pi_L^i T \cong T_i/U_i$$
für alle i, welche kompatibel mit den Übergangsabbildungen auf beiden Seiten sind.

Dann ist T ebenfalls kristallin und L-analytisch mit Hodge-Tate-Gewichten in $[a, b]$.

Besonders an diesem Setting ist, dass wir keine Bedingungen an den Rang der Gitter T_i stellen. Insbesondere kann dieser sich von dem Rang von T unterscheiden. Wir zeigen, dass $\varprojlim_i T_i/U_i$ kristallin ist. In diesem Setting können wir im Allgemeinen nicht erwarten, dass $\varprojlim T_i$ kristallin ist. Unser Beweis dieses Satzes ist detaillierter ausgeführt als [Ber04, Theorem IV.2.1] und stützt sich auf die Kategorienäquivalenz aus [KR09]. Anders als Berger fordern wir, dass die T_i ein projektives System bilden. Die technischen Gründe dafür werden im entsprechenden Kapitel erläutert. In [Ber04] werden $\mathbb{Q}_p$-lineare Darstellungen von G_F betrachtet, wobei F der Quotientenkörper der unverzweigten Wittvektoren über einem perfekten Körper der Charakteristik p ist. In der uns vorliegenden Situation fordern wir nicht, dass $L/\mathbb{Q}_p$ unverzweigt ist und betrachten L-lineare Darstellungen. Durch die Forderung, dass $L/\mathbb{Q}_p$ endlich ist, ist in unserem Fall der Restklassenkörper $\kappa = o_L/\pi_L o_L$ stets endlich. Diese Tatsache wird in den Beweis des obigen Theorems einfließen. Die betroffene Stelle wird in [Ber04] nicht ausgeführt und uns ist nicht bekannt, ob die Endlichkeit des Restklassenkörpers auch im zyklotomischen Fall benötigt wird.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Otmar Venjakob herzlich für den spannenden Themenvorschlag und die Betreuung meiner Arbeit danken. Ferner möchte ich mich bei Benjamin Kupferer für seine hilfreichen Anmerkungen zu einer jüngeren Version der Arbeit bedanken.

2 Grundlagen und Notationen

Sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung mit Bewertungsring o_L, Uniformisierendem π_L und Restklassenkörper κ. Wir fixieren eine Einbettung $L \to \mathbb{C}_p$ und normieren die p-adische Bewertung auf $\mathbb{C}_p$ derart, dass $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p}(\pi_L) = 1$ und $|\pi_L|_{\mathbb{C}_p} = \frac{1}{q}$ gilt, wobei q die Kardinalität von κ bezeichne. Für eine o_L-Algebra R bezeichnen wir mit $W(R)_L$ den Ring der verzweigten Wittvektoren (vgl. [Sch17, Def 1.1.9.]). Wir notieren mit

$$\begin{aligned}[\cdot] : R &\to W(R)_L \\ x &\mapsto (x, 0, \dots)\end{aligned}$$

die multiplikative Teichmüller-Abbildung. Ist $\mathrm{char}(R) = p$, so bezeichnen wir mit ϕ_q den relativen Frobeniusendomorphismus $x \mapsto x^q$ und setzen $\varphi = W(\phi_q)_L$.

Lubin-Tate (φ_L, Γ_L)-Moduln

Wir geben eine Übersicht über die Grundlegenden Begriffe über Lubin-Tate-(φ_L, Γ_L)-Moduln. Wir halten uns bei der Notation an [Sch17].
Sei $\phi(X) \in o_L[[X]]$ eine Frobenius-Potenzreihe zum Uniformisierendem π_L, das bedeutet

- $\phi(X) = \pi_L X +$ Terme höherer Ordnung
- $\phi(X) = X^q \mod \pi_L o_L[[X]]$.

Man kann zeigen, dass es ein eindeutiges kommutatives Lubin-Tate Gruppengesetz $F_\phi(X, Y)$ über o_L gibt mit $\phi \in \mathrm{End}_{o_L}(F_\phi)$. Ferner gibt es einen eindeutigen injektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned}o_L &\to \mathrm{End}_{o_L}(F_\phi) \\ a &\mapsto [a]_\phi(X) = aX + \text{Terme höherer Ordnung}\end{aligned}$$

mit $[\pi_L]_\phi(X) = \phi(X)$. Durch dieses formale Gruppengesetz wird

$$\mathfrak{M} := \{z \in \overline{\mathbb{Q}_p} \mid |z| < 1\}$$

mit der Addition

$$z_1 +_{F_\phi} z_2 := F_\phi(z_1, z_2)$$

zu einer abelschen Gruppe und $z \mapsto [a]_\phi(z)$ wird zu einem Gruppenendomorphismus, was $\mathfrak{M}$ via $a \cdot_{F_\phi} z := [a]_\phi(z)$ eine o_L-Modulstruktur gibt. Wir bezeichnen mit L_n

den Erweiterungskörper von L, der durch Adjunktion der π^n-Torsionspunkte von $\mathfrak{M}$ hervorgeht. Man kann zeigen, dass es sich hierbei um eine endliche galoissche Erweiterung handelt und wir setzen

$$L_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n.$$

Es gibt ferner einen stetigen Isomorphismus

$$\chi_{LT} \colon \Gamma_L := \mathrm{Gal}(L_\infty/L) \xrightarrow{\cong} o_L^\times.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_n$ die π_L^n-Torsionspunkte von $\mathfrak{M}$ und setzen

$$T := \varprojlim_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$$

mit den Übergangsabbildungen $x \mapsto [\pi_L]_\phi(x)$. Der o_L-Modul T wird als Tate-Modul bezeichnet und ist frei von Rang 1. Der Tilt von $\mathbb{C}_p$ ist definiert als $\mathbb{C}_p^\flat := \mathrm{Frac}(o_{\mathbb{C}_p^\flat})$ mit

$$o_{\mathbb{C}_p^\flat} := \varprojlim o_{\mathbb{C}_p}/(\pi_L),$$

wobei die Übergangsabbildungen durch $x \mapsto x^q$ gegeben sind. Man kann zeigen, dass die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \varprojlim o_{\mathbb{C}_p} &\to o_{\mathbb{C}_p^\flat} \\ (a_i)_i &\mapsto (a_i \mod \pi_L)_i \end{aligned}$$

eine multiplikative Bijektion ist. Durch

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}((a_i)_i) := \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p}(a_0)$$

ist eine nicht-archimedische Bewertung auf $o_{\mathbb{C}_p^\flat}$ definiert, die sich via

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}\left(\frac{x}{y}\right) := \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x) - \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(y)$$

auf $\mathbb{C}_p^\flat$ fortsetzen lässt.

Lemma 2.1. *$\mathbb{C}_p^\flat$ ist ein vollständiger, algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p mit Bewertungsring $o_{\mathbb{C}_p^\flat}$ und die G_L-Wirkung, welche von der Wirkung auf $\mathbb{C}_p$ induziert wird, ist stetig.*

Beweis. Vgl. [Sch17, Lemma 1.4.7, Lemma 1.4.10 und Lemma 1.4.13] □

Wir zeichnen zwei Elemente von $\mathbb{C}_p^\flat$ aus: Ist $\tau = (y_n)_{n \geq 1} \in T$ ein o_L-Erzeuger von T, erhalten wir, da $\phi(X) = X^q \mod \pi_L$ gilt, durch

$$\overline{\omega} := (\overline{0}, \overline{y_1}, \dots)$$

ein Element in $\mathbb{C}_p^\flat$. Es gilt

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\overline{\omega}) = \frac{q}{(q-1)}$$

(Vgl. [Sch17, Lemma 1.4.14]). Setzen wir andererseits $z_0 = \pi_L$ und wählen sukzessive $z_n \in \mathbb{C}_p$ mit $z_n^q = z_{n-1}$ erhalten wir

$$\tilde{\pi} := (z_n)_n \in o_{C_p^\flat}.$$

Offenbar gilt $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\tilde{\pi}) = 1$, was für spätere Berechnungen praktisch ist.
Wir bezeichnen mit A_L die π_L-adische Vervollständigung des Laurentreihenrings $o_L((X))$. Die Elemente von A_L lassen sich darstellen als Reihen der Form

$$f(X) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X^i$$

mit $a_i \to 0$ für $i \to -\infty$. Da für jedes $a \in o_L$ die Reihe $[a]_\phi(X)$ kein konstantes Glied hat, kann man zeigen, dass für $\gamma \in \Gamma_L$ und $f \in \mathrm{A}_L$ die Ausdrücke

$$f^\gamma(X) := f([\chi_{LT}(\gamma)]_\phi(X))$$

und

$$\varphi_L(f) := f([\pi_L]_\phi(X))$$

sinnvoll sind und wieder in A_L liegen. Da χ_{LT} ein Ringhomomorphismus ist, erhält A_L auf diese Weise eine Γ_L-Operation und φ_L ist ein Endomorphismus von A_L, der mit der Γ_L-Wirkung vertauscht. A_L trägt einerseits die π_L-adische Topologie, welche auch starke Topologie genannt wird, andererseits lässt sich auf A_L eine feinere, sogenannte schwache Topologie definieren. Eine Umgebungsbasis der 0 ist durch

$$U_{m,n} := X^m o_L[[X]] + \pi_L^n \mathrm{A}_L \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}$$

gegeben. A_L wird zu einer hausdorffschen vollständigen topologischen o_L-Algebra für beide Topologien und sowohl φ_L als auch die Γ_L-Wirkung sind stetig für die schwache Topologie (vgl. [Sch17, Lemma 1.7.6., Proposition 1.7.8]). Ist M ein endlich erzeugter A_L-Modul, so kann man M mit einer natürlichen Topologie versehen. Dazu versteht man M als Faktormodul eines freien A_L-Moduls, nimmt die Quotiententopologie der Produkttopologie der schwachen Topologie auf A_L und zeigt, dass diese von Wahlen unabhängig ist.

Definition 2.2. *Ein (φ_L, Γ_L)-**Modul** ist ein endlich erzeugter A_L-Modul mit einem φ_L-linearen Endomorphismus φ_M und einer semilinearen stetigen Γ_L-Wirkung, welche mit φ_M kommutiert. Ein (φ_L, Γ_L)-Modul heißt étale, wenn die linearisierte Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_M^{lin} \colon \mathrm{A}_L \otimes_{\varphi_L, \mathrm{A}_L} M &\to M \\ a \otimes m &\mapsto a\varphi_M(m) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Oft ist es hilfreich, den Ring A_L als Teilring von $\tilde{\mathrm{A}} := W(\mathbb{C}_p^\flat)_L$ aufzufassen. Bekanntlich verfügt $\tilde{\mathrm{A}}$ über einen Frobenius-Endomorphismus φ, welcher durch den q-Frobenius auf $\mathbb{C}_p^\flat$ induziert wird. Ferner operiert G_L komponentenweise auf $\tilde{\mathrm{A}}$ und die Wirkung ist stetig für die schwache Topologie auf $\tilde{\mathrm{A}} = \prod_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}_p^\flat$, welche die Produkttopologie der $\mathbb{C}_p^\flat$ ist. In [Sch17, Lemma 2.1.11.] wird eine Abbildung $\{\cdot\} : T \to W(\mathbb{C}_p^\flat)_L$ konstruiert, welche $\varphi(\{x\}) = [\pi_L]_\phi(\{x\})$ erfüllt. Wir setzen

$$\omega_{LT} := \{\overline{\omega}\}.$$

Es gilt $\omega_{LT} \equiv [\overline{\omega}] \mod \pi_L$. Da alle Komponenten von $\overline{\omega}$ in L_∞ liegen, wird $\overline{\omega}$ von

$$H_L := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L_\infty)$$

fixiert. Aus der Konstruktion von $\{\}$ geht hervor, dass dies auch auf ω_{LT} zutrifft. Wir setzen

$$\mathrm{E}_L := \kappa((\overline{\omega})) \subset \mathbb{C}_p^\flat$$

und bezeichnen mit $\mathrm{E}^{\mathrm{sep}}$ den separablen Abschluss von E_L in $\mathbb{C}_p^\flat$. Es gilt ferner $(\mathrm{E}^{\mathrm{sep}})^{H_L} = \mathrm{E}_L$.

Satz 2.3. *Die Zuordnung $X \mapsto \omega_{LT}$ induziert eine o_L-Algebren Einbettung*

$$j : \mathrm{A}_L \to W(\mathrm{E}_L)_L \subset \tilde{\mathrm{A}},$$

welche topologisch für die schwachen Topologien ist. Die Abbildung j ist verträglich mit dem Frobenius und der Wirkung von Γ_L auf beiden Seiten. Das heißt

- $j([\pi_L]_\phi(f)) = \varphi(j(f))$
- $j([\chi_{LT}(\gamma)]_\phi(f)) = j(f)^\gamma$

für alle $f \in \mathrm{A}_L$ und $\gamma \in \Gamma_L$.

Von nun an identifizieren wir A_L mit seinem Bild in $\tilde{\mathrm{A}}$. Wir bezeichnen mit A die π_L-adische Vervollständigung der maximal ganzen unverzweigten Erweiterung von A_L in $W(\mathrm{E}^{\mathrm{sep}})_L$. Dann ist A ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper $\mathrm{E}^{\mathrm{sep}}$. Man kann ferner zeigen, dass

$$\mathrm{A}^{H_L} = \mathrm{A}_L$$

gilt (vgl. [Sch17, Lemma 3.1.6.]). Wir setzen darüber hinaus

$$\tilde{\mathrm{B}} := \tilde{\mathrm{A}}[1/\pi_L],$$

$$\mathrm{B} := \mathrm{A}[1/\pi_L]$$

und

$$\mathrm{B}_L := \mathrm{A}_L[1/\pi_L].$$

Die Inklusion $o_{\mathbb{C}_p^\flat} \subset \mathbb{C}_p^\flat$ zeigt, dass $\tilde{\mathrm{A}}^+ := W(o_{\mathbb{C}_p^\flat})_L$ ein Teilring von $\tilde{\mathrm{A}}$ ist. Per Definition sind das diejenigen $x = (x_i)_i$ in $\tilde{\mathrm{A}}$ mit $x_i \in o_{\mathbb{C}_p^\flat}$ für alle i. Andererseits können wir $x \in \tilde{\mathrm{A}}$ in seiner π_L-adischen Reihendarstellung schreiben und erhalten

$$x = \sum_{n \geq 0} \pi_L^n [x_n^{q^{-n}}].$$

Ein $y \in \mathbb{C}_p^\flat$ ist genau dann ganz, wenn y^q dies ist, weshalb

$$\tilde{\mathrm{A}}^+ = \left\{ x = \sum_{k \geq 0} \pi_L^k [y_k] \mid y_k \in o_{\mathbb{C}_p^\flat} \right\} \tag{2.1}$$

gilt. Wir setzen $\mathrm{A}^+ := \tilde{\mathrm{A}}^+ \cap \mathrm{A}$ und $\mathrm{A}_L^+ := \tilde{\mathrm{A}}^+ \cap \mathrm{A}_L$.

Bemerkung 2.4. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

(i) $\tilde{\mathrm{A}}^+ \cap \pi_L^n \tilde{\mathrm{A}} = \pi_L^n \tilde{\mathrm{A}}^+$.

(ii) $\mathrm{A} \cap \pi_L^n \tilde{\mathrm{A}} = \pi_L^n \mathrm{A}$.

(iii) $\mathrm{A}^+ \cap \pi_L^n \mathrm{A} = \pi_L^n \mathrm{A}^+$.

