Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

(φ, Γ)-Moduln über Lubin-Tate-Erweiterungen und ihre Beschreibung der Galoiskohomologie

Masterarbeit von
Benjamin Kupferer

Betreut durch:
Prof. Dr. Otmar Venjakob

Abgabedatum:
31.07.2015

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Benjamin Kupferer, die zur Erlangung des akademischen Grades „Master of Science“ vorgelegte Arbeit selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Heidelberg, den ______________

____
(Benjamin Kupferer)

Kurzdarstellung/Abstract

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Darstellungen der absoluten Galoisgruppe einer endlichen Erweiterung K von $\mathbb{Q}_p$ mithilfe von (φ, Γ)-Moduln über Lubin-Tate-Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$ zu beschreiben.
Dazu wird im ersten Kapitel die Theorie der (φ, Γ)-Moduln über Lubin-Tate-Erweiterungen einer endlichen Erweiterung L von $\mathbb{Q}_p$ behandelt. Auf diesen Moduln wird daraufhin für $L = \mathbb{Q}_p$ ein zu φ linksinverser Operator ψ definiert.
Wie im klassischen, zyklotomischen Fall, wird im zweiten Kapitel mit diesen Operatoren die Galoiskohomologie einer Darstellung der absoluten Galoisgruppe von K berechnet. Zum Abschluss werden diese Ergebnisse mit den Ergebnissen aus [SV15] verglichen.

The goal of the present thesis is to describe representations of the absolute Galois group of a finite extension K of $\mathbb{Q}_p$ with (φ, Γ)-modules over Lubin-Tate extensions of $\mathbb{Q}_p$.
In order to do this the first chapter adresses the theorie of (φ, Γ)-modules over Lubin-Tate extensions of a finite extension L of $\mathbb{Q}_p$. After that one defines for $L = \mathbb{Q}_p$ on these modules an operator ψ which is a left inverse to φ.
As in the classical, cyclotomical case one computes in the second chapter the Galois cohomology of a representation of the absolute Galois group of K with these operators. Finally these results are compared with the results in [SV15].

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

(φ, Γ)-Moduln der zyklotomischen Erweiterung 1

Berechnung der Galoiskohomologie durch φ und ψ 3

Weitere Anwendungen 4

1 (φ, Γ)-Moduln über Lubin-Tate-Erweiterungen **5**

1.1 Lubin-Tate-Gruppen und Tate-Moduln 5

1.2 Der Operator φ 9

1.3 (φ, Γ)-Moduln und die Kategorienäquivalenz $\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}} \cong \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$ 15

1.4 Der Operator ψ 18

2 Galoiskohomologie von Darstellungen beschrieben durch φ und ψ **28**

2.1 Galoiskohomologie von Torsionsdarstellungen beschrieben durch $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$. 28

2.2 Galoiskohomologie endlich erzeugter Darstellungen beschrieben durch $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ 38

2.3 Galoiskohomologie von Darstellungen beschrieben durch $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ 41

2.4 Galoiskohomologie von Darstellungen beschrieben durch ψ nach [SV15] 48

Symbolverzeichnis **51**

Literaturverzeichnis **55**

Einleitung

In dieser Einleitung soll die klassische Theorie der (φ, Γ)-Moduln erklärt werden und, wie man mithilfe der zugehörigen Operatoren φ und seinem Linksinversen ψ die Galoiskohomologie gewisser absoluter Galoisgruppen berechnen kann. Dies ist nahe an [Col04, Chapter 4, 5] gehalten. Für Beweise oder ausführlichere Erklärungen schaue man also dort. Lediglich die Notation wird so angepasst, dass sie innerhalb dieser Arbeit einheitlich ist.

(φ, Γ)-Moduln der zyklotomischen Erweiterung

Sei $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p$ die Vervollständigung von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ bezüglich der Bewertung v_p mit $v_p(p) = 1$, $K|\,\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung, $\mathcal{O}_K$ sein Ganzheitsring und k sein Restklassenkörper. Man definiere den Ring

$$\mathcal{R} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} / p\, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} .$$

Sei $(x_n) \in \mathcal{R}$, $\hat{x}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Lift von x_n in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ und $x^{(n)}$ der Grenzwert der Folge $((\hat{x}_{n+k})^{p^k})_k$. Dann zeigt man, wie in Proposition und Definition 1.9, dass

$$\mathcal{R} \cong \{(x^{(n)}) | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}$$

gilt, wobei Addition und Multiplikation auf der rechten Seite durch

$$(x+y)^{(n)} = \lim_{k \to \infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k}, \quad (xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}$$

erklärt sind. Sei $\varepsilon^{(n)} \in \mathbb{C}_p$ für $n \in \mathbb{N}$ eine primitive p^n-te Einheitswurzel, sodass $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ gilt. Man setzt dann $\varepsilon := (1, \varepsilon^{(1)}, \dots) \in \mathcal{R}$ und $\overline{\pi} := \varepsilon - 1 \in \mathcal{R}$ und definiert damit

$$\begin{aligned} &K_n := K(\varepsilon^{(n)}),\ K_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \\ &G_K := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|K),\ H_K := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\, K_\infty) \text{ und} \\ &\Gamma_K := G_K / H_K. \end{aligned}$$

Es bezeichne $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ den Ring der Wittvektoren des Quotientenkörpers von $\mathcal{R}$. Ist $x \in W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$, so gibt es $x_k \in \mathrm{Fr}\,\mathcal{R}$ mit

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} p^k [x_k],$$

wobei $[x_k] \in W(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$ den *Teichmüllerrepräsentanten* von x_k bezeichnet. Man kann $W(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$ mit zwei verschiedenen Topologien versehen. Zum einen, mit der **starken** Topologie, oder p-adische Topologie, bei welcher die Mengen $p^kW(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$ eine offene Umgebungsbasis der 0 bilden. Zum anderen mit der **schwachen** Topologie, welche gerade die Produkttopologie auf $W(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$ darstellt und bei welcher durch die Mengen $p^kW(\operatorname{Fr}\mathcal{R}) + [\overline{\pi}^n]W(\mathcal{R})$ eine offene Umgebungsbasis der 0 gegeben ist. Auf $\mathcal{R}$ operiert der Frobenius φ durch p-Potenzierung, sowie die absolute Galoisgruppe $G_{\mathbb{Q}_p}$ auf natürlich Weise. Man erhält somit per Funktorialität auch Operationen von φ und $G_{\mathbb{Q}_p}$ auf $W(\operatorname{Fr}(\mathcal{R}))$, welche wie folgt gegeben sind:

$$g\left(\sum p^k[x_k]\right) = \sum p^k[g(x_k)], \quad \varphi\left(\sum p^k[x_k]\right) = \sum p^k[x_k^p].$$

Man setzt dann $\pi := [\varepsilon] - 1$ und definiert

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}} := \widehat{\mathbb{Z}_p[\![\pi]\!][1/\pi]},$$

wobei die Vervollständigung bezüglich der p-adischen Topologie gemeint ist. Dies ist ein Unterring von $W(\operatorname{Fr}(\mathcal{R}))$ und lässt sich konkret angeben:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}} = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\pi^k \,\middle|\, a_k \in \mathbb{Z}_p, \lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty \right\}.$$

Sei weiterhin $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}} \subseteq W(\operatorname{Fr}(\mathcal{R}))$ die maximal ganze, unverzweigte Erweiterung von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$ in $W(\operatorname{Fr}(\mathcal{R}))$ und $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \subseteq W(\operatorname{Fr}(\mathcal{R}))$ die Vervollständigung bezüglich der p-adischen Topologie. Weiterhin setze man dann $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} := (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})^{H_K}$. Die zugehörigen Quotientenkörper werden im Folgenden mit $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}$, $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$, $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ bzw. $\mathcal{E}_K$ bezeichnet. Auch der Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ lässt sich konkret beschreiben. Sei dazu $F \subseteq K_\infty$ die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ in K_∞. Dann ist

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\pi_K^k \,\middle|\, a_k \in \mathcal{O}_F, \lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty \right\},$$

wobei π_K ein Lift eines uniformisierenden Elements des Restklassenkörpers von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ist.

Definition 0.1.
Ein (φ,Γ_K)**-Modul** über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul, zusammen mit einer Operation von φ und einer semilinearen Operation von Γ_K, welche bezüglich der schwachen Topologie stetig sind und die miteinander kommutieren.
Ein (φ,Γ_K)-Modul M über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ heißt **étale**, falls M durch $\varphi(M)$ als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul erzeugt wird.
Es bezeichne $\mathbf{Mod}^{\varphi,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ die Kategorie der étalen (φ,Γ_K)-Moduln über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$. Die Morphismen dieser Kategorie sind $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modulhomomorphismen, welche die Operationen von φ und Γ_K respektieren.
Weiterhin bezeichne $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ die Kategorie der endlich erzeugten $\mathbb{Z}_p$-Darstellungen von G_K.

Satz 0.2.
Sei für $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ der Funktor

$$V(M) := \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} M\right)^{\varphi=1}$$

und für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ der Funktor

$$M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) := \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V\right)^{H_K}$$

definiert.
Dann sind $V\colon \mathbf{Mod}^{\varphi,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}} \to \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ und $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}\colon \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p} \to \mathbf{Mod}^{\varphi,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ zueinander quasiinverse Funktoren. Insbesondere sind also die Kategorien $\mathbf{Mod}^{\varphi,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ und $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ äquivalent.

Berechnung der Galoiskohomologie durch φ und ψ

Es lässt sich zeigen, dass sich φ zu einem injektiven Ringhomomorphismus auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ einschränkt. Man führt dann den Operator ψ als Linksinverses zu φ ein. Im Wesentlichen gibt es zwei verschiedene Darstellungen des Operators ψ. Zum einen kann man zeigen, dass $(1, [\varepsilon], \ldots, [\varepsilon]^{p-1})$ eine $\varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Basis von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist und stellt dann fest, dass ψ durch

$$\psi\colon \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}},\ x = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)[\varepsilon]^i \mapsto x_0$$

gegeben ist. Zum anderen lässt sich ψ auch durch

$$\psi = \frac{1}{p}\varphi^{-1} \circ \mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}|\varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}$$

darstellen, wobei $\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}|\varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}$ die Spur der Erweiterung $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}|\varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ ist. Man stellt dann fest, dass mit φ auch ψ stetig ist (bezüglich der schwachen Topologie) und mit der Operation von $G_{\mathbb{Q}_p}$ kommutiert.
Unter der Annahme, dass Γ_K prozyklisch ist (was im Falle $p \neq 2$ oder $\mathbb{Q}_2(\mu_4) \subseteq K$ gilt) und dass $\gamma \in \Gamma_K$ ein topologischer Erzeuger ist, definiert man für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ den Komplex $C_{\varphi,\Gamma_K}(V)$ durch

$$0 \longrightarrow M(V) \xrightarrow{(\varphi_M - 1, \gamma - 1)} M(V) \oplus M(V) \xrightarrow{(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\varphi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2} M(V) \longrightarrow 0$$

und den Komplex $C_{\psi,\Gamma_K}(V)$ durch

$$0 \longrightarrow M(V) \xrightarrow{(\psi_M - 1, \gamma - 1)} M(V) \oplus M(V) \xrightarrow{(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\psi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2} M(V) \longrightarrow 0.$$

Dabei ist $M(V) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$. Für $i \in \mathbb{N}_0$ und $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ zeigt man dann:

$$H^i(G_K, V) \cong H^i(C_{\varphi,\Gamma_K}(V)) \cong H^i(C_{\psi,\Gamma_K}(V))$$

In der vorliegenden Arbeit soll diese Theorie für sogenannte Lubin-Tate-Erweiterungen aufgebaut werden. Zuvor soll jedoch noch eine weitere Anwendung der Theoire der (φ, Γ_K)-Moduln angeführt werden.

Weitere Anwendungen

Neben der Berechnung der Galoiskohomologie gibt es noch weitere Anwendungen der Theorie der (φ, Γ)-Moduln. Im Folgenden soll noch auf die Beschreibung der sogenannten Iwasawa-Kohomologie mit (φ, Γ)-Moduln eingegangen werden. Zu dem betrachteten Körperturm definiert man für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K, \mathbb{Z}_p}$ die i-te Iwasawa-Kohomologie durch

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(V) := \varprojlim H^i(G_{K_n}, V).$$

Dann gilt der folgende Satz (vgl. [Col04, 6, Theorem 6.2.2, S.112]).

Satz 0.3.
Ist $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K, \mathbb{Z}_p}$, so gilt

$$\begin{aligned}
H^i_{\mathrm{Iw}}(V) &= 0 \text{ falls } i \neq 1, 2, \\
H^1_{\mathrm{Iw}}(V) &= M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)^{\psi=1}, \\
H^2_{\mathrm{Iw}}(V) &= M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)/(\psi - 1).
\end{aligned}$$

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Otmar Venjakob für das interessante Thema und die vielen hilfreichen Konversationen danken. Ebenso möchte ich Herrn Dr. Andreas Riedel für die vielen Hilfestellungen und Anmerkungen danken. Ein weiterer Dank geht an meine Korrekturleser Angelika Kupferer, Jonas Belzner und Martin Lüdtke für das Aufspüren von Tippfehlern und für stilistische Verbesserungsvorschläge. Ein ganz besonderer Dank geht an meine Eltern, Nikolaus und Angelika Kupferer, die mir in den letzten Jahren immer zur Seite standen und mir dieses Studium überhaupt erst ermöglicht haben.

Kapitel 1

(φ, Γ)-Moduln über Lubin-Tate-Erweiterungen

Gegenstand dieses Kapitels sind (φ, Γ)-Moduln, welche über Lubin-Tate-Erweiterungen einer endlichen Erweiterung L von $\mathbb{Q}_p$ gebildet werden. Einige dieser Resultate werden dabei aus der Literatur zitiert. Den Abschluss bildet dann ein Abschnitt, in dem für $L = \mathbb{Q}_p$ der Operator ψ definiert wird, welcher linksinvers zu φ ist.

1.1 Lubin-Tate-Gruppen und Tate-Moduln

Sei p eine Primzahl und $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}_p$. Für die gesamte Arbeit ist jede algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ als Teilkörper von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ zu verstehen. Sei weiterhin $\mathbb{C}_p$ die Vervollständigung von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ bezüglich der Bewertung v_p mit $v_p(p) = 1$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ der zugehörige Ganzheitsring. Sei $K|\,\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung, $\mathcal{O}_K$ der zugehörige Ganzheitsring, k_K der Restklassenkörper, K^{ur} die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ in K, $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$ der zugehörige Ganzheitsring und $k_{K^{\mathrm{ur}}}$ der Restklassenkörper. Sei ferner $L|\,\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung mit $L \subseteq K$, $\mathcal{O}_L$ der Ganzheitsring von L, π_L ein Primelement von $\mathcal{O}_L$, k_L der zugehörige Restklassenkörper, $q = p^r$ die Mächtigkeit von k_L, L^{ur} die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ in L, $\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}$ der zugehörige Ganzheitsring und $k_{L^{\mathrm{ur}}}$ der Restklassenkörper.
Sei $f_L \in \mathcal{O}_L[X]$ ein Lubin-Tate-Polynom zu π_L und $\mathcal{G}_L \in \mathcal{O}_L[\![X, Y]\!]$ eine Lubin-Tate-Gruppe zu f_L, d.h. über $\mathcal{O}_L$ gilt dann (vgl. [Neu07, S.345, S.359ff]):

$$\begin{aligned}
f_L(X) &\equiv \pi_L X \mod (\text{Grad } 2),\\
f_L(X) &\equiv X^q \mod \pi,\\
\mathcal{G}_L(X,0) &= X,\\
\mathcal{G}_L(0,Y) &= Y,\\
\mathcal{G}_L(X,Y) &= \mathcal{G}_L(Y,X),\\
\mathcal{G}_L(X,\mathcal{G}_L(Y,Z)) &= \mathcal{G}_L(\mathcal{G}_L(X,Y),Z),\\
f_L(\mathcal{G}_L(X,Y)) &= \mathcal{G}_L(f_L(X), f_L(Y)),\\
\mathcal{G}_L(X,Y) &\equiv X + Y \mod (\text{Grad } 2).
\end{aligned}$$

Nach [Neu07, (2.2) Satz S.345, S. 361f] gibt es zu jedem $a \in \mathcal{O}_L$ eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $[a]_{\pi_L} \in \mathcal{O}_L[\![X]\!]$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}[a]_{\pi_L}(X) &\equiv aX \mod (\text{Grad } 2),\\ [a]_{\pi_L}(\mathcal{G}_L(X,Y)) &= \mathcal{G}_L([a]_{\pi_L}(X),[a]_{\pi_L}(Y)),\\ [\pi_L]_{\pi_L} &= f_L,\\ f_L([a]_{\pi_L}(X)) &= [a]_{\pi_L}(f_L(X)).\end{aligned}$$

Insbesondere ist $[1]_{\pi_L} = X$. Bezeichnet man mit $f_L^{(n)}$ die n-fache Verknüpfung von f_L, so erhält man:

Proposition und Definition 1.1.
Bezüglich der durch

$$x +_{\mathcal{G}_L} y := \mathcal{G}_L(x,y)$$

erklärten Addition und der durch

$$b \cdot x := [b]_{\pi_L}(x)$$

erklärten äußeren Multiplikation bildet die Menge $\{x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \,|\, f_L^{(n)}(x) = 0\}$ *einen* $\mathcal{O}_L$*-Modul. Sie wird im Folgenden mit* $\mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ *bezeichnet und heißt die Menge der* π_L^n**-Torsionspunkte von** $\mathcal{G}_L$.

Beweis.
Zu Beginn soll geklärt werden, dass obige Definitionen allesamt Sinn ergeben, das heißt, dass alle auftretenden Potenzreihen konvergieren. Da Potenzreihen über vollständigen nichtarchimedisch bewerteten Körpern bekanntlich genau dann konvergieren, wenn die Folge der Summanden eine Nullfolge bildet, genügt es zu zeigen, dass $|x|_p < 1$ für $x \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ gilt. Es wird die Kontraposition gezeigt. Sei also $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $|x|_p = 1$. Wegen $f_L(X) \equiv X^q \bmod \pi_L$ gilt dann $f_L(x) \in \mathcal{O}_L^\times + (\pi_L)$, also ist $f_L(x) \in \mathcal{O}_L^\times$. Insbesondere gilt $f_L^{(k)} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $x \notin \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$.
Als nächstes wird untersucht, ob obige Verknüpfungen wohldefiniert sind. Seien dazu $x, y \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ und $b \in \mathcal{O}_L$. Nach der vorausgegangen Bemerkung gilt dann $f_L([b]_{\pi_L}(x)) = [b]_{\pi_L}(f_L(x)) = [b]_{\pi_L}(0) = 0$, also ist $b \cdot x \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$. Weiterhin ist

$$0 = \mathcal{G}_L(0,0) = \mathcal{G}_L(f_L(x), f_L(y)) = f_L(\mathcal{G}_L(x,y))$$

und damit ist $\mathcal{G}_L(x,y) \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$. Die oben erklärten Verknüpfungen auf $\mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ sind also wohldefiniert. Wegen $f_L(0) = 0$ ist $0 \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ und wegen $\mathcal{G}_L(X,0) = X$, $\mathcal{G}_L(0,Y) = Y$ ist 0 das neutrale Element bezüglich „$+_{\mathcal{G}_L}$“. Nach [Fr68, Proposition 1, S. 22] ist die Existenz von inversen Elementen in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ gesichert, da die auftretenden Potenzreihen in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ konvergieren. Es bleibt zu zeigen, dass das Inverse eines Torsionspunktes wieder ein Torsionspunkt ist. Sei also $x \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ und $y \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $\mathcal{G}_L(x,y) = 0$. Dann gilt

$$0 = f_L^{(n)}(0) = f_L^{(n)}(\mathcal{G}_L(x,y)) = \mathcal{G}_L(f_L^{(n)}(x), f_L^{(n)}(y)) = \mathcal{G}_L(0, f_L^{(n)}(y)) = f_L^{(n)}(y).$$

Folglich bildet $\mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ mit der durch $\mathcal{G}_L$ gegebenen Addition eine abelsche Gruppe. Dass $\mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ mit der oben erklärten äußeren Multiplikation zu einem $\mathcal{O}_L$-Modul wird, ist mit den zuvor erwähnten Verträglichkeiten sofort ersichtlich. □

Beispiel 1.2.
An einigen Stellen soll erklärt werden, inwiefern diese Theorie eine Verallgemeinerung des „klassischen Falls" darstellt. Dabei ist unter dem klassischen Fall der Fall $L = \mathbb{Q}_p$, $\pi_L = p$ und $\mathcal{G}_L = \widehat{\mathcal{G}_m}$ gemeint, wobei $\widehat{\mathcal{G}_m}(X, Y) = X + Y + XY$ die **multiplikative formale Gruppe** bezeichnet. Letztere Bezeichnung hat ihre Rechtfertigung, denn für $x, y \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ gilt

$$\widehat{\mathcal{G}_m}(x, y) + 1 = x + y + xy + 1 = (x+1)(y+1),$$

d.h. die durch $\widehat{\mathcal{G}_m}$ gegebene Operation entspricht der Multiplikation mit Translation um 1.
Für $a \in \mathbb{Z}_p$ ist dann (vgl. [Neu07, Beispiel, Seite 361])

$$[a]_p(X) = (1+X)^a - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{a}{i} X^i,$$

dabei ist $\binom{a}{i} = \frac{a(a-1)\cdots(a-i+1)}{i(i-1)\cdots 1}$. Folglich ist

$$[p]_p(X) = (1+X)^p - 1 \equiv X^p \bmod p.$$

Also ist $\widehat{\mathcal{G}_m}$ in der Tat ein Lubin-Tate-Modul zum Primelement p über $\mathbb{Z}_p$.Weiterhin ist

$$[p]_p^{(n)}(X) = (1+X)^{p^n} - 1,$$

d.h. die Nullstellen von $[p]_p^{(n)}(X)$ sind gegeben durch $1 - \zeta_{p^n}$, wobei ζ_{p^n} die Menge $\mu(p^n)$ der p^n-ten Einheitswurzeln in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ durchläuft. Ferner ist dann

$$\widehat{\mathcal{G}_m}[p^n] = \{1 - \zeta_{p^n} \,|\zeta_{p^n} \in \mu(p^n)\}.$$

Satz 1.3.
$\mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ ist ein freier $\mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L$-Modul von Rang 1.

Beweis. [Neu07, (5.2) Satz, S.364]
Ist $\lambda_n \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n] \setminus \mathcal{G}_L[\pi_L^{n-1}]$, so induziert $\mathcal{O}_L \to \mathcal{G}_L[\pi_L^n], x \mapsto\ x \cdot \lambda_n$ den Isomorphismus. □

Proposition und Definition 1.4.
Für natürliche Zahlen $k \leq n$ seien die Abbildungen

$$\alpha_{nk} \colon\ \mathcal{G}_L[\pi_L^n] \to \mathcal{G}_L[\pi_L^k],\ x \mapsto \pi_L^{n-k} \cdot x$$

definiert. Dann bildet $(\mathcal{G}_L[\pi_L^n], \alpha_{nk})_n$ ein projektives System.
Der projektive Limes

$$\mathcal{T}\mathcal{G}_L := \varprojlim_n \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$$

heißt der **Tate-Modul** *von $\mathcal{G}_L$.*

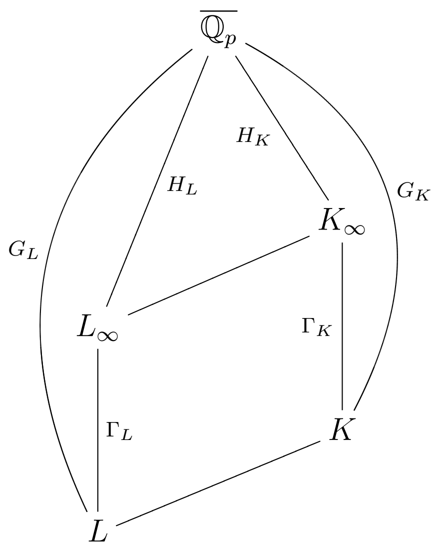
Korollar 1.5.
$\mathcal{T}\mathcal{G}_L$ ist ein freier $\mathcal{O}_L$-Modul von Rang 1.

