Fakultät für Mathematik und Informatik

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Master-Arbeit

im Studiengang Mathematik
vorgelegt von

Saskia Klaus

August 2018

Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg

Master-Arbeit

Analytische Kohomologie

Saskia Klaus

August 2018

Betreut durch:
Prof. Dr. Otmar Venjakob

Saskia Klaus
Rohrbacher Straße 110
69126 Heidelberg
saskia.klaus@stud.uni-heidelberg.de

Analytische Kohomologie
Master-Arbeit im Fach Mathematik

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Betreut durch	Prof. Dr. Otmar Venjakob
Beginn der Arbeit	20. April 2018
Datum der Abgabe	30. August 2018

Zusammenfassung

Es sei L eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Die vorliegende Arbeit gibt einen Überblick über die Theorie der (φ,Γ)-Moduln über dem Robba-Ring mit Koeffizienten in L und ihrer Kohomologie. Wir werden eine Äquivalenz zwischen der Kategorie gewisser solcher Moduln und bestimmten Darstellungen der absoluten Galoisgruppe G_L zeigen, mit deren Hilfe ein weiteres wichtiges Resultat der Arbeit folgt: Die L-analytischen Erweiterungen von L durch eine L-analytische Darstellung V von G_L können über die Kohomologiegruppe $H^1_{\mathrm{an}}(G^+, \mathcal{D}^\dagger_{rig}(V))$ beschrieben werden, wobei $\mathcal{D}^\dagger_{rig}(V)$ den zu V korrespondierenden (φ,Γ)-Modul bezeichne.
Im ersten Abschnitt geben wir zunächst eine Übersicht über die klassische Theorie von Lubin-Tate (φ,Γ)-Moduln, bevor wir dieses Konzept dann im zweiten Abschnitt verallgemeinern auf Moduln über dem Robba-Ring mit Koeffizienten in L. Wir werden sehen, dass die Theorien starke Parallelen aufweisen, wir im Fall von Moduln über dem Robba-Ring aber einige zusätzliche Bedingungen benötigen. Insbesondere die schon genannte Kategorienäquivalenz benötigt weitere Voraussetzungen und tiefere Erkenntnisse als im klassischen Fall.
Im letzten Abschnitt werden dann zwei Kohomologietheorien für (φ,Γ)-Moduln über dem Robba-Ring vorgestellt, wobei unser besonderes Augenmerk der analytischen Kohomologie gilt. Wir werden zwei alternative Beschreibungen dafür kennenlernen und bekannte Konzepte wie das Shapiro-Lemma und die Korestriktionsabbildung neu formulieren. Den Abschluss bilden Aussage und Beweis der oben genannten Korrespondenz.

Abstract

Let L be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$. In this thesis, we give an overview of the theory of (φ,Γ)-modules over the Robba ring with coefficients in L and their cohomology. We will show an equivalence of categories between a certain kind of these modules and certain representations of the absolute Galois group G_L, which will help to show another important theorem of this thesis: The L-analytic extensions of L by an L-analytic representation V of G_L can be described as the cohomology group $H^1_{\mathrm{an}}(G^+, \mathcal{D}^\dagger_{rig}(V))$, where $\mathcal{D}^\dagger_{rig}(V)$ is the (φ,Γ)-module corresponding to V.
In the first chapter we begin with an overview of the classic theory of Lubin Tate (φ,Γ)-modules before we generalize this concept in the second chapter to modules over the Robba ring with coefficients in L. We will notice that there are many parallels between the two theories but that, in the case of modules over the Robba ring, we often need additional conditions. In particular, the already mentioned equivalence of categories needs further conditions und further insights into the theory than in the classic case.
In the last chapter, we will present two cohomology theories for (φ,Γ)-modules over the Robba ring, with our focus being on the analytic cohomology. We will see two alternative descriptions of this cohomology and reformulate well-known concepts like Shapiro's lemma and the corestriction map for this cohomology. We will conclude this chapter with the statement and proof of the above-mentioned correspondence.

Inhaltsverzeichnis

1 (φ, Γ)-Moduln klassisch

In diesem Abschnitt wollen wir die klassische Theorie der (φ, Γ)-Moduln einführen, wie man sie zum Beispiel in [Sch17] nachlesen kann, bevor wir uns im nächsten Abschnitt den (φ, Γ)-Moduln über dem Robba-Ring widmen werden, an denen wir eigentlich interessiert sind. Die zentralen Aussagen der beiden Kapitel verhalten sich im wesentlichen analog, unterscheiden sich aber in Details, auf die an geeigneter Stelle hingewiesen wird.
Da unser Fokus auf dem nächsten Abschnitt liegt, verzichten wir nun zunächst größtenteils auf Beweise und verweisen stattdessen auf die entsprechende Literatur.