(iv) $\mathrm{A}_L^+ \cap \pi_L^n \mathrm{A} = \pi_L^n \mathrm{A}_L^+$.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist per Definition gegeben. Sei im Folgenden stets $n \geq 1$.
Eigenschaft (i) ergibt sich sofort aus der Darstellung (2.1).
Für (ii) sei $x \in \mathrm{A} \cap \pi_L^n \tilde{\mathrm{A}}$, dann ist x insbesondere in $\pi_L^{n-1} \tilde{\mathrm{A}}$ und wir können das Problem, da $\tilde{\mathrm{A}}$ und A nullteilerfrei sind, auf den Fall $n = 1$ reduzieren. Wäre $x \in \mathrm{A} \backslash \pi_L \mathrm{A}$, dann wäre x in $\mathrm{A}^\times$ und daher auch in $\tilde{\mathrm{A}}$ invertierbar. Das stünde im Widerspruch zu $x \in \pi_L \tilde{\mathrm{A}}$.
Eigenschaft (iii) folgt aus (i) und (ii).
Da die G_L-Wirkung auf A semilinear ist und folglich π_L fixiert, erhalten wir (iv) aus (iii) indem wir zu H_L-Invarianten übergehen. □

Lemma 2.5. *Es gilt $\mathrm{A}_L^+ = o_L[[\omega_{LT}]]$.*

Beweis. Der Ring $\tilde{\mathrm{A}}^+$ ist nach [Sch17, Proposition 1.1.18.] π_L-adisch vollständig. Da auch A_L vollständig ist, erhalten wir, dass A_L^+ π_L-adisch vollständig ist. Dass $o_L[[\omega_{LT}]]$ vollständig ist, folgt aus der Vollständigkeit von o_L. Insgesamt genügt es daher, die Aussage modulo π_L^n für alle n zu zeigen. Der Fall $n = 1$ ergibt sich aus $\mathrm{A}_L/\pi_L = \mathrm{E}_L = \kappa((\overline{\omega}))$ und $\mathrm{E}_L^+ := \mathrm{E}_L \cap o_{\mathbb{C}_p^\flat} = o_{\mathrm{E}_L} = \kappa[[\overline{\omega}]]$. Ferner ist die Inklusion

$o_L[[\omega_{LT}]] \subset \mathrm{A}_L^+$ klar. Wir erhalten für alle n ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & o_L[[\omega_{LT}]]/(\pi_L^n) \arrow[r, "\cdot\pi_L"] \arrow[d] & o_L[[\omega_{LT}]]/(\pi_L^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \kappa[[\omega_{LT}]] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{A}_L^+/(\pi_L^n) \arrow[r, "\cdot\pi_L"] & \mathrm{A}_L^+/(\pi_L^{n+1}) \arrow[r] & \mathrm{A}_L^+/(\pi_L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die Aussage folgt per Induktion über $n \geq 1$ aus dem Fünferlemma. □

Lemma 2.6. *Der Ring* $\mathrm{B}_L^+ = \mathrm{A}_L^+\left[\frac{1}{\pi_L}\right]$ *ist ein Hauptidealring.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass A_L^+ ein regulärer noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal (π_L, ω_{LT}) ist. Nach dem Satz von Auslander-Buchsbaum (vgl. [AB59, Theorem 5]) ist dieser faktoriell. Daher ist auch B_L^+ faktoriell und da (π_L, ω_{LT}) in B_L^+ kein Primideal mehr ist, hat jedes Primideal in B_L^+ höchstens Höhe 1. In einem faktoriellen Ring ist jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal. Denn ist $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1, erhalten wir, da der Ring faktoriell ist, dass x einen irreduziblen Teiler f hat, welcher bereits in $\mathfrak{p}$ liegt und (f) ein Primideal ist. Da $\mathfrak{p}$ von Höhe 1 vorausgesetzt war, muss bereits $(f) = \mathfrak{p}$ gelten. Es bleibt zu zeigen, dass ein noetherscher Integritätsring R, in dem jedes Primideal ein Hauptideal ist, bereits ein Hauptidealring ist. Angenommen es gäbe ein Ideal, welches kein Hauptideal ist. Dann wäre die Menge aller Nicht-Hauptideale von R nicht-leer und besäße ein maximales Element I. Offenbar müsste I notwendig ein echtes Ideal sein. Da I kein Hauptideal wäre, dürfte es insbesondere kein Primideal sein. Wäre $fg \in I$, aber $f, g \notin I$, so wäre $I \subsetneq (I, f)$ und daher (I, f) ein Hauptideal. Sei $(I, f) = (h_1)$ und man betrachte das Ideal $(I : f) := \{r \in R | rf \in I\}$. Dann wäre $g \in (I : f)$ und $I \subset (I : f)$ und daher $(I : f)$ ein Hauptideal etwa $(I : f) = (h_2)$. Wir behaupten $I = (h_1 h_2)$. Zunächst hätten wir $I \subset (h_1)$ und daher wäre $i \in I$ von der Form $i = x_1 h_1$. Dann wäre $x_1 f \in x_1 R h_1 \subset I$ und somit $x_1 = y h_2$ für ein geeignetes $y \in R$. Dann wäre $i = y h_1 h_2 \in (h_1 h_2)$. Betrachtet man andererseits

$$h_1 h_2 \in (I, f)(h_2) = (I + Rf)h_2 = Ih_2 + R(fh_2) \subset I,$$

folgt $(h_1 h_2) \subset I$. Ein Widerspruch zu der Annahme, dass I kein Hauptideal ist. □

Lemma 2.7. *Die Inklusion* $\mathrm{A}_L^+ \subset \mathrm{A}_L$ *ist flach.*

Beweis. Bekanntlich sind Lokalisierungen flach, weshalb $\mathrm{A}_L^+[1/\omega_{LT}] = o_L((\omega_{LT}))$ flach über A_L^+ ist. Wie in Lemma 2.6 kann man zeigen, dass $o_L((\omega_{LT}))$ ein Hauptidealring ist. Da über einem Hauptidealring torsionsfreie Moduln stets flach sind, ist A_L flach über $o_L((\omega_{LT}))$. Da die Komposition flacher Morphismen wieder flach ist und ω_{LT} eine Einheit in A_L ist, ist $\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} o_L((\omega_{LT})) = \mathrm{A}_L$ flach über A_L^+. □

Lemma 2.8. *Die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{A}_L^+ \to (\mathrm{A}^+/(\pi_L^n))^{H_L}$$

ist surjektiv für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir betrachten den Fall $n = 1$. Zunächst ist der Kern dieser Abbildung wegen 2.4 durch $\pi_L \mathrm{A}_L^+$ gegeben. Wir betrachten

$$\mathrm{A}_L^+/\pi_L = \kappa[[\overline{\omega}]] = o_{\mathrm{E}_L} = \mathrm{E}_L \cap o_{\mathbb{C}_p^\flat} = (\mathrm{E}^{\mathrm{sep}})^{H_L} \cap o_{\mathbb{C}_p^\flat} = (\mathrm{E}^{sep} \cap o_{\mathbb{C}_p^\flat})^{H_L}.$$

Wegen $\mathrm{A}/(\pi_L) = \mathrm{E}^{\mathrm{sep}}$ ist der rechte Term $(\mathrm{A}^+/(\pi_L))^{H_L}$, was die Surjektivität zeigt. Für den allgemeinen Fall betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{A}_L^+/(\pi_L^n) \arrow[r, "\cdot\pi_L"] \arrow[d] & \mathrm{A}_L^+/(\pi_L^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}_L^+/(\pi_L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{A}^+/(\pi_L^n))^{H_L} \arrow[r, "\cdot\pi_L"] & (\mathrm{A}^+/(\pi_L^{n+1}))^{H_L} \arrow[r] & (\mathrm{A}^+/(\pi_L))^{H_L}. &
\end{tikzcd}$$

Mit dem Schlangenlemma folgt

$$\operatorname{coker}(\mathrm{A}_L^+/(\pi_L^n) \to (\mathrm{A}^+/(\pi_L^n))^{H_L}) \cong \operatorname{coker}(\mathrm{A}_L^+/(\pi_L^{n+1}) \to (\mathrm{A}^+/(\pi_L^{n+1}))^{H_L}).$$

Die Behauptung folgt induktiv aus dem Fall $n = 1$.

□

Grundlegendes über G_L-Darstellungen

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Rep}_{o_L}(G_L)$ die Kategorie der endlich-erzeugten o_L-Moduln mit einer stetigen linearen G_L-Operation. Ferner bezeichnen wir mit $\mathrm{Rep}_{o_L,f}(G_L)$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{Rep}_{o_L}(G_L)$ bestehend aus den Objekten, deren zugrundeliegender o_L-Modul frei ist. Analog bezeichnen wir mit $\mathrm{Rep}_{L,f}(G_L)$ die Kategorie der endlich-dimensionalen L-Vektorräume mit einer stetigen linearen G_L-Operation.

Definition 2.9. *Sei $T \in \mathrm{Rep}_{o_L}(G_L)$. Wir setzen*

$$D_{LT}(T) := (\mathrm{A} \otimes_{o_L} T)^{H_L}.$$

Wir definieren ferner $\varphi_{D_{LT}(T)} := \varphi \otimes \mathrm{id}$ und versehen $D_{LT}(T)$ mit der Γ_L-Wirkung, welche durch die Diagonale G_L-Wirkung auf $\mathrm{A} \otimes_{o_L} T$ induziert wird. Wir definieren für $V = L \otimes_{o_L} T$ analog

$$D_{LT}(V) = L \otimes_{o_L} D_{LT}(T) = (\mathrm{B} \otimes_L V)^{H_L}.$$

Definition 2.10. *Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}^{et}$ die Kategorie der étalen (φ_L, Γ_L)-Moduln. Für ein $M \in \mathfrak{M}$ setzen wir*

$$V(M) := (\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_L} M)^{\varphi=1}.$$

Wobei wir $\varphi = \varphi_A \otimes \varphi_M$ setzen.

Satz 2.11. *Die Funktoren $D_{LT}(\cdot)$ und $V(\cdot)$ sind quasi-invers zueinander und liefern eine exakte Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Rep}_{o_L}(G_L)$ und $\mathfrak{M}^{et}$.*

Beweis. Siehe [Sch17, Theorem 3.3.10]. □

Die p-adische Hodge-Theorie liefert eine Vielzahl interessanter Unterkategorien von $\mathrm{Rep}_{o_L}(G_L)$. Die Eigenschaften dieser Darstellungen spiegeln sich auf der Seite der (φ_L, Γ_L)-Moduln wieder. Im Rahmen dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf die den Darstellungen zugeordneten (φ_L, Γ_L)-Moduln und geben daher lediglich eine Übersicht über die für uns relevanten Begriffe aus der p-adischen Hodge-Theorie.
Für die Definition der Periodenringe B_{dR} und B_{cris} verweisen wir auf [FO, 5.13, 5.15, 6.7]. Wir erinnern an dieser Stelle daran, dass B_{dR} ein diskret bewerteter Körper mit Uniformisierendem t, Ganzheitsring B_{dR}^+ und Restklassenkörper $\mathbb{C}_p$ ist, der über eine G_L-Wirkung verfügt, welche auf t über den zyklotomischen Charakter χ_{cyc} operiert. B_{cris} ist ein Teilring von B_{dR}, welcher t enthält.

Definition 2.12. *Eine Darstellung $V \in \mathrm{Rep}_{L,f}(G_L)$ heißt* ***de Rham*** *(bzw.* ***kristallin****), wenn sie B_{dR}-zulässig (bzw. B_{cris}-zulässig) ist. Das bedeutet*

$$\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \mathbb{B}^{\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)}$$

als G_L-Moduln mit $\mathbb{B} = \mathrm{B}_{dR}$ (bzw. $\mathbb{B} = \mathrm{B}_{cris}$).

Proposition 2.13. *Es gilt $\mathrm{B}_{dR}^{G_L} = L$ und für*

$$D_{dR}(V) := (\mathrm{B}_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$$

gilt

$$\dim_L(D_{dR}(V)) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

Eine Darstellung ist genau dann de Rham, wenn die Dimensionen übereinstimmen.

Beweis. Siehe [FO, 5.24 und 5.27] □

Proposition 2.14. *Sei L_0 die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $L/\mathbb{Q}_p$. Es gilt $\mathrm{B}_{cris}^{G_L} = L_0$ und für*

$$D_{cris}(V) := (\mathrm{B}_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$$

gilt

$$\dim_{L_0}(D_{cris}(V)) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

Eine Darstellung ist genau dann kristallin, wenn die Dimensionen übereinstimmen. Jede kristalline Darstellung ist de Rham.

Beweis. Siehe [FO, 6.29, 6.30, und 6.31] □

Definition 2.15. *Allgemeiner nennen wir $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}(G_L)$* ***kristallin****, wenn die Darstellung $V := L \otimes_{o_L} T$ im obigen Sinne kristallin ist.*

Definition 2.16. *Für $i \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\mathrm{Fil}^i(\mathrm{B}_{dR}) := t^i\mathrm{B}^+_{dR}$. Für einen Teilring $R \subset \mathrm{B}^+_{dR}$ setzen wir $\mathrm{Fil}^i(R) := \mathrm{Fil}^i(\mathrm{B}_{dR}) \cap R$. Dies liefert eine absteigende Filtrierung auf B_{dR} (bzw. R). Da B^+_{dR} ein diskreter Bewertungsring mit Uniformiserendem t und Quotientenkörper B_{dR} ist, erhalten wir*

$$\bigcup_i \mathrm{Fil}^i(\mathrm{B}_{dR}) = \mathrm{B}_{dR}$$

und

$$\bigcap_i \mathrm{Fil}^i(\mathrm{B}_{dR}) = 0.$$

Für eine Darstellung V setzen wir

$$\mathrm{Fil}^i(D_{dR}(V)) = (\mathrm{Fil}^i \mathrm{B}_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \cap D_{dR}(V).$$

Definition 2.17. *Sei $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_L)$ de Rham. Wir sagen $i \in \mathbb{Z}$ ist ein* ***Hodge-Tate-Gewicht*** *von V, falls $\mathrm{Gr}^{-i}(D_{dR}(V)) := \mathrm{Fil}^{-i}(D_{dR}(V))/\mathrm{Fil}^{-i+1}(D_{dR}(V)) \neq 0$ gilt. Die Dimension von $\mathrm{Gr}^{-i}(D_{dR}(V))$ bezeichnen wir als Vielfachheit des Hodge-Tate-Gewichts. Da $D_{dR}(V)$ ein $d := \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$-dimensionaler Vektorraum ist, gibt es mit Vielfachheit gezählt genau d Hodge-Tate-Gewichte.*

Im Kontext dieser Arbeit beschäftigen wir uns stets mit L-linearen Darstellungen von G_L. In diesem Fall trägt $\mathrm{B}_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ zusätzlich eine $\mathrm{B}_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$-Modul Struktur. Entsprechend besitzt $D_{dR}(V)$ eine $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$-Modulstruktur, welche wir genauer erläutern.

Bemerkung 2.18. *Die kanonische Abbildung*

$$L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \to \prod_{\mathfrak{m}} (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)/\mathfrak{m},$$

wobei $\mathfrak{m}$ die maximalen Ideale von $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ durchläuft, ist ein Isomorphismus. Jede Komponente der rechten Seite ist eine Körpererweiterung von L. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{m}_0$ den Kern der Multiplikation $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \to L$.

Beweis. Da $L/\mathbb{Q}_p$ separabel ist, finden wir ein primitives Element $\alpha \in L$ mit Minimalpolynom $f \in \mathbb{Q}_p[X]$, welches über L eine Faktorisierung $f = (X - \alpha)\prod f_i$ mit geeigneten irreduziblen $f_i \in L[X]$ besitzt. Wir erhalten mit dem chinesischen Restsatz

$$L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L = L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p[X]/f \cong L[X]/f \cong L[X]/(X - \alpha) \times \prod_i L[X]/f_i.$$

Die rechte Seite ist ein endliches Produkt von Körpern. Insbesondere entsprechen die maximalen Ideale von $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ Eins-zu-eins den irreduziblen Faktoren von f über L. $\square$

Wir erhalten auf diese Weise eine entsprechende Zerlegung

$$D_{dR}(V) := (\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L} \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}.$$

Definition 2.19. *Eine de Rham Darstellung V in $\mathrm{Rep}_{L,f}(G_L)$ heißt L-analytisch, falls die Filtrierung auf $D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}$ trivial ist für alle $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$. Das bedeutet*

$$\mathrm{Fil}^i(D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}) = D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}$$

für $i \leq 0$ und

$$\mathrm{Fil}^i(D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}) = 0$$

sonst. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Rep}^{cris,an}_{o_L,f}(G_L)$ die Kategorie der freien endlich erzeugten o_L-Darstellungen T mit der Eigenschaft, dass $V := L \otimes_{o_L} T$ kristallin und L-analytisch ist. Unter den Hodge-Tate-Gewichten einer solchen Darstellung verstehen wir stets die Gewichte an der Komponente $\mathfrak{m}_0$. Wir bezeichnen $D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}_0}$ als ***Identitätskomponente*** *von $D_{dR}(V)$.*

Bemerkung 2.20. *Für eine de Rham Darstellung V gibt es, mit Vielfachheiten gezählt, genau $d = \dim_L(V)$ Hodge-Tate-Gewichte an der Komponente $\mathfrak{m}_0$.*

Beweis. Wegen $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L = \prod_{\mathfrak{m}} (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)/\mathfrak{m}$ und $\mathrm{B}_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \mathrm{B}_{dR} \otimes_L (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$. überlegt man sich zunächst, dass

$$\dim_L(D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}) \leq \left[(L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)/\mathfrak{m} : L\right] \dim_L(V)$$

gilt. Da V zusätzlich B_{dR}-zulässig ist, muss

$$\sum_{\mathfrak{m}} \dim_L(D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}) = [L : \mathbb{Q}_p] \dim_L(V)$$

gelten. Aus dem Beweis von Bemerkung 2.18 liest man ab, dass

$$\sum_{\mathfrak{m}} \left[(L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)/\mathfrak{m} : L\right] = [L : \mathbb{Q}_p]$$

gilt. Insbesondere gilt notwendig $\dim_L(D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}}) = \left[(L \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)/\mathfrak{m} : L\right] \dim_L(V)$ und daher ist die L-Dimension von $D_{dR}(V)_{\mathfrak{m}_0}$ genau d. □

Definition 2.21. *Eine L-lineare G_L-Darstellung heißt Hodge-Tate, wenn sie $\mathrm{B}_{HT} := \mathbb{C}_p[t, 1/t]$ zulässig ist. Dabei wirkt $g \in G_L$ auf t über den zyklotomischen Charakter. Das bedeutet $gt = \chi_{cyc}(g)t$.*

Proposition 2.22. *Jede de Rham Darstellung ist Hodge-Tate.*

Beweis. Siehe [FO, 5.30]. □

Wir merken an dieser Stelle an, dass wegen

$$t^i\mathrm{B}_{dR}^+/t^{i+1}\mathrm{B}_{dR}^+ \cong t^i\mathbb{C}_p = \mathbb{C}_p(i) := \mathbb{C}_p\chi_{cyc}^i$$ [1]

die Hodge-Tate-Gewichte einer de Rham Darstellung V genau die jenigen i sind mit $(\mathbb{C}_p(-i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L} \neq 0$.