Beweis.
Die Familie $(\mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L)_n$ bildet eine Filterbasis von $\mathcal{O}_L$ mit $\cap_n\mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L = 0$. Da $\mathcal{O}_L$ kompakt und $\varprojlim \mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L$ Hausdorffsch ist, ist $\mathcal{O}_L$ als topologischer Ring isomorph zu $\varprojlim \mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L$. Nach Satz 1.3 ist $\mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ ein freier $\mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L$-Modul von Rang 1. Weiterhin ist für $k \leq n$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi_L^{n-k}"'] & \mathcal{G}_L[\pi_L^n] \arrow[d, "\pi_L^{n-k}"] \\
\mathcal{O}_L/\pi_L^k\mathcal{O}_L \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{G}_L[\pi_L^k].
\end{tikzcd}$$

kommutativ, da $\mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L \to \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Modulhomomorphismus ist. Folglich ist $\varprojlim \mathcal{O}_L/\pi_L^n\mathcal{O}_L$ isomorph zu $\mathcal{T}\mathcal{G}_L$, was gerade der Behauptung entspricht. $\square$

Sei $L_n = L(\mathcal{G}_L[\pi_L^n])$ der Körper der π_L^n-Torsionspunkte von $\mathcal{G}_L$ über L, $L_\infty = \cup_n L_n$, $G_L := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|L)$, $H_L := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\,L_\infty)$ und $\Gamma_L := \mathrm{Gal}(L_\infty\,|L) = G_L/H_L$.
Sei ebenso $K_n = K(\mathcal{G}_L[\pi_L^n])$ der Körper der π_L^n-Torsionspunkte über K, $K_\infty = \cup_n K_n$, $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|K)$, $H_K := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\,K_\infty)$, $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K_\infty\,|K) = G_K/H_K$ und K_∞^{ur} die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ in K_∞. Die wichtigsten Definitionen sind noch einmal in nachfolgendem Diagramm zusammengefasst.



Bemerkung 1.6.
Nach [Neu07, (5.4) Theorem, S. 366] sind die Erweiterungen $L_n|L$ rein verzweigt. Daher ist $L_\infty\,|L$ ebenfalls rein verzweigt. Folglich ist L^{ur} auch die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ in L_∞, weshalb keine neue Notation für Letztere eingeführt wurde.
Wegen $L \subseteq K$ ist $K_n = KL_n$, sowie $K_\infty = K\,L_\infty$. Weiterhin ist $G_K \subseteq G_L$, $H_K \subseteq H_L$ und $G_K \cap H_L = H_K$, denn ist $\sigma \in G_K \cap H_L$, so ist $\sigma(x) = x$ für $x \in K$, oder $x \in L_\infty$.

Folglich ist $\sigma(x) = x$ für $x \in K_\infty = K\,L_\infty$. Daher ist der Kern des natürlichen Homomorphismus $G_K \to G_L/H_L$ gleich H_K und man erhält einen natürlichen, injektiven Homomorphismus $\Gamma_K \to \Gamma_L$, d.h. Γ_K kann stets als Untergruppe von Γ_L betrachtet werden.

Beispiel 1.7.
Im klassischen Fall erhält man $L_n = \mathbb{Q}_p(\mu(p^n))$ und $K_n = K(\mu(p^n))$, also die Körper der p^n-ten Einheitswurzeln.

Proposition 1.8.
Es gibt einen stetigen Isomorphismus $\chi_L\colon \Gamma_L \to \mathcal{O}_L^\times$, sodass $\gamma(\lambda) = [\chi(\gamma)]_{\pi_L}(\lambda)$ für $\gamma \in \Gamma_L$ und $\lambda \in \mathcal{TG}_L$ gilt.

Beweis.
Nach [Neu07, (5.4) Theorem, S. 366] gibt es einen Isomorphismus χ_n zwischen $\mathrm{Gal}(L_n|L)$ und $\mathcal{O}_L^\times/(1 + (\pi_L^n))$, sodass $\gamma_n(\lambda_n) = [\chi_n(\gamma_n)^\wedge]_{\pi_L}(\lambda_n)$ für alle $\lambda_n \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ und $\gamma_n \in \mathrm{Gal}(L_n|L)$ gilt, wobei $\chi_n(\gamma_n)^\wedge$ einen (beliebigen) Lift von $\chi_n(\gamma_n)$ in $\mathcal{O}_L^\times$ bezeichnet. Die χ_n sind stetig bezüglich der diskreten Topologie auf $\mathrm{Gal}(L_n|L)$ und $\mathcal{O}_L^\times/(1+(\pi_L^n))$. Durch Übergang zum projektiven Limes erhält man somit einen stetigen Isomorphismus $\chi_L\colon \Gamma_L \to \mathcal{O}_L^\times$ mit $\chi_L(\gamma) = (\chi_n(\gamma_n))$ für $\gamma = (\gamma_n) \in \Gamma_L$. Da $\chi(\gamma)$ nach Konstruktion ein Lift von $\chi_n(\gamma_n)$ für alle n ist, gilt somit für $\lambda = (\lambda_n) \in \mathcal{TG}_L$

$$\gamma(\lambda) = (\gamma_n(\lambda_n)) = ([\chi_n(\gamma_n)^\wedge]_{\pi_L}(\lambda_n)) = ([\chi(\gamma)]_{\pi_L}(\lambda_n)) = [\chi(\gamma)]_{\pi_L}(\lambda).$$

□

1.2 Der Operator φ

Proposition und Definition 1.9.
Es sei

$$\mathcal{R} := \varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p},$$

wobei die Übergangsabbildungen durch $x \mapsto x^p$ gegeben sind. $\mathcal{R}$ ist ein Ring von Charakteristik p, auf welchem $G_{\mathbb{Q}_p}$ operiert.
Für $x = (x_n) \in \mathcal{R}$ bezeichne $\hat{x}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ für jedes n einen Lift von x_n. Dann konvergiert die Folge $((\hat{x}_{n+k})^{p^k})$ unabhängig von der Wahl des Lifts in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Bezeichnet man den Grenzwert dieser Folge mit $x^{(n)}$, so folgt

$$\mathcal{R} \cong \{x = (x^{(n)})_n | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, x^{(n+1)^p} = x^{(n)}\},$$

wobei Addition und Multiplikation durch $(x + y)^{(n)} := \lim(x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k}$ bzw. $(xy)^{(n)} := x^{(n)}y^{(n)}$ erklärt sind. Weiterhin ist $\mathcal{R}$ nullteilerfrei.

Beweis.
Sei $x = (x_n) \in \mathcal{R}$ und $\hat{x}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ein Lift von x_n. Um zu zeigen, dass die Folge $((\hat{x}_{n+k})^{p^k})$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ konvergiert, genügt es zu zeigen, dass zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein

$k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $v_p\Big((\hat{x}_{n+k+1})^{p^{k+1}} - (\hat{x}_{n+k})^{p^k}\Big) > N$ für alle $k \geq k_0$. Wegen $(\hat{x}_{n+k+1})^p \equiv \hat{x}_{n+k} \bmod p$ gibt es $\alpha_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $(\hat{x}_{n+k+1})^p = \hat{x}_{n+k} + p\alpha_k$. Damit ist

$$(\hat{x}_{n+k+1})^{p^{k+1}} - (\hat{x}_{n+k})^{p^k} = (\hat{x}_{n+k} + p\alpha_k)^{p^k} - (\hat{x}_{n+k})^{p^k} = \sum_{i=1}^{p^k} \binom{p^k}{i} (\hat{x}_{n+k})^{p^k-i}(p\alpha_k)^i.$$

Wegen $v_p\Big(\binom{p^k}{i}p^i\Big) \geq p^k$ für $1 \leq i \leq p^k$ ist dann $v_p\Big((\hat{x}_{n+k+1})^{p^{k+1}} - (\hat{x}_{n+k})^{p^k}\Big) \geq p^k$. Man wähle also k_0 so groß, dass $p^{k_0} \geq N$ gilt.
Sei $\hat{x}'_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ für jedes n ein weiterer Lift von x_n. Wegen $\hat{x}'_{n+k} \equiv \hat{x}_{n+k} \bmod p$ gibt es dann $\beta_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $\hat{x}'_{n+k} = \hat{x}_{n+k} + p\beta_k$. Wie eben ergibt sich somit

$$(\hat{x}'_{n+k})^{p^k} - (\hat{x}_{n+k})^{p^k} = \sum_{i=1}^{p^k} \binom{p^k}{i} (\hat{x}_{n+k})^{p^k-i}(p\beta_k)^i$$

und damit $v_p\Big((\hat{x}'_{n+k})^{p^k} - (\hat{x}_{n+k})^{p^k}\Big) \geq p^k$, d.h. die Folge $\Big((\hat{x}'_{n+k})^{p^k} - (\hat{x}_{n+k})^{p^k}\Big)_k$ konvergiert gegen 0. Folglich ist $x^{(n)}$ unabhängig von der Wahl des Lifts.
Man setze $M := \{x = (x^{(n)}) | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}$. Die Abbildungen

$$\rho\colon \mathcal{R} \to M,\ (x_n) \mapsto (x^{(n)}) \text{ und}$$
$$\sigma\colon M \to \mathcal{R},\ (x^{(n)}) \mapsto (x^{(n)} \bmod p)$$

sind invers zueinander, da $(\hat{x}_{n+k})^{p^k} \bmod p = \hat{x}_n \bmod p = x_n$ für alle k und somit auch $x^{(n)} \bmod p = x_n$ gilt und $x^{(n)}$ unabhängig von der Wahl des Lifts ist. Ersteres impliziert also $\sigma \circ \rho = \mathrm{id}$ und Letzteres $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}$. Erklärt man auf M Addition und Multiplikation wie oben, so werden ρ und σ sogar zu Ringhomomorphismen. Für $x, y \in M$ gilt insbesondere $(x+y)^{(n)} \equiv x^{(n)} + y^{(n)} \bmod p$.
Diese Identität soll nun benutzt werden um zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ nullteilerfrei ist. Seien also $(x^{(n)}), (y^{(n)}) \in \mathcal{R}$ und $x^{(n)}, y^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $0 = (x^{(n)})(y^{(n)}) = (x^{(n)}y^{(n)})$. Angenommen es ist $(y^{(n)}) \neq 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y^{(n_0)} \neq 0$ und wegen $(y^{(n+1)})^p = y^{(n)}$ gilt dann bereits $y^{(n)} \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Da $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ nullteilerfrei ist, gilt folglich $x^{(n)} = 0$ für alle $n \geq n_0$. Damit muss aber schon $x^{(n)} = 0$ gelten, denn anderenfalls gäbe es $n_1 < n_0$ mit $x^{(n_1)} \neq 0$ und wie eben wäre dann $x^{(n)} \neq 0$ für alle $n \geq n_1$, im Widerspruch zu $x^{(n)} = 0$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $(x^{(n)}) = 0$ und $\mathcal{R}$ damit in der Tat nullteilerfrei. □

Proposition 1.10.
Der Ring $\mathcal{R}$ ist isomorph zu

$$\varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} / \pi_L \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p},$$

wobei die Übergangsabbildungen durch $x \mapsto x^q$ gegeben sind. Versieht man alle Objekte mit der Topologie des inversen Limes, so ist dies sogar ein topologischer Isomorphismus.

Beweis.
Wie eben zeigt man, dass

$$\varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} / \pi_L \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \cong \{x = (x^{(n)}) | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, (x^{(n+1)})^q = x^{(n)}\}$$

gilt, wobei $x^{(n)}$ den Grenzwert der Folge $((\hat{x}_{n+k})^{q^k})$ und $\hat{x}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ einen Lift von $x_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ bezeichnet, und damit, dass $\varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ nullteilerfrei ist.
Weiterhin bildet die Familie $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ zusammen mit den Übergangsabbildung $x \mapsto x^q$ ein kofinales System der Familie $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ zusammen mit den Übergangsabbildung $x \mapsto x^p$. Dazu identifiziert man das n-te Glied der ersten Familie mit dem nr-ten der zweiten. Daher ist

$$\mathcal{R} \cong \varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}.$$

Wie eben zeigt man dann, dass $\{x = (x^{(n)}) | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, (x^{(n+1)})^q = x^{(n)}\}$ isomorph zu $\varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ist. Daher gilt dann

$$\mathcal{R} \cong \varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}.$$

□

Proposition und Definition 1.11. (Topologie auf $\mathcal{R}$)
Auf $\mathcal{R}$ ist durch $v_{\mathcal{R}}(x) := v_p(x^{(0)})$ eine Bewertung definiert. Bezüglich dieser Bewertung ist $\mathcal{R}$ ein vollständiger Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_{\mathcal{R}}$. Die so definierte Topologie stimmt mit der Toplogie des inversen Limes überein.

Beweis.
Für $x = (x^{(n)}), y = (y^{(n)}) \in \mathcal{R}$ gilt

$$v_{\mathcal{R}}(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; v_p(x^{(0)}) = +\infty \;\Leftrightarrow\; x^{(0)} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,$$
$$v_{\mathcal{R}}(xy) = v_p((xy)^{(0)}) = v_p(x^{(0)}y^{(0)}) = v_p(x^{(0)}) + v_p(y^{(0)}) = v_{\mathcal{R}}(x) + v_{\mathcal{R}}(y).$$

Es bleibt also $v_{\mathcal{R}}(xy) \geq \min\{v_{\mathcal{R}}(x), v_{\mathcal{R}}(y)\}$ zu zeigen. Sei dazu $x, y \neq 0$ angenommen. Wegen $x^{(n+1)^p} = x^{(n)}$ gilt $v_p(x^{(n+1)}) = pv_p(x^{(n)})$ und somit $v_{\mathcal{R}}(x) = p^n v_p(x^{(n)})$. Insbesondere gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $v_p(x^{(n)}) < 1$ und $v_p(y^{(n)}) < 1$. Wie im Beweis zu Definition und Proposition 1.9 festgestellt wurde, gilt $(x+y)^{(n)} \equiv x^{(n)} + y^{(n)} \bmod p$. Damit folgt

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{R}}(x+y) &= p^n v_p((x+y)^{(n)}) \\ &\geq p^n \min\{v_p(x^{(n)}), v_p(y^{(n)}), 1\} \\ &= p^n \min\{v_p(x^{(n)}), v_p(y^{(n)})\} \\ &= \min\{v_{\mathcal{R}}(x^{(n)}), v_{\mathcal{R}}(y^{(n)})\}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$v_{\mathcal{R}}(x) \geq p^n \Leftrightarrow v_p(x^{(n)}) \geq 1 \Leftrightarrow x^{(n)} \equiv 0 \bmod p.$$

Bezeichnet $P_n \colon \mathcal{R} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ die Projektion auf die n-te Komponente, so folgt

$$\{x \in \mathcal{R} | v_{\mathcal{R}}(x) \geq p^n\} = \ker(P_n).$$

In der von $v_{\mathcal{R}}$ definierten Topologie bildet die Familie $(\{x \in \mathcal{R} | v_{\mathcal{R}}(x) \geq p^n\})_n$ eine Basis der offenen Nullumgebungen und da $\ker(P_n) \subseteq \ker(P_m)$ für $n \leq m$ gilt, bildet in der Topologie des inversen Limes die Familie $(\ker(P_n))_n$ eine Basis der offenen Nullumgebungen. Wie eben gesehen wurde, stimmen diese aber überein, weshalb die Topologien identisch sind. □

Satz 1.12.
Der Körper $\operatorname{Fr}\mathcal{R}$ *ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. [FO10, Proposition 4.8, S.118] □

Satz 1.13.
Der Ring der Wittvektoren $W(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$ *ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal* $pW(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$ *und Restklassenkörper* $\operatorname{Fr}\mathcal{R}$.

Beweis. [Sch07, Satz 5.22, S.31] □

Bemerkung 1.14.
Auf $W(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$ lassen sich also zwei Topologien definieren.
Zum einen die p-adische Topologie, welche auch *starke Topologie* genannt wird.
Zum anderen die Produkttopologie bezüglich der durch $v_{\mathcal{R}}$ definierten Topologie auf $\mathcal{R}$. Diese Topologie wird auch *schwache Topologie* genannt. Im Folgenden wird sich zeigen, dass diese Topologien nicht übereinstimmen und beide ihre Berechtigung haben.

Proposition 1.15.
Durch $g \cdot x := (gx^{(n)})_n$ *wird eine stetige Operation von* G_L *auf* $\mathcal{R}$ *definiert.*

Beweis.
Wegen $g(p) = p$ für alle $g \in G_L$ ist die Operation von G_L auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ wohldefiniert und da die Elemente aus G_L Automorphismen sind, ist auch die Operation auf $\mathcal{R}$ wohldefiniert. Es genügt nun zu zeigen, dass die Operation von G_L auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ stetig ist. Denn dann ist auch die Operation auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ stetig und somit auch diejenige auf $\mathcal{R}$. Die Mengen $p^c\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ bilden eine Basis der offenen Nullumgebungen. Es genügt also die Aussage für diese Mengen zu zeigen. Seien nun $g \in G_L$ und $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $g(x) \in p^c\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ und $c = a/b$. Es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$, welche gegen x konvergiert, d.h. es gibt ein $N_a \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x \in p^a\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ für alle $n \geq N_a$. Dann ist $L' := L(x_{N_a})$ ein endlicher Erweiterungskörper von L, $G_{L'} := \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|L') \subseteq G_L$ eine offene Untergruppe und wegen $p^a\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \subseteq p^c\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ gilt dann auch $g(x_n) \in p^c\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ für alle $n \geq N_a$. Sei nun $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ so gewählt, dass $x_{N_a} + p^a z = x$ gilt. Für $h \in G_{L'}$ und $y \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ gilt dann

$$gh(x + p^a y) = gh(x_{N_a} + p^a(y+z)) = g(x_{N_a}) + p^a gh(y+z) \in p^c\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\,.$$

Also ist $gG_{L'} \times \left(x + p^a\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\right)$ eine offene Umgebung von (g, x), deren Bild in $p^c\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ liegt, d.h. die Operation ist stetig. □

Bemerkung 1.16.
Auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ gibt es mit dem Frobenius $x \mapsto x^p$ einen (bezüglich der Quotiententopologie) stetigen und offenen Ringhomomorphismus, ebenso auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ durch den Frobenius $x \mapsto x^q$, denn die Quotiententopologie auf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ bzw. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ entspricht der diskreten Topologie, da die Mengen $x + p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ und $x + \pi_L\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ für $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ offen sind. Da die Verknüpfungen auf $\mathcal{R}$ komponentenweise definiert wurden, setzt sich dies in eindeutiger Weise zu einem stetigen und offenen Ringhomomorphismus auf $\mathcal{R}$ fort, wobei $\mathcal{R}$ mit der Topologie des inversen

Limes, bzw. der durch $v_{\mathcal{R}}$ definierten Topologie versehen ist, welche nach Definition und Proposition 1.11 identisch sind. Da die Multiplikation auf $\mathcal{R}$ komponentenweise definiert wurde (vgl. Proposition und Definition 1.9), sind diese Homomorphismen auch auf $\mathcal{R}$ durch p- bzw. q-Potenzierung gegeben und da $\mathcal{R}$ nullteilerfrei ist, sind sie sogar injektiv und lassen sich auf $\operatorname{Fr}\mathcal{R}$ fortsetzten. Da $\mathcal{R}$ und $\operatorname{Fr}\mathcal{R}$ nach [FO10, Proposition 4.6, S. 117] sogar perfekt sind, sind diese Homomorphismen bijektiv. Im Folgenden werden diese Homomorphismen mit $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ bzw. φ_L bezeichnet.

Proposition 1.17.
Es gilt $k_L \cong \mathcal{R}^{\varphi_L=1}$ und $k_L \cong (\operatorname{Fr}\mathcal{R})^{\varphi_L=1}$.

Beweis.
Die kanonische Inklusion $\mathcal{O}_L \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ induziert einen stetigen Homomorphismus $\mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, dessen Kern gleich $\pi_L\mathcal{O}_L$ ist, d.h. man erhält einen stetigen Homomorphismus $k_L \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Da $a^q = a$ für alle $a \in k_L$ gilt, erhält man somit den stetigen Homomorphismus $\beta\colon k_L \to \mathcal{R}, x \mapsto (x)$. Dieser ist injektiv, da $k_L \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ injektiv ist und es gilt $\operatorname{im}(\beta) \subseteq \mathcal{R}^{\varphi_L=1}$. Ist $x = (x_n) \in \mathcal{R}^{\varphi_L=1}$, so ist x eine Nullstelle des Polynoms $X^q - X$. Mit der Darstellung von $\mathcal{R}$ aus Proposition und Definition 1.9 als Teilring von $\prod \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ sieht man nun sofort, dass das Polynom $X^q - X$ in $\mathcal{R}$ genau q Nullstellen hat. Folglich ist β surjektiv und somit insgesamt ein Isomorphismus.
Sei nun $0 \neq \frac{x}{y} \in (\operatorname{Fr}\mathcal{R})^{\varphi_L=1}$. Dann ist $x^{q-1} = y^{q-1}$ und da das Polynom $X^q - X$ in $\mathcal{R}$ genau q Nullstellen hat, hat das Polynom $X^{q-1} - 1$ genau $q-1$ Nullstellen in $\mathcal{R}$. Folglich hat auch $X^{q-1} - y^{q-1}$ genau $q-1$ Nullstellen in $\mathcal{R}$, die alle von der Form αy sind, wobei $\alpha \in \mathcal{R}$ eine Nullstelle von $X^{q-1} - 1$ ist. Daher gibt es ein α mit $x = \alpha y$. Also ist $\frac{x}{y} = \alpha \in \mathcal{R}^{\varphi_L=1}$ und somit $(\operatorname{Fr}\mathcal{R})^{\varphi_L=1} = \mathcal{R}^{\varphi_L=1} \cong k_L$, wie behauptet. □

Proposition 1.18.
Sei $T|\,\mathbb{Q}_p$ eine unverzweigte Erweiterung und $\mathcal{O}_T$ der zugehörige Ganzheitsring. Dann gibt es eine stetige Einbettung

$$\mathcal{O}_T \hookrightarrow W(\operatorname{Fr}\mathcal{R}).$$

Beweis.
Sei k_T der Restklassenkörper von T. Wie eben erhält man dann einen stetigen und injektiven Homomorphismus $k_T \to \mathcal{R}$, welcher einen stetigen und injektiven Homomorphismus $k_T \to \operatorname{Fr}\mathcal{R}$ induziert. Durch diesen erhält man wiederum einen stetigen und injektiven Homomorphismus auf den zugehörigen Ringen der Wittvektoren $W(k_T) \hookrightarrow W(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$. Da $T|\,\mathbb{Q}_p$ unverzweigt ist, ist $W(k_T) = \mathcal{O}_T$ und daher erhält man eine stetige Einbettung $\mathcal{O}_T \hookrightarrow W(\operatorname{Fr}\mathcal{R})$, wie behauptet. □

Proposition 1.19.
Es gibt eine Abbildung $\iota\colon \mathcal{TG}_L \to \mathcal{R}$, welche verträglich mit den Operationen von Γ_L ist. Für $a \in \mathcal{O}_L$ und $x \in \mathcal{TG}_L$ gilt weiterhin $[a]_{\pi_L}\iota(x) = \iota([a]_{\pi_L}x)$.