Sei p eine Primzahl. Wir fixieren im Folgenden einen algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}_p$ von $\mathbb{Q}_p$ und betrachten ohne Einschränkung alle algebraischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$ als Teilerweiterungen von $\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p$.
Sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Körpererweiterung mit Ganzheitsring o, Uniformisierender π und Restklassenkörper k. Es bezeichne q die Kardinalität von k.

1.1 Verzweigte Wittvektoren und die schwache Topologie darauf

Sei A eine (kommutative) o-Algebra. Wir wollen das abzählbar unendliche direkte Produkt $A^{\mathbb{N}_0}$ mit einer speziellen Ringstruktur ausstatten. Betrachte dazu für $n \geq 0$ die n-ten Wittpolynome, die rekursiv definiert sind durch

$$\Phi_0(X_0) = X_0,$$
$$\Phi_{n+1}(X_0, \dots, X_{n+1}) = \Phi_n\left(X_0^q, \dots, X_n^q\right) + \pi^{n+1} X_{n+1}.$$

Für jedes $n \geq 0$ induziert das n-te Wittpolynom auf natürliche Weise eine Abbildung

$$\Phi_n \colon A^{\mathbb{N}_0} \to A,\ (a_0, a_1, \dots) \mapsto \Phi_n(a_0, \dots, a_n).$$

Hieraus erhalten wir eine Abbildung $\Phi_A \colon A^{\mathbb{N}_0} \to A^{\mathbb{N}_0}$ definiert durch $a \mapsto (\Phi_0(a), \Phi_1(a), \dots)$.
Es gilt dann die folgende, leicht einzusehende Aussage (vgl. [Sch17], Lemmata 1.1.3-1.1.5):

Proposition 1.1. Das Bild im(Φ_A) ist eine o-Unteralgebra von $A^{\mathbb{N}_0}$. Weiters gilt: Ist $\pi \cdot 1_A$ kein Nullteiler in A, so ist Φ_A injektiv.

Betrachte nun die Polynomalgebra $B = o[X_0, X_1, \dots, Y_0, Y_1, \dots]$ in zweimal abzählbar unendlich vielen Variablen über o. Seien $X = (X_0, X_1, \dots)$ und $Y = (Y_0, Y_1, \dots) \in B^{\mathbb{N}_0}$. Aus der vorherigen Proposition erhalten wir die Existenz eindeutiger Elemente $S = (S_n)_n, P = (P_n)_n$ und $I = (I_n)_n \in B^{\mathbb{N}_0}$, sodass folgende Gleichheiten erfüllt sind:

$$\Phi_B(S) = \Phi_B(X) + \Phi_B(Y)$$
$$\Phi_B(P) = \Phi_B(X) \cdot \Phi_B(Y)$$
$$\Phi_B(I) = -\Phi_B(X).$$

Für eine beliebige o-Algebra A setzen wir nun $W(A)_L := A^{\mathbb{N}_0}$. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \in W(A)_L$, dann definiere:

$$(a_n)_n + (b_n)_n := (S_n(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n))_n$$
$$(a_n)_n \cdot (b_n)_n := (P_n(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n))_n,$$

sowie $0 := (0, 0, \dots)$ und $1 := (1, 0, 0, \dots)$. Mit diesen Operationen wird $W(A)_L$ zu einem kommutativen Ring mit Nullelement 0 und Einselement 1; das additive Inverse zu $(a_n)_n$ ist hierbei gegeben durch $(I_n(a_0, \dots, a_n))_n$.

Man kann zeigen (vgl. [Sch17], Proposition 1.1.8):

Proposition 1.2. (i) Die Abbildung $\Phi_A \colon W(A)_L \to A^{\mathbb{N}_0}$ ist ein o-Algebrenhomomorphismus.

(ii) Für jeden o-Algebrenhomomorphismus $f \colon A_1 \to A_2$ ist auch die induzierte Abbildung $W(f) \colon W(A_1)_L \to W(A_2)_L$ ein o-Algebrenhomomorphismus.

Definition. Die Menge $W(A)_L$ zusammen mit den oben definierten Operationen heißt *Ring der verzweigten Wittvektoren* mit Koeffizienten in A.