Bemerkung 2.23. *Sei $V \in \mathrm{Rep}_L(G_L)$. Die kanonische Abbildung*

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to \prod_\sigma \mathbb{C}_p \otimes_{\sigma,L} V$$

ist ein Isomorphismus. Dabei durchläuft σ die $\mathbb{Q}_p$-Einbettungen $L \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ und $z \otimes v$ wird auf $(z \otimes v)_\sigma$ abgebildet. Hier bezeichnet $\mathbb{C}_p \otimes_{\sigma,L} V$ das übliche Tensorprodukt, wobei $\mathbb{C}_p$ von rechts via σ als L-Vektorraum aufgefasst wird.

Beweis. Sei $\alpha \in L$ ein primitives Element von L mit Minimalpolynom f. Da $\mathbb{C}_p$ einen algebraischen Abschluss von L enthält und L über $\mathbb{Q}_p$ separabel ist, gilt

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cong \mathbb{C}_p[X]/(f) \cong \prod_{\sigma: L \to \overline{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{C}_p[X]/(X - \sigma(\alpha)) \cong \prod_{\sigma: L \to \overline{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{C}_p. \tag{2.2}$$

Dabei ist die letze Abbildung durch die Auswertung eines Polynoms auf $\sigma(\alpha)$ gegeben. Der Isomorphismus ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}_p$-Algebren, wenn $\mathbb{C}_p$ auf der linken Seite über die erste Tensorkomponente operiert. Ein Element $(1\otimes\lambda)$ bildet sich dabei auf $(\sigma(\lambda))_\sigma$ ab. Deshalb wird die Abbildung L-linear in der zweiten Komponente, wenn wir die rechte Seite als L-Modul über $\prod \sigma\colon L \to \prod_\sigma \mathbb{C}_p$ auffassen und erhalten einen Isomorphismus

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \to \prod_\sigma \mathbb{C}_p \otimes_{\sigma,L} L.$$

Dabei wird $z\otimes\lambda$ auf $(z\otimes\lambda)_\sigma$ abgebildet. Für eine L-lineare G_L-Darstellung erhalten wir entsprechend

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = (\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L) \otimes_L V = \prod_\sigma \mathbb{C}_p \otimes_{\sigma,L} V.$$

□

Definition 2.24. *Wir bezeichnen mit $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ die Kategorie der freien endlich-erzeugten A_L^+ Moduln N mit einer stetigen semi-linearen Γ_L-Wirkung und einem Homomorphismus $\varphi_N : N \to N[\frac{1}{Q}]$, welcher mit der Γ_L-Wirkung kommutiert. Es gelte ferner, dass die linearisierte Abbildung*

$$\varphi_N^{lin}\colon (\mathrm{A}_L^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+,\varphi_L} N)\left[\frac{1}{Q}\right] \to N\left[\frac{1}{Q}\right]$$

ein Isomorphismus ist und die Γ_L-Wirkung auf $N/\omega_{LT}N$ trivial ist.

[1] $\mathbb{C}_p\chi_{cyc}^i$ ist als Modul $\mathbb{C}_p$ mit der G_L-Wirkung, welche von dem Charakter $\chi_{cyc}^i : G_L \to \mathbb{Z}_p^\times$ induziert wird.

Bemerkung 2.25. *Sei* $N \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$*. Dann ist*

$$M := \mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} N$$

in $\mathfrak{M}^{et}$.

Beweis. M ist als Basiswechsel eines endlich-erzeugten freien Moduls selbst endlich-erzeugt und frei. Wegen $Q(X) = \varphi(X)/X$ gilt $Q(X) = X^{q-1} \mod \pi_L$, weshalb $Q \notin \pi_L A_L$ eine Einheit in A_L ist. Entsprechend gilt

$$M\left[\frac{1}{Q}\right] = M$$

und wir erhalten, dass $\varphi_M{=}\varphi_A{\otimes}\varphi_N$ ein Endomorphismus von M und die linearisierte Abbildung $\varphi_M^{lin}\colon A_L \otimes_{\varphi_L,\mathrm{A}_L} M \to M$ ein Isomorphismus ist. Dass φ_M mit der diagonalen Γ_L-Wirkung vertauscht und diese stetig ist, ergibt sich aus den entsprechenden Eigenschaften der Γ_L-Wirkung auf A_L und N. □

Das nachfolgende tiefe Resultat liefert eine Beschreibung kristallin-analytischer Darstellungen über ihre (φ_L, Γ_L)-Moduln.

Satz 2.26. *Der Funktor* $V(\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \cdot)$ *induziert eine Kategorienäquivalenz zwischen* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ *und der Kategorie* $\mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$.

Beweis. Das ist [KR09, Cor. 3.3.8.]. In der dort gegebenen Definition der Kategorie $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ gibt es eine Zusatzbedingung, welche nach [BSX15, 3.4.13 und 3.4.15] redundant ist. Hier ist zu beachten, dass man die Ergebnisse aus [BSX15] für (in der dortigen Notation) $\mathcal{O}_L(\mathfrak{B})$ anstatt $\mathcal{O}_L(\mathfrak{X})$ anwenden muss. Dass dies ohne Probleme möglich ist, wird in [BSX15, 3.4] erläutert. □

Definition 2.27. *Starten wir mit* $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$, *erhalten wir aus 2.26 einen Modul* $\mathrm{N}(T) \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$, *welchen wir wegen* $\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) = D_{LT}(T)$ *mit einem* A_L^+*-Untermodul von* $D_{LT}(T)$ *identifizieren können. Diesen Modul bezeichen wir als* ***Wachmodul*** *von* T.

Korollar 2.28. *Sei* $T \in \mathrm{Rep}_{o_L}(G_L)$ *frei mit der Eigenschaft, dass es einen freien* A_L^+*-Untermodul* N *von* $D_{LT}(T)$ *gibt, der mit der von* $D_{LT}(T)$ *induzierten* Γ_L*-Wirkung und der Einschränkung von* $\varphi_{D_{LT}(T)}$ *in* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ *liegt und*

$$D_{LT}(T) = \mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} N$$

erfüllt. Dann ist T *in* $\mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$.

Beweis. Wir nutzen die Kategorienäquivalenz 2.11 aus und erhalten

$$T \cong V(D_{LT}(T)) = V(\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} N).$$

Nach 2.26 ist T kristallin-analytisch. □

Bemerkung 2.29. *Sei $V \in \mathrm{Rep}_L(G_L)$. Dann gibt es $T \subset V$ mit $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}(G_L)$ und $L \otimes_{o_L} T = V$.*

Beweis. Sei zunächst $T_0 \subset V$ ein beliebiges o_L-Gitter. Für jedes $\sigma \in G_L$ ist auch $\sigma(T_0)$ ein Gitter und da die G_L-Wirkung stetig ist, erhalten wir, dass

$$H(T_0) := \{\sigma \in G_L \mid \sigma(T_0) = T_0\}$$

eine offene Untergruppe von G_L ist. Da G_L pro-endlich und daher kompakt ist, muss der Index $(G : H(T_0))$ endlich sein. Da L der Quotientenkörper des Hauptidealrings o_L ist, ist eine endliche Summe von Gittern wieder ein Gitter und wir erhalten, dass

$$T := \sum_{\sigma \in G} \sigma(T_0)$$

ein G_L stabiles Gitter in V ist. □

Korollar 2.30. *Sei $V \in \mathrm{Rep}_L(G_L)$ mit der Eigenschaft, dass es einen freien B_L^+-Untermodul M von $D_{LT}(V)$ gibt, der mit der von $D_{LT}(V)$ induzierten Γ_L-Wirkung und der Einschränkung von $\varphi_{D_{LT}(V)}$ die Eigenschaften eines Moduls in $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ mit Ausnahme der Eigenschaft frei über A_L^+ zu sein erfüllt und*

$$D_{LT}(V) = \mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} M$$

erfüllt. Dann ist V in $\mathrm{Rep}_L^{cris,an}(G_L)$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.29 finden wir ein G_L-stabiles Gitter $T \subset V$. Wir setzen

$$N := M \cap D_{LT}(T).$$

Wenn wir zeigen können, dass N in $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ liegt, folgt die Aussage aus 2.28. Da $D_{LT}(T)$ stabil unter φ ist, ist die einzige Eigenschaft, welche nicht auf der Hand liegt, die Freiheit von N über A_L^+. Da ω_{LT} eine Einheit in A_L ist, gilt $\omega_{LT} D_{LT}(T) = D_{LT}(T)$ und der Kern des kanonischen Homomorphismus $N \to M/\omega_{LT}M$ ist $\omega_{LT}N$, weshalb wir $N/\omega_{LT}N$ als o_L-Untermodul von $M/\omega_{LT}M$ auffassen können, was ein L Vektorraum der Dimension $d = \dim_L(V)$ ist. Sei $m_1, \ldots, m_n$ eine B_L^+-Basis von M. Diese liefert wegen $\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} M = D_{LT}(V)$ eine B_L Basis von $D_{LT}(V)$. Man überlegt sich leicht, dass $D_{LT}(T)$ ein A_L-Gitter von $D_{LT}(V)$ ist, und wir finden daher eine ganze Zahl k mit $D_{LT}(T) \subset \bigoplus_i \pi_L^k \mathrm{A}_L m_i$. Entsprechend ist

$$N \subset \bigoplus_i (\pi_L^k \mathrm{A}_L m_i) \cap \bigoplus_i \mathrm{B}_L^+ m_i = \bigoplus_i \pi_L^k \mathrm{A}_L^+ m_i$$

nach 2.4. Denn für $x \in \mathrm{B}_L^+ \cap \pi_L^k \mathrm{A}_L$ finden wir $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\pi_L^m x \in \mathrm{A}_L^+ \cap \pi_L^{m+k} \mathrm{A}_L = \pi_L^{\max\{m+k,0\}} \mathrm{A}_L^+.$$

Insbesondere folgt $x \in \pi_L^k \mathrm{A}_L^+$. Da A_L^+ noethersch ist, ist daher N und somit auch $N/\omega_{LT}N$ endlich erzeugt. Ein endlich-erzeugter torsionsfreier o_L Modul ist, da o_L ein Hauptidealring ist, automatisch frei und wegen $M = N\left[\dfrac{1}{\pi_L}\right]$ wird die Inklusion $N/\omega_{LT}N \subset M/\omega_{LT}M$ ein Isomorphismus, wenn man sie mit L tensoriert. Insbesondere ist $N/\omega_{LT}N$ frei von Rang d über o_L und wir finden eine Basis $\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_d}$ von $N/\omega_{LT}N$ über o_L. Da A_L^+ lokal mit Maximalideal (π_L, ω_{LT}) ist, erhalten wir mit dem Lemma von Nakayama, dass die n_i den endlich erzeugten A_L^+-Modul N bereits erzeugen. Es bleibt zu zeigen, dass die n_i linear unabhängig über A_L^+ sind. Sei dazu

$$\sum_i a_i n_i = 0. \tag{2.3}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $\overline{n_i}$ folgt sofort $a_i \in \omega_{LT}\mathrm{A}_L^+$. Da $\omega_{LT} \in \mathrm{A}_L^+$ kein Nullteiler ist, können wir in (2.3) a_i durch a_i/ω_{LT} ersetzen und folgern per Induktion $a_i \in \bigcap_{k\geq 0} \omega_{LT}^k \mathrm{A}_L^+ = 0$. □

Der Charakter χ_{LT} ist ein prototypisches Beispiel einer kristallinen L-analytischen Darstellung, wie das nachfolgende Lemma zeigt.

Lemma 2.31. *Sei T die zu dem Charakter $\chi_{LT} \colon G_L \to G_L/H_L = \Gamma_L \to o_L^\times$ gehörige o_L-Darstellung. Das bedeutet $T = o_L\eta$ mit $\gamma(\eta) = \chi_{LT}(\gamma)\eta$. Dann ist T kristallin und L-analytisch mit Hodge-Tate-Gewicht 1 an der Identitätskomponente.*

Beweis. Zunächst merken wir an, dass $D_{LT}(T)$ gerade durch $\mathrm{A}_L(\chi_{LT})$ gegeben ist, was als A_L-Modul einfach A_L ist und φ_L wie gewohnt operiert. Die Γ_L-Wirkung ist jedoch durch die getwistete Wirkung $\gamma_{\chi_{LT}}(f(X)) = \gamma(f)\chi_L(\gamma)$ gegeben. Wir schreiben daher $D_{LT}(T) = \mathrm{A}_L\eta$. Dann operiert Γ_L wie gewohnt auf A_L und auf η über den Lubin-Tate-Charakter. Wir zeigen als nächstes, dass der A_L^+ Untermodul $N := \omega_{LT}^{-1}\mathrm{A}_L^+\eta$ mit den von φ_L und Γ_L induzierten Operationen in $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ liegt. N ist offenbar frei von Rang 1 und φ_L schränkt sich ein zu einer φ_L-semilinearen Abbildung

$$\varphi_L \colon N \to \varphi_L(\omega_{LT}^{-1})\varphi_L(\mathrm{A}_L^+) = Q^{-1}\omega_{LT}^{-1}\varphi_L(\mathrm{A}_L^+) \subset Q^{-1}N.$$

Die Darstellungsmatrix von φ_L bezüglich der Basis ω_{LT}^{-1} ist $Q^{-1} \in GL_1(\mathrm{A}_L^+[Q^{-1}])$. Die Reihe

$$g = \frac{[\chi_{LT}(\gamma)](\omega_{LT})}{\omega_{LT}} = \chi_{LT}(\gamma) + \text{Terme höherer Ordnung}$$

ist wegen $\chi_{LT}(\gamma) \in o_L^\times$ eine Einheit und es gilt

$$\gamma(\omega_{LT}^{-1}\eta) = g^{-1}\omega_{LT}^{-1}\chi_{LT}(\gamma)\eta = \omega_{LT}^{-1}\eta + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Das zeigt, dass die Γ_L wirkung trivial modulo $\omega_{LT}N$ ist. Die Basis ω_{LT}^{-1} liefert natürlich auch eine A_L-Basis von $D_{LT}(T)$, weshalb T kristallin und L-analytisch ist. Da jede kristalline Darstellung automatisch de Rham und daher Hodge-Tate ist, genügt es für die Bestimmung der Hodge-Tate-Gewichte die $\mathbb{C}_p$-semilineare Darstellung $\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ zu betrachten. Da wir bereits wissen, dass T eine L-analytische Darstellung ist, sind die Hodge-Tate-Gewichte an allen Komponenten, die nicht die Identitätskomponente sind, trivial. Wegen der Zerlegung aus 2.23 genügt es, die $\mathbb{C}_p$-semilineare Darstellung $\mathbb{C}_p \otimes_{o_L} T$ zu betrachten. Nach [Ser68, III-45 Lemma 2] gibt es ein $s \in \mathbb{C}_p$ mit

$$g(s) = \chi_{LT}\chi_{cyc}^{-1}(g)s$$

für alle $g \in G_L$. Insbesondere folgt $\mathbb{C}_p(1) := \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \chi_{cyc} \cong \mathbb{C}_p \otimes_{o_L} T$ als $\mathbb{C}_p$-semilineare Darstellungen, weshalb das Hodge-Tate-Gewicht an der Identitätskomponente 1 ist, was den Beweis beendet. □

Definition 2.32. *Eine kristalline L-analytische Darstellung heißt **positiv**, wenn ihre Hodge-Tate-Gewichte ≤ 0 sind.*

Diese Namensgebung ist ungünstig und ist daher motiviert, dass die Hodge-Tate-Gewichte die additiven Inversen der Filtrationssprünge auf D_{dR} sind. Eine Darstellung ist positiv, wenn sich die Filtrierung gänzlich in $(\mathrm{B}_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$ abspielt. Eine gegebene kristalline L-analytische Darstellung können wir stets um χ_{LT}^i für $i \in \mathbb{Z}$ geeignet twisten und erhalten so eine positive Darstellung.