Beweis.
Die natürliche Inklusion $\mathcal{G}_L[\pi_L^n] \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ induziert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung

$\iota_n\colon \mathcal{G}_L[\pi_L^n] \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Wegen $[\pi_L]_{\pi_L}(x) = f_L(x)$ und $f_L \equiv X^q \bmod \pi_L$ sind dann für $k \leq n$ die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_L[\pi_L^n] \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\pi_L^{n-k}\cdot"'] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \arrow[d, "(\_)^{q^{n-k}}"] \\ \mathcal{G}_L[\pi_L^k] \arrow[r, "\iota_k"] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi_L\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \end{tikzcd}$$

kommutativ. Durch Übergang zum projektiven Limes erhält man also eine Abbildung $\iota\colon \mathcal{TG}_L \to \mathcal{R},\ (x_n) \mapsto (x_n \bmod \pi_L)$.
Wegen $\iota_n(x) = x \bmod \pi_L$ gilt $\iota_n(\gamma_n \cdot x) = \gamma_n \cdot \iota_n(x)$ für $\gamma_n \in \mathrm{Gal}(L_n|L)$ und $x \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$. Damit gilt dann aber auch $\iota(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot \iota(x)$ für $\gamma \in \Gamma_L$ und $x \in \mathcal{TG}_L$.
Für $a \in \mathcal{O}_L$ und $x \in \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ gilt $\iota_n([a]_{\pi_L}(x)) = [a]_{\pi_L}(\iota_n(x))$ und somit auch $\iota([a]_{\pi_L}(x)) = [a]_{\pi_L}(\iota(x))$ für $x \in \mathcal{TG}_L$. □

Proposition 1.20.
Auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$, versehen mit der Produkttopologie, gibt es einen stetigen, offenen und bijektiven Homomorphismus φ_L und eine stetige Operation von G_L, die miteinander kommutieren.

Beweis.
Sei φ_L der stetige, offene und bijektive Homomorphismus auf $\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}$ aus Bemerkung 1.16. Nach Proposition 1.15 gibt es eine stetige Operation von G_L auf $\mathcal{R}$. Da die Operation von φ_L auf $\mathcal{R}$ durch q-Potenzierung gegeben ist und die Elemente aus G_L Homomorphismen sind, kommutieren die beiden Operationen auf $\mathcal{R}$ miteinander. Die Operationen lassen sich nun in eindeutiger Weise auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ fortsetzen und haben dann auch dort die gewünschte Eigenschaft. □

Proposition 1.21.
Es gibt eine eindeutige Abbildung $\{\}\colon \mathcal{R} \to W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$, sodass für $x \in \mathcal{R}$ das Bild $\{x\} \in W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$ ein Lift von x ist und $\varphi_L(\{x\}) = [\pi_L]_{\pi_L}(\{x\}) = f_L(\{x\})$ gilt. Weiterhin respektiert $\{\}$ die Operation von G_L.

Beweis. [Col02, Lemma 8.3] □

Bemerkung 1.22.
Die Operation von G_L auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ ist nicht stetig bezüglich der starken Topologie. Denn sei $1 \neq x^{(1)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ mit $(x^{(1)})^p = 1$ und $x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ induktiv so gewählt, dass $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ gilt. Dann ist $x := (x^{(n)}) \in \mathcal{R} \subseteq \mathrm{Fr}\,\mathcal{R}$ und somit $\{x\} \in W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$. Man betrachte nun den Punkt $(\mathrm{id}, \{x\}) \in G_L \times W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$. Wäre die Operation stetig, so würde es eine offene Untergruppe $H \leq G_L$ und ein $m \in \mathbb{N}$ geben, sodass $h(y) \in \{x\} + pW(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ für alle $h \in H$ und $y \in \{x\} + p^m W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ gilt. Es ist aber $p^m W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \subseteq pW(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ und $pW(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) = \{(0, b_0^p, b_1^p, \dots) | b_i \in \mathrm{Fr}\,\mathcal{R}\}$ (vgl. [Sch07, Satz 5.19, S. 28]) und da $\{x\}$ ein Lift von x ist, ist die erste Komponente von allen $y \in \{x\} + p^m W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ gleich x. Da G_L komponentenweise auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ operiert, müsste also $h(x) = x$ für alle $h \in H$ gelten, dann wären aber bereits alle $x^{(n)}$ fix unter H und somit auch der Körper $L(x^{(n)} | n \in \mathbb{N})$, welcher unendlichen Grad über L hat. Da $H \subseteq G_L$ aber offen sein soll, hat H insbesondere endlichen Index und kann somit nicht alle Elemente von $L(x^{(n)} | n \in \mathbb{N})$ fixieren.

Lemma 1.23.
Sei $v \in \mathcal{TG}_L$ und $\gamma \in \Gamma_L$. Dann gilt:

(a) $\{\iota(a \cdot v)\} = [a]_{\pi_L}(\{\iota(v)\})$ *für alle* $a \in \mathcal{O}_L$.

(b) $[\chi_L(\gamma)]_{\pi_L}(\{\iota(v)\}) = \{\iota(\gamma v)\} = \{\gamma \cdot \iota(v)\} = \gamma \cdot \{\iota(v)\}$.

Ist v ein $\mathcal{O}_L$-Erzeuger von $\mathcal{TG}_L$, so gibt es eine Einbettung $\mathcal{O}_L[\![u]\!] \hookrightarrow W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$, welche u auf $\{\iota(v)\}$ abbildet und die $\mathcal{O}_L[\![u]\!]$ mit einem G_L- und φ_L-stabilen Unterring von $W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$ identifiziert, sodass $\{\iota(\mathcal{TG}_L)\}$ im Bild dieser Einbettung liegt.

Beweis. [KR09, Lemma 1.3] □

Beispiel 1.24.
Im klassischen Fall entspricht $\{\}$ dem Teichmüllerrepräsentanten und das Element $\{\iota(v)\}$ entspricht dem Element $\pi = \{\varepsilon\} - 1$, wobei $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots) \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ eine primitive p^n-te Einheitswurzel ist (vgl. [Col04, S.86ff]).

1.3 (φ, Γ)-Moduln und die Kategorienäquivalenz $\mathbf{Mod}^{\varphi_L, \Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}, \mathrm{et}} \cong \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K, \mathcal{O}_L}$

Es sei $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L} \subseteq W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$ die p-adische Vervollständigung von $\mathcal{O}_L[\![u]\!][1/u]$. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring, dessen uniformisierendes Element π_L ist und welcher $k_L((u))$ als Restklassenkörper besitzt. Sei weiterhin $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}} \subseteq W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$ die maximal ganze, unverzweigte Erweiterung von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ und $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \subseteq W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$ ihre p-adische Vervollständigung. Die zugehörigen Quotientenkörper werden mit $\mathcal{E}_L$, $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$ und $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ bezeichnet. Da es auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ nach Bemerkung 1.14 zwei verschieden Topologien gibt, lassen sich auch die eben definierten Ringe und Körper mit der jeweiligen Teilraumtopologie versehen. Diese werden dann auch wieder schwache beziehungsweise starke Topologie genannt. Nach Bemerkung 1.16 und Proposition 1.20 gibt es auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ einen bezüglich der schwachen Topologie stetigen und bijektiven Homomorphismus φ_L und eine bezüglich der schwachen Topologie stetige Operation G_L. Diese Operationen schränken sich jeweils zu bezüglich der schwachen Topologie stetigen Operationen auf obigen Ringen ein, die miteinander kommutieren. Der Homomorphismus φ_L ist dann allerdings nicht mehr surjektiv. Auf $\mathcal{O}_L[\![u]\!]$ lassen sie sich mit Hilfe von Proposition 1.21 und Lemma 1.23 konkret beschreiben. Sei also $g \in G_L$ und $\sum a_i u^i \in \mathcal{O}_L[\![u]\!]$, dann ist

$$g\left(\sum a_i u^i\right) = \sum a_i([\chi_L(g)]_{\pi_L}(u))^i, \quad \varphi_L\left(\sum a_i u^i\right) = \sum a_i [\pi_L]_{\pi_L}(u^i).$$

Dabei ist $\chi_L(g)$ ein sinnvoller Ausdruck, da H_L trivial auf u operiert, weshalb statt g die Klasse modulo H_K, also das Bild von g in Γ_L betrachtet werden kann. Auch $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ lässt sich konkret beschreiben:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i u^i \,\middle|\, a_i \in \mathcal{O}_L, \lim_{i \to -\infty} v_p(a_i) = +\infty \right\}.$$

Weiterhin definiere man $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} := (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})^{H_K}$ und $\mathcal{E}_K$ als zugehörigen Quotientenkörper. Wie die zuvor definierten Ringe lässt sich auch dieser Ring mit einer schwachen und einer starken Topologie betrachten. Auch $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ lässt sich konkret beschreiben: Nach Proposition 1.18 gilt $K_\infty^{\mathrm{ur}} \subseteq W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ und da $K_\infty^{\mathrm{ur}}|\mathbb{Q}_p$ unverzweigt, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathcal{O}_L[\![u]\!][1/u]$ in $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L$ und $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ die p-adische Vervollständigung ist, gilt bereits $\mathcal{O}_{K_\infty^{\mathrm{ur}}} \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ und $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})^H_K = \mathcal{O}_{K_\infty^{\mathrm{ur}}}$. Daher ist $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ die Vervollständigung des Ringes $\mathcal{O}_{K_\infty^{\mathrm{ur}}} \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L[\![u]\!][1/u]$. Falls $K|L$ unverzweigt ist, so ist $K_\infty^{\mathrm{ur}} = K^{\mathrm{ur}}$ und damit $LK^{\mathrm{ur}} = K$. In diesem Fall ist dann $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ die Vervollständigung des Ringes $\mathcal{O}_K[\![u]\!][1/u]$.

Beispiel 1.25.
Nach [Col04, S.88] ist im klassischen Fall

$$\varphi(\pi) = \varphi(1+\pi-1) = (1+\pi)^p - 1 = [p]_p(\pi).$$

In der hier behandelten allgemeineren Situation ist

$$\varphi_L(u) = [\pi_L]_{\pi_L}(u).$$

Der Operator φ_L stellt also eine Verallgemeinerung des Operators φ aus der klassischen Theorie dar.

Proposition 1.26.
Es ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}^{\varphi_L=1} \cong \mathcal{O}_L$.

Beweis.
Nach Proposition 1.17 ist $(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})^{\varphi_L=1} \cong k_L$, also ist $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})^{\varphi_L=1} = \mathcal{O}_{L_0}$ und daher $(W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} \mathcal{O}_L)^{\varphi_L=1} \cong \mathcal{O}_L$. Folglich ist

$$\mathcal{O}_L \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}^{\varphi_L=1} \subseteq (W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{L_0}} \mathcal{O}_L)^{\varphi_L=1} \cong \mathcal{O}_L,$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Definition 1.27.
Ein (φ_L,Γ_K)**-Modul** über $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul M, zusammen mit einer von φ_L induzierten, bezüglich der schwachen Topologie stetigen und semilinearen Operation, die mit φ_M bezeichnet wird und mit einer bezüglich der schwachen Topologie stetigen Operation von Γ_K, sodass diese Operationen miteinander kommutieren. Ein (φ_L,Γ_K)-Modul M heißt **étale**, falls

$$(\varphi_M)^* \colon \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\varphi_L} M \to M, a\otimes m \to a\varphi_M(m)$$

ein Isomorphismus ist, wobei $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\varphi_L} M$ bedeutet, dass $a\otimes bm = a\varphi_L(b)\otimes m$ für $a,b \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ und $m \in M$ gilt. Die étalen (φ_L,Γ_K)-Moduln bilden zusammen mit den $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modulhomomorphismen, welche die Operationen von φ_L und Γ_K respektieren eine abelsche Kategorie, welche mit $\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ bezeichnet wird. Die (φ_L,Γ_K)-Moduln, die zugleich $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Torsionsmoduln sind, bilden eine volle Unterkategorie, welche mit $\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ bezeichnet wird.

$\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$ (bzw. $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$) sei diejenige Kategorie, deren Objekte endlich erzeugte $\mathcal{O}_L$-Moduln (bzw. $\mathcal{O}_L$-Torsionsmoduln) zusammen mit einer linearen und stetigen Operation von G_K sind. Die Morphismen dieser Kategorie, sind diejenigen $\mathcal{O}_L$-Modulhomomorphismen, die die G_K-Operation respektieren und die stetig sind, also die stetigen $\mathcal{O}_L[G_K]$-Modulhomomorphismen. $\mathcal{O}_L$-Moduln mit einer stetigen und linearen Operation von G_K nennt man auch **Darstellungen** von G_K. Daher heißt $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$ die Katgegorie der endlich erzeugten G_K-Darstellungen über $\mathcal{O}_L$ und $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$ die Kategorie der endlich erzeugten G_K-Torsionsdarstellungen über $\mathcal{O}_L$.
Man definiere nun durch

$$V(M) := (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} M)^{\varphi_L=1}$$

einen Funktor $V\colon \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}} \to \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$ $\Big($bzw. $\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}} \to \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathcal{O}_L}\Big)$ und durch

$$M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) := (V \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})^{H_K}$$

einen Funktor $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}\colon \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L} \to \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ $\Big($bzw. $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathcal{O}_L} \to \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}\Big)$.

Satz 1.28.
Die Funktoren V und $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$ induzieren Kategorienäquivalenzen zwischen $\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ und $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$, sowie zwischen $\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ und $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$.

Beweis. [KR09, Theorem 1.6] □

Proposition 1.29.
Für $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ ist φ_M injektiv.

Beweis.
Da φ_M von φ_L induziert wird und $M \cong M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(M))$ gilt, genügt es die Behauptung für $\mathrm{id}\otimes\varphi_L$ auf $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(M))$ zu zeigen. Da $\mathcal{O}_L$ fix unter φ_L ist, ist φ_L also insbesondere ein $\mathcal{O}_L$-Modulhomomorphismus und da $\mathcal{O}_L$ ein diskreter Bewertungsring ist, gibt es $k, m \in \mathbb{N}_0$ und $n_i \in \mathbb{N}$ für $1 \le i \le m$, sodass sich $V(M)$ schreiben lässt als

$$V(M) \cong \mathcal{O}_L^k \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_L/\pi_L^{n_i}\mathcal{O}_L.$$

Da φ_L injektiv auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist (vgl. Proposition 1.20), bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{id}\otimes\varphi_L$ eingeschränkt auf den Torsionsuntermodul von $V(M) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ injektiv ist.
Hierzu betrachte man zunächst

$$\mathcal{O}_L/\pi_L\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \cong \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}.$$

Auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist φ_L gerade die Potenzierung mit q und somit ein Körperhomomorphismus und daher insbesondere injektiv. Ist also $x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ mit $\varphi_L(x) \in \pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$, so ist auch $x \in \pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$. Aus der Nullteilerfreiheit von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ folgt dann induktiv, dass für $\varphi_L(x) \in \pi_L^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ bereits $x \in \pi_L^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ gilt. Also ist der von φ_L induzierte Homomorphismus auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_L^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ebenfalls injektiv. Folglich ist $\mathrm{id} \otimes \varphi_L$ injektiv auf

$$V(M) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \cong \mathcal{O}_L^k \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_L/\pi_L^{n_i} \mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$$

und somit auch auf $M \cong M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(M(V))$. □

Bemerkung 1.30.

1. Die Forderungen in der Definition von (φ_L, Γ_K)-Moduln, dass die Operationen bezüglich der schwachen Topologie stetig sein sollen, ist sinnvoll, da in Bemerkung 1.36 festgestellt wurde, dass die Operation von G_L auf $W(\operatorname{Fr} \mathcal{R})$ nicht stetig bezüglich der starken Topologie ist.

2. Auch wenn sich dieser Abschnitt nahe an [KR09, §1] hält und auf den dortigen Beweis der Kategorienäquivalenz verwiesen wird, gibt es doch einige Unterschiede, die kurz erläutert werden.
   Zum einen sind die Objekte aus $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$ (bzw. aus $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$) in [KR09, S. 445] endlich erzeugte $\mathcal{O}_K$-Moduln. Das kann allerdings nicht sein, denn es ist $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})^{\varphi_L=1} = \mathcal{O}_L$ und $\mathcal{O}_L$ ist im Allgemeinen kein $\mathcal{O}_K$-Modul.
   Zum anderen wird $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ als Vervollständigung des Ringes $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}} \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L[\![u]\!][1/u]$ definiert. Auch dies kann so nicht richtig sein, denn wie zuvor schon gesehen wurde, lässt sich $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ als Vervollständigung des Ringes $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}_\infty} \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}} \mathcal{O}_L[\![u]\!][1/u]$ beschreiben und K^{ur} muss nicht mit K^{ur}_∞ übereinstimmen.

3. Es soll an dieser Stelle auch noch erklärt werden, dass für $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ die Bedingung, dass $(\varphi_M)^*$ ein Isomorphismus ist, äquivalent dazu ist, dass M von $\varphi_M(M)$ als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul erzeugt wird. Dabei ist mit φ_M auch $(\varphi_M)^*$ stets injektiv, was aber erst später gezeigt werden kann (vgl. Bemerkung 1.42). An dieser Stelle wird daher nur gezeigt, dass M genau dann von $\varphi_M(M)$ als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul erzeugt wird, wenn $(\varphi_M)^*$ surjektiv ist.
   Sei also $(\varphi_M)^*$ surjektiv und $m \in M$. Dann gibt es $\sum_i a_i \otimes m_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\varphi_L} M$ mit $m = \sum_i a_i \varphi_M(m_i)$. Folglich wird M von $\varphi_M(M)$ als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul erzeugt.
   Werde nun M von $\varphi_M(M)$ als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul erzeugt und sei $m \in M$. Dann gibt es $a_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ und $m_i \in M$, sodass $m = \sum_i a_i \varphi_M(m_i)$ gilt. Folglich ist $m = (\varphi_M)^*(\sum_i a_i \otimes m_i)$ und somit ist $(\varphi_M)^*$ surjektiv.

1.4 Der Operator ψ

In diesem Abschnitt soll der Operator ψ_L eingeführt werden, welcher wie in der klassischen Theorie ein Linksinverses von φ_L sein soll. Hierzu wird zunächst gezeigt, dass $(1, u, \ldots, u^{q-1})$ eine $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Basis von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist. Das daran anschließende Ziel ist es, aus der Basis $(1, u, \ldots, u^{q-1})$ eine Basis $(1 = e_0, e_1, \ldots, e_{q-1})$ zu konstruieren, sodass sich ψ_L beschreiben lässt als

$$\psi_L \colon \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} = \bigoplus_{i=0}^{q-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}) e_i \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}, \ x = \sum_{i=0}^{q-1} \varphi_L(x_i) e_i \mapsto x_0.$$

Um dies zu zeigen, wird nachfolgende Begriffsbildung benötigt.

Definition 1.31.
Ein topologischer Ring R heißt **pseudokompakt**, falls R vollständig und Hausdorffsch ist und es eine Umgebungsbasis der 0 aus Idealen $\mathfrak{a} \lhd R$ gibt, sodass $R/\mathfrak{a}$ ein artinscher Ring ist.
Ist nun R ein pseudokompakter Ring und M ein R-Modul, so heißt M **pseudokompakt**, falls M vollständig und Hausdorffsch ist und es eine Umgebungsbasis der $0 \in M$ aus Untermoduln $N \subseteq M$ gibt, sodass M/N endliche Länge hat.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die Ringe $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ und $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ pseudokompakte Ringe sind.

Lemma 1.32.
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler, noetherscher und nullteilerfreier Ring von Krulldimension 1, dessen maximales Ideal von einem Element ρ erzeugt wird. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat dann $R/\rho^k R$ Krulldimension 0. Insbesondere ist $R/\rho^k R$ als R-Modul artinsch.

Beweis.
Zunächst sei an die durch die kanonische Projektion $\pi\colon R \to R/\rho^k R$ induzierte Bijektion von Idealen erinnert:

$$\{\mathfrak{a} \lhd R \text{ mit } (\rho^k) \subseteq \mathfrak{a}\} \cong \{\mathfrak{a} \lhd R/\rho^k R\}.$$

Sei $\mathfrak{p} \lhd R/\rho^k R$ ein Primideal. Dann ist $\pi^{-1}(\mathfrak{p}) \lhd R$ ein Primideal in R mit $(\rho^k) \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{p})$. Da (0) und $\mathfrak{m}$ die einzigen Primideale in R sind und $(0) \subsetneq (\rho^k)$ gilt, ist $\pi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$. Aufgrund obiger Bijektion ist dann aber bereits $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}/\rho^k R$ und somit auch das einzige Primideal von $R/\rho^k R$. Also hat $R/\rho^k R$ Krulldimension 0 und ist daher als Ring artinsch. Da aber jeder R-Untermodul von $R/\rho^k R$ auch ein Ideal ist, ist $R/\rho^k R$ auch artinsch als R-Modul. □

Korollar 1.33.
Sei $(R, \mathfrak{m})$ wie oben und M ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul. Dann ist M ein artinscher R-Modul. Insbesondere hat M also endliche Länge.

Beweis.
R ist bereits ein Hauptidealring. Nach dem Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen gibt es also $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/\rho^{k_i} R.$$

Da aber $R/\rho^k R$ für $k \in \mathbb{N}$ nach Lemma 1.32 ein artinscher R-Modul ist, ist auch M als endliche direkte Summe artinscher R-Moduln artinsch. □

Proposition 1.34.
$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist bezüglich der π_L-adischen Topologie ein pseudokompakter Ring. Ebenso ist $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ bezüglich der π_L-adischen Topologie ein pseudokompakter Ring.

Beweis.
Bezüglich der π_L-adischen Topologie bilden die Mengen $\pi_L^k \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ eine Umgebungsbasis der 0. Da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ noethersch ist, ist auch $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_L^k \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ noethersch und nach obigem Lemma 1.32 sogar artinsch. Folglich ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ein pseudokompakter Ring. Der Beweis für $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ ist identisch. $\square$

Proposition 1.35.

(a) *$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ist bezüglich der π_L-adischen Topologie ein pseudokompakter Ring.*

(b) *Ist M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul, so ist M bezüglich der π_L-adischen Topologie pseudokompakt.*

Beweis.

(a) Der Beweis ist identisch zum Beweis von Proposition 1.34.

(b) Da $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ vollständig bezüglich der π_L-adischen Topologie ist, ist auch M vollständig bezüglich der π_L-adischen Topologie. Weiterhin sind die Moduln $M/\pi_L^k M$ nach Korollar 1.33 artinsch. Folglich ist M pseudokompakt als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul.

$\square$

Lemma 1.36. (Pseudokompaktes Nakayama-Lemma)
Sei R ein pseudokompakter Ring, $\mathrm{Jac}(R)$ das Jacobson-Radikal und M ein pseudokompakter R-Modul. Gilt dann $\mathfrak{m}M = M$ für alle offenen maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R, so gilt bereits $M = 0$. Insbesondere folgt aus $\mathrm{Jac}(R)M = M$ ebenfalls $M = 0$.

Beweis. [Bru65, Lemma 1.4] $\square$

Korollar 1.37.
Sei R ein pseudokompakter Ring, $\mathrm{Jac}(R)$ das Jacobson-Radikal, M ein pseudokompakter R-Modul und $\{x_i\}$ eine Familie von Elementen aus M. Dann gilt:
Die Familie $\{x_i\}$ erzeugt M genau dann als topologischen R-Modul, wenn die Familie $\{\overline{x_i}\}$ ihrer Restklassen $M/\mathrm{Jac}(R)M$ als topologischen $R/\mathrm{Jac}(R)$-Modul erzeugt.
Wird $M/\mathrm{Jac}(R)M$ bereits durch $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ erzeugt, so gilt $M = Rx_1 + \cdots + Rx_n$.

Beweis. [Bru65, Corollary 1.5] $\square$

Lemma 1.38.
Sei $E|k_L((u))$ eine endliche, separable Erweiterung. Dann ist E selbst wieder ein Laurentreihenring.