3 Regularisierung p-adischer Perioden

Ziel dieses Kapitels ist es, die in [Ber04] gezeigte *regularisation par le Frobenius* auf den Lubin-Tate-Fall zu verallgemeinern. Während Berger in [Ber02] die Ringe $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ anders als in dieser Arbeit konstruiert und später zeigt, dass sie $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ als dichten Unterring bezüglich der Fréchet-Topologie enthalten, definieren wir diese Ringe direkt als Vervollständigung von $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$. Indem wir uns bei den Beweisen an [Ber10] orientieren, können wir die Ergebnisse aus [Ber02] und [Ber04] auf einfachere Weise erhalten.
Referenz für die nachfolgende Definition ist [Col98, Abschnitt I.3], wobei wir die dort gegebene Definiton von w_k an $\tilde{\mathrm{A}} = W(\mathbb{C}_p^\flat)_L$ adaptieren.

Definition 3.1. *Sei $x = \sum_{i\geq 0} \pi^i[x_i] \in \tilde{\mathrm{A}}$. Wir definieren*

$$w_k(x) := \inf_{i\leq k} \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_i).$$

Proposition 3.2. *Die Abbildung w_k hat folgende Eigenschaften:*

(i) $w_k(x) = \infty$ *genau dann, wenn* $x \in \pi^{k+1}\tilde{\mathrm{A}}$.

(ii) $w_k(x+y) \geq \inf\{w_k(x), w_k(y)\}$.

(iii) $w_k(xy) \geq \inf_{i+j\leq k}\{w_i(x) + w_j(y)\}$.

(iv) $w_k(\varphi(x)) = qw_k(x)$.

Beweis. Eigenschaft (i) ist klar. Für (ii) sei ohne Einschränkung $w_k(x) \leq w_k(y)$. Aus der Definition von w_k folgt, dass wir

$$x = \sum_{i=0}^{k} \pi_L^i[x_i] + \pi_L^{k+1}\tilde{x}$$

und

$$y = \sum_{i=0}^{k} \pi_L^i[y_i] + \pi_L^{k+1}\tilde{y}$$

schreiben können mit geeigneten $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathrm{A}}$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}_p^\flat$ mit $w_k(x) = \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\alpha)$. Nach Voraussetzung sind $\sum_{i=0}^k \pi_L^i[x_i]$ und $\sum_{i=0}^k \pi_L^i[y_i]$ Elemente von $[\alpha]\tilde{\mathrm{A}}^+$. Wir erhalten $x + y \in [\alpha]W(o_{\mathbb{C}_p^\flat})_L + \pi_L^{k+1}\tilde{\mathrm{A}}$, woraus $w_k(x+y) \geq w_k(x)$ folgt. Für (iii) betrachten wir

$$xy = (\sum_{l\leq k} \pi^l(\sum_{i+j=l}[x_i][y_j])) + \pi^{k+1}\tilde{z}$$

mit geeignetem $z \in \tilde{\mathrm{A}}$. Die Aussage folgt aus der in (*ii*) gezeigten Dreiecksungleichung zusammen mit der Multiplikativität der Teichmüllerabbildung $[\cdot]$. Eigenschaft (*iv*) gilt, da der Frobenius auf den Komponenten der Wittvektoren durch den q-Frobenius gegeben ist und $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x^q) = q\,\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x)$ für $x \in \mathbb{C}_p^\flat$ gilt. $\square$

Im Folgenden werden wir Zwischenringe $\tilde{\mathrm{A}}^+ \subset \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r} \subset \tilde{\mathrm{A}}$ konstruieren. Wir erinnern daran, dass $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\overline{\omega}) = q/(q-1)$ gilt. Die Ringe $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ sind so konstruiert, dass Nenner mit $[\overline{\omega}]$ auf eine kontrollierte Weise zugelassen werden in dem Sinne, dass $\frac{1}{[\overline{\omega}]}$ kein Element von $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ ist, aber für jedes $k \in \mathbb{N}$ (oder allgemeiner $k \in \mathbb{N}[\frac{1}{q}]$)

$$\frac{\pi_L}{[\overline{\omega}^k]} \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,k}$$

gilt. Der im Nachfolgenden eingeführte Normierungsfaktor $s(r)$ ist von kosmetischer Natur um dies zu gewährleisten.

Lemma 3.3. *Sei* $x = \sum_{k\geq 0} \pi^k [x_k] \in \tilde{\mathrm{A}}$ *und* $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. *Wir setzen*

$$s(r) := rq/(q-1)$$

Dann sind äquivalent:

(i) $\lim_{k\to\infty}(w_k(x) + ks(r)) = \infty$.

(ii) $\lim_{k\to\infty}(\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) + ks(r)) = \infty)$.

In diesem Fall gilt ferner

$$\inf_k(w_k(x) + ks(r)) = \inf_k(\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) + ks(r)).$$

Beweis. Sei $v_k := \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k)$ und sei $w_k := w_k(x)$. Es gilt $w_k = \min(v_0, \ldots, v_k)$ und daher $v_k \geq w_k$, weswegen eine Implikation klar ist. Sei also

$$\lim_{k\to\infty}(\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) + ks(r)) = \infty.$$

Für jedes k finden wir eine natürliche Zahl $i(k)$, sodass $w_k = v_{i(k)}$ gilt und wegen $w_k = \min(v_0, \ldots, v_k)$ gilt $i(k) \leq k$. Auf diese Weise erhalten wir eine wachsende Funktion $i\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Angenommen i sei beschränkt. In diesem Fall gilt

$$w_k + ks(r) = v_{i(k)} + ks(r) \to \infty$$

falls $k \to \infty$. Ist i nicht beschränkt, so muss, da i wachsend ist, notwendig $\lim_{k\to\infty} i(k) = \infty$ gelten. In diesem Fall schreiben wir:

$$w_k + ks(r) = v_{i(k)} + i(k)s(r) + (k - i(k))s(r) \geq v_{i(k)} + i(k)s(r). \tag{3.1}$$

Dabei ist zu beachten, dass $k - i(k) \geq 0$ gilt und nach Voraussetzung $v_{i(k)} + i(k)s(r) \to \infty$ für $k \to \infty$. Das zeigt $\lim_{k\to\infty}(w_k(x) + ks(r)) = \infty$. Wir widmen uns nun dem zweiten Teil. Die Abschätzung

$$\inf_k (w_k(x) + ks(r)) \leq \inf_k (\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) + ks(r))$$

ist wegen $w_k \leq v_k$ stets gegeben. Andererseits ist wegen 3.1

$$w_k + ks(r) \geq v_{i(k)} + i(k)s(r) \geq \inf_i (\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_i) + is(r)).$$

□

Definition 3.4. *Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r} : &= \left\{ x \in \tilde{\mathrm{A}} \mid \lim_{k\to\infty} (\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) + ks(r)) = \infty \textit{ und } \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) + ks(r) \geq 0 \textit{ für alle } k \right\} \\ &= \left\{ x \in \tilde{\mathrm{A}} \mid \lim_{k\to\infty} (w_k(x) + ks(r)) = \infty \textit{ und } w_k(x) + ks(r) \geq 0 \textit{ für alle } k \right\}.\end{aligned}$$

Bemerkung 3.5. *Aus den Eigenschaften von w_k kann man leicht folgern, dass $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ stabil unter Addition und Multiplikation ist. Ferner gilt $\tilde{\mathrm{A}}^+ \subset \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ für alle r und der Frobenius liefert eine Bijektion $\varphi : \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r} \mapsto \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,qr}$. Ist $\sigma \in G_L$, so zeigt $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) = \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\sigma(x_k))$, dass $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ auch G_L-stabil ist.*

Proposition 3.6. *Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und wie zuvor $s(r) = qr/(q-1)$. Zu $x \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ setzen wir $V(x,r) := \inf_k(w_k(x) + ks(r))$. Dann erfüllt $V(\cdot,\cdot)$ folgende Eigenschaften:*

(i) $V(x,r) = \infty$ *genau dann, wenn* $x = 0$.

(ii) $V(x+y,r) \geq \min\{V(x,r), V(y,r)\}$.

(iii) $V(xy,r) \geq V(x,r) + V(y,r)$.

(iv) $V(\varphi(x), qr) = qV(x,r)$.

(v) $V(\pi x, r) = s(r) + V(x,r)$

(vi) $V([\alpha]x, r) = \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\alpha) + V(x,r)$ *für* $\alpha \in \mathbb{C}_p^\flat$.

Ist $r = 0$, so definieren wir für $x \in \tilde{\mathrm{A}}^+$

$$V(x,0) := \inf_k w_k(x).$$

Die Abbildung $V(\cdot,0)$ besitzt die selben Eigenschaften.

Beweis. Die Eigenschaften $(i) - (iii)$ folgen aus den Eigenschaften von w_k und aus $\bigcap_{k\geq 0} \pi^k \tilde{\mathrm{A}} = 0$. Die Eigenschaften (iv) und (v) folgen aus der Definition von $V(\cdot,r)$ und der Potenzreihendarstellung der Wittvektoren. Für (iv) beachte man, dass

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_k \pi_L^k [x_k]) = \sum_k \pi_L^k [x_k^q]$$

gilt. Für Eigenschaft (vi) benutzt man die Multiplikativität der Teichmüller-Abbildung. Dann ist $([\alpha]x)_k = \alpha x_k$. □

Wir setzen $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} := \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}[1/\pi]$. Die Eigenschaft 3.6(v) erlaubt es uns, $V(\cdot,r)$ auf $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ fortzusetzen indem wir für $f \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ mit $\pi_L^k f \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ definieren

$$V(f,r) := V(\pi_L^k f, r) - ks(r).$$

Diese Definition ist unabhängig von k. Durch $V(\cdot,r)$ lässt sich eine Topologie auf $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ definieren, indem man für $C \in \mathbb{R}$ die Kugeln

$$\{x \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} \mid V(x,r) \geq C\}$$

als Umgebungsbasis der 0 nimmt. Wegen 3.6(i) ist diese hausdorffsch. Für jedes $\sigma \in G_L$ gilt $V(\sigma x, r) = V(x,r)$. Daher ist die Abbildung $x \mapsto \sigma x$ ein stetiger Endomorphismus von $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ und φ ist wegen Eigenschaft (iv) eine stetige Bijektion $\varphi : \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} \mapsto \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,qr}$.

Lemma 3.7. *Sei $x = \sum_{k \gg -\infty} \pi^k [x_k] \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ mit der Eigenschaft $V(x,r) \geq 0$. Sei $x^+ = \sum_{k \leq -1} \pi^k [x_k]$ und $x^- = \sum_{k \geq 0} \pi^k [x_k]$. Dann gilt $x^- \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$, $x^+ \in \tilde{\mathrm{B}}^+$ und für alle $u \geq r$ gilt $V(x^\pm, u) \geq V(x,u)$.*

Beweis. Wegen $V(x,r) \geq 0$ gilt $x^- \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$. Ist $k < 0$, so gilt $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat} x_k + ks(r) \geq 0$ und daher $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) \geq 0$. Das zeigt, dass $x^+ \in \tilde{\mathrm{B}}^+$ gilt. Die Ungleichung

$$V(x^\pm, u) \geq V(x,u)$$

ergibt sich aus der Definition von $V(\cdot,u)$. □

Lemma 3.8. *Der Ring $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ ist vollständig bezüglich der von $V(\cdot,r)$ induzierten Topologie.*

Beweis. Wegen der starken Dreiecksungleichung genügt es zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Grenzwert $x = \sum_{n\geq 0} x^{(n)}$ existiert. Sei $x^{(n)}$ eine Nullfolge, also $V(x^{(n)}, r) \to \infty$ für $n \to \infty$. Wir schreiben $x^{(n)} = \sum_{k\geq 0} \pi^k [x_k^{(n)}]$ und erhalten, dass für jedes fixe k und jedes $C > 0$ ein n_0 existiert, sodass

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat} x_i^{(n)} + is(r) > C$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $0 \leq i \leq k$ gilt. Dann ist insbesondere $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat} x_i^{(n)} > C$, weswegen $x^{(n)}$ eine Nullfolge bezüglich der schwachen Topologie von $\tilde{\mathrm{A}}$ bildet. Da $\tilde{\mathrm{A}}$ vollständig für diese Topologie ist (vgl. [Sch17, Remark 1.5.2.]), finden wir den Grenzwert $x = \sum_{n\geq 0} x^{(n)}$ in $\tilde{\mathrm{A}}$. Da für jedes n die Eigenschaften $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat} x_k^{(n)} + ks(r) \geq 0$ und $\lim_{k\to\infty}(\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat} x_k^{(n)} + ks(r)) = \infty$ gelten, übertragen sich diese, da die schwache Topologie genau der Produkttopologie der von $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ induzierten Topologie entspricht, auch auf x, was $x \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ zeigt. □

Lemma 3.9. *Sei $x \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ mit $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_0) = 0$ und $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat} x_k + ks(r) > 0$ für $k \geq 1$, dann ist x eine Einheit.*

Beweis. Wir können x durch $x/[x_0]$ ersetzen, weshalb wir ohne Einschränkung $x_0 = 1$ annehmen können. In diesem Fall ist $x = 1 + z$ mit $V(z, r) > 0$. Nach Lemma 3.8 konvergiert die Reihe $x^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-z)^n$ in $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$. □

Lemma 3.10. *Das Element* $x = \frac{\omega_{LT}}{[\bar{\omega}]} \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,1}$ *ist eine Einheit.*

Beweis. Nach [Sch17, Lemma 2.1.10] gilt $\omega_{LT} \equiv [\pi^i]_\phi \varphi^{-i}([\bar{\omega}]) \mod \pi^{i+1}\tilde{\mathrm{A}}$. Schreibt man $\omega_{LT} = \sum_{k \geq 0} \pi^k [\alpha_k]$ bedeutet dies, dass α_i durch eine Potenzreihe ohne konstantes Glied mit Koeffizienten in o_L in der Variable $\overline{\omega}^{q^{-i}}$ gegeben ist und wegen $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}[\overline{\omega}^{q^{-i}}] = q^{1-i}/(q-1) > 0$ ist die Reihe konvergent und es gilt

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\alpha_i) \geq q^{1-i}/(q-1).$$

Dann folgt

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\alpha_i) - \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\bar{\omega}) \geq \frac{q^{1-i}}{q-1} - \frac{q}{q-1} > -i\frac{q}{q-1}.$$

Damit erhalten wir $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\alpha_i/\bar{\omega}) + is(1) > 0$ für $i > 0$ und $\alpha_0 = \bar{\omega}$ also $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\alpha_0/\bar{\omega}) = 0$. Diese Rechnung zeigt $x \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,1}$ und mit Lemma 3.9 erhalten wir sogar, dass x eine Einheit ist. □

An dieser Stelle merken wir noch an, dass für $t \geq r$ stets $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} \subset \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,t}$ gilt. Dies erlaubt uns, $V(\cdot, t)$ auf $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ auszuwerten. Wir setzen

$$\tilde{\mathrm{B}}^\dagger := \bigcup_{r \geq 0} \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$$

mit der Konvention $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,0} := \tilde{\mathrm{B}}^+$.