Beweis.
Nach [Ser79, Examples of discrete valuation rings 2), S. 6; Examples 2), S. 27] ist $k_L((u))$ bezüglich der durch $v(f) := \min\{n | a_n \neq 0, f = \sum a_n X^n\}$ definierten Bewertung ein vollständiger bewerteter Körper, dessen diskreter Bewertungsring $k_L[\![u]\!]$ ist. Sei $\mathcal{O}_E$ der ganze Abschluss von $k_L[\![u]\!]$ in E. Nach [Ser79, Chapter II, §2, Proposition 3, S. 28] ist dann $\mathcal{O}_E$ ein diskreter Bewertungsring und E ist vollständig in der Topologie von $\mathcal{O}_E$. Ist κ der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_E$, so ist κ eine endliche Erweiterung von k_L. Insbesondere haben also κ und $\mathcal{O}_E$ die gleiche Charakteristik, daher gilt $\mathcal{O}_E \cong \kappa[\![X]\!]$ nach [Ser79, Chapter II, §4, Theorem 2, S. 33]. Da E der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_E$ ist, ist E also wieder ein Laurentreihenring. $\square$

Lemma 1.39.
Sei $E|k_L((u))$ eine endliche und separable Erweiterung. Dann gilt:

$$E = \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(E)u^i.$$

Beweis.
Setze zunächst $E_0 := k_L((u))$. Nach Lemma 1.38 ist E wieder ein Laurentreihenring in einer Variablen u'. Daher ist $[E : E^p] = p$. Das Minimalpolynom von u über E^p teilt also das Polynom $X^p - u^p = (X-u)^p$ und ist daher von der Form $(X-u)^j$ mit $j = 1$, oder $j = p$. Weiterhin gilt $E_0^p \subseteq E^p \cap E_0 \subseteq E_0$ und $[E_0 : E_0^p] = p$. Folglich gilt entweder $E^p \cap E_0 = E_0$, oder $E^p \cap E_0 = E_0^p$. Es soll nun per Widerspruch gezeigt werden, dass $E^p \cap E_0 = E_0^p$ gilt. Sei also angenommen es würde $E^p \cap E_0 = E_0$ gelten. Dann würde auch $E_0 \subseteq E^p \subseteq E$ gelten. Da aber $E|E_0$ separabel und $E|E^p$ rein inseparabel ist, müsste dann bereits $E = E^p$ gelten, im Widerspruch zu $[E : E^p] = p$. Folglich gilt $E^p \cap E_0 = E_0^p$. Wegen $u \in E_0$ und $u \notin E_0^p$ folgt dann $u \notin E^p$, d.h. es ist $j = p$ und daher $E = \oplus_{i=0}^{p-1} E^p u^i$. Für $1 \leq s < r$ zeigt man nun analog, dass $E^{p^s} = \oplus_{i=0}^{p-1} E^{p^{s+1}} u^{ip^s}$ gilt und folgert daraus die Behauptung, da mit $E|E_0$ auch $E^{p^s}|E_0^{p^s}$ separabel ist. □

Lemma 1.40.
$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}$ ist ein flacher $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$-Modul.

Beweis.
Mit $\ker(\varphi_L) = 0$ erhält man wie in Lemma 1.32 eine Bijektion von Idealen

$$\{\mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}\} \cong \{\mathfrak{a} \triangleleft \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})\}.$$

Da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}$ ein Hauptidealring ist, ist also auch $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$ ein Hauptidealring. Weiterhin ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}$ ein torsionsfreier $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$-Modul, also ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}$ ein flacher $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$-Modul. □

Proposition 1.41.
Es gilt

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}} = \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})u^i.$$

Beweis.
Da die Restklassenkörpererweiterung $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}|\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/\pi_L\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ per Definition separabel ist, folgt aus Lemma 1.39 durch Übergang zum Kompositum

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}} = \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})u^i.$$

Da $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$ ein Körper ist und jeder $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$-Untermodul von $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$ bereits ein Ideal ist, ist $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$ als $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$-Modul einfach. Daher ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}$ ein $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}})$-Modul von endlicher Länge. Weiterhin ist für $j \in \mathbb{N}$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}} \xrightarrow{\cdot\pi_L^j} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L^{j+1}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}}/\pi_L^{j}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{ur}}} \longrightarrow 0$$

exakt. Es folgt also induktiv, dass $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_L^j\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ für $j \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Modul von endlicher Länge ist. Also ist $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ein pseudokompakter $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Modul. Mit Korollar 1.37 folgt dann

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})u^i,$$

beziehungsweise dass es eine kurze exakte Sequenz von $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Moduln gibt

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})u^i \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \longrightarrow 0.$$

Da $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ nach Proposition 1.34 ein pseudokompakter Ring ist, ist dieser Ring insbesondere ein pseudokompakter Modul über sich selbst. Damit ist dann aber auch C ein pseudokompakter $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Modul, wobei die Mengen $\pi_L^k C$ eine Umgebungsbasis der $0 \in C$ mit den geforderten Eigenschaften bilden. Weiterhin ist nach Lemma 1.40 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ein flacher $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Modul. Da für einen beliebigen $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Modul M

$$M/\pi_L M \cong M \otimes_{\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})/\pi_L\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$$

gilt, ist somit die Sequenz

$$0 \longrightarrow C/\pi_L C \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})u^i \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_L\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt.Wie zuvor bereits gesehen wurde, ist in dieser Sequenz der rechte Pfeil aber ein Isomorphismus. Daher ist $C/\pi_L C = 0$ und mit Lemma 1.36 folgt dann, dass bereits $C = 0$ gilt und somit ist

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} = \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})u^i,$$

wie behauptet. □

Bemerkung 1.42.
Nun kann auch gezeigt werden, dass $(\varphi_M)^*$ für $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ stets injektiv ist (vgl. Bemerkung 1.30 Aussage 3). Da H_K trivial auf u operiert, erhält man durch Übergang zum Fixmodul

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} = \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})u^i$$

und somit auch

$$M = \bigoplus_{i=0}^{p^r-1} \left(M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} \varphi_L(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})\right) u^i.$$

Daher lässt sich jedes Element aus $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\varphi_L} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ in der Form $\sum_i m_i \otimes u^i$ darstellen. Ist also $\sum_i m_i \otimes u^i \in M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\varphi_L} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ mit

$$0 = (\varphi_M)^* \left(\sum_i m_i \otimes u^i\right) = \sum_i \varphi_M(m_i)u^i,$$

so gilt bereits $\varphi_M(m_i) = 0$ für alle i. Da nach Propositon 1.29 φ_M aber injektiv auf M ist, folgt $m_i = 0$ für alle i und somit $\sum_i m_i \otimes u^i = 0$.

Es wurde nun gesehen, dass $(1, u, \ldots, u^{q-1})$ eine $\varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Basis von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist. Wie zu Beginn des Abschnitts schon erklärtwurde , soll nun eine Basis $(1 = e_0, e_1, \ldots, e_{q-1})$ konstruiert werden, sodass sich ψ_L beschreiben lässt als

$$\psi_L \colon \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} = \bigoplus_{i=0}^{q-1} \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}) e_i \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}},\ x = \sum_{i=0}^{q-1} \varphi_L(x_i) e_i \mapsto x_0.$$

Im klassischen Fall ist $e_i = (u+1)^i$ eine solche Basis. Im vorliegenden Fall funktioniert dies nicht, da ein so definierter Operator im Allgemeinen nicht mit der Operation der Galoisgruppe G_L kommutiert und da der Operator nicht mit der Definition über die Spur übereinstimmt. Bevor nun aber eine geeignete Basis konstruiert wird, wird der Operator ψ_L über die Spur der Erweiterung $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} | \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ definiert, falls $L = \mathbb{Q}_p$ gilt. Im Folgenden ist stets $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} | \varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}$ zu verstehen.

Proposition 1.43.
Sei $\mathcal{K}$ ein Körper der Charakteristik p und $\mathcal{L}|\mathcal{K}$ eine endliche, nichttriviale und rein inseparable Körpererweiterung. Dann ist $\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}$ trivial.

Beweis.
Sei $x \in \mathcal{L}$. Da die Darstellungsmatrix der Multiplikation mit x über $\mathcal{L}$ als $\mathcal{K}(x)$-Vektorraum eine Diagonalmatrix mit x auf der Diagonalen ist, gilt

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}(x) = \left(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}(x)|\mathcal{K}} \circ \mathrm{Tr}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}(x)}\right)(x) = [\mathcal{L}|\mathcal{K}(x)] \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}(x)|\mathcal{K}}.$$

Ist bereits $\mathcal{L} = \mathcal{K}(x)$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathcal{K}$, sodass das Minimalpolynom von x über $\mathcal{K}$ die Gestalt $X^{p^m} - c$ hat. Dieses Poylnom ist dann auch das charakteristische Polynom von x über $\mathcal{K}$ und da $\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}(x)$ mit dem Koeffizienten zu X^{p^m-1} übereinstimmt, ist $\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}(x) = 0$.
Ist $\mathcal{L} \neq \mathcal{K}(x)$, so ist $[\mathcal{L}|\mathcal{K}(x)] \equiv 0 \bmod p$. Da $\mathcal{K}$ ein Körper von Charakteristik p ist, ist dann $\mathrm{Tr}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}(x) = 0$. □

Korollar 1.44.
Für $x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist $\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} | \varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}(x)$ durch π_L teilbar.

Beweis.
Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} | \varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}"] \arrow[d] & \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} / \pi_L \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \arrow[r] & \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}) / \pi_L \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei der untere horizontale Pfeil ebenfalls die Spur darstellen soll. Wie gerade gesehen wurde, entspricht dieser aber der Nullabbildung. Folglich ist $\mathrm{Tr}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}) \subseteq \pi_L \varphi_L(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ wie behauptet. □

Korollar 1.45.
Sei $L|\,\mathbb{Q}_p$ unverzweigt. Dann gilt $p|\mathrm{Tr}(u^i)$.

Definition 1.46.
Sei $L = \mathbb{Q}_p$. Für $1 \leq i \leq p-1$ setze man

$$e_i := u^i - \frac{1}{p}\,\mathrm{Tr}(u^i).$$

Bemerkung 1.47.
Da $(1, u, \ldots, u^{p-1})$ eine $\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Basis von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ist, gilt dies auch für $(1, e_1, \ldots, e_{p-1})$. Weiterhin gilt für $x, y \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$

$$\mathrm{Tr}(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(x)y) = \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x)\mathrm{Tr}(y).$$

Denn nach [Neu07, I, §2, (2.6) Satz, S.9] ist $\mathrm{Tr}(x) = \sum_\sigma \sigma(x)$, wobei σ die (endlich vielen) $\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Homomorphismen $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \to \mathcal{O}_C$, für einen algebraischen Abschluss C von $\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}})$, durchläuft. Sind $x, y \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$, so ist dann

$$\mathrm{Tr}(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(x)y) = \sum_\sigma \sigma(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(x)y) = \sum_\sigma \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x)\sigma(y) = \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x)\mathrm{Tr}(y).$$

Ist also $z = a_0 + \sum a_i e_i \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ mit $a_0, a_i \in \varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$, so ist $\mathrm{Tr}(z) = pa_0$.

Bemerkung 1.48.
Wie zuvor schon erwähnt wurde, betrachtet man im klassischen Fall die Basis $(1, [\varepsilon], [\varepsilon]^2, \ldots, [\varepsilon]^{p-1})$. Diese stimmt im Allgemeinen aber nicht mit der Basis $(1, e_1, \ldots, e_{p-1})$ überein. Dennoch erhält man durch dieses Basis den selben Operator ψ, denn es ist $\mathrm{Tr}(u^i) = (-1)^i p$ und daher $e_i = u^i - (-1)^i$. Nun ist aber $u^i = \sum_k \binom{i}{k}[\varepsilon]^k(-1)^{i-k}$. Also lassen sich die e_i als Linearkombination von $([\varepsilon], [\varepsilon]^2, \ldots, [\varepsilon]^{p-1})$ darstellen, weshalb die Darstellung eines Elements aus $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ in einer dieser Basen denselben Anteil bezüglich des Basiselements 1 hat. Der ψ-Operator aus der klassischen Literatur kann also auch durch

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})e_i &\longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}},\\ x = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x_i)e_i &\longmapsto x_0\end{aligned}$$

definiert werden.

Definition 1.49. (Der Operator ψ)
Sei $L = \mathbb{Q}_p$. Der Operator $\psi_{\mathbb{Q}_p} \colon \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ wird definiert durch

$$\psi_{\mathbb{Q}_p} := \frac{1}{p}\,\varphi_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \circ \mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}|\varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}.$$

Dabei wird $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ als Homomorphismus $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \to \varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$ aufgefasst.

Proposition 1.50.
Der Operator $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ stimmt mit dem durch

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})e_i \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}},$$
$$x = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x_i)e_i \longmapsto x_0$$

definierten Operator überein. Dabei ist $e_0 = 1$. Weiterhin gilt:

1. *$\psi_{\mathbb{Q}_p}$ ist additiv und linksinvers zu $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$. Insbesondere ist $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ surjektiv.*
2. *$\psi_{\mathbb{Q}_p}$ ist stetig bezüglich der schwachen Topologie.*
3. *Für $a, b \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ gilt $\psi_{\mathbb{Q}_p}(a\varphi_{\mathbb{Q}_p}(b)) = \psi_{\mathbb{Q}_p}(a)b$.*
4. *$\psi_{\mathbb{Q}_p}$ kommutiert mit $G_{\mathbb{Q}_p}$.*

Beweis.
Sei $x = \sum \varphi_{\mathbb{Q}_p}(a_i)e_i \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$. Nach Bemerkung 1.47 ist $\psi_{\mathbb{Q}_p}(x) = a_0$. Dies entspricht gerade dem oben angegebenem Operator. Zu den übrigen Aussagen:

1. Die ersten beiden Behauptungen folgen direkt aus der eben bewiesenen Beschreibung von $\psi_{\mathbb{Q}_p}$. Die Surjektivität folgt aus $\psi_{\mathbb{Q}_p}(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(x)) = x$ für $x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$.
2. Wie zu Beginn von Abschnitt 1.3 erklärt, ist $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ bezüglich der schwachen Topologie offen auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$. Ist $X \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ eine Teilmenge, so ist $\psi_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(X) = \varphi_{\mathbb{Q}_p}(X)$. Folglich ist $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ stetig bezüglich der schwachen Topologie.
3. Seien $a, b \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$. Mit Bemerkung 1.47 folgt:
$$\begin{aligned}\psi_{\mathbb{Q}_p}(a\varphi_{\mathbb{Q}_p}(b)) &= \frac{1}{p}\varphi_{\mathbb{Q}_p}^{-1}\Big(\mathrm{Tr}\Big(a\varphi_{\mathbb{Q}_p}(b)\Big)\Big) = \frac{1}{p}\varphi_{\mathbb{Q}_p}^{-1}\Big(\mathrm{Tr}(a)\varphi_{\mathbb{Q}_p}(b)\Big) \\ &= \frac{1}{p}\varphi_{\mathbb{Q}_p}^{-1}\Big(\mathrm{Tr}(a)\Big) \cdot b = \psi_{\mathbb{Q}_p}(a)b.\end{aligned}$$
4. Seien $g \in G_L$ und $x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$. Da $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ injektiv ist, genügt es
$$\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\psi_{\mathbb{Q}_p}(g(x))) = \varphi_{\mathbb{Q}_p}(g(\psi_{\mathbb{Q}_p}(x)))$$
zu zeigen. Da $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ mit G_L kommutiert und $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ nullteilerfrei ist, ist dies äquivalent zu
$$\mathrm{Tr}(g(x)) = g(\mathrm{Tr}(x)).$$
Ist $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p)$ eine $\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$-Basis von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$, so gilt dies ebenfalls für $g(\mathcal{B}) = (g(f_1), \ldots, g(f_p))$. Denn sei $y \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ und $g^{-1}(y) = \sum \varphi_{\mathbb{Q}_p}(a_i)f_i$, so ist
$$y = g(g^{-1}(y)) = g\left(\sum \varphi_{\mathbb{Q}_p}(a_i)f_i\right) = \sum g(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(a_i)f_i) = \sum \varphi_{\mathbb{Q}_p}(g(a_i))g(f_i).$$

Also ist $g(\mathcal{B})$ ein Erzeugendensystem und da $g(\mathcal{B})$ und $\mathcal{B}$ gleich mächtig sind, ist es auch eine Basis. Ist $M_{\mathcal{B}}(\mu_x) = (a_{ij})$ die Darstellungsmatrix des Homomorphismus $\mu_x \colon \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}, z \to xz$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, so ist die Darstellungsmatrix von $\mu_{g(x)}$ bezüglich der Basis $g(\mathcal{B})$ gegeben durch $(g(a_{ij})) = M_{g(\mathcal{B})}(\mu_{g(x)})$. Da die Spur aber unabhängig von der Basis ist, ist dann

$$\mathrm{Tr}(g(x)) = \sum g(a_{ii}) = g\left(\sum a_{ii}\right) = g(\mathrm{Tr}(x)),$$

wie behauptet.

□

Korollar 1.51.
Sei $L = \mathbb{Q}_p$. Für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathcal{O}_L}$ gibt es einen eindeutigen additiven und surjektiven Operator $\psi_M \colon M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \to M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$, der stetig bezüglich der schwachen Topologie ist und der für $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ und $m \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ folgende Gleichungen erfüllt:

$$\psi_M(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(a)m) = a\psi_M(m),$$
$$\psi_M(a\varphi_M(m)) = \psi_{\mathbb{Q}_p}(a)m.$$

Ebenso gibt es für $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ einen eindeutigen additiven und surjektiven Operator $\psi_M \colon M \to M$, welcher stetig bezüglich der schwachen Topologie ist und welcher die entsprechenden Gleichungen wie oben erfüllt.

Beweis.
Auf $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ lässt sich durch

$$\psi \colon V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \to V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}, \quad v \otimes x \mapsto v \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}(x)$$

ein additiver Operator ψ definieren, welcher stetig bezüglich der schwachen Topologie ist, da $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ nach Proposition 1.50 stetig bezüglich der schwachen Topologie ist. Weiterhin gilt $g(v \otimes x) = v \otimes g(x)$ für $g \in G_K$, $v \in V$ und $x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$, und nach Proposition 1.50 kommutiert $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ mit $G_K \subseteq G_{\mathbb{Q}_p}$. Folglich schränkt sich ψ zu einem Operator ψ_M auf $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ ein, welcher stetig bezüglich der schwachen Topologie ist. Seien $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ und $m = \sum v_i \otimes x_i \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$, dann ist

$$\begin{aligned}
\psi_M(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(a)m) &= \psi_M\left(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(a)\sum v_i \otimes x_i\right) = \psi_M\left(\sum v_i \otimes \varphi_{\mathbb{Q}_p}(a)x_i\right)\\
&= \sum v_i \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}\left(\varphi_{\mathbb{Q}_p}(a)x_i\right) \overset{1.50}{=} \sum v_i \otimes a\psi_{\mathbb{Q}_p}(x_i)\\
&= a\sum v_i \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}(x_i) = a\psi_M\left(\sum v_i \otimes x_i\right)\\
&= a\psi_M(m)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi_M(a\varphi_M(m)) &= \psi_M\left(a\sum v_i \otimes \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x_i)\right) = \psi_M\left(\sum v_i \otimes a\varphi_{\mathbb{Q}_p}(x_i)\right)\\
&= \sum v_i \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}\left(a\varphi_{\mathbb{Q}_p}(x_i)\right) \overset{1.50}{=} \sum v_i \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}(a)x_i\\
&= \psi_{\mathbb{Q}_p}(a)\sum v_i \otimes x_i\\
&= \psi_{\mathbb{Q}_p}(a)m,
\end{aligned}$$

wie behauptet. Insbesondere ist dann $\psi_M(\varphi_M(m)) = m$ für alle $m \in M$, also ist ψ_M surjektiv.
Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $\psi' \colon M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \to M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ ein weiterer additiver Operator, welcher die obigen Gleichungen erfüllt. Wie in Bemerkung 1.30 gezeigt wurde, wird $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ von $\varphi_M(M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V))$ als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul erzeugt. Sei also $m = \sum a_i \varphi_M(m_i) \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ mit $a_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ und $m_i \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\psi_M(m) &= \psi_M\left(\sum a_i \varphi_M(m_i)\right) \\
&= \sum \psi_{\mathbb{Q}_p}(a_i) m_i \\
&= \sum \psi'(a_i \varphi_M(m_i)) \\
&= \psi'(m).
\end{aligned}$$

Folglich stimmen ψ_M und ψ' bereits überein.
Wegen $M \cong M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(M))$ für $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_L, \Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}, \mathrm{et}}$ lässt sich dann auch auf M ein eindeutiger, bezüglich der schwachen Topologie stetiger, additiver und surjektiver Operator ψ_M mit den geforderten Eigenschaften definieren. $\square$

Kapitel 2

Galoiskohomologie von Darstellungen beschrieben durch φ und ψ

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Galoiskohomologie von G_K für Darstellungen mithilfe der Operatoren φ_L bzw. ψ_L unter der Annahme, dass $\Gamma_K \subseteq \Gamma_L$ prozyklisch ist, zu berechnen. Nach Proposition 1.8 ist Γ_L aber isomorph zu $\mathcal{O}_L^\times$ und $\mathcal{O}_L^\times$ ist nur dann prozyklisch, wenn $L = \mathbb{Q}_p$ gilt. Daher wird in diesem Kapitel lediglich die Notation über $\mathbb{Q}_p$ aus dem vorherigen Kapitel verwendet und nicht diejenige über L. Insbesondere sind die G_K-Darstellungen damit $\mathbb{Z}_p$-Moduln. Weiterhin ist $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu(\mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p$ (vgl. [Neu07, (5.7) Satz, S.145f]), wobei $\mu(\mathbb{Z}_p)$ die in $\mathbb{Z}_p$ enthaltenen Einheitswurzeln sein sollen. Also ist $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ für $p \neq 2$ prozyklisch. Wie in Bemerkung 1.6 erklärt wurde, lässt sich Γ_K als Untergruppe von $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ auffassen und ist somit für $p \neq 2$ auch prozyklisch.Gilt für $p = 2$ bereits $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}[\pi_{\mathbb{Q}_2}^2] \subseteq K$, so ist Γ_K ebenfalls prozyklisch.
Die Kohomologie wird nun zunächst für endlich erzeugte Torsionsdarstellungen berechnet und dann wird gezeigt, wie man daraus die Kohomologie einer beliebigen endlich erzeugten Darstellung erhält.
Für das ganze Kapitel sei $\gamma \in \Gamma_K$ ein topologischer Erzeuger von Γ_K.

2.1 Galoiskohomologie von Torsionsdarstellungen beschrieben durch $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$

In diesem Abschnitt soll die Galoiskohomologie von G_K für endlich erzeugte Torsionsdarstellungen mithilfe von $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ berechnet werden. Sei also $V \in \mathbf{Rep}_{G_K,\mathbb{Z}_p}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}$ und der Komplex $\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(V)$ wie folgt definiert:

$$0 \longrightarrow M(V) \xrightarrow{(\varphi_M - 1, \gamma - 1)} M(V) \oplus M(V) \xrightarrow{(\gamma-1)\operatorname{pr}_1 - (\varphi_M - 1)\operatorname{pr}_2} M(V) \longrightarrow 0.$$

Dabei ist $M(V) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$. Für $M \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}$ definiert man den Komplex $\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(M)$ analog. Es wird nun gezeigt, dass die Kohomologie des obigen Komplexes mit der Galoiskohomologie von V übereinstimmt. Dazu wird gezeigt, dass die durch $V \mapsto H^i(\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(V))$ gegebenen Funktoren einen universellen δ-Funktor bilden, der in Grad Null mit dem Funktor $V \mapsto H^i(G_K, V)$ übereinstimmt. Die zugrundeliegende Kategorie $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ (bzw. $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$) besitzt jedoch nicht genügend Injektive. Es werden nun zwei Kategorien definiert, welche die Kategorien $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ bzw. $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ enthalten, die genügend Injektive besitzen und auf welche sich die Funktoren V und $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$ fortsetzen lassen und auch dort eine Kategorienäquivalenz induzieren. Dies orientiert sich an [Her98, S. 572f], wird aber detaillierter besprochen.

Definition 2.1.
Eine (beliebige) $\mathbb{Z}_p$-Darstellung V von G_K heißt **diskret**, falls die Operation von G_K auf V stetig bezüglich der diskreten Topologie auf V ist.
Mit $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ sei die Kategorie bezeichnet, deren Objekte diskrete $\mathbb{Z}_p$-Torsionsdarstellungen und deren Morphismen die stetigen $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Modulhomomorphismen sind.

Proposition 2.2.
Sei V eine (beliebige) $\mathbb{Z}_p$-Darstellung von G_K. Dann sind äquivalent:

(i) V ist diskret.

(ii) Für alle $v \in V$ ist $G_{K,v} := \{g \in G | g(v) = v\} \subseteq G_K$ eine offene Untergruppe.

(iii) $V = \cup V^U$, wobei U die offenen Untergruppen von G_K durchläuft.

Beweis. [NSW08, (1.1.8) Proposition, S.7f] □

Proposition 2.3.
Die Kategorie $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ besitzt genügend Injektive.

Beweis.
Da die $\mathbb{Z}_p$-Darstellungen von G_K gerade die $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Moduln sind, besitzt die Kategorie der $\mathbb{Z}_p$-Darstellungen genügend Injektive. Sei nun $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ und Q ein injektives Objekt in der Kategorie der $\mathbb{Z}_p$-Darstellungen. Sei weiterhin $Q_d := \cup Q^U$, wobei U die offenen Untergruppen von G_K durchläuft und $Q_{d,t}$ der $\mathbb{Z}_p$-Torsionsuntermodul von Q_d. Nach Proposition 2.2 ist Q_d dann eine diskrete $\mathbb{Z}_p$-Darstellung von G_K. Damit ist dann auch $Q_{d,t}$ eine diskrete $\mathbb{Z}_p$-Darstellung von G_K. Da Q injektiv ist, gibt es einen injektiven und stetigen $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Homomorphismus $V \to Q$. Wegen $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ ist das Bild dann aber in $Q_{d,t}$ enthalten, d.h. es gibt einen injektiven und stetigen $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Homomorphismus $V \to Q_{d,t}$. Daher bleibt noch zu zeigen, dass $Q_{d,t}$ injektiv in der Kategorie $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ ist. Seien hierzu $A, B \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$, $\alpha \colon A \hookrightarrow B$, sowie $\beta \colon A \to Q_{d,t}$ stetige $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Modulhomomorphismen, wobei α zusätzlich injektiv sein soll. Da Q injektiv als $\mathbb{Z}_p$-Darstellung ist, gibt es dann einen stetigen $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Modulhomomorphismus $\eta \colon B \to Q$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[ddl, "\eta"] \\
Q_{d,t} \arrow[d] & \\
Q. &
\end{tikzcd}$$

Da η aber ein $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Modulhomomorphismus und B ein diskreter $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Torsionsmodul ist, ist auch das Bild von η in Q ein diskreter $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Torsionsmodul, d.h. $\mathrm{im}(\eta) \subseteq Q_{d,t}$. Also ist $Q_{d,t}$ ein injektives Objekt in $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. □

Proposition 2.4.
Die Objekte aus $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ sind induktive Limiten von Objekten aus $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$.
Genauer gilt sogar:
Zu $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ gibt es eine induktive Familie $(V_i)_i$ in $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ mit injektiven Übergangsabbildungen, sodass $V = \varinjlim V_i$ gilt.

Beweis.
Sei $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ und $(e_i)_{i\in I}$ ein $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Erzeugendensystem von V. Die Menge der endlichen Teilmengen von I ist partiell geordnet und gerichtet bezüglich Inklusion. Für $i \in I$ ist nach Voraussetzung die Standgruppe G_{K,e_i} eine offene Untergruppe von G_K und da G_K eine proendliche Gruppe ist, ist somit der Index von G_{K,e_i} in G_K endlich. Damit ist also die Bahn $G_K e_i$ endlich und dies bedeutet, dass der $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Untermodul $\mathbb{Z}_p[G_k]e_i$ von V ebenfalls endlich ist und daher auch als $\mathbb{Z}_p$-Modul endlich erzeugt ist. Versieht man $\mathbb{Z}_p[G_K]e_i$ mit der diskreten Topologie, so ist die Operation von G_K auf $\mathbb{Z}_p[G_K]e_i$ stetig, da V diskret war, d.h. es ist $\mathbb{Z}_p[G_k]e_i \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Für $J \subseteq I$ endlich ist dann auch $V_J := \sum_{j\in J} \mathbb{Z}_p[G_k]e_j \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Weiterhin hat man für $J, J' \subseteq I$ endlich mit $J \subseteq J'$ stets einen kanonischen, injektiven $\mathbb{Z}_p[G_K]$-Modulhomomorphismus $V_J \to V_{J'}, e_j \mapsto e_j$. Also ist die Familie $(V_J)_J$ ein induktives System in $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ mit injektiven Übergangsabbildungen. Nun stimmt V algebraisch mit dem induktiven Limes $\varinjlim_{J\subseteq I \text{ endl}} V_J$ überein und da die V_J alle die diskrete Topologie tragen, trägt auch der induktive Limes die diskrete Topologie. Also ist auch $\varinjlim_{J\subseteq I \text{ endl}} V_J$ versehen mit der Topologie des induktiven Limes ein Objekt in $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ und somit isomorph zu V. □

Definition 2.5.
Mit $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ sei diejenige Kategorie bezeichnet, deren Objekte induktive Limiten von Objekten aus $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ sind und deren Morphismen die stetigen $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modulhomomorphismen sind, die verträglich mit den Operation von $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ und Γ_K sind.

Lemma 2.6.
Sei R ein topologischer Ring und φ ein injektiver und stetiger Endomorphismus auf R. Sei $(A_i, f_{ij})_{i\in I}$ eine induktive Familie von topologischen R-Moduln mit injektiven Übergangsabbildungen.

1. *Gibt es für jedes $i \in I$ eine bezüglich φ semilinaeare Abbildung $\varphi_i \colon A_i \to A_i$ und sind die f_{ij} verträglich mit der Operation von φ, so gibt es einen topologischen Isomorphismus*
$$\varinjlim A_i^{\varphi=1} \cong (\varinjlim A_i)^{\varphi=1}.$$
2. *Ist G eine Gruppe, die stetig auf jedem A_i operiert, $H \leq G$ eine Untergruppe und sind die f_{ij} verträglich mit der Operation von G, so gibt es einen topologischen Isomorphismus*
$$\varinjlim A_i^H \cong (\varinjlim A_i)^H.$$

Beweis.

1. Zu jedem $k \in I$ gibt es einen kanonischen, stetigen und injektiven R-Modulhomomorphismus $A_k^{\varphi=1} \to A_k$. Folglich gibt es zu jedem $k \in I$ auch einen stetigen R-Modulhomomorphismus $A_k^{\varphi=1} \to \varinjlim A_i$. Das Bild dieses Homomorphismus ist aber bereits in $(\varinjlim A_i)^{\varphi=1}$ enthalten. Da für $k \leq j$ die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A_k^{\varphi=1} \arrow[dd, "f_{kj}"'] \arrow[dr] & \\ & (\varinjlim A_i)^{\varphi=1} \\ A_j^{\varphi=1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutieren, gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft des induktiven Limes einen stetigen R-Modulhomomorphismus

$$f\colon \varinjlim A_i^{\varphi=1} \to (\varinjlim A_i)^{\varphi=1},\ [x] \mapsto [x].$$

Dieser ist injektiv, denn ist $[x] \in \varinjlim A_i^{\varphi=1}$ und $x \in A_k^{\varphi=1}$ ein Vertreter mit $[x] = [0]$ in $(\varinjlim A_i)^{\varphi=1}$, dann gibt es $j \geq k$ mit $f_{kj}(x) = 0$. Da aber die Einschränkung von (f_{ij}) die Übergansabbildungen der Familie $(A_i^{\varphi=1})$ bilden, gilt bereits $[x] = [0]$ in $\varinjlim A_i^{\varphi=1}$.
Sei nun $[x] \in (\varinjlim A_i)^{\varphi=1}$ und $x \in A_k$ ein Vertreter. Dann gibt es $j \geq k$ mit

$$f_{kj}(x) = f_{kj}(\varphi_k(x)) = \varphi(f_{kj}(x)).$$

Da f_{kj} injektiv ist, ist folglich $x \in A_k^{\varphi=1}$. Daher ist $[x] \in \varinjlim A_i^{\varphi=1}$ ein Urbild von $[x] \in (\varinjlim A_i)^{\varphi=1}$. Folglich ist f auch surjektiv.
Es bleibt nun noch zu zeigen, dass f offen ist. Sei hierzu $f_j\colon A_j \to \varinjlim A_i$ der stetige, kanonische Homomorphismus. Aufgrund der Definition der Topologie des induktiven Limes ist dieser auch offen und schränkt sich zu stetigen Homomorphismen $A_j^{\varphi=1} \to \varinjlim A_i^{\varphi=1}$ bzw. $A_j^{\varphi=1} \to (\varinjlim A_i)^{\varphi=1}$ ein. Per Definition ist $U \subseteq \varinjlim A_i^{\varphi=1}$ genau dann offen, wenn $f_j^{-1}(U) \subseteq A_j^{\varphi=1}$ für alle j offen ist, also wenn es offene $V_j \in A_j$ mit $V_j \cap A_j^{\varphi=1} = f_j^{-1}(U)$ gibt. Eine Teilmenge $U' \subseteq (\varinjlim A_i)^{\varphi=1}$ ist genau dann offen, wenn es ein offenes $V' \subseteq \varinjlim A_i$ mit $V' \cap (\varinjlim A_i)^{\varphi=1} = U'$ gibt. Da für beliebige Teilmengen $B \subseteq \varinjlim A_i$ aber $B = \cup_j f_j(f_j^{-1}(B))$ gilt, ist U' somit genau dann offen, wenn es ein offenes $V' \subseteq \varinjlim A_i$ gibt, sodass $f_j^{-1}(V' \cap (\varinjlim A_i)^{\varphi=1}) = f_j^{-1}(U')$ für alle j gilt. Wie zuvor schon gesehen, gilt für $[x] \in (\varinjlim A_i)^{\varphi=1}$ und $x \in A_k$ bereits $x \in A_k^{\varphi=1}$. Daher ist dann $f_j^{-1}((\varinjlim A_i)^{\varphi=1}) = A_j^{\varphi=1}$. Ist nun $f(U) = U'$ und $U \subseteq \varinjlim A_i^{\varphi=1}$ offen, so ist U' genau dann offen, wenn es ein offenes $V' \subseteq \varinjlim A_i$ mit $f_j^{-1}(V') \cap A_j^{\varphi=1} = f_j^{-1}(U)$ für alle j gibt. Da U offen ist, gibt es aber offene $V_j \in A_j$ mit $V_j \cap A_j^{\varphi=1} = f_j^{-1}(U)$. Daher erfüllt $V' := \cup_j f_j(V_j)$ die Bedingung.

2. Bis auf die Surjektivität von f ist der Beweis der zweiten Aussage analog.
   Sei also $[x] \in (\varinjlim A_i)^H$ und $x \in A_k$ ein Vertreter. Zu $h \in H$ gibt es dann ein $j \geq k$ mit
   $$f_{kj}(x) = f_{kj}(hx) = hf_kj(x).$$
   Da f_{kj} injektiv ist, gilt dann bereits $hx = x$ und somit auch $x \in A_k^H$. Folglich ist $[x] \in \varinjlim A_i^H$ ein Urbild von $x \in (\varinjlim A_i)^H$.

$\square$

Proposition 2.7.
Die Funktoren $V\colon \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}} \to \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ *und* $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}\colon \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p} \to \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ *lassen sich zu Funktoren zwischen den Kategorien* $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ *und* $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor},\mathrm{ind}}$ *erweitern, sodass für* $W = \varinjlim W_i \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ *und* $M = \varinjlim M_i \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor},\mathrm{ind}}$ *gilt:*

$$M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(W) = \varinjlim M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(W_i),$$
$$V(M) = \varinjlim V(M_i).$$

Insbesondere sind also V *und* $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$ *auch Äquivalenzen zwischen den Kategorien* $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ *und* $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor},\mathrm{ind}}$.

Beweis.
Sei $W \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$, $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor},\mathrm{ind}}$, $(W_i, f_{ij})_i$ eine induktive Familie in $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ mit injektiven Übergansabbildungen und $(M_i, g_{ij})_i$ eine induktive Familie in $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ mit Übergansabbildungen, sodass $W = \varinjlim W_i$ und $M = \varinjlim M_i$ gilt. Da Tensorprodukte mit induktiven Limiten vertauschen gilt

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} M = \varinjlim \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} M_i\right),$$
$$V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} = \varinjlim \left(V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right).$$

Die Behauptung folgt dann aus Lemma 2.6. Man beachte dabei, dass $\varinjlim \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} M_i\right)^{\varphi_{\mathbb{Q}_p}=1} \cong \left(\varinjlim \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} M_i\right)^{\varphi_{\mathbb{Q}_p}=1}$ auch G_K-linear ist. $\square$

Für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ (bzw. $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor},\mathrm{ind}}$) definiert man den Komplex $\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(V)$ (bzw. $\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(M)$) wie zuvor durch

$$0 \longrightarrow M(V) \xrightarrow{(\varphi_M - 1, \gamma - 1)} M(V) \oplus M(V) \xrightarrow{(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\varphi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2} M(V) \longrightarrow 0,$$

wobei wieder $M(V) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ ist (bzw. mit M statt $M(V)$). Für $i \in \mathbb{N}$ definiere man den Funktor $\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}\colon \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor},\mathrm{ind}} \to \mathbf{Ab}$, $M \mapsto H^i(\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(M))$, wobei $\mathbf{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen bezeichne. Dass $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}} = (\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}})_i$ ein additiver δ-Funktor ist, ist klar. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ universell ist und in Grad

Null mit der Galoiskohomologie übereinstimmt. Zunächst soll aber die Kohomologie des obigen Komplexes angegeben werden. Sei also $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^0_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) &= \{x \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \mid \varphi_M(x) = x,\ \gamma(x) = x\},\\
\mathcal{H}^1_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) &= \frac{\{(x,y) \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \oplus M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \mid (\gamma-1)(x) = (\varphi_M - 1)(y)\}}{\{(\varphi_M-1)(x), (\gamma-1)(x) | x \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)\}},\\
\mathcal{H}^2_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) &= \frac{M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)}{\{x \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \mid \exists\, y,z \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)\colon x = (\gamma-1)(z) - (\varphi_M-1)(y)\}},\\
\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) &= 0 \text{ für } i \geq 3.
\end{aligned}$$

Proposition 2.8.
Sei $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Dann gilt:

$$\mathcal{H}^0_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong V^{G_K} \cong H^0(G_K, V).$$

Beweis.
Die Gültigkeit des zweiten Isomorphismus ist allgemein bekannt. Nach Definition ist $\mathcal{H}^0_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) = \{x \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) | \varphi_M(x) = x, \gamma(x) = x\}$ und $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})^{H_K}$. Nun ist aber nach Proposition 1.26 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p}=1} = \mathbb{Z}_p$, also ist $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)^{\varphi_{\mathbb{Q}_p}=1} = V^{H_K}$ und daher $\mathcal{H}^0_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) = \left(V^{H_K}\right)^{\gamma=1} = V^{G_K}$, wie behauptet. □

Um nun zu zeigen, dass $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ ein universeller δ-Funktor ist, wird gezeigt, dass $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ *schwach auslöschbar* (engl. *weakly effaceable*) ist (vgl. hierzu [Buc60, Proposition 4.2, S. 207]). Hierzu wird $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ als Funktor auf der Kategorie $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ betrachtet, was wegen der Äquivalenz der Kategorien legitim ist. Die weitere Bedingnung in [Buc60, Proposition 4.2, S. 207]), dass für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

in $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ die zugehörige lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M') \longrightarrow \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M'') \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^{i+1}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M') \longrightarrow \cdots$$

exakt ist, ist erfüllt, da $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ die Kohomologie eines Komplexes berechnet. Der Beweis, dass $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ schwach auslöschbar ist, wird in mehreren Schritten geführt und benötigt unter anderem die nachfolgenden beiden Lemmata. Einige Aussagen werden dabei lediglich für Objekte aus $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}},\mathrm{tor}}$ bzw. $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}},\mathrm{tor,ind}}$ bewiesen und später wird erklärt, wie sich das auf Objekte aus $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ bzw. $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ ausdehnt. Zunächst soll aber erklärt werden, wie die Objekte aus $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}},\mathrm{tor}}$ auf natürliche Weise mit einer Topologie versehen werden können.

Definition 2.9.
Sei N ein $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$-Modul. Ein endlicher erzeugter $\mathbb{Z}_p[\![u]\!]$-Untermodul von N heißt **u-Gitter**, falls er N als $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$-Modul erzeugt.

Bemerkung 2.10. (*natürliche Topologie für Objekte aus* $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}},\mathrm{tor}}$)

Sei $N \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}},\mathrm{tor}}$. Da N endlich erzeugt und ein Torsionsmodul ist, und da $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$ die Vervollständigung von $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$ ist, ist N ein $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$-Modul. Eine Basis der offenen Umgebungen der $0 \in N$ der **natürlichen Topologie** auf N bilden die u-Gitter von N.

Lemma 2.11.
Sei $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}},\mathrm{tor}}$. *Dann gilt:*

1. *M enthält ein u-Gitter, das stabil unter φ_M und $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ ist und auf dem $\varphi_M - 1$ ein Isomorphismus ist.*

2. *Zu $x \in M$ gibt es $r \in \mathbb{N}_0$ und $y \in M$ mit*
$$(\gamma - 1)^r(x) = (\varphi_M - 1)(y).$$

Beweis.

1. Zunächst soll ein u-Gitter konstruiert werden, welches stabil unter φ_M ist und auf dem $\varphi_M - 1$ ein Isomorphismus ist.
Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $\pi^n_{\mathbb{Q}_p} M = 0$ ist und sei $(e_i)_{1\le i\le d}$ ein Erzeugendensystem von M als $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$-Modul. Ein solches Erzeugendensystem existiert, da $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$ die Vervollständigung von $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$ und M ein $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$-Torsionsmodul ist. Es gibt also eine Matrix $(a_{ij})_{1\le i,j\le d} \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u])$, sodass für $1 \le i \le d$ gilt:
$$\varphi_M(e_i) = \sum_{j=1}^{d} a_{ji} e_j.$$
Sei $s \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, dass für alle $i, j \in \{1, \dots, d\}$ gilt:
$$u^s a_{ij} \in u^{p^{n-1}}\,\mathbb{Z}_p[\![u]\!] + \pi^n_{\mathbb{Q}_p}\,\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u].$$
Ein solches s existiert, da sich jedes a_{ij} schreiben lässt als $\sum_{k=-n}^{\infty} b_k u^k$. Sei weiterhin $r \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $rp^{n-1}(p-1) \ge s$ gilt. Wegen $\varphi_{\mathbb{Q}_p}(u) \equiv u^p \bmod \pi_{\mathbb{Q}_p}$ gilt $\varphi_{\mathbb{Q}_p}(u^{p^{n-1}}) \equiv u^{p^n} \bmod \pi^n_{\mathbb{Q}_p}$ und foglich für alle $i \in \{1, \dots, d\}$:
$$\varphi_M(u^{rp^{n-1}} e_i) = \sum_{j=1}^{d} \left(u^{rp^{n-1}(p-1)} a_{ji}\right)\left(u^{rp^{n-1}} e_j\right). \qquad (\star)$$
Für $i \in \{1, \dots, d\}$ setze man nun $f_i := u^{rp^{n-1}} e_i$ und es sei N der $\mathbb{Z}_p[\![u]\!]$-Untermodul von M, der von den f_i erzeugt wird. Nach obiger Gleichung $(\star)$ ist N stabil unter φ_M und da M von $(e_i)_{1\le i\le d}$ als $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$-Modul erzeugt wird, wird M auch von $(f_i)_{1\le i\le d}$ als $\mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$-Modul erzeugt. Folglich ist N ein u-Gitter von M, welches stabil unter φ_M ist. Insbesondere ist N also eine offene Umgebung der $0 \in M$.

Nun soll gezeigt werden, dass $\varphi_M - 1$ ein Isomorphismus auf N ist. Für $x \in N$ wird dazu zunächst gezeigt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_M^k(x) = 0$$

gilt. Sei also $x \in N$ und seien $x_i \in \mathbb{Z}_p[\![u]\!]$ mit $x = \sum_i x_i f_i$. Wird nun φ_M auf x angewandt, so erhält man mit obiger Gleichung ($\star$):

$$\varphi_M(x) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x_i)\varphi_M(f_i) = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \varphi_{\mathbb{Q}_p}(x_i) \left(u^{rp^{n-1}(p-1)} a_{ji} \right) f_j \right).$$

Da $\left(u^{rp^{n-1}(p-1)} a_{ji}\right) \in u^{p^{n-1}}\, \mathbb{Z}_p[\![u]\!] + \pi_{\mathbb{Q}_p}^n\, \mathbb{Z}_p[\![u]\!][1/u]$ nach Wahl von r gilt und da n so gewählt wurde, dass $\pi_{\mathbb{Q}_p}^n M = 0$ gilt, ist $\left(u^{p^{n-1}(p-1)r} a_{ji}\right) f_j \in u^{p^{n-1}} N$. Dies gilt dann aber auch für obige Summe, d.h. es ist $\varphi_M(x) \in u^{p^{n-1}} N$. Induktiv folgt also $\varphi_M^k(x) \in u^{kp^{n-1}} N$. Nach Definition der Topologie auf M bzw. N gilt also $\lim_{k\to\infty} \varphi_M^k(x) = 0$ wie behauptet. Folglich konvergiert für $x \in N$ auch die Reihe $\sum_k -\varphi_M^k(x)$ in N. Diese Reihe ist aber gerade invers zu $\varphi_M - 1$, weshalb $\varphi_M - 1$ ein Isomorphismus auf N ist.
Da $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ topologisch isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ ist und in $\mathbb{Z}_p$ die Folge $(p^k)_k$ gegen 0 konvergiert, konvergiert in $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ die Folge $(\gamma^{p^k})_k$ gegen die Identität. Insbesondere konvergiert dann die Folge $((\gamma^{p^k}, x))_k$ in $\Gamma_{\mathbb{Q}_p} \times M$ gegen (id, x). Da $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ stetig auf M operiert, ist die Abbildung $\Gamma_{\mathbb{Q}_p} \times M \to M, (g, y) \mapsto g(y)$ stetig. Daher konvergiert die Folge $(\gamma^{p^k}(x))_k$ in M gegen x. Also konvergiert $(\gamma^{p^k} - x)_k$ in M gegen 0. Da N aber eine offene Umgebung der $0 \in M$ ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\gamma^{p^k}(x) - x \in N$ und somit auch $\gamma^{p^k}(x) \in N$ gilt. Also gibt es auch ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\gamma^{p^{k_0}}(f_i) \in N$ für alle $1 \le i \le d$ gilt. Weiterhin ist mit $z \in \mathbb{Z}_p[\![u]\!]$ auch $\gamma(z) \in \mathbb{Z}_p[\![u]\!]$. Man setze nun

$$N' := \sum_{t=1}^{p^{k_0}-1} \gamma^t(N).$$

Dann ist N' stabil unter der Operation von $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ und da die Operationen von $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ und φ_M vertauschen, ist auch N' ein u-Gitter von M, welches stabil unter φ_M ist und auf welchem $\varphi_M - 1$ ein Isomorphismus ist.

2. Da das eben definierte u-Gitter N' eine offene Umgebung der $0 \in M$ ist, auf welchem $\varphi_M - 1$ ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $((\gamma - 1)^{p^k}(x))_k$ für alle $x \in M$ eine Nullfolge ist. Dies folgt aber, wie zuvor schon erklärt wurde, aus der Stetigkeit der Operation von $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ auf M.

□

Lemma 2.12.
Sei $M \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}$ und $x \in M$. Dann gibt es $N_x \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}$, in welchem sich M einbetten lässt und in dem $x \in (\varphi_{N_x} - 1)(N_x)$ gilt.