Lemma 3.11. $\tilde{\mathrm{B}}^\dagger$ *ist ein Körper.*

Beweis. Sei $0 \neq x \in \tilde{\mathrm{B}}^\dagger$. Dann gibt es ein $r > 0$, sodass bereits $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ gilt, und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\pi_L^n x \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$. Da π_L in $\tilde{\mathrm{B}}^\dagger$ eine Einheit ist, können wir im Folgenden ohne Einschränkung $n = 0$, also $x \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ annehmen. Wir schreiben

$$x = \sum_{k \geq 0} \pi_L^k [x_k].$$

Indem wir mit Potenzen von π_L skalieren und unter Umständen r vergrößern, können wir ohne Einschränkung $x_0 \neq 0$ annehmen. Für $i \gg 0$ gilt

$$-\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_0) + is(r) \geq 0,$$

weshalb $\pi_L^i [x_0^{-1}]$ und daher auch $[x_0^{-1}]$ ein Element von $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ ist. Wir betrachten

$$y := x[x_0^{-1}] = \sum_{k \geq 0} \pi_L^k [x_k x_0^{-1}].$$

Es gilt $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_0 x_0^{-1}) = 0$ und wählen wir t groß genug erhalten wir

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k x_0^{-1}) + ks(t) = \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) - \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_0) + ks(t) > 0,$$

woraus mit Lemma 3.9 folgt, dass y eine Einheit in $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,t}$ ist. Insgesamt erhalten wir, dass $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger}$ invertierbar ist. □

Definition 3.12. *Seien $t > r > 0$. Wir definieren für $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ die Bewertung*

$$V(x, [r,t]) := \min\left\{V(x,r), V(x,t)\right\}.$$

Da der Ausdruck $s(u) = uq/(q-1)$ monoton in u ist, stimmt diese überein mit

$$\min_{u \in [r,s]} V(x,u).$$

Die Familie der Bewertungen $(V(\cdot,[r,t]))_{t \geq r}$ liefert eine Fréchet-Topologie auf $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$. Dabei bilden die Kugeln

$$U_{t,C} := \{x \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} \mid V(x,[r,t]) > C)\}$$

mit $t \geq r$ und $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Subbasis offener Umgebungen der 0. Das bedeutet eine Basis offener Nullumgebungen ist durch endliche Durchschnitte der $U_{t,C}$ gegeben. Für die Definition der Topologie genügt es $t \in \mathbb{Q}$ zu fordern, denn per Konstruktion gilt für $r \leq t_1 \leq t \leq t_2$

$$U_{t_1,C} \supset U_{t,C} \supset U_{t_2,C}.$$

Diese Topologie ist hausdorffsch, da die durch die $V(\cdot,t)$ induzierten Topologien dies sind und eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie für alle $V(r,t)$ für $t \geq r$ konvergiert. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ die Vervollständigung von $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$ für diese Topologie. Ferner bezeichnen wir mit $\tilde{\mathrm{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ die Vervollständigung von $\tilde{\mathrm{B}}^{+}$ für die von $(V(\cdot,[0,r]))_{r\geq 0}$ induzierte Topologie. Wir definieren weiterhin $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} = \bigcup_{r \geq 0} \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$. Dabei machen wir die Konvention $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,0}_{\mathrm{rig}} := \tilde{\mathrm{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$. Die stetige Fortsetzung von φ bezeichnen wir ebenfalls mit φ.

Lemma 3.13. *Sei $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ und $u \geq r > 0$. Dann gilt*

$$V(x,r) \geq \frac{r}{u} V(x,u).$$

Beweis. Da $\tilde{\mathrm{B}}^{+} \subset \tilde{\mathrm{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ dicht ist, genügt es die Aussage für $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{+}$ zu zeigen. Wir erhalten

$$V(x,r) = \inf_k (w_k(x) + ks(r)) = \inf_k \left(\left(\frac{r}{u}(w_k(x) + ks(u) \right) + \left(1 - \frac{r}{u}) w_k(x) \right) \right) \geq \frac{r}{u} V(x,u).$$

Dabei ist zu beachten, dass wegen $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{+}$ stets $w_k(x) \geq 0$ gilt. □

Lemma 3.14. *Sei $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ mit $V(x,r) \geq 0$. Dann besitzt x eine Zerlegung*

$$x = x^+ + x^-$$

mit $x^+ \in \tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ und $x^- \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$.

Beweis. Wir schreiben $x = \sum_{k\geq 0} x_k$ mit $x_k \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$, $V(x_k,r) \geq 0$, sodass x_k eine Nullfolge bezüglich der Fréchet-Topologie ist. Das bedeutet $V(x_k,u) \to \infty$ für $k \to \infty$ für alle $u \geq r$. Nach 3.7 besitzt jedes x_k eine Zerlegung $x_k = x_k^+ + x_k^-$ mit $x_k^+ \in \tilde{\mathrm{B}}^+$,$x_k^- \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ und $V(x_k^\pm,u) \geq V(x_k,u)$. Dann bilden die x_k^+ eine Nullfolge bezüglich der Fréchet Topologie und die x_k^- bilden eine Nullfolge bezüglich der durch $V(\cdot,r)$ induzierten Topologie auf $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$. Dann gilt $x^+ := \sum x_k^+ \in \tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ und wegen der in 3.8 gezeigten Vollständigkeit von $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ erhalten wir $x^- := \sum x_k^- \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$. Das liefert die gesuchte Zerlegung von x. □

Lemma 3.15. *Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Innerhalb von $\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ gilt*

$$\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} = \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} + \tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}$$

und

$$\tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} \cap \tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \tilde{\mathrm{B}}^+.$$

Beweis. Sei $x \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$. Indem wir mit π^k multiplizieren, können wir $V(x,r) \geq 0$ annehmen. Dann folgt die erste Aussage aus 3.14. Für den Beweis des zweiten Teils sei ohne Einschränkung

$$x \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r} \cap \tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}.$$

Dann können wir x darstellen als $x = \sum_{k\geq 0} \pi^k [x_k]$ und haben $V(x,r) \geq 0$. Wegen $x \in \tilde{\mathrm{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ ist für jedes $0 < t \leq r$ nach 3.13 auch $V(x,t) \geq 0$. Dann muss aber bereits $V(x,0) \geq 0$ gelten. Das bedeutet $x \in \tilde{\mathrm{A}}^+$. □

Beispiel 3.16. Man kann an der Definition von $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r}$ ablesen, dass für eine reelle Nullfoge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\bigcap_{k\geq 1} \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r_k} = \tilde{\mathrm{A}}^+$$

gilt. In diesem Beispiel wollen wir uns davon überzeugen, dass die analoge Aussage für $\tilde{\mathrm{B}}^+$ nicht gilt. Sei dazu $r_k := 1/k$. Es gilt

$$\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(\frac{1}{\bar{\omega}}) + ks(r_k) = \frac{-q}{q-1} + \frac{kq}{k(q-1)} = 0.$$

Daher ist $\pi_L^k \frac{1}{[\bar{\omega}]}$ in $\tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r_k}$ für alle k. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{[\bar{\omega}]} = [\bar{\omega}^{-1}] \in \bigcap_{k\geq 1} \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r_k}.$$

Jedoch ist $\bar{\omega}^{-1} \notin o_{\mathbb{C}_p^\flat}$ und daher $[\bar{\omega}^{-1}] \notin \tilde{\mathrm{B}}^+$.

Im Folgenden werden wir Bedingungen erarbeiten, wann $x \in \bigcap_k \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r_k}$ bereits ein Element von $\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ ist. Wie das vorangegangene Beispiel andeutet, müssen wir dazu $V(x, r_k)$ kontrollieren.

Lemma 3.17. *Sei $x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge mit $x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r_k}$ und*

$$V(x, r_k) \geq 0.$$

Dann ist bereits $x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$.

Beweis. Für jedes k können wir x nach 3.14 zerlegen in $x = x_k^+ + x_k^-$ mit $x_k^+ \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ und $x_k^- \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r_k}$. Wir erhalten $x_1^- - x_k^- \in \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,\max\{r_1,r_k\}} \cap \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+} = \tilde{\mathrm{A}}^{+}$ nach 3.15. Dann ist aber

$$x_1^- \in \bigcap_{k\geq 0} \tilde{\mathrm{A}}^{\dagger,r_k} = \tilde{\mathrm{A}}^{+}.$$

Wobei man an dieser Stelle verwendet, dass die r_k eine Nullfolge bilden. □

Lemma 3.18. *Sei $x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge mit $x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r_k}$ und*

$$\liminf_k V(x, r_k) \geq 0.$$

Dann ist bereits $x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$.

Beweis. Wir betrachten das Element $[\tilde{\pi}]x$. Nach Voraussetzung gilt für $k \gg 0$

$$V([\tilde{\pi}]x, r_k) = 1 + V(x, r_k) \geq 0.$$

Nach 3.17 erhalten wir $[\tilde{\pi}]x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$. Sei $r > 0$ mit $x \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$. Wir finden eine Zerlegung $x = x^+ + x^-$ mit $x^+ \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ und $x^- \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}$. Wir erhalten mit Lemma 3.15

$$[\tilde{\pi}]x^- \in \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+} \cap \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r} = \tilde{\mathrm{B}}^{+}$$

und $V([\tilde{\pi}]x^-, 0) \geq \min(V([\tilde{\pi}]x^+, 0), V([\tilde{\pi}]x, 0)) \geq 1$. Dann ist $x^- = \frac{[\tilde{\pi}]x^-}{[\tilde{\pi}]} \in \tilde{\mathrm{B}}^{+}$ und folglich liegt x in $\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$. □

Für einen Ringendomorphismus f eines Ringes R bezeichnen wir den Endomorphismus des $(d \times d)$-Matrizenringes $\mathrm{Mat}(d, R)$, welcher durch komponentenweise Ausführung von f induziert wird, ebenfalls mit f.

Satz 3.19 (Frobeniusregularisierung)**.** *Seien $X, Y \in \mathrm{Mat}(n, \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+})$ und $M \in \mathrm{Mat}(n, \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger})$ mit*

$$\varphi(M) = XMY.$$

Dann gilt bereits $M \in \mathrm{Mat}(n, \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^{+})$.

Beweis. Sei $Z \in \mathrm{Mat}(n, \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})$. Wir notieren $V(Z,r) := \inf_{i,j} V(z_{ij}, r)$. Sei $r > 0$ derart, dass $M \in \mathrm{Mat}(n, \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})$ gilt. Wir finden positive Konstanten h_X, h_Y, c, sodass $V(X,r) \geq -h_X$, $V(Y,r) \geq -h_Y$ und $V(M,r) \geq -c$ gilt. Aus der Voraussetzung erhalten wir, dass mit M auch $\varphi(M)$ in $\mathrm{Mat}(n, \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})$ liegt. Gilt jedoch $\varphi(m_{ij}) \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,t}_{\mathrm{rig}}$, so ist bereits $m_{ij} \in \tilde{\mathrm{B}}^{\dagger,t/q}_{\mathrm{rig}}$. Wir erhalten die folgenden Gleichungen:

$$V(\varphi(M), t) \geq V(X,t) + V(M,t) + V(Y,t). \tag{3.2}$$

$$V(\varphi(m_{ij}), t) = qV(m_{ij}, t/q). \tag{3.3}$$

Aus 3.13 erhalten wir für $Z = X$ oder $Z = Y$

$$V(Z, t/q) \geq \frac{1}{q} V(Z,t). \tag{3.4}$$

Wir zeigen nun per Induktion über $k \geq 1$, dass

$$V(M, r/q^k) \geq \frac{-(k(h_X + h_Y) + c)}{q^k}$$

gilt. Der Fall $k = 1$ folgt aus

$$V(M, r/q) = 1/q(V(\varphi(M), r) \geq 1/q(V(X,r) + V(M,r) + V(Y,r)) \geq -(h_X + h_Y + c)/q.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} V(M, r/q^{k+1}) &= \frac{1}{q} V(\varphi(M), r/q^k) \\ &\geq \frac{1}{q}(V(X, r/q^k) + V(M, r/q^k) + V(Y, r/q^k)) \\ &\geq \frac{-1}{q^{k+1}}(h_X + h_Y) + \frac{1}{q} V(M, r/q^k) \\ &\geq \frac{-1}{q^{k+1}}(h_X + h_Y) + \frac{-(k(h_X + h_Y) + c)}{q^{k+1}}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.18 erhalten wir $M \in \mathrm{Mat}(n, \tilde{\mathrm{B}}^{+}_{\mathrm{rig}})$. □

Kommentar

Die in diesem Kapitel relevanten Konstruktionen sind im Wesentlichen analog zu [Ber10]. Im Kontext von verzweigten Wittvektoren erscheint es natürlich, die Bewertung

$$V(\sum [x_k] \pi_L^k, r) = \inf_k (\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k) + ks(r))$$

zu wählen. In [Ber16] verwendet Berger andere Normierungskonventionen für $\mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ und setzt

$$V(\sum [x_k] \pi_L^k, r) = \inf_k (\frac{k}{e} + \frac{p-1}{pr} \mathrm{val}_{\mathbb{C}_p^\flat}(x_k)),$$

wobei $p = \pi_L^e \varepsilon$ mit einer Einheit $\varepsilon \in o_L$ gilt. Bergers Konstruktion hat den Vorteil, dass man die Ringe im verzweigten Fall mit denen aus dem unverzweigten Fall leichter vergleichen kann. Es gilt

$$W(\mathbb{C}_p^\flat)_L = o_L \otimes_{o_{L_0}} W(\mathbb{C}_p^\flat),$$

weshalb man sich an dieser Stelle fragen kann, ob man auf diese Weise die Ringe $\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^+, \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger$ mit denen aus dem zyklotomischen Fall vergleichen kann.

4 Limites L-kristalliner Darstellungen

In diesem Kapitel betrachten wir Limites von Quotienten kristalliner und L-analytischer Darstellungen. Konkret werden wir für ein $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}(G_L)$ und zwei Folgen von Gittern $U_i \subset T_i \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$ derart, dass die Hodge-Tate-Gewichte von

$$V_i = L \otimes_{o_L} T_i = L \otimes_{o_L} U_i$$

im Intervall $[a, b]$ für zwei ganze Zahlen a, b liegen und die T_i ein projektives System bilden derart, dass

$$T/\pi_L^i T \cong T_i/U_i$$

gilt, zeigen, dass T bereits kristallin und L-analytisch ist. Die Strategie besteht darin, für T einen Wachmodul zu konstruieren. Da T a priori keinen solchen Modul besitzt, müssen wir genauer verstehen, wie sich $\mathrm{N}(T_i)$ in $D_{LT}(T_i)$ einbettet. Eine zusätzliche Schwierigkeit entsteht dadurch, dass wir die Faktordarstellungen T_i/U_i betrachten müssen. Da A_L^+ kein Hauptidealring ist, lässt sich die Inklusion $\mathrm{N}(U_i) \subset \mathrm{N}(T_i)$ im Allgemeinen nicht durch Elementarteiler beschreiben, weshalb sich das Studium von

$$\mathrm{Im}(\mathrm{N}(T_i) \to D_{LT}(T_i/U_i))$$

als technisch kompliziert gestaltet.

Definition 4.1. *Sei $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}(G_L)$ und sei $V = L \otimes_{o_L} T$. Wir definieren*

$$D_{LT}^+(T) := (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T)^{H_L}.$$

Dies ist ein A_L^+-Untermodul von $D_{LT}(T)$, welcher unter $\varphi_{D_{LT}(T)}$ und Γ_L stabil bleibt. Analog definieren wir

$$D_{LT}^+(V) = L \otimes_{o_L} D_{LT}^+(T) = (\mathrm{B}^+ \otimes_{o_L} T)^{H_L}.$$

Im Allgemeinen muss die kanonische Abbildung

$$\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} D_{LT}^+(T) \to D_{LT}(T)$$

keine Bijektion sein. Für L-analytische kristalline Darstellungen muss $\mathrm{N}(T)$ nicht notwendig in $D_{LT}^+(T)$ liegen.

Proposition 4.2. *Sei T in $\mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$ vom Rang d mit der Eigenschaft, dass $V := L \otimes_{o_L} T$ positiv ist. Dann ist $\mathrm{N}(T)$ aus Definition 2.27 der eindeutige A_L^+-Untermodul von $D_{LT}(T)$, welcher mit den von $D_{LT}(T)$ induzierten Operationen in $\mathrm{Mod}_{\mathrm{A}_L^+}^{\varphi_L,\Gamma_L,an}$ liegt und $D_{LT}(T) = \mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ erfüllt. Der Modul $\mathrm{N}(T)$ ist ebenso der eindeutige A_L^+-Untermodul von $D_{LT}^+(T)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- $\mathrm{N}(T)$ *ist frei vom selben Rang wie* $D^+_{LT}(T)$.
- $\mathrm{N}(T)$ *ist* Γ_L*-invariant.*
- *Die induzierte Wirkung von* Γ_L *auf* $\mathrm{N}(T)/\omega_{LT}\mathrm{N}(T)$ *ist trivial.*
- *Es gibt ein* $r \geq 0$*, sodass* $\omega^r_{LT} D^+_{LT}(T) \subset \mathrm{N}(T)$ *gilt.*

Setzen wir $\mathrm{N}(V) := \mathrm{N}(T)[1/\pi_L]$ erhalten wir auf natürliche Weise einen B^+_L-Untermodul von $D^+_{LT}(V)$ mit analogen Eigenschaften. Man kann $\mathrm{N}(T)$ mittels

$$\mathrm{N}(T) = D_{LT}(T) \cap \mathrm{N}(V)$$

aus $\mathrm{N}(V)$ zurückgewinnen. $\mathrm{N}(T)$ ist stabil unter φ.