Beweis.
Da $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$-Modul ist, ist M als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$-Modul ebenfalls endlich erzeugt, d.h. es ist $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}},\mathrm{tor}}$. Nach Lemma 2.11 gibt es dann $r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$(\gamma - 1)^r(x) \in (\varphi_M - 1)(M).$$

Ist $r = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $r \geq 1$ und $t_0 \in M$ so gewählt, dass $(\gamma - 1)^r(x) = (\varphi_M - 1)(t_0)$ gilt und sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\pi^n_{\mathbb{Q}_p} M = 0$ gilt. Man setze

$$N_x := M \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/\pi^n_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},$$

und wähle t_i als Erzeuger des i-ten Summanden. N_x ist also ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Torsionsmodul. Die Operationen von φ_M und γ werden für $i \in \{1, \dots, r\}$ wie folgt auf N_x fortgesetzt:

$$\begin{aligned}\varphi_{N_x}(t_i) &= t_i + (\gamma - 1)^{r-i}(x),\\ \gamma(t_i) &= t_i + t_{i-1}.\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt $(\varphi_{N_x} - 1)(t_r) = t_r + (\gamma - 1)^0(x) - t_r = x$ und $t_r = \varphi_{N_x}(t_r) - x$, also liegt t_r im $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Erzeugnis von $\varphi_{N_x}(N_x)$ und wegen $t_{i-1} = \gamma(t_i) - t_i$ gilt dies bereits für alle t_i. Also wird N_x als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul von $\varphi_{N_x}(N_x)$ erzeugt. Um zu prüfen, dass φ_{N_x} mit γ kommutiert, genügt es, dies auf den t_i zu prüfen. Für $i \in \{1, \dots, r\}$ hat man in der Tat:

$$\begin{aligned}\varphi_{N_x}(\gamma(t_i)) &= \varphi_{N_x}(t_i) + \varphi_{N_x}(t_{i-1})\\ &= t_i + (\gamma - 1)^{r-i}(x) + t_{i-1} + (\gamma - 1)((\gamma - 1)^{r-i}(x))\\ &= \gamma(t_i) + \gamma((\gamma - 1)^{r-i}(x))\\ &= \gamma(t_i + (\gamma - 1)^{r-i}(x))\\ &= \gamma(\varphi_{N_x}(t_i)).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $(\gamma-1)^i(t_i) = t_0 \in M$, weshalb sich die Operation von γ zu einer stetigen und semilinearen Operation von Γ auf N_x fortsetzt. Folglich gilt $N_x \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$, was den Beweis beendet. □

Korollar 2.13.
Sei $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ und $x \in M$. Dann gibt es $N_x \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$, in welchen sich M einbetten lässt und in dem $x \in (\varphi_{N_x} - 1)(N_x)$ gilt.

Beweis.
Wie im Beweis von Proposition 2.4 gesehen wurde, ist M der direkte Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln. Sei also $(M^{(i)})_{i\in I}$ die Familie der endlich erzeugten Untermoduln von M mit kanonischen Inklusionen als Übergangsabbildungen und $I_0 := \{i \in I | x \in M^{(i)}\}$. Man setze dann

$$M_0 := \cap_{i\in I_0} M^{(i)}.$$

Daher ist $M_0 \subseteq M^{(i)}$ für $i \in I_0$ und da $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ als diskreter Bewertungsring noethersch ist, ist M_0 selbst wieder endlich erzeugt. Nach Lemma 2.12 gibt es daher $N_{0,x} \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ mit $x \in (\varphi_{N_{0,x}} - 1)(N_{0,x})$. Nach dem Beweis von Lemma 2.12 ist

$$N_{0,x} = M_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/\pi^n_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},$$

wobei $r \geq 0$ mit $(\gamma - 1)^r(x) \in (\varphi_{M_0} - 1)(M_0)$ und $\pi^n_{\mathbb{Q}_p} M_0 = 0$. Für $i \in I$ setze man dann

$$N^{(i)}_x := M^{(i)} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/\pi^n_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$$

und für $i \leq j$ setze man die kanonische Inklusion $M^{(i)} \hookrightarrow M^{(j)}$ auf natürliche Weise zu einer Inklusion $N^{(i)}_x \hookrightarrow N^{(j)}_x$ fort. Mit den so fortgesetzten Inklusionen bildet die Familie $(N^{(i)}_x)_i$ ein induktives System. Sei daher $N_x := \varinjlim_i N^{(i)}_x$. Nach Konstruktion lässt sich $M^{(i)}$ in $N^{(i)}_x$ einbetten, weshalb M ein Untermodul von N_x ist. Für $i \in I_0$ gilt weiterhin $N_{0,x} \subseteq N^{(i)}_x$ und somit auch $(\varphi_{N_{0,x}} - 1)(N_{0,x}) \subseteq (\varphi_{N^{(i)}_x} - 1)(N^{(i)}_x)$, also insbesondere $x \in (\varphi_{N^{(i)}_x} - 1)(N^{(i)}_x)$. Folglich ist $x \in (\varphi_{N_x} - 1)(N_x)$, was den Beweis beendet. □

Proposition 2.14.
Der Funktor $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ ist schwach auslöschbar, das heißt für jedes $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ und $\mathrm{x} \in \mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M)$ gibt es ein $N \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ und eine Inklusion $\iota_{\mathrm{x}} \colon M \hookrightarrow N$, sodass $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(\iota_{\mathrm{x}})(\mathrm{x}) = 0$ in $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(N)$ gilt.

Beweis.
Sei $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$. Wegen $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M)^i = 0$ für $i \geq 3$ genügt es die Grade 1 und 2 zu betrachten. Es soll mit Grad 2 begonnen werden.
Sei also $x \in M$. Nach Korollar 2.13 gibt es $N_x \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ mit $x \in (\varphi_{N_x} - 1)(N_x)$ und eine Einbettung $M \hookrightarrow N_x$. Wie zuvor schon angegeben ist

$$\mathcal{H}^2_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(N_x) = N_x/\{\alpha \in N_x |\ \exists\, y, z \in N_x \colon \alpha = (\gamma - 1)(z) - (\varphi_{N_x} - 1)(y)\},$$

also ist die Klasse von x gleich Null in $\mathcal{H}^2_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(N_x)$.
Nun zu Grad 1. Seien also $x, y \in M$ mit $(\gamma - 1)(x) = (\varphi_M - 1)(y)$. Wie eben gibt es nach Korollar 2.13 $N_x \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$ mit $x \in (\varphi_{N_x} - 1)(N_x)$ und eine Einbettung $M \hookrightarrow N_x$. Sei weiterhin $z \in N_x$ mit $(\varphi_{N_x} - 1)(z) = x$ und $s \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, dass $\pi^s_{\mathbb{Q}_p} z = \pi^s_{\mathbb{Q}_p} y = 0$ gilt. Man definiere nun

$$N_{x,y} := N_x \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/\pi^s_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$$

und wähle v als einen Erzeuger der rechten Seite als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}/\pi^s_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul. Die Operationen von φ_{N_x} und γ werden wie folgt auf $N_{x,y}$ fortgesetzt:

$$\begin{aligned} \varphi_{N_{x,y}}(v) &= v, \\ \gamma(v) &= v + (\gamma - 1)(z) - y. \end{aligned}$$

Die so erweiterten Operationen von φ_{N_x} und γ kommutieren miteinander:

$$\begin{aligned}\varphi_{N_{x,y}}(\gamma(v)) &= \varphi_{N_{x,y}}(v + (\gamma - 1)(z) - y)\\ &= v + \varphi_{N_x}(\gamma(z)) - \varphi_{N_x}(z) - \varphi_{N_x}(y)\\ &= v + \gamma(x + z) - x - z - \varphi_M(y)\\ &= v + (\gamma - 1)(z) + (\gamma - 1)(x) - \varphi_M(y)\\ &= v + (\gamma - 1)(z) - y\\ &= \gamma(v) = \gamma(\varphi_{N_{x,y}}(v)).\end{aligned}$$

Wegen $(\gamma - 1)(v) = (\gamma - 1)(z) - y \in N_x$ setzt sich dann die Operation von γ zu einer semilinearen und stetigen Operation von Γ_K auf $N_{x,y}$ fort. Dies bedeutet, dass $N_{x,y} \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor},\mathrm{ind}}$ gilt und es eine Einbettung $M \hookrightarrow N_{x,y}$ gibt. Nach Konstruktion gilt nun

$$\begin{aligned}x &= (\varphi_{N_{x,y}} - 1)(z - v),\\ y &= (\gamma - 1)(z - v).\end{aligned}$$

Wie zuvor schon angegeben ist

$$\mathcal{H}^1_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(N_{x,y}) = \frac{\{(x, y) \in N_{x,y} \oplus N_{x,y} | (\gamma - 1)(x) = (\varphi_{N_{x,y}} - 1)(y)\}}{\{(\varphi_{N_{x,y}} - 1)(x), (\gamma - 1)(x) | x \in N_{x,y}\}}.$$

Folglich ist die Klasse von (x, y) gleich Null in $\mathcal{H}^1_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(N_{x,y})$, was den Beweis beendet. □

Insgesamt wurde also gezeigt, dass $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$ ein universeller δ-Funktor ist, dessen nullter Term mit dem nullten Term der Galoiskohomologie übereinstimmt, weshalb es einen natürlichen Isomorphismus zwischen diesen beiden Funktoren gibt. Dieses Resultat soll noch einmal als Satz formuliert werden.

Satz 2.15.
Ist $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ so gibt es für alle $i \in \mathbb{N}_0$ einen natürlichen Isomorphismus von G_K-Moduln

$$\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong H^i(G_K, V).$$

2.2 Galoiskohomologie endlich erzeugter Darstellungen beschrieben durch $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu erklären, wie man aus der Kohomologie für Objekte aus $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ die Kohomologie für Objekte aus $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ erhält. Sei $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Dann ist $V = \varprojlim V/\pi^n_{\mathbb{Q}_p} V$ und $V_n := V/\pi^n_{\mathbb{Q}_p} V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Die kanonischen Übergangsabbildungen werden mit τ^m_n bezeichnet.

Lemma 2.16.
Sei R ein Ring, G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe und (N_j, f_{ij}) ein projektives System von $R[G]$-Moduln. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varprojlim(N_j^H) \cong \left(\varprojlim N_j\right)^H .$$

Beweis.
Sei $(n_j)_j \in \varprojlim(N_j^H)$. Dann gilt $h(n_j) = n_j$ für alle j und $h \in H$. Wegen $f_{ij}(n_i) = n_j$ für $j \leq i$ ist dann auch $(n_j) \in \varprojlim N_j$ und wegen $h((n_j)_j) = (h(n_j))_j = (n_j)_j$ folgt dann $(n_j) \in \left(\varprojlim N_j\right)^H$.
Sei nun $(n_j)_j \in \left(\varprojlim N_j\right)^H$. Dann ist $(n_j)_j = h((n_j)_j) = (h(n_j))_j$ und daher $n_j \in N_j^H$. Folglich ist $(n_j)_j \in \varprojlim(N_j)^H$. □

Lemma 2.17.
Es gilt $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \cong \varprojlim \left(V_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right)^{H_K}$.

Beweis.
Nach Lemma 2.16 genügt es zu zeigen, dass $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \cong \varprojlim \left(V_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right)$ gilt, wobei die Übergangsabbildungen durch $\tau_n^m \otimes \mathrm{id}$ für $n \leq m$ gegeben sind. Da $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ nach Konstruktion $\pi_{\mathbb{Q}_p}$-adisch vollständig ist, gilt $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \cong \varprojlim \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ und da V ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_p$-Modul ist, ist $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$-Modul. Daher ist $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ auch vollständig bezüglich der $\pi_{\mathbb{Q}_p}$-adischen Topologie. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
V_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} &= V/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \\
&\cong V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \\
&\cong \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}} \left(\mathbb{Z}_p/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right) \\
&\cong \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \\
&\cong \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right)/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right).
\end{aligned}$$

Da $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ vollständig bezüglich der $\pi_{\mathbb{Q}_p}$-adischen Topologie ist, gilt

$$V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \cong \varprojlim_n \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right)/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n \left(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right)$$

und daher auch $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \cong \varprojlim_n V_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ wie behauptet. □

Lemma 2.18.
Sei $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$. Dann sind $\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M)$ und $\varprojlim \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(M/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n M)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ isomorph als $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}[G_K]$-Moduln.

Beweis.
Mit $M_n := M/\pi_{\mathbb{Q}_p}^n M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ ist $M \cong \varprojlim M_n$, da M vollständig bezüglich der $\pi_{\mathbb{Q}_p}$-adischen Topologie ist, und die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "{(\varphi_M-1,\gamma-1)}"] \arrow[d] & M_{n+1} \oplus M_{n+1} \arrow[r, "{(\gamma-1)\mathrm{pr}_1-(\varphi_M-1)\mathrm{pr}_2}"] \arrow[d] & M_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_n \arrow[r, "{(\varphi_M-1,\gamma-1)}"] & M_n \oplus M_n \arrow[r, "{(\gamma-1)\mathrm{pr}_1-(\varphi_M-1)\mathrm{pr}_2}"] & M_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sind kommutativ, wobei sämtliche Pfeile stetige $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}[G_K]$-Modulhomomorphismen darstellen. Um Verwirrungen vorzubeugen, bezeichne nun α_n obigen Homomorphismus $M_n \to M_n \oplus M_n$ und β_n obigen Homomorphismus $M_n \oplus M_n \to M_n$, sowie α und β die jeweiligen Homomorphismen bezüglich M. Da M nach Proposition 1.35 als endlich erzeugter $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Modul ein pseudokompakter Hausdorffraum ist, sind auch M_n pseudokompakte Hausdorffräume und somit ist $\varprojlim$ ein exakter Funktor. Folglich gilt $\mathrm{im}(\alpha) \cong \varprojlim \mathrm{im}(\alpha_n)$ und ebenso für β. Weiterhin gilt stets $\ker(\alpha) \cong \varprojlim \ker(\alpha_n)$ und ebenso für β. Es bleibt also noch $\varprojlim(\ker(\beta_n)/\mathrm{im}(\alpha_n)) \cong \ker(\beta)/\mathrm{im}(\alpha)$ zu zeigen. Für $m \in \mathbb{N}$ ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}(\alpha_m) \longrightarrow \ker(\beta_m) \longrightarrow \ker(\beta_m)/\mathrm{im}(\alpha_m) \longrightarrow 0$$

exakt und für $m \leq m'$ kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{im}(\alpha_{m'}) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\beta_{m'}) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\beta_{m'})/\mathrm{im}(\alpha_{m'}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{im}(\alpha_m) \arrow[r] & \ker(\beta_m) \arrow[r] & \ker(\beta_m)/\mathrm{im}(\alpha_m) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Da $\varprojlim$ im vorliegenden Fall ein exakter Funktor ist, ist also auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim \mathrm{im}(\alpha_n) \longrightarrow \varprojlim \ker(\beta_n) \longrightarrow \varprojlim (\ker(\beta_n)/\mathrm{im}(\alpha_n)) \longrightarrow 0$$

exakt. Es gilt also $\varprojlim(\ker(\beta_n)/\mathrm{im}(\alpha_n)) \cong \ker(\beta)/\mathrm{im}(\alpha)$, wie behauptet. □

Satz 2.19.
Sei $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Dann gibt es einen (kanonischen) Isomorphismus von G_K-Moduln

$$H^i_{\mathrm{cts}}(G_K, V) \cong \varprojlim H^i(G_K, V_n).$$

Beweis.
Da alle V_n endlich sind und da die Operation von G_K bezüglich der diskreten Topologie auf V_n stetig ist, gibt es nach [NSW08, (2.7.5) Theorem, S. 141] eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \to \varprojlim{}^1 H^{i-1}(G_K, V_n) \to H^i_{\mathrm{cts}}(G_K, V) \to \varprojlim H^i(G_K, V_n) \to 0,$$

wobei $\varprojlim^1$ den ersten von $\varprojlim$ rechtsabgeleiteten Funktor bezeichnet. Nach [Tat62, Theorem 2.1, S. 289] sind die abelschen Gruppen $H^i(G_K, V_n)$ allesamt endlich, da der Restklassenkörper $\mathbb{F}_p$ endlich ist. Nach [NSW08, S. 138] hat dann aber das System $(H^i(G_K, V_n))_n$ die Mittag-Leffler-Eigenschaft, was nach [NSW08, (2.7.4) Proposition S. 140] impliziert, dass $\varprojlim^1 H^i(G_K, V_n) = 0$ gilt. Folglich erhält man obigen Isomorphismus. □

Satz 2.20.
Sei $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Dann gibt es einen (kanonischen) Isomorphismus von G_K-Moduln

$$\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong H^i_{\mathrm{cts}}(G_K, V).$$

Beweis.
Nach Satz 2.15 gilt $\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V_n) \cong H^i(G_K, V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält also auch einen Isomorphismus der projektiven Limiten, d.h. es ist $\varprojlim \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V_n) \cong \varprojlim H^i(G_K, V_n)$. Nach Lemma 2.17 und Lemma 2.18 gilt $\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) = \varprojlim \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V_n)$ und nach Satz 2.19 ist $H^i_{\mathrm{cts}}(G_K, V) \cong \varprojlim H^i(G_K, V_n)$. Insgesamt gilt also

$$\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong \varprojlim \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V_n) \cong \varprojlim H^i(G_K, V_n) \cong H^i_{\mathrm{cts}}(G_K, V),$$

was gerade der Behauptung entspricht. □

2.3 Galoiskohomologie von Darstellungen beschrieben durch $\psi_{\mathbb{Q}_p}$

Wie in den beiden Abschnitten zuvor definiere man nun für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ (bzw. $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$) den Komplex $\mathrm{C}_{\psi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(V)$

$$0 \longrightarrow M(V) \xrightarrow{(\psi_M - 1, \gamma - 1)} M(V) \oplus M(V) \xrightarrow{(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\psi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2} M(V) \longrightarrow 0.$$

Dabei ist wieder $M(V) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ und für $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ definiere man den Komplex $\mathrm{C}_{\psi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(M)$ analog. Es wird nun gezeigt, dass dieser Komplex für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ quasiisomorph zu dem Komplex $\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(V)$ ist, wodurch man einen Isomorphismus der jeweiligen Kohomologiegruppen erhält. Durch Übergang zum projektiven Limes gilt dies dann auch für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$.
Konkret wird nun gezeigt, dass der wie folgt definierte Morphismus von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M(V) & \xrightarrow{(\varphi_M - 1, \gamma - 1)} & M(V) \oplus M(V) & \xrightarrow{(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\varphi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2} & M(V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \big\downarrow{\scriptstyle -\psi_M \oplus \mathrm{id}} & & \big\downarrow{\scriptstyle -\psi_M} & & \\
0 & \longrightarrow & M(V) & \xrightarrow{(\psi_M - 1, \gamma - 1)} & M(V) \oplus M(V) & \xrightarrow{(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\psi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2} & M(V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ ein Quasiisomorphismus ist, wobei wieder $M(V) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ zu verstehen ist. Dass dies tatsächlich ein Morphismus von Komplexen ist, liegt daran, dass ψ_M mit Γ_K kommutiert und dass $\psi_M \circ \varphi_M = \mathrm{id}$ gilt. Um nun zu zeigen, dass dies ein Quasiisomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass die Kohomologie der zugehörigen Kern- und Kokernkomplexe gleich Null ist. Da ψ_M nach Korollar 1.51 aber surjektiv ist, verschwindet bereits der Kokernkomplex. Der zugehörige Kernkomplex ist:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker(\psi_M) \xrightarrow{\gamma - 1} \ker(\psi_M) \longrightarrow 0.$$

Um zu zeigen, dass die Kohomologie dieses Kernkomplexes verschwindet, genügt es also zu zeigen, dass $\gamma - 1$ auf $\ker(\psi_M)$ ein Isomorphismus ist. Dies soll im Folgenden geschehen.

Proposition und Definition 2.21.
Sei $\mathcal{K}$ ein vollständiger, diskret bewerteter Körper und $\mathcal{L}|\mathcal{K}$ eine algebraische und separable Körpererweiterung. Bezeichnet $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}$ die Menge der endlichen Erweiterungen von $\mathcal{K}$, die in $\mathcal{L}$ enthalten sind, so bildet die Familie $(E^\times)_{E\in\mathcal{Z}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}}$ bezüglich der Normabbildungen ein projektives System und man setzt

$$\mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})^\times := \varprojlim_{E\in\mathcal{Z}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}} E^\times.$$

Dann heißt $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L}) := \mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})^\times \cup \{0\}$ der **Normenkörper von** *$\mathcal{L}|\mathcal{K}$.*
Dabei ist die Addition auf $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})$ wie folgt definiert:
Für $\alpha = (\alpha_E)$, $\beta = (\beta_E) \in \mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})$ und $E \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}$ konvergiert die Folge $(\mathrm{N}_{E'|E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'}))_{E\subseteq E'\in\mathcal{Z}_{\mathcal{L}|\mathcal{K}}}$ in E. Sei der Grenzwert dieser Folge mit η_E bezeichnet. Dann setzt man

$$\alpha + \beta := (\eta_E)_E \in \mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L}).$$

Beweis. [Win83, 2.1, S. 65f] □

Für eine ausführliche Beschreibung von Normenkörpern sei auf [Win83] verwiesen. Ebenso wird der folgende Satz eine wichtige Rolle spielen, auf dessen Beweis lediglich verwiesen wird.

Satz 2.22.
Sei $\mathcal{K}$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, k sein Restklassenkörper und $\mathcal{K}_\infty|\mathcal{K}$ eine rein verzweigte, galoissche und prozyklische Körpererweiterung mit Galoisgruppe Γ. Sei weiterhin $\gamma \in \Gamma$ ein topologischer Erzeuger, $\mathcal{X}$ der Normenkörper von $\mathcal{K}_\infty|\mathcal{K}$, $\pi_{\mathcal{X}}$ ein uniformisierendes Element von $\mathcal{X}$, $\omega = \gamma(\pi_{\mathcal{X}})/\pi_{\mathcal{X}}$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Dann gilt:

1. *Auf $\mathcal{X}$ gibt es genau eine $k[\![\gamma - 1]\!]$-lineare und stetige Operation*

$$k[\![\gamma - 1]\!] \times \mathcal{X} \to \mathcal{X},\ (\lambda, x) \mapsto \lambda * x,$$

   sodass für $\lambda \in k$ und $x \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\lambda * x = \lambda x,\ \ \gamma * x = \omega^\alpha \gamma(x)$$

   Ist p ein Teiler von α so gilt weiterhin:

2. *$\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X})$ ist ein $k[\![\gamma - 1]\!]$-Untermodul von $\mathcal{X}$ und $\gamma - 1$ ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{X}/\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X})$.*

Beweis. [Her98, Théorème 5.1, S.593-599] □

Bemerkung und Definition 2.23.
Nach der Annahme zu Beginn dieses Kapitels ist Γ_K stets prozyklisch und wegen $\Gamma_K \subseteq \Gamma_{\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{Z}_p^\times \cong \mu(\mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p$ gibt es sogar Untergruppen $\Delta_K, \Gamma_{1,K} \subseteq \Gamma_K$, sodass Δ_K isomorph zu einer Untergruppe von $\mu(\mathbb{Z}_p)$ und $\Gamma_{1,K}$ isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ ist und $\Gamma_K = \Delta_K \times \Gamma_{1,K}$ gilt. Für $p = 2$ gilt dann bereits $\Gamma_K = \Gamma_{1,K}$.
Sei nun $K_{1,\infty} := (K_\infty)^{\Delta_K}$. Dann ist die Erweiterung $K_{1,\infty}|K$ galoissch mit einer zu $\Gamma_{1,K}$ isomorphen Galoisgruppe. Sei weiterhin $H_{1,K} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|K_{1,\infty})$, $\mathcal{X}_K := \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}(K_{1,\infty})$

und $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}}$ ein separabler Abschluss von $\mathcal{X}_K$. Nach [Win83, Théorème 2.1.3., S. 65f] ist $\mathcal{X}_K$ ein Körper der Charakteristik p, der ein uniformisierendes Element besitzt und dessen Restklassenkörper isomorph zu k_K ist. Weiterhin ist nach [Win83, 2.3.3.2, S. 70f] $\mathcal{X}_K$ isomorph zu $k_K((X))$ und nach [Win83, Corollaire 3.2.3, S. 72] ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}}|\mathcal{X}_K)$ isomorph zur Gruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|K_{1,\infty}) = H_{1,K}$. Insbesondere ist also der Frobenius $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ auch auf $\mathcal{X}_K$ ein wohldefinierter Körperhomomorphismus. Obiges Resultat soll im Folgenden auf $\mathcal{K} = K$ und $\mathcal{K}_\infty = K_{1,\infty}$ angewandt werden. Sei weiterhin $\gamma_1 := \gamma^{p-1}$ für $p \neq 2$ und $\gamma_1 = \gamma$ für $p = 2$ ein topologischer Erzeuger von $\Gamma_{1,K}$.

Satz 2.24.
Sei $M \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}$. Dann ist $\gamma_1 - 1$ ein Isomorphismus auf $\ker(\psi_M) \subseteq M$.

Beweis.
Man setze $V = V(M)$. Zunächst soll gezeigt werden, dass K durch eine endlich galoissche, unverzweigte Erweiterung $K \subseteq K' \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p}$ ersetzt werden kann.
Sei also $K'|K$ endlich galoissch und unverzweigt. Dann ist $\pi_{\mathbb{Q}_p}$ auch ein uniformisierendes Element von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K'}}$ und es ist $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K'}} = \mathcal{O}_{K'} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ und $K'_\infty = K' K_\infty$. Insbesondere ist also mit $K_\infty|K$ auch $K'_\infty|K'$ rein verzweigt. Weiterhin ist dann $M' := \mathcal{O}_{K'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{K'}$-Torsionsmodul, auf welchem ein stetiger Operator $\varphi_{M'}$ durch $\varphi_{\mathbb{Q}_p} \otimes \varphi_M$ definiert ist. Da $K'|K$ unverzweigt ist, ist $\Gamma_K = \Gamma_{K'} = \mathrm{Gal}(K'_\infty|K')$, d.h. es ist $M' \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K'}},\mathrm{tor}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_{K'}}$. Sei also angenommen, dass $\gamma_1 - 1$ ein Isomorphismus auf $\ker(\psi_{M'})$ ist. Nach Obigem ist $\ker(\psi_{M'}) = \mathcal{O}_{K'} \otimes_{\mathcal{O}_K} \ker(\psi_M)$ und γ_1 ist ein Endomorphismus von $\ker(\psi_M)$. Folglich ist auch $(\gamma_1 - 1)^{-1} = \sum \gamma_1^i$ ein Endomorphismus von $\ker(\psi_M)$ und daher ist $\gamma_1 - 1$ auch ein Isomorphismus auf $\ker(\psi_M)$.
K darf also durch eine endlich galoissche, unverzweigte Erweiterung ersetzt werden.

Als nächstes soll gezeigt werden, dass angenommen werden kann, dass M einfach ist.
Ist M nicht einfach, so gibt es einen echten, nichttrivialen Untermodul $M' \subseteq M$, mit $M' \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}$ und einen nichttrivialen Modul $M'' \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}$, sodass die Sequenz

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

exakt ist. Da $\psi_{M'}$ surjektiv auf M' ist, erhält man hieraus mithilfe des Schlangenlemmas die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker(\psi_{M'}) \to \ker(\psi_M) \to \ker(\psi_{M''}) \to 0.$$

Ist nun $\gamma_1 - 1$ ein Isomorphismus auf $\ker(\psi_{M'})$ und $\ker(\psi_{M''})$, so ist $\gamma_1 - 1$ nach dem Fünferlemma auch ein Isomorphismus auf $\ker(\psi_M)$. Per Induktion nach der Länge kann also angenommen werden, dass M einfach ist. Insbesondere kann angenommen werden, dass $\pi_{\mathbb{Q}_p} M = pM = 0$ gilt. Denn anderenfalls gibt es einen echten, nichttrivialen Untermodul $M' = \{m \in M | \; \pi_{\mathbb{Q}_p} M = 0\}$, der stabil unter φ_M und Γ_K ist, da φ_M und Γ_K trivial auf $\pi_{\mathbb{Q}_p}$ operieren. Insbesondere ist dann V ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.

Nun zum Beweis der Aussage für den Fall, dass M einfach ist.
Sei G_V der Kern der Operation von G_K auf V, $T := (\overline{\mathbb{Q}_p})^{G_V}$, $d_V := \dim_{\mathbb{F}_p}(V)$ und $(e_1, \dots, e_{d_V})$ eine $\mathbb{F}_p$-Basis von V. Da K durch eine endliche, galoissche und unverzweigte Erweiterung ersetzt werden kann, kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass die Erweiterungen $K_{1,\infty}|K$ und $T|K$ rein verzweigt sind. Die Erweiterung $T|\,\mathbb{Q}_p$ ist galoissch, da $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|T) = G_V$ ein Normalteiler von $G_{\mathbb{Q}_p}$ ist und sie ist endlich, denn V ist endlich und daher auch die zugehörige Automorphismengruppe. Da weiterhin G_V der Kern der Operation ist, ist mit $J := G_K/G_V$ der Homomorphismus $J \to \mathrm{Aut}(V)$ injektiv. Im Folgenden bezeichne m die Ordnung von J. Da nach Annahme die Erweiterung $T|K$ rein verzweigt ist, sind die Restklassenkörper k_T und k_K von T und K gleich, was bedeutet, dass $J = \mathrm{Gal}(T|K)$ gleich ihrer Trägheitsgruppe ist. Nach [Ser79, Corollary 4, S.68] ist J dann ein semidirektes Produkt aus einer zyklischen Gruppe J', deren Ordnung prim zu p ist und einer normalen Untergruppen P von p-Potenzordnung. Da V nach Annahme einfach und somit ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist, ist V auch eine endliche p-Gruppe. Wegen $J = G_K/G_V$ reduziert sich die Operation von G_K auf V zu einer Operation von J auf V. Auf V^P operiert J (bzw. G_K) ebenfalls, denn sei $j \in J$, und $x \in V^P$. Dann ist $j(x)$ fix unter jPj^{-1}. Da P aber normal in J ist, ist $jPj^{-1} = P$, also ist $j(x) \in V^P$. Somit ist V^P stabil unter der Operation von J (bzw. G_K) und daher ein Untermodul von V in der Kategorie $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Nach [Ser79, Lemma 2, S. 138] ist aber V^P nichttrivial und da V einfach ist, kann folglich $P = 0$, also $J = J'$ angenommen werden. Also ist J eine zyklische Gruppe, deren Ordnung m prim zu p ist. Da $\Gamma_{1,K} = \mathrm{Gal}(K_{1,\infty}|K)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ ist, ist dann auch $T \cap K_{1,\infty} = K$. Insbesondere ist daher $G_V H_{1,K} = G_K$. Sei $\mathcal{X}_T := (\mathcal{X}^{\mathrm{sep}}_{\mathbb{Q}_p})^{G_V \cap H_{1,K}}$. Dann ist $\mathcal{X}_T|\mathcal{X}_K$ (endlich) galoissch und die Galoisgruppe ist isomorph zu $H_{1,K}/(H_{1,K} \cap G_V)$. Wegen $G_V H_{1,K} = G_K$ ist $J = \mathrm{Gal}(\mathcal{X}_T|\mathcal{X}_K)$. Da $T|L$ rein verzweigt ist, ist auch $\mathcal{X}_T|\mathcal{X}_K$ rein verzweigt, denn wie schon in Bemerkung 2.23 angemerkt wurde, ist der Restklassenkörper von $\mathcal{X}_K$ (bzw. $\mathcal{X}_T$) isomorph zu k_K (bzw. k_T) und es ist $k_K = k_T$. Nach [Ser79, Corollary 1, Corollary 3, S. 67] enthält der Restklassenkörper von $\mathcal{X}_T$ den Körper $F := \mathbb{F}_p(\mu_m)$ der m-ten Einheitswurzeln und es gibt ein uniformisierendes Element $\pi_{\mathcal{X}_T}$ von $\mathcal{X}_T$, sodass $\pi^m_{\mathcal{X}_T} := \pi_{\mathcal{X}_K}$ ein uniformisierendes Element von $\mathcal{X}_K$ ist und sodass durch

$$\eta_0\colon J \to F^\times,\ g \mapsto \frac{g(\pi_{\mathcal{X}_T})}{\pi_{\mathcal{X}_T}}$$

ein injektiver Homomorphismus definiert wird, welcher J mit den m-ten Einheitswurzeln in F identifiziert. Dieser Homomorphismus ist auch Erzeuger der Charaktergruppe, also der Gruppe der Homomorphismen von J nach $F^\times$. Durch η_0 wird insbesondere die Galoisoperation von J auf $\mathcal{X}_T$ beschrieben.
Da V weiterhin einfach als Darstellung von G_K bzw. J und ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist, ist jeder von Null verschiedene $\mathbb{F}_p[J]$-lineare Endomorphismus von V bereits ein Automorphismus, d.h. $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p[J]}(V)$ ist ein endlicher Schiefkörper und daher nach dem kleinen Satz von Wedderburn ein Körper der Charakteristik p (vgl. [Ker04, Satz 9.5.2, S. 356f]). Da J zyklisch, also insbesondere abelsch ist, ist der Ring $\mathbb{F}_p[J]$ kommutativ. Daher ist dann $v \mapsto av$ für $a \in \mathbb{F}_p[J]$ ein $\mathbb{F}_p[J]$-linearer Endomorphismus von V. Man kann also $\mathbb{F}_p[J]$ als Unterring von $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p[J]}$ auffassen. Da V aber einfach als $\mathbb{F}_p[J]$-Modul ist, ist V auch einfach als $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p[J]}$-Vektorraum und damit von Dimension 1.

Weiterhin ist das Polynom $X^m - 1$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p[J]}(V)[X]$ separabel und zerfällt bereits in Linearfaktoren, da $J \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{F}_p[J]}(V)$ gerade den m-ten Einheitswurzeln entspricht. Daher gibt es eine Einbettung von Körpern $F \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}_p[J]}(V)$. Es folgt nun, dass die Operation von J auf V durch Multiplikation mit einer m-ten Einheitswurzel gegeben ist. Es gibt also einen Gruppenhomomorphismus $\eta\colon J \to F^\times$, sodass $g \cdot x = \eta(g)x$ für alle $g \in J$ und $x \in V$ gilt. Durch dieselbe Vorschrift operiert J dann aber auch auf F und da F ein in V enthaltener $\mathbb{F}_p$-Vektorraum und V einfach als Darstellung von J ist, ergibt sich, dass F mit V bzw. $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p[J]}(V)$ übereinstimmt. Im Folgenden wird daher η stets als Homomorphismus mit Bild in V aufgefasst.

Weiterhin ist $\ker(\psi_M)$ isomorph zu $M/\varphi_M(M)$, weshalb es genügt, die Aussage für letzteres Objekt zu zeigen. Da der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ nach [KR09, Lemma 1.4, S. 444] ein separabler Abschluss von $\mathbb{F}_p((u))$ ist, ist dieser isomorph zu $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}}$ und weil V ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist, ist $V = \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{F}_p} V$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} M &= (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{H_K} = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{H_K} \\ &= (\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{H_K} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}})^{H_K}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist dabei wie folgt zu verstehen: Zu der $\mathbb{F}_p$-Basis $(e_1, \dots, e_{d_V})$ von V und zu $x \in \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ gibt es eindeutige Elemente $x_i \in \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}}$ mit $x = \sum x_i \otimes e_i$. Dann ist

$$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}}),\ x = \sum x_i \otimes e_i \mapsto \alpha_x := [e_i \mapsto x_i]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von $\mathbb{F}_p$-Vektorräumen. Es ist $M^{\Delta_K} \subseteq M$ ein $(\varphi_{\mathbb{Q}_p}, \Gamma_K)$-Untermodul und da M einfach ist, ist $M^{\Delta_K} = 0$ oder $M^{\Delta_K} = M$. Auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}})$ operiert $H_{1,K}$ durch $(g \cdot \alpha)(v) := g(\alpha(g^{-1}(v)))$. Der Fixmodul unter $H_{1,K}$ besteht dann aber gerade aus denjenigen Elementen, die $H_{1,K}$-linear sind. Damit ist

$$\begin{aligned} M^{\Delta_K} &= (\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}})^{H_K})^{\Delta_K} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}})^{H_{1,K}} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_T) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[J]}(V, \mathcal{X}_T). \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichheiten sollen noch erklärt werden. Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}})$ und $h \in G_V \cap H_{1,K}$. Für $v \in V$ gilt dann:

$$h(\alpha(v)) = \alpha(hv) \overset{h \in G_V}{=} \alpha(v).$$

Also ist $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq (\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}})^{G_V \cap H_{1,K}} = \mathcal{X}_T$, was die Gültigkeit der vorletzten Gleichheit erklärt. Die $\mathbb{F}_p[J]$-linearen Homomorphismen $V \to \mathcal{X}_T$ sind bereits $\mathbb{F}_p[H_{1,K}]$-linear, da $G_V \cap H_{1,K}$ trivial auf V und $\mathcal{X}_T$ operiert, also gilt auch die letzte Gleichheit.
Im Folgenden soll eine Basis von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[J]}(V, \mathcal{X}_T)$ als $\mathcal{X}_K$-Vektorraum bestimmt werden, wodurch dann auch klar ist, dass $M^{\Delta_K} = M$ gilt. Die Familie $(\alpha_i)_i$ mit $\alpha_i(e_j) := \delta_{ij}$ ist eine Basis von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathcal{X}_T)$ als $\mathcal{X}_T$-Vektorraum. Also ist dies ein Vektorraum von Dimension d_V. Weiterhin gibt es einen kanonischen, injektiven und $\mathcal{X}_T$-linearen Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_T) \otimes_{\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}} \mathcal{X}_T \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathcal{X}_T), \sum \beta_i \otimes \lambda_i \mapsto \sum \lambda_i \beta_i.$$

Folglich ist die Dimension des $\mathcal{X}_K$-Vektorraumes $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_T)$ kleiner oder gleich d_V. Die Galoisgruppe von F über $\mathbb{F}_p$ (bzw. von V über $\mathbb{F}_p$) besitzt genau d_V Elemente. Sei Θ die Menge der $\mathbb{F}_p$-linearen Körperisomorphismen $V \cong F$. Dann hat Θ auch genau d_V Elemente. Da η_0 ein Erzeuger der Charaktergruppe von J über F ist, gibt es daher zu $\vartheta \in \Theta$ eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $0 \leq a_\vartheta < m$, sodass $\vartheta \circ \eta = \eta_0^{a_\vartheta}$ gilt. Man definiere für $\vartheta \in \Theta$ nun

$$e_\vartheta \colon V \to \mathcal{X}_T,\ v \mapsto \vartheta(v)\pi_{\mathcal{X}_T}^{a_\vartheta}.$$

Für $g \in J$ und $v \in V$ gilt dann

$$e_\vartheta(gv) = \vartheta(\eta(g)v)\pi_{\mathcal{X}_T}^{a_\vartheta} = \eta_0^{a_\vartheta}(g)\vartheta(v)\pi_{\mathcal{X}_T}^{a_\vartheta} = \vartheta(v)g(\pi_{\mathcal{X}_T}^{a_\vartheta}) = g(\vartheta(v)\pi_{\mathcal{X}_T}) = g(e_\vartheta(v)).$$

Man beachte dabei, dass g auf v als Darstellung und auf $\vartheta(v)\pi_{\mathcal{X}_T}^{a_\vartheta}$ als Galoisautomorphismus operiert. Daher ist $0 \neq e_\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_T)$ und somit ist $M = M^{\Delta_K}$. Weiterhin ist die Familie $(e_\vartheta)_\vartheta$ über $\mathcal{X}_K$ linear unabhängig, da $(1, \pi_{\mathcal{X}_T}, \pi_{\mathcal{X}_T}^2, \ldots, \pi_{\mathcal{X}_T}^{m-1})$ über $\mathcal{X}_K$ linear unabhängig ist. Folglich hat $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_T)$ Dimension d_V über $\mathcal{X}_K$. Man setze nun $e'_\vartheta := \varphi_{\mathbb{Q}_p} \circ e_\vartheta$, d.h. für $v \in V$ ist $e'_\vartheta(v) = \vartheta(v^p)\pi_{\mathcal{X}_T}^{pa_\vartheta}$. Da m und p teilerfremd sind, ist dann auch $(e'_\vartheta)_\vartheta$ eine $\mathcal{X}_K$-Basis von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[H_{1,K}]}(V, \mathcal{X}_T)$. Man hat also die beiden folgenden Isomorphismen von $\mathcal{X}_K$-Vektorräumen:

$$\xi \colon (\mathcal{X}_K)^{d_V} \to M,\ (x_\vartheta)_\vartheta \mapsto \sum_{\vartheta \in \Theta} x_\vartheta e_\vartheta,$$
$$\xi' \colon (\mathcal{X}_K)^{d_V} \to M,\ (x_\vartheta)_\vartheta \mapsto \sum_{\vartheta \in \Theta} x_\vartheta e'_\vartheta.$$

Sei nun $\omega \in \mathcal{X}_K$, sodass $\gamma_1(\pi_{\mathcal{X}_K}) = \omega\pi_{\mathcal{X}_K}$ gilt. Wegen $\pi_{\mathcal{X}_T}^m = \pi_{\mathcal{X}_K}$ gibt es dann ein $\omega_1 \in \mathcal{X}_T$, mit $\omega_1^m = \omega$ und $\gamma_1(\pi_{\mathcal{X}_T}) = \omega_1\pi_{\mathcal{X}_T}$. Man setze nun $\alpha_\vartheta := pa_\vartheta/m$. Da m teilerfremd zu p ist, ist dann $\alpha_\vartheta \in \mathbb{Z}_p$ und daher gibt es nach Satz 2.22 eine $k_K[\![\gamma_1 - 1]\!]$-lineare Operation auf $\mathcal{X}_K$ mit $\gamma_1 * x = \omega^{\alpha_\vartheta}\gamma_1(x)$ und $\gamma_1 - 1$ ist ein $k_K[\![\gamma_1 - 1]\!]$-linearer Isomorphismus auf $\mathcal{X}_K/\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}_K)$. Im Folgenden wird $\mathcal{X}_K$ mit dieser neuen Operation mit $\mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta}$ bezeichnet. Somit lässt sich ξ' auch als Isomorphismus von $k_K[\![\gamma_1 - 1]\!]$-Moduln auffassen

$$\xi' \colon \bigoplus_{\vartheta \in \Theta} \mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta} \to M,$$

denn für $(x_\vartheta)_\vartheta \in \bigoplus \mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\xi'(\gamma_1 * (x_\vartheta)_\vartheta) &= \xi'((\omega^{\alpha_\vartheta}\gamma_1(x_\vartheta))_\vartheta) = \sum_{\vartheta \in \Theta} \omega^{\alpha_\vartheta}\gamma_1(x_\vartheta)e'_\vartheta \\
&= \sum_{\vartheta \in \Theta} \gamma_1(x_\vartheta)\omega_1^{pa_\vartheta}e'_\vartheta = \sum_{\vartheta \in \Theta} \gamma_1(x_\vartheta)\gamma_1 \circ e'_\vartheta \\
&= \gamma_1\left(\sum_{\vartheta \in \Theta} x_\vartheta e'_\vartheta\right) = \gamma_1(\xi'((x_\vartheta)_\vartheta)).
\end{aligned}$$

Dies induziert dann aber auch einen $k_K[\![\gamma_1 - 1]\!]$-linearen Isomorphismus

$$\bigoplus_{\vartheta \in \Theta} \mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta}/\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta}) \to M/\varphi_M(M).$$

Nach Satz 2.22 ist $\gamma_1 - 1$ ein Isomorphismus auf $\mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta}/\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta})$ und somit auch auf $\bigoplus \mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta}/\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}_{K,\alpha_\vartheta})$. Daher ist $\gamma_1 - 1$ auch ein Isomorphismus auf $M/\varphi_M(M)$, womit der Beweis beendet ist. $\square$

Korollar 2.25.
Sei $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$. Dann ist $\gamma - 1$ ein Isomorphismus auf $\ker(\psi_M) \subseteq M$.

Beweis.
Im Fall $p = 2$ ist nichts zu zeigen. Ist $p \neq 2$, so ist $\gamma^{p-1} = \gamma_1$. Somit erhält man

$$(\gamma - 1)\left(\sum_{i=0}^{p-1} \gamma^i\right)(\gamma_1 - 1)^{-1} = (\gamma_1 - 1)(\gamma_1 - 1)^{-1} = 1.$$

Also ist auch $\gamma - 1$ ein Isomorphismus auf $\ker(\psi_M)$. $\square$

Ist $\mathcal{H}^i_{\psi_{\mathbb{Q}_p}}(V) := H^i(\mathrm{C}_{\psi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(V))$, so wurde, wie zuvor bereits erklärt, insgesamt der nachfolgende Satz bewiesen.

Satz 2.26.
Sei $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg},\mathrm{tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Dann ist der Morphismus von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M(V) \arrow[r, "(\varphi_M - 1, \gamma - 1)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M(V) \oplus M(V) \arrow[r, "(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\varphi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "-\psi_M \oplus \mathrm{id}"] & M(V) \arrow[r] \arrow[d, "-\psi_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M(V) \arrow[r, "(\psi_M - 1, \gamma - 1)"] & M(V) \oplus M(V) \arrow[r, "(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\psi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2"] & M(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein Quasiisomorphismus. Insbesondere gibt es also einen Isomorphismus von G_K-Moduln $\mathcal{H}^i_{\psi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Satz 2.27.
Sei und $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$. Dann gibt es einen Isomorphismus von G_K-Moduln

$$\mathcal{H}^i_{\psi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong H^i_{\mathrm{cts}}(G_K, V).$$

Beweis.
Wie in Lemma 2.18 zeigt man, dass $\mathcal{H}^i_{\psi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong \varprojlim \mathcal{H}^i_{\psi_{\mathbb{Q}_p}}(V/\pi^n_{\mathbb{Q}_p} V)$ gilt, woraus sich dann mit Satz 2.20 die Behauptung ergibt. $\square$

2.4 Galoiskohomologie von Darstellungen beschrieben durch ψ nach [SV15]

Wie in [SV15] ausgeführt, ist für $\pi_{\mathbb{Q}_p} = \varepsilon p$ in der Anwendung der Operator $1/\varepsilon\ \psi_{\mathbb{Q}_p}$ von großer Bedeutung. Dieser Operator aus [SV15] wird im Folgenden mit $\Psi_{\mathbb{Q}_p}$ bezeichnet und mit Ψ_M der zugehörige Operator auf $M \in \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$. Insbesondere gilt dann also $\Psi_{\mathbb{Q}_p} \circ \varphi_{\mathbb{Q}_p} = 1/\varepsilon\,\mathrm{id}$. Das Ziel ist nun, mit diesem neuen $\Psi_{\mathbb{Q}_p}$ auch die Kohomologie von $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$ zu berechnen. Dazu wird ein ähnlicher Komplex wie in Satz 2.26 betrachtet und es wird gezeigt, dass zwischen diesem Komplex und dem bereits zuvor definierten Komplex $\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\gamma}(V)$ ein Morphismus von Komplexen vorliegt.

Der Charakter $\chi_{\mathbb{Q}_p}$ aus Proposition 1.8 lässt sich auch als Charakter $G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}_p^\times$ betrachten, was im Folgenden geschehen soll. Sei weiterhin χ_K die Einschränkung auf G_K, χ_{cyc} der zyklotomische Charakter, $\tau_{\mathbb{Q}_p} := \chi_{\mathbb{Q}_p}/\chi_{\mathrm{cyc}}$ und τ_K die Einschränkung auf G_K.

Proposition 2.28.
Der Charakter $\tau_{\mathbb{Q}_p}$ ist unverzweigt.

Beweis. [Sti07, Prop 80, S. 67] □

Satz 2.29.
Sei W ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}_p$-Vektorraum mit einer stetigen Operation von $G_{\mathbb{Q}_p}$. Dann gibt es einen Isomorphismus von $\widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}$- Vektorräumen

$$\widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^{G_{\mathbb{Q}_p}} \cong W^{G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}}.$$

Dabei ist $G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}} \mid \mathbb{Q}_p)$.

Beweis. [Ser98, III Appendix, Theorem 1, S. III-31] □

Definition 2.30.
Ist N ein $\mathbb{Z}_p$-Modul mit einer stetigen Operation von G_K, so bezeichnet $N(\tau_K)$ den $\mathbb{Z}_p$-Modul mit der durch

$$g \cdot n = \tau_K(g)g(n)$$

definierten Operation, wobei $g(n)$ die ursprüngliche Operation darstellt.

Korollar 2.31.
Es gibt ein $a \in \widehat{\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}}^\times$ mit $g(a) = \tau(g)^{-1}a$ für alle $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$.