Beweis. Siehe [SV18, Remark 1.8, Proposition 1.10] für die Aussage, dass $\mathrm{N}(T)$ stabil unter φ ist und die Charakterisierung von $\mathrm{N}(T)$. Wir zeigen

$$\mathrm{N}(T) = D_{LT}(T) \cap \mathrm{N}(V).$$

Die Inklusion $\mathrm{N}(T) \subset D_{LT}(T) \cap \mathrm{N}(V)$ ist klar. Sei daher $v \in D_{LT}(T) \cap \mathrm{N}(V)$ und sei $(n_1, \dots, n_d)$ eine Basis von $\mathrm{N}(T)$. Diese liefert wegen $D_{LT}(T) = \mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}^+_L} \mathrm{N}(T)$ und $\mathrm{N}(V) = L \otimes_{o_L} \mathrm{N}(T)$ eine Basis von $D_{LT}(T)$ und eine Basis von $\mathrm{N}(V)$. Wir können v daher darstellen als $v = \sum_{i=1}^d a_i n_i$ mit $a_i \in \mathrm{B}^+_L \cap \mathrm{A}_L = \mathrm{A}^+_L$, wie wir im Beweis von 2.30 gesehen haben. □

Korollar 4.3. *Sei* T *wie in Proposition 4.2 und sei* $U \subset T$ *ein* G_L*-stabiles Untergitter. Dann gilt* $D_{LT}(U) \cap \mathrm{N}(T) = \mathrm{N}(U)$.

Beweis. Wegen $D_{LT}(U) \subset D_{LT}(T)$ erhalten wir mit 4.2

$$\mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(V) \cap D_{LT}(U) = \mathrm{N}(V) \cap D_{LT}(U) \cap D_{LT}(T) = \mathrm{N}(T) \cap D_{LT}(U).$$

□

Lemma 4.4. *Sei* T *in* $\mathrm{Rep}^{cris,an}_{o_L,f}(G_L)$ *vom Rang* d*, so dass* $V = L \otimes_{o_L} T$ *positiv ist mit Hodge-Tate-Gewichten* $-r = -r_d \leq \cdots \leq -r_1 \leq 0$*. Sei* $\mathrm{N}^{(\varphi)}(V)$ *der von dem Bild von* $\varphi_{\mathrm{N}(V)}$ *erzeugte* A^+_L*-Untermodul von* $\mathrm{N}(V)$*. Dann gilt*

$$Q^r \mathrm{N}(V) \subset \mathrm{N}^{(\varphi)}(V).$$

Beweis. Siehe [SV18, Cor. 1.16]. □

Satz 4.5. *Sei* T *in* $\mathrm{Rep}^{cris,an}_{o_L,f}(G_L)$ *vom Rang* d*, so dass* $V = L \otimes_{o_L} T$ *positiv ist mit Hodge-Tate-Gewichten* $-r = -r_d \leq \cdots \leq -r_1 \leq 0$*. Dann gilt*

$$\omega^r_{LT} \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T \subset \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}^+_L} \mathrm{N}(T).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die entsprechende Aussage über $\mathrm{B}^+ = \mathrm{A}^+[1/\pi_L]$. Sei dazu $M \in \mathrm{Mat}(d, \mathrm{B}^+)$ die Matrix einer Basis von $\mathrm{N}(V)$ bezüglich einer Basis von V und sei P die Darstellungsmatrix von $\varphi_{\mathrm{N}(V)}$ bezüglich der Basis von $\mathrm{N}(V)$. Dann gilt $\varphi(M) = MP$. Damit folgt $\varphi(\omega_{LT}^r M^{-1}) = Q^r \omega_{LT}^r P^{-1} M^{-1} = (Q^r P^{-1})(\omega_{LT}^r M^{-1})$. Nach Lemma 4.4 gilt $Q^r \mathrm{N}(V) \subset \mathrm{N}^{(\varphi)}(V)$, weshalb die Matrix $Q^r P^{-1}$ in $\mathrm{Mat}(d, \mathrm{B}_L^+)$ liegt. Die Regularisierung des Frobenius zeigt nun, dass $\omega_{LT}^r M^{-1} \in \mathrm{Mat}(d, \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^+)$ gilt. Andererseits gilt $\omega_{LT}^r M^{-1} \in \mathrm{Mat}(d, \tilde{\mathrm{B}}^\dagger)$ und $\omega_{LT}^r M^{-1} \in \mathrm{Mat}(d, \mathrm{B})$, da beide Ringe Körper sind, die B^+ enthalten. Nach 3.15 gilt $\tilde{\mathrm{B}}^\dagger \cap \tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{rig}}^+ = \tilde{\mathrm{B}}^+$ und es gilt $\mathrm{B} \cap \tilde{\mathrm{B}}^+ = \mathrm{B}^+$. Damit folgt $\omega_{LT}^r M^{-1} \in \mathrm{Mat}(d, \mathrm{B}^+)$. Für $v \in \mathrm{B}^+ \otimes_L V$ ist Mv ein Element von $\mathrm{B}^+ \otimes_{\mathrm{B}_L^+} \mathrm{N}(V)$. Da $\mathrm{B}^+ \otimes_{\mathrm{B}_L^+} \mathrm{N}(V)$ ein B^+-Modul ist, gilt

$$\omega_{LT}^r v = (\omega_{LT}^r M^{-1})(Mv) \in \mathrm{B}^+ \otimes_{\mathrm{B}_L^+} \mathrm{N}(V).$$

Das zeigt

$$\omega_{LT}^r \mathrm{B}^+ \otimes_L V \subset \mathrm{B}^+ \otimes_{\mathrm{B}_L^+} \mathrm{N}(V). \tag{4.1}$$

Ist nun $v \in \omega_{LT}^r \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T$, so folgt aus (4.1), dass $\pi_L^n v \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$ geeignet. Nach Basiswechsel zu A gilt

$$\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) = \mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_L} D_{LT}(T) = \mathrm{A} \otimes_{o_L} T. \tag{4.2}$$

Dabei gilt die rechte Gleichung nach [Sch17, Prop. 3.2.1. (ii) Eigenschaft D3] und die linke Gleichung ergibt sich aus den Eigenschaften der Wachmoduln, indem man

$$\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) = D_{LT}(T)$$

über A_L mit A tensoriert.Wenn wir uns eine A_L^+-Basis $(m_1, \ldots, m_d)$ von $\mathrm{N}(T)$ vorgeben, erhalten wir eine A-Basis von $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_L} D_{LT}(T)$. Wir schreiben

$$\pi_L^n v = \sum_{i=1}^d a_i m_i \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \cap \pi_L^n \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T$$

und lesen an dieser Darstellung ab, dass $a_i \in \mathrm{A}^+ \cap \pi_L^n \mathrm{A} = \pi_L^n \mathrm{A}^+$ gelten muss. Dabei gilt $a_i \in \mathrm{A}^+$ wegen $\sum_{i=1}^d a_i m_i \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ und $a_i \in \pi_L^n \mathrm{A}$ wegen

$$\pi_L^n \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T \subset \pi_L^n \mathrm{A} \otimes_{o_L} T = \pi_L^n \mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$$

unter Verwendung von (4.2). Das zeigt, dass bereits $v \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ gelten muss. □

Als nächstes wollen wir für zwei positive kristalline Darstellungen T_1, T_2 mit Hodge-Tate-Gewichten in $[-r, 0]$, welche modulo π_L^n isomorph sind, zeigen, dass auch ihre Wachmoduln modulo $\pi_L^{n-\alpha(r)}$ isomorph sind, wobei $\alpha(r)$ ein Korrekturterm ist, welcher lediglich von r abhängt.

Lemma 4.6. *Sei T in $\mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$ vom Rang d so, dass $V = L \otimes_{o_L} T$ positiv ist mit Hodge-Tate-Gewichten $-r \leq -r_d \leq \cdots \leq -r_1 \leq 0$. Dann gilt*

$$\omega_{LT}^r (\mathrm{A}^+/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T)^{H_L} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{N}(T) \to (\mathrm{A}^+/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T)^{H_L}).$$

Beweis. Sei $\bar{v} \in (\mathrm{A}^+/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T)^{H_L}$ und sie $v \in \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T$ ein Lift. Für jedes $h \in H_L$ ist $h(v)$ ebenfalls ein Lift von $\bar{v}$, weshalb $h(v) - v \in \pi_L^n(\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T)$ gilt. Nach Satz 4.5 gilt $\omega_{LT}^r v \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$. Damit erhalten wir

$$h(\omega_{LT}^r v) - \omega_{LT}^r v \in \pi_L^n(\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T) \cap \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \subset \pi_L^n(\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)).$$

Schreiben wir nun

$$\omega_{LT}^r v = \sum_{i=0}^{d} a_i \otimes n_i$$

bezüglich einer Basis $(n_1, \ldots, n_d)$ von $N(T)$ mit $a_i \in \mathrm{A}^+$ erhalten wir aus

$$h(v) - v \in \pi_L^n(\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T))$$

bereits $h(a_i) - a_i \in \pi_L^n \mathrm{A}^+$. Andererseits ist nach 2.8

$$\mathrm{A}_L^+ \to (\mathrm{A}^+/(\pi^n))^{H_L}$$

surjektiv und wir erhalten somit $a_i \in \mathrm{A}_L^+ + \pi_L^n \mathrm{A}^+$. Insgesamt folgt

$$\omega_{LT}^r v \in \mathrm{N}(T) + \pi_L^n \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T),$$

was zu zeigen war. □

Definition 4.7. *Sei $r \in \mathbb{N}$. Wir definieren*

$$\alpha(r) := \inf_{\gamma \in \Gamma_L} \sum_{i=1}^{r} v_{\pi_L}(\chi_{LT}(\gamma)^i - 1).$$

Da χ_{LT} Werte in $o_L^\times$ annimmt, ist $\alpha(r)$ eine natürliche Zahl.

Lemma 4.8. *Sei T in $\mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$ vom Rang d, so dass $V = L \otimes_{o_L} T$ positiv ist mit Hodge-Tate-Gewichten in $[-r, 0]$, sei $n \geq \alpha(r)$ und seien $N_1, N_2 \subset (\mathrm{A}^+/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T)^{H_L}$ freie Γ_L-stabile $\mathrm{A}_L^+/(\pi_L^n)$-Untermoduln vom Rang d, sodass die Wirkung von Γ_L trivial ist modulo ω_{LT} und $\omega_{LT}^r(\mathrm{A}^+/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T)^{H_L} \subset N_i$ für $i = 1, 2$ gilt. Dann ist bereits*

$$N_1 = N_2$$

modulo $\pi_L^{n-\alpha(r)}$ in dem Sinne, dass ihre Bilder in $(\mathrm{A}^+/(\pi_L^{n-\alpha(r)}) \otimes_{o_L} T)^{H_L}$ übereinstimmen.

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es $N_1 \subset N_2$ modulo $\pi_L^{n-\alpha(r)}$ zu zeigen. Wir zeigen, dass für $\gamma \in \Gamma_L$ und alle $i \leq r$

$$\omega_{LT}^{r-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\chi_{LT}(\gamma)^{r-j} - 1) N_1 \subset N_2 \tag{4.3}$$

gilt. Der Fall $i = 0$ folgt aus der Voraussetzung $\omega_{LT}^r(\mathrm{A}^+/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T) \subset N_2$ und daher $\omega_{LT}^r N_1 \subset N_2$. Wir führen den Beweis per Induktion. Sei $x \in N_1$ und es gelte für ein $i \leq r-1$

$$z := \omega_{LT}^{r-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\chi_{LT}(\gamma)^{r-j} - 1)x \in N_2.$$

Nach Voraussetzung operiert Γ_L trivial modulo ω_{LT}, weshalb $(\gamma - 1)z \in \omega_{LT} N_2$ liegen muss. Wir schreiben kurz

$$y := \prod_{j=0}^{i-1} (\chi_{LT}(\gamma)^{r-j} - 1)x$$

und berechnen

$$\begin{aligned}(\gamma - 1)z &= \gamma(z) - z \\ &= \gamma(\omega_{LT}^{r-i})\gamma(y) - z \\ &= \gamma(\omega_{LT}^{r-i})\gamma(y) + \gamma(\omega_{LT}^{r-i})y - \gamma(\omega_{LT}^{r-i})y - z \\ &= (\gamma(\omega_{LT}^{r-i}) - \omega_{LT}^{r-i})y + \omega_{LT}^{r-i}(\gamma - 1)y\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $(\gamma - 1)(x) \in \omega_{LT} N_1$ und daher auch $\omega_{LT}^{r-i}(\gamma - 1)y \in \omega_{LT} N_2$ nach Induktionsvoraussetzung. Insgesamt erhalten wir

$$(\gamma - 1)(\omega_{LT}^{r-i})y = (\gamma(\omega_{LT}^{r-i}) - \omega_{LT}^{r-i})y \in \omega_{LT} N_2.$$

Es gilt

$$\gamma(\omega_{LT}) = [\chi_{LT}(\gamma)]_\phi(\omega_{LT}) = \chi_{LT}(\gamma)\omega_{LT} + \text{Terme höherer Ordnung}$$

und daher folgt

$$(\gamma - 1)(\omega_{LT}^{r-i}) = (\chi_{LT}^{r-i}(\gamma) - 1)\omega_{LT}^{r-i}(1 + \omega_{LT} f)$$

mit einem geeigneten $f \in \mathrm{A}_L^+$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(\gamma - 1)\omega_{LT}^{r-i} y &= (\chi_{LT}^{r-i}(\gamma) - 1)\omega_{LT}^{r-i}(1 + \omega_{LT} f)y \\ &= (\chi_{LT}^{r-i}(\gamma) - 1)\omega_{LT}^{r-i} y + (\chi_{LT}^{r-i}(\gamma) - 1)\omega_{LT}^{r-i}\omega_{LT} f y.\end{aligned}$$

Per Induktionsvoraussetzung liegt $\omega_{LT}^{r-i} y$ in N_2 und daher der rechte Summand in $\omega_{LT} N_2$, weshalb auch

$$(\chi_{LT}^{r-i}(\gamma) - 1)\omega_{LT}^{r-i} y = \omega_{LT}^{r-i} \prod_{j=0}^{i} (\chi_{LT}(\gamma)^{r-j} - 1)x$$

in $\omega_{LT} N_2$ liegt. Da ω_{LT} in $\mathrm{A}^+/(\pi_L^n)$ kein Nullteiler ist, erhalten wir

$$\omega_{LT}^{r-(i+1)} \prod_{j=0}^{i} (\chi_{LT}(\gamma)^{r-j} - 1)x \in N_2,$$

was die erste Behauptung zeigt. Wählen wir γ_0 mit $\alpha(r) = \sum_{i=1}^{r} v_{\pi_L}(\chi_{LT}(\gamma_0)^i - 1)$ und wenden oben gezeigtes Resultat auf $r = i$ an, erhalten wir

$$\pi_L^{\alpha(r)} N_1 \subset N_2.$$

Fixieren wir eine Basis $(n^1, \dots, n^d)$ von N_2 und schreiben für $x \in N_1$

$$\omega_{LT}^r x = \sum_{i=1}^{d} a_i n^i$$

mit Potenzreihen $a_i \in \mathrm{A}_L^+/(\pi_L^n)$, können wir x darstellen als

$$x = \sum_{i=1}^{d} a_i/\omega_{LT}^r n^i.$$

Aus der Eigenschaft $\pi_L^{\alpha(r)} x \in N_2$ folgt, dass die Koeffizienten des Hauptteils der Laurentreihen a_i/ω_{LT}^r in $\pi^{n-\alpha(r)} o_L/(\pi_L^n)$ liegen müssen, weshalb $N_1 \subset N_2 \mod \pi_L^{n-\alpha(r)}$ gilt. □

Satz 4.9. *Seien T_1, T_2 in $\mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$ vom Rang d, so dass $V_i = L \otimes_{o_L} T_i$ positiv ist mit Hodge-Tate-Gewichten in $[-r, 0]$. Ferner gebe es ein $n \geq \alpha(r)$ mit*

$$T_1/\pi_L^n T_1 = T_2/\pi_L^n T_2.$$

Dann haben $\mathrm{N}(T_1)$ und $\mathrm{N}(T_2)$ dasselbe Bild in $(\mathrm{A}^+/(\pi_L^{(n-\alpha(r))}) \otimes_{o_L} T_i)^{H_L}$.

Beweis. Wegen der Gleichung $T_1/\pi_L^n T_1 = T_2/\pi_L^n T_2$ und $T_i/\pi_L^n T_i = o_L/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T_i$ hängt der Modul $(\mathrm{A}^+/(\pi_L^n) \otimes_{o_L} T_i)^{H_L}$ und wegen $n \geq n - \alpha(r) \geq 0$ auch $(\mathrm{A}^+/(\pi_L^{(n-\alpha(r))}) \otimes_{o_L} T_i)^{H_L}$ nicht mehr von i ab, weshalb obige Formulierung Sinn ergibt. Anhand der Eigenschaften der Wachmoduln und Lemma 4.6 überlegt man sich, dass die Bilder von $\mathrm{N}(T_i)$ in $(\mathrm{A}^+/\pi_L^n \otimes_{o_L} T)^{H_L}$ die Voraussetzungen von 4.8 erfüllen, woraus sofort die Behauptung folgt. □

Lemma 4.10. *Seien $U \subset T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$, sodass $V = U \otimes_{o_L} L = T \otimes_{o_L} L$ gilt und V positiv ist. Gibt es ein $x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ mit $h(x) - x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$ für alle $h \in H_L$. Dann gilt bereits $x \in \mathrm{N}(T) + (\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U))$, wobei wir $\mathrm{N}(T)$ mit $\mathrm{A}_L^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \subset \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ identifizieren.*

Beweis. Wir führen den Beweis zunächst in dem Spezialfall $\pi_L(T/U) = 0$. In diesem Fall gilt ebenso $\pi_L \mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U) = 0$, denn für $n \in \mathrm{N}(T)$ gilt

$$\pi_L n \in \mathrm{N}(T) \cap D_{LT}(U) = \mathrm{N}(U)$$

nach 4.3. Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)$ keine ω_{LT}-Torsion hat.
Ist $\omega_{LT}^n y \in \mathrm{N}(U)$ für ein $y \in \mathrm{N}(T)$, erhalten wir, da $\omega_{LT} \in \mathrm{A}_L^\times$ gilt, dass y ein Element

von $D(U)$ ist. Wegen 4.3 folgt $y \in \mathrm{N}(U)$. Insgesamt erhalten wir, dass $\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)$ ein torsionsfreier und endlich erzeugter $\mathrm{E}_L^+ = \kappa[[\omega_{LT}]]$- Modul ist. Da E_L^+ ein Hauptidealring ist, ist $\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)$ sogar frei. Der Rang von $\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)$ entspricht dabei der E_L-Dimension von $(\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)) \otimes_{\mathrm{E}_L^+} \mathrm{E}_L$, da $\mathrm{E}_L = \kappa((\omega_{LT}))$ der Quotientenkörper von E_L^+ ist. Es gilt $\mathrm{E}_L = \mathrm{A}_L/\pi_L$ und wegen der Eigenschaften der Wachmoduln gilt $D_{LT}(U) = \mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$ und $D_{LT}(T) = \mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$. Fügen wir alles zusammen und verwenden 2.7, erhalten wir

$$(\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)) \otimes_{\mathrm{E}_L^+} \mathrm{E}_L = (\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)) \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{A}_L \cong D_{LT}(T)/D_{LT}(U) \cong D_{LT}(T/U)$$

als E_L-Moduln. Die letzte Isomorphie gilt, da D_{LT} ein exakter Funktor ist. Der Rang von $\mathrm{N}(T)/\mathrm{N}(U)$ berechnet sich dementsprechend zu $s = \dim_\kappa(T/U)$. Das liefert die Existenz einer kurzen exakten Folge

$$0 \to \mathrm{N}(U) \to \mathrm{N}(T) \to (E_L^+)^s \to 0.$$

Wir betrachten als nächstes das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{N}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\omega_{LT}"] & \mathrm{N}(T) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\omega_{LT}"] & (\mathrm{E}_L^+)^s \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\omega_{LT}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{N}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{N}(T) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{E}_L^+)^s \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{N}(U)/\omega_{LT} & \mathrm{N}(T)/\omega_{LT} & (\mathrm{E}_L^+)^s/\omega_{LT} &
\end{tikzcd}.$$

Dabei bezeichne $\cdot\omega_{LT}$ die Multiplikation mit ω_{LT}. Die Zeilen und Spalten des Diagramms sind offenbar exakt und wir erhalten mit dem Schlangenlemma eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{N}(U)/\omega_{LT}\mathrm{N}(U) \to \mathrm{N}(T)/\omega_{LT}\mathrm{N}(T) \to (\mathrm{E}_L^+)^s/\omega_{LT}(\mathrm{E}_L^+)^s \to 0$$

von $\mathrm{A}_L^+/(\omega_{LT}) = o_L$-Moduln. Da o_L ein Hauptidealring ist und $\mathrm{N}(T)$ bzw. $\mathrm{N}(U)$ freie A_L^+-Moduln vom Rang $d = \mathrm{Rang}(T)$ sind, sind $\mathrm{N}(T)/\omega_{LT}\mathrm{N}(T)$ bzw. $\mathrm{N}(U)/\omega_{LT}\mathrm{N}(U)$ freie o_L-Moduln vom Rang d und es gibt eine Basis $\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_d}$ von $\mathrm{N}(T)/\omega_{LT}\mathrm{N}(T)$ mit der Eigenschaft, dass $\pi_L\overline{n_1}, \ldots, \pi_L\overline{n_s}, \overline{n_{s+1}}, \ldots \overline{n_d}$ eine Basis von $\mathrm{N}(U)/\omega_{LT}\mathrm{N}(U)$ ist. Da $\mathrm{A}_L^+ = o_L[[\omega_{LT}]]$ als Potenzreihenring über einem lokalen Ring selbt wieder lokal ist, erhalten wir mit dem Lemma von Nakayama, dass die $n_1, \ldots, n_d$ (bzw. $\pi_L n_1, \ldots, \pi_L n_s, n_{s+1}, \ldots, n_d$) ein Erzeugendensystem von $\mathrm{N}(T)$ (bzw. $\mathrm{N}(U)$) über A_L^+

bilden. Wegen $d = \mathrm{Rang}(T)$ sind diese minimal und daher Basen der entsprechenden Moduln.
Sei nun $x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ mit $h(x) - x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$ für alle $h \in H_L$. Wir schreiben $x = \sum_{i=1}^d x_i n_i$ und erhalten $h(x) - x = \sum_{i=1}^d (h(x_i) - x_i) n_i$. Aus der Konstruktion der Basis (n_i) erhalten wir, dass π_L die Koeffizienten $h(x_i) - x_i$ für $0 \leq i \leq s$ in A^+ teilt. Daraus erhalten wir für $0 \leq i \leq s$

$$x_i \mod \pi_L \in (\mathrm{A}^+/(\pi_L))^{H_L}.$$

Da die Abbildung

$$\mathrm{A}_L^+ \to (\mathrm{A}^+/(\pi_L))^{H_L}$$

nach 2.8 surjektiv ist, erhalten wir $x_i \in \mathrm{A}_L^+ + \pi_L \mathrm{A}^+$. Insgesamt erhalten wir

$$x \in \mathrm{N}(T) + (\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)).$$

Das zeigt die Behauptung in dem Fall, dass T/U von π_L annuliert wird. Im allgemeinen Fall betrachte man für $k \in \mathbb{N}_0$ die Gitter $T_k := \pi_L^k T + U$. Dann ist $T_0 = T$ und $T_k = U$ für $k \gg 0$. Ferner annuliert π_L für jedes k den Modul T_k/T_{k+1}. Startet man mit $x^{(0)} \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$ wie oben, erhält man aus bereits Bewiesenem $x^{(0)} \in \mathrm{N}(T) + \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T_1)$ und kann $x^{(0)}$ daher schreiben als $x^{(0)} = y^{(0)} + x^{(1)}$ mit $x^{(1)} \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T_1)$. Da die Elemente von $\mathrm{N}(T)$ fix unter H_L bleiben, gilt $h(x^{(1)}) - x^{(1)} = h(x^{(0)}) - x^{(0)}$ und die Voraussetzungen des Satzes bleiben für $x^{(1)}$ weiterhin erfüllt. Führt man dieses Verfahren induktiv fort, erhält man eine Folge $x^{(k)} \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T_k)$ für die jeweils $x^{(k)} \in \mathrm{N}(T_{k-1}) + \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T_{k+1})$ gilt. Schreibt man

$$x^{(k)} = y^{(k)} + x^{(k+1)}$$

mit $y^{(k)} \in \mathrm{N}(T_k) \subset N(T)$, erhält man für $k \gg 0$

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} y^{(i)} + x^{(k)}.$$

Der linke Summand liegt in $\mathrm{N}(T)$ und es gilt $x^{(k)} \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$. □

Lemma 4.11. *Seien $U \subset T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$, sodass $V = U \otimes_{o_L} L = T \otimes_{o_L} L$ gilt und V Hodge-Tate-Gewichte in $[-r, 0]$ hat. Dann gilt*

$$\omega_{LT}^r (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U)^{H_L} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{N}(T) \to (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U)^{H_L}).$$

Beweis. Sei $\overline{v} \in \omega_{LT}^r (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U)^{H_L}$ und sei $v \in \omega_{LT}^r \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T$ ein Lift. Nach 4.5 gilt $v \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T)$. Andererseits gilt per Definition $\overline{h(v) - v} = 0$ in $\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U$. Wir zeigen als nächstes, dass der Kern der kanonischen Abbildung

$$\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \to \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U$$

durch $\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$ gegeben ist. Das ist gleichbedeutend mit

$$\mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \cap \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} U = \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U). \tag{4.4}$$

Wie im Beweis von Lemma 4.10 beschränken wir uns zunächst auf den Fall, dass T/U von π_L annuliert wird. Dort hatten wir eine Basis $n_1, \ldots, n_d$ von $\mathrm{N}(T)$ konstruiert mit der Eigenschaft, dass $\pi_L n_1, \ldots, \pi_L n_s, n_{s+1}, \ldots, n_d$ eine Basis von $\mathrm{N}(U)$ ist. Sei

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i n_i \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \cap \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} U.$$

Wenden wir Satz 4.5 auf U an, erhalten wir $x \in \mathrm{A}^+ \left[\frac{1}{\omega_{LT}}\right] \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$, weshalb π_L die Koeffizienten x_i für $0 \leq i \leq s$ in $\mathrm{A}^+ \left[\frac{1}{\omega_{LT}}\right]$ teilen muss. Nach Bemerkung 2.4 teilt π_L in diesem Fall x_i bereits in A^+ und wir erhalten $x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$. Für den allgemeinen Fall betrachtet man für $k \in \mathbb{N}_0$ wie im Beweis von 4.10 die Gitter $T_k := \pi_L^k T + U$. Dann ist $T_k = U$ für $k \gg 0$ und startet man mit

$$x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T) \cap \mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} U,$$

erhält man wegen $U \subset T_i \subset T$, dass $x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T_{i+1})$ für $0 \leq i \leq k-1$ gilt, woraus $x \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$ folgt. Für v erhalten wir aus 4.4, dass $h(v) - v \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$ für alle $h \in H_L$ gilt. Nach Lemma 4.10 gilt $v \in \mathrm{N}(T) + \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$, weshalb wir v schreiben können als $v = w + u$ mit $w \in \mathrm{N}(T)$ und $u \in \mathrm{A}^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(U)$. Dabei ist $\mathrm{N}(U) \subset D_{LT}^+(U)$, weshalb $\overline{u} = 0$ in $\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U$ gilt und daher $\overline{w} = \overline{v}$ in $\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/U$ gilt, was zu zeigen war. □

Satz 4.12. *Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Sei $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}(G_L)$, für $i \in \mathbb{N}$ seien $T_i \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$ und es gelte:*

1. *Die T_i bilden ein projektives System von G_L-Darstellungen.*
2. *$U_i \subset T_i$ seien Untergitter, sodass $V_i = U_i \otimes_{o_L} L = T_i \otimes_{o_L} L$ gilt.*
3. *Die Hodge-Tate-Gewichte von V_i liegen in $[-r, 0]$.*
4. *Es gibt Isomorphismen*
$$T/\pi_L^i T \cong T_i/U_i$$
für alle i, welche kompatibel mit den Übergangsabbildungen auf beiden Seiten sind.

Dann gilt bereits $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$.

Beweis. Wir wenden 4.11 für $i, j \geq 0$ auf die Gitter $U_{i+j} + \pi_L^i T_{i+j}$ und T_{i+j} an. Nach Voraussetzung ist

$$T_{i+j}/(U_{i+j} + \pi_L^j T_{i+j}) \cong (T/\pi_L^{i+j} T)/\pi_L^i T \cong T/\pi_L^i T.$$

Wir erhalten

$$\omega_{LT}^r (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/\pi_L^i T)^{H_L} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{N}(T_{i+j}) \to (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/\pi_L^i T)^{H_L}) \tag{4.5}$$

und setzen

$$N_i := \bigcap_{j \geq 0} \mathrm{Im}(\mathrm{N}(T_{i+j}) \to (\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/\pi_L^i T)^{H_L}).$$

Dann ist N_i ein A_L^+/π_L^i Untermodul von $(\mathrm{A}^+ \otimes_{o_L} T/\pi_L^i T)^{H_L} \subset D_{LT}(T/\pi_L^i T)$. Wegen den Eigenschaften der Wachmoduln ist N_i stabil unter φ und Γ_L und für jedes $n \in N_i$ gilt $\gamma(n) - n \in \omega_{LT} N_i$ für alle $\gamma \in \Gamma_L$. Die Übergangsabbildungen $N_i \to N_{i-1}$ sind per Konstruktion surjektiv. Nach [Sch17, Lemma 3.3.6] gilt $\varprojlim_i D_{LT}(T/\pi_L^i T) = D_{LT}(T)$ und wir können $N := \varprojlim_i N_i$ als A_L^+-Untermodul von $\varprojlim_i D_{LT}(T/\pi_L^i T) = D_{LT}(T)$ auffassen, welcher unter φ und Γ_L stabil ist und modulo ω_{LT} triviale Γ_L Wirkung hat. Als nächstes betrachten wir den Modul $\mathrm{B}_L^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} N = N[\frac{1}{\pi_L}]$. Wir werden zeigen, dass dieser frei von Rang d ist. Zunächst sind, da die Ringe $\mathrm{A}_L^+/(\pi_L^i)$ noethersch sind und die $\mathrm{N}(T_i)$ endlich erzeugt über A_L^+, alle N_i endlich erzeugt. Wir können $N_i/\pi_L N_i$ als E_L^+-Untermodul von $D_{LT}(T/\pi_L T)$ auffassen. Da N_i endlich erzeugt und $D_{LT}(T/\pi_L T)$ ohne ω_{LT}-Torsion ist, ist $N_i/\pi_L N_i$ ein freier E_L^+-Untermodul von $D_{LT}(T/\pi_L T)$, was ein d-dimensionaler E_L-Vektorraum ist. Da $\mathrm{E}_L = \kappa((\omega_{LT}))$ der Quotientenkörper von $\mathrm{E}_L^+ = \kappa[[\omega_{LT}]]$ ist, sieht man leicht ein, dass ein solcher Modul höchstens Rang d hat. Da die $\mathrm{A}_L^+/(\pi_L^i)$ lokale Ringe sind, erhalten wir mit dem Nakayama-Lemma, dass alle N_i sich von d Elementen erzeugen lassen und wir behaupten, dass auch N sich von d Elementen erzeugen lässt. Sei dazu $\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_d}$ ein $\mathrm{A}_L^+/(\pi_L)$-Erzeugendensystem von N_1. Wegen der Surjektivität der Übergangsabbildungen finden wir Elemente $n_1, \ldots, n_d \in N$, die sich auf die $\overline{n_i}$ abbilden. Bilden wir e_i auf n_i ab, erhalten wir einen Homomorphismus

$$f\colon (\mathrm{A}_L^+)^d \to N,$$

der nach Nakayama auf jeder Ebene $f_i : (\mathrm{A}_L^+/\pi_L^i)^d \to N_i$ Surjektionen induziert. Da die N_i endlich erzeugte A_L^+-Moduln sind, sind sie ω_{LT}-adisch vollständig und wir erhalten Surjektionen

$$f_{ij}\colon (\mathrm{A}_L^+/(\pi_L^i, \omega_{LT}^j))^d \to N_i/\omega_{LT}^j N_i.$$

Übergang zum Limes zeigt, dass f eine für die (π_L, ω_{LT})-adische Topologie stetige Abbildung mit dichtem Bild ist. N ist hausdorffsch, da die N_i dies sind. Die schwache (π_L, ω_{LT})-adische Topologie auf $\mathrm{A}_L^+ = o_L[[\omega_{LT}]] = \prod_{i \geq 0} o_L \omega_{LT}^i$ entspricht der Produkttopologie der π_L-adischen Topologie der o_L. Da o_L pro-endlich und insbesondere kompakt ist, ist nach Tychonoff A_L^+ ebenfalls kompakt. Insgesamt ergibt sich, dass das Bild von f abgeschlossen und daher ganz N ist.