Beweis.
Man wende Satz 2.29 auf $W = \mathbb{C}_p(\tau_{\mathbb{Q}_p})$ an. Da $\tau_{\mathbb{Q}_p}$ nach Proposition 2.28 unverzweigt ist, gilt $\tau_{\mathbb{Q}_p}(g) = 1$ für alle $g \in G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}$. Somit ist $\mathbb{C}_p(\tau_{\mathbb{Q}_p})^{G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}} = \mathbb{C}_p^{G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}}(\tau_{\mathbb{Q}_p}) = \widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}(\tau_{\mathbb{Q}_p})$. Insbesondere ist also $\dim_{\widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}}(\widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}(\tau_{\mathbb{Q}_p})) = 1$ und nach Satz 2.29 ist somit auch $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{C}_p(\tau_{\mathbb{Q}_p})^{G_{\mathbb{Q}_p}}) = 1$. Folglich gibt es $0 \neq a' \in \mathbb{C}_p$ mit $g(a')\tau_{\mathbb{Q}_p}(g) = a'$ für alle $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$. Nach Satz 2.29 gilt aber bereits $a' \in \widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}$. Weiterhin gilt somit für $k \in \mathbb{Z}$ auch $g(p^k a')\tau_{\mathbb{Q}_p}(g) = p^k g(a')\tau_{\mathbb{Q}_p}(g) = p^k a'$ für alle $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$. Wählt man k so, dass $a := p^k a' \in \widehat{\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}}^\times$ gilt, so erfüllt dieses Element gerade die Bedingung. □

Sei von nun an $a \in \widehat{\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}}^{\times}$ mit $g(a) = \tau_{\mathbb{Q}_p}(g)^{-1}a$ für alle $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ fest gewählt. Insbesondere gilt $a \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}^{\times}$ und $g(a) = \tau_{\mathbb{Q}_p}(g)^{-1}a$ für alle $g \in G_K$. Sei $V \in \mathbf{Rep}_{G_K,\mathbb{Z}_p}^{(\mathrm{fg,tor})}$ und $(f_1, \ldots, f_n)$ eine $\mathbb{Z}_p$-Erzeugendensystem von V, d.h. es ist $V = \sum \mathbb{Z}_p\, f_i$. Versieht man dann $\mathbb{Z}_p$ mit der trivialen G_K-Operation, so ist $V(\tau_K) = \sum \mathbb{Z}_p(\tau_K) f_i$. Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ ein $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Erzeugendensystem von $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$. Man betrachte das Element $a \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\tau_K)$. Für $g \in G_K$ gilt dann

$$g \cdot a \otimes 1 = g(a) \otimes \tau(g)1 = \tau(g)^{-1}a \otimes \tau(g)1 = a \otimes 1.$$

Daher ist dann $(a \otimes 1)e_i \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(\tau_K))$ und somit ist

$$M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(\tau_K)) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}(a \otimes 1)e_i,$$

da a eine Einheit ist. Damit ist dann

$$M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) \to M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(\tau_K)), m \mapsto (a \otimes 1)m$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-Moduln. Dieser ist sogar G_K-linear, denn nach obiger Rechnung ist $g \cdot (a \otimes 1)m = (a \otimes 1)g(m)$ für $g \in G_K$.
Da die Erweiterung $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}} \,|\, \mathbb{Q}_p$ per Definition unverzweigt ist, ist die Galoisgruppe isomorph zur Galoisgruppe der Restklassenkörpererweiterung. Letztere wird vom Frobenius erzeugt, d.h. in $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}} \,|\, \mathbb{Q}_p)$ gibt es ein Element, welches dem Frobenius entspricht. Da $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ auf dem Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ ebenfalls nach Konstruktion dem Frobenius entspricht, gilt somit nach [Sti07, Prop. 80, S. 67]

$$\varphi_{\mathbb{Q}_p}(a \otimes 1) = \varphi_{\mathbb{Q}_p}(a) \otimes 1 = \mathrm{Frob}(a) \otimes 1 = \frac{1}{\varepsilon} a \otimes 1.$$

Da $\Psi_{\mathbb{Q}_p} = 1/\varepsilon\ \psi_{\mathbb{Q}_p}$ gilt, erhält man für $b, c \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ und $v \in V$ wie in Korollar 1.51

$$\mathrm{id} \otimes \Psi_{\mathbb{Q}_p}(v \otimes \varphi_{\mathbb{Q}_p}(b)c) = \frac{1}{\varepsilon}\, \mathrm{id} \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}(v \otimes \varphi_{\mathbb{Q}_p}(b)c) = b \cdot \frac{1}{\varepsilon}\, \mathrm{id} \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}(v \otimes c) = b \cdot \mathrm{id} \otimes \Psi_{\mathbb{Q}_p}(v \otimes c).$$

Da ψ_M nach Korollar 1.51 die Einschränkung des Operators $\mathrm{id} \otimes \psi_{\mathbb{Q}_p}$ auf $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ ist (ebenso ist Ψ_M die Einschränkung des Operators $\mathrm{id} \otimes \Psi_{\mathbb{Q}_p}$) und da $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ gilt, ist $\varphi_{\mathbb{Q}_p}(\varepsilon) = \varepsilon$ und damit gilt für $m \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ auch

$$\Psi_M((a \otimes 1)m) = \Psi_M(\varepsilon \varphi_{\mathbb{Q}_p}(a \otimes 1)m) = \varepsilon(a \otimes 1)\Psi_M(m).$$

Sei nun im Folgenden $e := a \otimes 1$.

Satz 2.32.
Für $V \in \mathbf{Rep}_{G_K,\mathbb{Z}_p}^{(\mathrm{fg,tor})}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M(V) \arrow[r, "(\varphi_M - 1, \gamma - 1)"] \arrow[d, "e\cdot"] & M(V) \oplus M(V) \arrow[r, "(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\varphi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "-\varepsilon e \Psi_M \oplus e\cdot"] & M(V) \arrow[d, "-\varepsilon e \Psi_M"] \\
M(V(\tau_K)) \arrow[r, "(\Psi_M - 1, \gamma - 1)"] & M(V(\tau_K)) \oplus M(V(\tau_K)) \arrow[r, "(\gamma-1)\,\mathrm{pr}_1 - (\Psi_M - 1)\,\mathrm{pr}_2"] & M(V(\tau_K))
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Dabei ist $M(V) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ und $M(V(\tau)) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(\tau))$. Dies ist sogar ein Quasiisomorphismus von Komplexen.

Beweis.
Sei $m \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\Psi_M - 1)(em) &= \varepsilon e \Psi_M(m) - em,\\
-\varepsilon e \Psi_M((\varphi_M - 1)(m)) &= -\varepsilon e \left(\frac{1}{\varepsilon} m - \Psi_M(m)\right) = \varepsilon e \Psi_M(m) - em,\\
(\gamma - 1) \cdot em &= e\gamma(m) - em,\\
e((\gamma - 1)(m)) &= e(\gamma(m) - m) = e\gamma(m) - em.
\end{aligned}$$

Folglich ist das erste Quadrat kommutativ. Für das zweite Quadrat sei zusätzlich $n \in M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
-\varepsilon e \Psi_M\Big((\gamma - 1)(m) - (\varphi_M - 1)(n)\Big) &= \varepsilon e\Big(\Psi_M(m) - \gamma(\Psi_M(m)) - \Psi_M(n)\Big) + en,\\
(\gamma - 1)\Big(- \varepsilon e \Psi_M(m)\Big) - \Big(\Psi_M - 1\Big)(en) &= \varepsilon e\Big(\Psi_M(m) - \gamma(\Psi_M(m)) - \Psi_M(n)\Big) + en.
\end{aligned}$$

Also kommutiert auch das zweite Diagramm.
Da die Multiplikationen mit e und ε bijektiv sind, ist wie in Abschnitt 2.3 der Kokernkomplex des obigen Diagramms gleich 0 und der Kernkomplex reduziert sich zu $\ker(\Psi_M) \xrightarrow{\gamma - 1} \ker(\Psi_M)$. Dass der Kernkomplex für ψ_M triviale Kohomologie besitzt, wurde in Satz 2.24 und Korollar 2.25 gezeigt. Da aber $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ gilt, besitzt auch der Kernkomplex zu Ψ_M triviale Kohomologie. □

Wegen $\psi_M = \varepsilon \Psi_M$ lässt sich der nachfolgende Satz wie der vorausgegangene Satz beweisen.

Satz 2.33.
Für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K, \mathbb{Z}_p}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M(V) \arrow[r, "(\psi_M - 1, \gamma - 1)"] \arrow[d, "e\cdot"] & M(V) \oplus M(V) \arrow[r, "(\gamma-1)\operatorname{pr}_1 - (\psi_M - 1)\operatorname{pr}_2"] \arrow[d, "e\cdot \oplus e\cdot"] & M(V) \arrow[d, "e\cdot"] \\
M(V(\tau_K)) \arrow[r, "(\Psi_M - 1, \gamma - 1)"] & M(V(\tau_K)) \oplus M(V(\tau_K)) \arrow[r, "(\gamma-1)\operatorname{pr}_1 - (\Psi_M - 1)\operatorname{pr}_2"] & M(V(\tau_K))
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Dabei ist $M(V) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V)$ und $M(V(\tau)) = M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V(\tau))$. Dies ist sogar ein Quasiisomorphismus von Komplexen.

Nachfolgender Satz lässt sich wie Satz 2.27 (bzw. Lemma 2.18 und Satz 2.20) beweisen.

Satz 2.34.
Sei $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K, \mathbb{Z}_p}$. Dann gibt es Isomorphismen von G_K-Moduln

$$\mathcal{H}^i_{\Psi_{\mathbb{Q}_p}}(V(\tau_K)) \cong \mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}(V) \cong H^i_{\mathrm{cts}}(G_K, V) \cong \mathcal{H}^i_{\psi_{\mathbb{Q}_p}}(V).$$

Symbolverzeichnis

Im Folgenden ist ein Verzeichnis der ab Kapitel 1 verwendeten Symbole mit einer kurzen Erklärung und einer Angabe, auf welcher Seite das Symbol eingeführt wird.

$\mathbb{Q}_p$	Körper der p-adischen Zahlen	S. 5
$\overline{\mathbb{Q}_p}$	algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}_p$	S. 5
v_p	Bewertung von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ mit $v_p(p) = 1$	S. 5
$\mathbb{C}_p$	Vervollständigung von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ bezüglich v_p	S. 5
$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$	Ganzheitsring von $\mathbb{C}_p$	S. 5
K	endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$	S. 5
$\mathcal{O}_K$	Ganzheitsring von K	S. 5
k_K	Restklassenkörper von $\mathcal{O}_K$	S. 5
K^{ur}	maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ in K	S. 5
$\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$	Ganzheitsring von K^{ur}	S. 5
$k_{K^{\mathrm{ur}}}$	Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$	S. 5
L	endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit $L \subseteq K$	S. 5
$\mathcal{O}_L$	Ganzheitsring von L	S. 5
π_L	Primelement in $\mathcal{O}_L$	S. 5
k_L	Restklassenkörper von $\mathcal{O}_L$	S. 5
q	$= p^r$, Mächtigkeit von k_L	S. 5
L^{ur}	maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ in L	S. 5
$\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}$	Ganzheitsring von L^{ur}	S. 5
$k_{L^{\mathrm{ur}}}$	Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{L^{\mathrm{ur}}}$	S. 5
f_L	Lubin-Tate-Polynom zu π_L	S. 5
$\mathcal{G}_L$	Lubin-Tate-Gruppe zu f_L	S. 5
$[a]_{\pi_L}$	Potenzreihe zu $a \in \mathcal{O}_L$ mit gewissen Eigenschaften	S. 6
$f_L^{(n)}$	n-fache Verknüpfung von f_L	S. 6
$\mathcal{G}_L[\pi_L^n]$	Menge der π_L^n-Torsionspunkte von $\mathcal{G}_L$	S. 6
$\mathcal{T}\mathcal{G}_L$	$= \varprojlim \mathcal{G}_L[\pi_L^n]$ - Tate-Modul von $\mathcal{G}_L$	S. 7

L_n	$= L(\mathcal{G}_L[\pi_L^n])$ - Körper der π_L^n-Torsionspunkte von $\mathcal{G}_L$ über L	S. 8
L_∞	$= \cup_n L_n$	S. 8
Γ_L	$= \mathrm{Gal}(L_\infty \vert L)$	S. 8
G_L	$= \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}\vert L)$	S. 8
H_L	$= \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}\vert L_\infty)$	S. 8
K_n	$= K(\mathcal{G}_L[\pi_L^n])$ - Körper der π_L^n-Torsionspunkte von $\mathcal{G}_L$ über K	S. 8
K_∞	$= \cup_n K_N$	S. 8
Γ_K	$= \mathrm{Gal}(K_\infty \vert K)$	S. 8
G_K	$= \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}\vert K)$	S. 8
H_K	$= \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}\vert K_\infty)$	S. 8
χ_L	Isomorphismus $\Gamma_L \to \mathcal{O}_L^\times$ mit $\sigma(v) = [\chi(\sigma)]_{\pi_L}(v)$ für $\sigma \in \Gamma_L$ und $v \in \mathcal{T}\mathcal{G}_L$	S. 9
$\mathcal{R}$	$= \varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$	S. 9
$v_{\mathcal{R}}$	Bewertung auf $\mathcal{R}$ mit $v_{\mathcal{R}}(x) = v_p(x^{(0)})$	S. 12
$W(R)$	Ring der Wittvektoren eines Ringes R	S. 12
$\varphi_{\mathbb{Q}_p}$	Frobenius auf $\mathcal{R}$ mit $\varphi_{\mathbb{Q}_p}((x_n)_n) = (x_n^p)_n$, später auch auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ und stabilen Unterringen	S. 13
φ_L	Frobenius auf $\mathcal{R}$ mit $\varphi_{\mathbb{Q}_p}((x_n)_n) = (x_n^q)_n$, später auch auf $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R})$ und stabilen Unterringen	S. 13
ι	mit Γ_L verträgliche Abbildung $\mathcal{T}\mathcal{G}_L \to \mathcal{R}$	S. 14
$\{\}$	Abbildung $\mathcal{R} \to W(\mathcal{R}) \otimes_{L^{\mathrm{ur}}} \mathcal{O}_L$ - $\{x\}$ ist ein Lift von x	S. 15
u	entspricht $\{\iota(v)\}$ für einen $\mathcal{O}_L$-Erzeuger v von $\mathcal{T}\mathcal{G}_L$	S. 15
$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$	p-adische Vervollständigung von $\mathcal{O}_L[\![u]\!][1/u]$ in $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{L^{\mathrm{ur}}} \mathcal{O}_L$	S. 16
$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$	maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ in $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{L^{\mathrm{ur}}} \mathcal{O}_L$	S. 16
$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$	p-adische Vervollständigung von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ in $W(\mathrm{Fr}\,\mathcal{R}) \otimes_{L^{\mathrm{ur}}} \mathcal{O}_L$	S. 16
$\mathcal{E}_L$	Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$	S. 16
$\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$	Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$	S. 16
$\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$	Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$	S. 16
$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$	$= \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right)^{H_K}$	S. 16
φ_M	von φ_L induzierter Operator auf einem (φ_L, Γ_K)-Modul M	S. 17
$\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$	Kategorie der étalen (φ_L, Γ_K)-Moduln	S. 17
$\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$	Kategorie der endlich erzeugten (φ_L, Γ_K)-Torsionsmoduln	S. 17

V	$\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}} \to \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$(bzw. $\mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}} \to \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$) mit $V(M) = \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} M\right)^{\varphi_L=1}$	S. 17
$\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$	Kategorie der endlich freien Darstellungen von G_K über $\mathcal{O}_L$	S. 17
$\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$	Kategorie der endlich erzeugten Torsionsdarstellungen von G_K über $\mathcal{O}_L$	S. 17
$M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$	$\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p} \to \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{et}}$ (bzw. $\mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p} \to \mathbf{Mod}^{\varphi_L,\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$) mit $M_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}(V) = \left(V \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\right)^{H_K}$	S. 17
Tr	$= \mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \mid \varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}$	S. 23
$\psi_{\mathbb{Q}_p}$	zu $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ linksinverser Operator auf $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$, definiert durch $1/p\ \varphi_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \circ \mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \mid \varphi(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})}$	S. 24
ψ_M	zu φ_M linksinverser Operator auf einem $(\varphi_{\mathbb{Q}_p}, \Gamma_K)$-Modul M	S. 26
$\mu(\mathbb{Z}_p)$	in $\mathbb{Z}_p$ enthaltene Einheitswurzeln	S. 28
γ	topologischer Erzeuger von Γ_K	S. 28
$\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(V)$	Komplex bezüglich $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ für eine G_K-Darstellung V	S. 28
$\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(M)$	Komplex bezüglich $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ für einen $(\varphi_{\mathbb{Q}_p}, \Gamma_K)$-Modul M	S. 28
$H^i(\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(V))$	i-te Kohomologie des Komplexes $\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(V)$	S. 28
$H^i(G_K, V)$	i-te Galoiskohomologie von V	S. 29
$\mathbf{Rep}^{(\mathrm{dis,tor})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$	Kategorie der diskreten $\mathbb{Z}_p$-Torsiondarstellungen von G_K	S. 29
$\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}}$	Kategorie, deren Objekte direkte Limiten von Objekten aus $\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor}}$ sind	S. 30
$\mathbf{Ab}$	Kategorie der abelschen Gruppen	S. 32
$\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$	$\mathbf{Mod}^{\varphi_{\mathbb{Q}_p},\Gamma_K}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K},\mathrm{tor,ind}} \to \mathbf{Ab},\ M \mapsto H^i(\mathrm{C}_{\varphi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(M))$	S. 32
$\mathcal{H}_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}$	$= \left(\mathcal{H}^i_{\varphi_{\mathbb{Q}_p}}\right)_i$	S. 32
V_n	$= V/\pi^n_{\mathbb{Q}_p} V$ für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$	S. 38
τ^{n+1}_n	Übergangsabbildung $V_{n+1} \to V_n$ für $V \in \mathbf{Rep}^{(\mathrm{fg})}_{G_K,\mathbb{Z}_p}$	S. 38
$\mathrm{C}_{\psi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(V)$	Komplex bezüglich $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ für eine G_K-Darstellung V	S. 41
$\mathrm{C}_{\psi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(M)$	Komplex bezüglich $\psi_{\mathbb{Q}_p}$ für einen $(\varphi_{\mathbb{Q}_p}, \Gamma_K)$-Modul M	S. 41
$\mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{L})$	Normenkörper der algebraischen und separablen Erweiterung $\mathcal{L}\mid\mathcal{K}$	S. 42
Δ_K	Untergruppen von Γ_K mit $\Gamma_K = \Delta_K \times \Gamma_{1,K}$, wobei Δ_K	S. 42
$\Gamma_{1,K}$	isomorph zu einer Untergruppe von $\mu(\mathbb{Z}_p)$ und $\Gamma_{1,K}$ isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ ist	
$K_{1,\infty}$	$= (K_\infty)^{\Delta_K}$	S. 42

$H_{1,K}$	$= \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}\|K_{1,\infty})$	S. 42
$\mathcal{X}_K$	$= \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}(K_{1,\infty})$	S. 42
$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sep}}$	separabler Abschluss von $\mathcal{X}_K$	S. 43
γ_1	topologischer Erzeuger von $\Gamma_{1,K}$	S. 43
$\mathcal{H}^i_{\psi_{\mathbb{Q}_p}}$	$\mathbf{Rep}_{G_K,\mathbb{Z}_p}^{(\mathrm{fg,tor})} \to \mathbf{Ab},\ V \mapsto H^i(\mathrm{C}_{\psi_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}},\gamma}(V))$	S. 47
$\Psi_{\mathbb{Q}_p}$	$= 1/\varepsilon\psi_{\mathbb{Q}_p}$	S. 48
Ψ_M	$= 1/\varepsilon\psi_M$	S. 48
χ_{cyc}	zyklotomischer Charakter	S. 48
$\tau_{\mathbb{Q}_p}$	$= \chi_{\mathbb{Q}_p}/\chi_{\mathrm{cyc}}$	S. 48
τ_K	Einschränkung von $\tau_{\mathbb{Q}_p}$ auf G_K	S. 48
$N(\tau_K)$	$\mathbb{Z}_p$-Modul N mit durch τ_K geshifteter G_K-Operation	S. 48

Literaturverzeichnis

[Bru65] Brumer, Armand: *Pseudocompact Algebras, profinite Groups and Class Formations*. Journal of Algebra (4) p.442-479 (1966), 1965

[Buc60] Buchsbaum, David A.: *Satellites and Universal Functors - http://people.brandeis.edu/~buchsbau/miscpapers/027.pdf*. The Annals of Mathematics, 2nd Ser. Vol. 7, No. 2 (Mar. 1960), S. 199-209, 1960

[Col02] Colmez, Pierre: *Espaces de Banach de dimension finie*. http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/jussieucorps.pdf, 2002

[Col04] Colmez, Pierre: *Fontaine's rings and p-adic L-functions*. C.N.R.S Institue de Mathématiques de Jussieu, 2004

[Col15] Colmez, Pierre: *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local*. preprint - http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/iwasawa-deRham.pdf, 2015

[FO10] Fontaine, Jean-Marc ; Ouyang, Yi: *Theory of p-adic Galois Representations*. Springer, http://www.math.u-psud.fr/~fontaine/galoisrep.pdf, 2010

[Fr68] Fröhlich, Albrecht: *Formal Groups*. Springer Berlin Heidelberg New York, 1968

[Gro57] Grothendiek, Alexander: *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Math. J.9 (1957), p.119-221 - https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tmj/1178244839, 1957

[Her98] Herr, Laurent: *Sur la cohomolgie galoisienne des corps p-adiques*. Bulletin de ls S.M.F., tome 126, n°4 (1998), p.563-600, 1998

[Izy12] Izychev, Dmitriy: *Equivariant ϵ-conjecture for unramified twists of $\mathbb{Z}_p(1)$*. Universität Heidelberg https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~otmar/doktorarbeiten/Dissertation%20of%20Dmitriy%20Izychev.pdf, 2012

[JS14] Jantzen, Jens C. ; Schwermer, Joachim: *Algebra*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014

[Ker04] Kerber, Adalbert: *Lineare Algebra, WS 2002/2003*. Universität Bayreuth - http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/lina02/alles.pdf, 2004

[KR09] Kisin, Mark ; Ren, Wei: *Galois Representations and Lubin-Tate Groups*. Documenta Mathematica 14 (2009) p.441-461, 2009

[Neu07] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2007

[NSW08] Neukirch, Jürgen ; Schmidt, Alexander ; Wingberg, Kay: *Cohomology of Number Fields*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[RZ91] Ribes, Luis ; Zalesskii, Pavel: *Profinite Groups*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1991

[Sch07] Schneider, Peter: *Die Theorie des Anstiegs*. Vorlessungsskriptum- http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/Theorie-des-Anstiegs.pdf, 2007

[Sch09] Schoeneberg, Thorsten: *p-adische Galoisdarstellungen und* (φ, Γ)*-Moduln*. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/diplom/schoeneberg-diplomarbeit-ext.pdf, 2009

[Ser79] Serre, Jean-Pierre: *Local Fields*. Springer-Verlag New York Inc, 1979

[Ser98] Serre, Jean-Pierre: *Abelian l-Adic Representations and Elliptic Curves*. A K Peters, Ltd., 1998

[Sti07] Stix, Jakob: *A course on finite flat group schemes and p-divisble groups*. Vorlessungsskriptum- http://www.math.uni-frankfurt.de/~stix/skripte/STIXfinflatGrpschemes20120918.pdf, 2007

[SV15] Schneider, Peter ; Venjakob, Otmar: *Iwasawa cohomology for Lubin-Tate extensions*. 2015

[Tat62] Tate, John: *Duality Theorems in Galois cohomology over number fields*. Proc. Int. Congress Math. Stockholm, p.288-295 - http://www.mathunion.org/ICM/ICM1962.1/Main/icm1962.1.0288.0295.ocr.pdf, 1962

[Was97] Washington, Lawrence C.: *Introduction to Cyclotomic Fields - Second Edition*. Springer Verlag, 1997

[Win83] Wintenberger, Jean-Pierre: *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps loceaux; applications*. Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, n° 1 (1983), p.59-89, 1983