Da B_L^+ nach 2.6 ein Hauptidealring ist, ist $\mathrm{B}_L^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} N$ frei über B_L^+ vom Rang höchstens d. Da jedes $\mathrm{N}(T_i)$ wegen $\mathrm{A}_L \otimes_{\mathrm{A}_L^+} \mathrm{N}(T_i) = D_{LT}(T_i)$ eine A_L-Basis von $D_{LT}(T_i)$ enthält und in der vorliegenden Situation $\mathrm{N}(T_i) \subset D_{LT}^+(T_i)$ gilt, können wir uns wegen (4.5) sicher sein, dass auch N_i für jedes i ein A_L-Erzeugendensystem von $D_{LT}(T/\pi_L^i T)$ enthält und N ein A_L-Erzeugendensystem von $D_{LT}(T)$. Daher ist der Rang von $\mathrm{B}_L^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} N$ mindestens d und die kanonische Abbildung

$$\mathrm{B}_L \otimes_{\mathrm{B}_L^+} (\mathrm{B}_L^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+} N) \to D_{LT}(L \otimes_{o_L} T)$$

ist eine surjektive lineare Abbildung zwischen B_L-Vektorräumen gleicher Dimension und daher ein Isomorphismus. Ferner erhalten wir aus 4.4, da $D_{LT}(T_i)$ étale ist und $\mathrm{N}(T_i) = D_{LT}(T_i) \cap \mathrm{N}(V_i)$ gilt, dass $Q^r N \subset N^{(\varphi)}$ gilt, weshalb die linearisierte Abbildung φ_N^{lin}, welche bereits auf Ebene von $D_{LT}(V)$ injektiv ist, zusätzlich surjektiv wird, wenn man Q invertierbar macht. Die Aussage folgt nun aus 2.30. □

Korollar 4.13. *Seien $a \leq b \in \mathbb{Z}$. Sei $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}(G_L)$, für $i \in \mathbb{N}$ seien $T_i \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$ und es gelte:*

1. *Die T_i bilden ein projektives System von G_L-Darstellungen.*
2. *$U_i \subset T_i$ seien Untergitter, sodass $V_i = U_i \otimes_{o_L} L = T_i \otimes_{o_L} L$ gilt.*
3. *Die Hodge-Tate-Gewichte von V_i liegen in $[a, b]$.*
4. *Es gibt Isomorphismen*
$$T/\pi_L^i T \cong T_i/U_i$$
für alle i, welche kompatibel mit den Übergangsabbildungen auf beiden Seiten sind.

Dann gilt bereits $T \in \mathrm{Rep}_{o_L,f}^{cris,an}(G_L)$.

Beweis. Wir können alle T_i mit χ_{LT}^{-b} twisten. Wegen Lemma 2.31 bleiben die Voraussetzungen von Satz 4.12 erhalten. □

Kommentar

An dieser Stelle möchten wir auf die Unterschiede zu dem Beweis von Berger eingehen. Wir machen die zusätzliche Annahme, dass die T_i ein projektives System von Darstellungen bilden. In diesem Fall liefern die Morphismen $T_{i+1} \to T_i$ aus Gründen der Funktorialität Abbildungen $\mathrm{N}(T_{i+1}) \to \mathrm{N}(T_i)$, welche die Übergangsabbildungen im projektiven System $(N_i)_i$ induzieren. In [Ber04, Theorem IV.2.1] wird die Wohldefiniertheit der Übergangsabbildungen implizit angenommen. Diese Zusatzvoraussetzung kann man wegen 4.8 in dem Spezialfall $U_i = \pi_L^i T_i$ umgehen. Damit das Ergebnis ohne die zusätzliche Annahme korrekt ist, müsste man gewährleisten, dass

$$\mathrm{Im}(\mathrm{N}(T_{i+1}) \to D_{LT}(T/\pi_L^i T))$$

im Bild von $\mathrm{N}(T_i)$ enthalten ist. Da freie o_L-Moduln stets projektiv sind, können wir die Abbildungen $T_{i+1} \to T_i/U_i$ über die Surjektion $T_i \to T_i/U_i$ liften. Dieser Lift muss nicht G_L-linear sein. Wir benötigen jedoch G_L-lineare Morphismen um einen Morphismus $\mathrm{N}(T_{i+1}) \to \mathrm{N}(T_i)$ zu induzieren. Weiterhin benutzt Berger beim Beweis, dass T von endlicher Höhe ist, obwohl an dieser Stelle nicht klar ist, dass $D^+(T) = \varprojlim D^+(T/p^n T)$ gilt. Dies wird später für kristalline Darstellungen gezeigt (vgl. [Ber04, IV.3.1]). In dem Theorem können wir jedoch nicht annehmen, dass T kristallin ist, weshalb wir direkt mit der Kategorienäquivalenz 2.26 argumentieren. Im zyklotomischen Fall kann man an dieser Stelle [Col99, Lemma III.5.] benutzen, um zu folgern, dass T von endlicher Höhe ist. In dem Beweis haben wir außerdem verwendet, dass o_L kompakt ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Restklassenkörper endlich ist. Berger betrachtet hingegen den Quotientenkörper F der unverzweigten Wittvektoren über einem perfekten (nicht notwendiger Weise endlichen) Körper κ_F der Charakteristik p. Wir haben die Tatsache, dass o_L kompakt ist, verwendet, um zu zeigen, dass N sich von d Elementen erzeugen lässt. Diese Aussage wird in [Ber04, Theorem IV.2.1] nicht ausführlich begründet, weshalb wir keine Aussage darüber machen können, ob diese Bedingung auch im zyklotomischen Fall notwendig wäre.

5 Berechnung der Hodge-Tate-Gewichte

Im zyklotomischen Fall zeigt Berger, dass die Hodge-Tate-Gewichte des Limes kristalliner Darstellungen mit Hodge-Tate-Gewichten in $[-r, 0]$ ebenfalls in $[-r, 0]$ liegen. Ein entsprechendes Resultat können wir auch im Lubin-Tate-Fall erhalten. Man kann dazu auf $\mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V)$ eine Filtrierung definieren und zeigen, dass dieser L-Vektorraum isomorph zu der Identitätskomponente von $D_{cris}(V)$ ist, welche wir mit $D_{cris,L}(V)$ bezeichnen. Wir werden im Rahmen dieser Arbeit nicht im Detail auf diesen Isomorphismus eingehen und beschreiben lediglich die Seite der Wachmoduln.

Definition 5.1. *Sei V eine kristalline L-analytische Darstellung. Wir sagen $v \in \mathrm{N}(V)$ liegt in $\mathrm{Fil}^i(\mathrm{N}(V))$, wenn $\varphi_{\mathrm{N}(V)}(v)$ unter $\varphi_{\mathrm{N}(V)} : \mathrm{N}(V) \to \mathrm{N}(V)[\frac{1}{Q}]$ in $Q^i\mathrm{N}(V)$ liegt. Dies definiert eine Filtrierung durch B_L^+-Untermoduln. Wir geben $\mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V)$ die Faktorraumfiltrierung. Das bedeutet*

$$\mathrm{Fil}^i(\mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V)) := \mathrm{Im}(\mathrm{Fil}^i(\mathrm{N}(V)) \to \mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V)).$$

Dadurch erhält $\mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V)$ die Struktur eines filtrierten L-Vektorraums.

Für positive Darstellungen ist $\mathrm{N}(V)$ stabil unter $\varphi_{\mathrm{N}(V)}$. Die Surjektivität der linearisierten Abbildung

$$\varphi_{\mathrm{N}(V)}^{lin} : \mathrm{A}_L^+ \otimes_{\mathrm{A}_L^+,\varphi_L} \mathrm{N}(V)[1/Q] \to \mathrm{N}(V)[1/Q]$$

bedeutet in diesem Kontext einfach, dass der Kokern $\mathrm{N}(V)/\mathrm{N}(V)^{(\varphi)}$ von einer Potenz Q^h von Q annuliert wird.

Lemma 5.2. *Sei $\varphi_{\mathrm{N}(V)}(\mathrm{N}(V)) \subset \mathrm{N}(V)$ und $Q^h\mathrm{N}(V) \subset \mathrm{N}(V)^{(\varphi)}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Fil}^{h+1}(\mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V)) = 0.$$

Mit anderen Worten

$$\mathrm{Fil}^{h+1}\,\mathrm{N}(V) \subset \omega_{LT}\mathrm{N}(V).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst eine Hilfsbehauptung. In $\mathrm{B}_L^+ = o_L[[\omega_{LT}]][\frac{1}{p}]$ gilt $Q \mid \varphi_L(f)$ genau dann, wenn $\omega_{LT} \mid f$ gilt. Sei zunächst $f = \omega_{LT}g$, dann erhalten wir

$$\varphi_L(f) = \varphi_L(\omega_{LT})\varphi_L(g) = Q\omega_{LT}\varphi_L(g).$$

Für die umgekehrte Implikation merken wir an, dass wir die Reihen in B_L^+, da ihre Koeffizienten beschränkt sind, als Funktionen auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p} \subset \mathbb{C}_p$ auffassen können, indem wir für ω_{LT} einen Wert $z \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ einsetzen. Eine Reihe ist offensichtlich genau dann durch ω_{LT} teilbar, wenn $z = 0$ eine Nullstelle ist. Sei $z \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ ein π_L-Torsionspunkt des formalen Lubin-Tate-Gruppengesetzes, der von 0 verschieden ist. Dann ist z eine Nullstelle von $Q = \frac{\varphi_L(\omega_{LT})}{\omega_{LT}}$. Wir erhalten aus der Bedingung $Q \mid \varphi_L(f)$, dass z ebenfalls eine Nullstelle von $\varphi_L(f) = f(\varphi_L(\omega_{LT}))$ ist. Wir berechnen

$$0 = \varphi_L(f)_{|\omega_{LT}=z} = f(\varphi_L(\omega_{LT}))_{|\omega_{LT}=z} = f(0) = f(\omega_{LT})_{|\omega_{LT}=0},$$

was die Hilfsbehauptung zeigt. Schreiben wir $n = \sum_{i=1}^d a_i n_i \in \mathrm{Fil}^{h+1}(\mathrm{N}(V))$ bezüglich einer Basis $n_1, \dots, n_d$ von $\mathrm{N}(V)$, erhalten wir aus

$$\varphi_L(n) = \sum_{i=1}^d \varphi_L(a_i)\varphi_L(n_i) \in Q^{h+1}\mathrm{N}(V) = Q(Q^h\mathrm{N}(V)) \subset Q\mathrm{N}(V)^{(\varphi)},$$

dass es geeignete $b_i \in \mathrm{B}_L^+$ gibt mit

$$\sum_{i=1}^d \varphi_L(a_i)\varphi_L(n_i) = Q \sum_{i=1}^d b_i \varphi_L(n_i).$$

Bezüglich der Basis $(n_1, \dots, n_d)$ sind die $\varphi_L(n_i)$ gerade die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix von $\varphi_{\mathrm{N}(V)}$, welche Koeffizienten in $\mathrm{GL}_d(\mathrm{B}_L^+[1/Q])$ hat. Insbesondere sind die $\varphi_L(n_i)$ linear unabhängig und wir erhalten ein System von Gleichungen $\varphi_L(a_i)\varphi_L(n_i) = Qb_i\varphi_L(n_i)$. Aus der Hilfsaussage erhalten wir $\omega_{LT} \mid a_i$ für alle i, was $n \in \omega_{LT}\mathrm{N}(V)$ zeigt. □

Für die Berechnung der Hodge-Tate-Gewichte an der Identitätskomponente benötigen wir den Ring $\mathrm{B}_{cris,L} := L \otimes_{L_0} \mathrm{B}_{cris}$. In [FO, Theorem 6.14] wird gezeigt, dass die kanonische Abbildung

$$\mathrm{B}_{cris,L} \to \mathrm{B}_{dR}$$

injektiv ist und wir geben $\mathrm{B}_{cris,L}$ die von B_{dR} induzierte Filtrierung, wodurch wir eine Filtrierung auf

$$D_{cris,L}(V) := (\mathrm{B}_{cris,L} \otimes_L V)^{G_L}$$

erhalten.

Satz 5.3. *Sei V kristallin und L-analytisch. Es gibt einen Isomorphismus von filtrierten Vektorräumen*

$$\mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V) \cong D_{cris,L}(V)$$

und die Filtrierungssprünge mit Vielfachheiten entsprechen den Hodge-Tate-Gewichten an der Identitätskomponente.

Beweis. Diese Ergebnisse fließen alle in [KR09, Cor. 3.3.8] ein. Sie werden in [KR09, Cor. 2.4.4, Lemma 3.3.1] behandelt. □

Korollar 5.4. *In der Situation von Satz 4.12 liegen die Hodge-Tate-Gewichte von T in $[-r, 0]$.*

Beweis. Wir haben gesehen, dass $\mathrm{N}(V)$ stabil unter φ_L ist. Das zeigt $n \in \mathrm{Fil}^0(\mathrm{N}(V))$ für alle $n \in \mathrm{N}(V)$. In dem Beweis ging auch hervor, dass $Q^r\mathrm{N}(V) \subset \mathrm{N}(V)^{(\varphi)}$ gilt. Mit Lemma 5.2 erhalten wir, dass $\mathrm{Fil}^{r+1}(\mathrm{N}(V)/\omega_{LT}\mathrm{N}(V)) = 0$ gilt. Insgesamt folgern wir, dass sich die Filtrierung zwischen 0 und r abspielt. Die Hodge-Tate-Gewichte sind die additiven inversen der Filtrierungssprünge und liegen daher in $[-r, 0]$. □

Korollar 5.5. *In der Situation von 4.13 liegen die Hodge-Tate-Gewichte in $[a, b]$.*

Literaturverzeichnis

[AB59] Maurice Auslander and D. A. Buchsbaum. Unique factorization in regular local rings. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 45(5):733–734, 1959.

[Ber02] Laurent Berger. Représentations p-adiques et équations différentielles. *Inventiones Mathematicae*, 148(2):219–284, 2002.

[Ber04] Laurent Berger. Limites de representations cristallines. *Compositio Mathematica*, pages 1–25, 2004.

[Ber10] Laurent Berger. Galois Representations and (φ, Γ)-modules- Course given at IHP. `http://perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/autrestextes/CoursIHP2010.pdf`, 2010.

[Ber16] Laurent Berger. Multivariable (φ, Γ)-modules and locally analytic vectors. *Duke Mathematical Journal*, 165:3567–3595, 2016.

[BSX15] Laurent Berger, Peter Schneider, and Bingyong Xie. Rigid character groups, lubin-tate theory, and (φ,Γ)-modules, 2015.

[Col98] Pierre Colmez, Frédéric Cherbonnier. Représentations p-adiques surconvergentes. *Inventiones Mathematicae*, 133(3):581–611, 1998.

[Col99] Pierre Colmez. Répresentations cristallines et répresentations de hauteur finie. *J. reine angew. Math*, 514:119–143, 1999.

[FO] Jean-marc Fontaine and Yi Ouyang. Theory of p -adic Galois Representations. `http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/galoisrep.pdf`.

[KR09] Mark Kisin and Wei Ren. Galois Representations and Lubin-Tate Groups. *Documenta Mathematica*, 14:441–461, 2009.

[Sch17] Peter Schneider. *Galois Representations and (φ, Γ)-Modules*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2017.

[Ser68] J. P. Serre. *Abelian l-Adic Representations and Elliptic Curves*. Advanced book classics series 1988, 1968.

[SV18] Peter Schneider and Otmar Venjakob. Regulator maps. *preprint*, 2018.