Bemerkung. Auf $W(A)_L$ lässt sich eine Frobenius-Abbildung definieren. Sei dazu wieder B wie oben die Polynomalgebra in zweimal abzählbar unendlich vielen Variablen. Betrachte die Abbildung

$$f_B \colon B^{\mathbb{N}_0} \to B^{\mathbb{N}_0},\ (b_0, b_1, \dots) \mapsto (b_1, b_2, \dots).$$

Man überlegt sich leicht (siehe [Sch17], Proposition 1.1.5), dass $f_B(\mathrm{im}(\Phi_B)) \subseteq \mathrm{im}(\Phi_B)$. Dann gibt es nach 1.1 ein eindeutiges Element $(F_n)_n \in B^{\mathbb{N}_0}$, sodass $\Phi_B(F) = f_B(\Phi_B(X))$. Wir erhalten einen induzierten o-Algebrenhomomorphismus auf den Wittvektoren

$$F \colon W(A)_L \to W(A)_L,\ (a_n)_n \mapsto (F_n(a_0, \dots, a_{n+1}))_n.$$

Dieser erfüllt für allgemeines A die Kongruenz $F(a) \equiv a^q \mod \pi W(A)_L$. Ist A eine *perfekte* k-Algebra, d. h. ist der q-*Frobenius* $A \to A, a \mapsto a^q$ bijektiv, so gilt sogar schon in $W(A)_L$ Gleichheit. Wegen dieser Eigenschaften nennen wir die Abbildung F den *Frobenius* auf $W(A)_L$.

Wir können nun $W(A)_L$ auf natürliche Weise mit einer Topologie ausstatten: Betrachte die Mengengleichheit $W(A)_L = \prod_{n \geq 0} A$, dann trägt $W(A)_L$ die Produkttopologie der diskreten Topologie auf jedem Faktor A. Ist A eine perfekte k-Algebra, so stimmt diese Topologie mit der π-adischen Topologie überein, für die die Mengen $\pi^m W(A)_L$ ($m \geq 1$) ein Fundamentalsystem von Umgebungen der 0 bilden (vergleiche [Sch17], Abschnitt 1.5).
Wir betrachten nun den Fall, dass A eine perfekte topologische k-Algebra mit einem Fundamentalsystem von Umgebungen der 0 bestehend aus Idealen $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist. Unser Ziel ist es, eine weitere Topologie auf $W(A)_L$ einzuführen, die von der gegebenen auf A induziert wird. Definiere also für ein offenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ und ein $m \geq 1$ das Ideal $V_{\mathfrak{a},m} \subseteq W(A)_L$ durch

$$V_{\mathfrak{a},m} := \{(a_0, \dots, a_n, \dots) \in W(A)_L \,|\, a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathfrak{a}\}.$$

Indem wir die $V_{\mathfrak{a},m}$ als Fundamentalsystem von Umgebungen der 0 betrachten, wird $W(A)_L$ zum topologischen Ring.

Definition. Per Konstruktion ist jede in der π-adischen Topologie offene Menge auch offen in der gerade eingeführten Topologie auf $W(A)_L$. Diese ist also gröber bzw. schwächer als die π-adische, weshalb wir sie die *schwache Topologie* auf $W(A)_L$ nennen.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass die schwache Topologie mit der Produkttopologie der gegebenen Topologie auf A übereinstimmt.

Für den Beweis des folgenden Lemmas sei auf [Sch17], Bemerkung 1.5.2 verwiesen:

Lemma 1.3. Ist die gegebene Topologie auf A hausdorffsch (bzw. vollständig), so ist die schwache Topologie auf $W(A)_L$ hausdorffsch (bzw. vollständig).

Für uns ist im Folgenden der Fall interessant, dass $A = o_K$ der Ganzheitsring eines vollständigen, nichtarchimedischen, perfekten Körpers $K \supseteq k$ ist, wobei die Topologie auf A die durch den Absolutbetrag auf K gegebene sei. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A = o_K$ ein offenes Ideal und $m \geq 1$. Über die $W(o_K)_L$-Untermoduln

$$U_{\mathfrak{a},m} := V_{\mathfrak{a},m} + \pi^m W(K)_L$$

erhalten wir eine Topologie auf $W(K)_L$ (vergleiche [Sch17], Lemma 1.5.4), die schwächer als die π-adische ist und die schwache Topologie auf $W(o_K)_L$ induziert. Wir nennen diese Topologie entsprechend die schwache Topologie auf $W(K)_L$.

Die folgenden Aussagen findet man in [Sch17], Lemmata 1.5.4 und 1.5.5.

Lemma 1.4. $W(K)_L$ ist ein topologischer Ring bezüglich der schwachen Topologie.

Lemma 1.5. Die schwache Topologie auf $W(K)_L$ ist hausdorffsch und vollständig.

1.2 Lubin-Tate formale Gruppen

Definition. Eine *Frobeniuspotenzreihe* (zu π) ist eine formale Potenzreihe $\varphi(X) \in o[[X]]$, sodass $\varphi(X) = \pi X +$ höhere Terme und $\varphi(X) \equiv X^q \mod \pi o[[X]]$.

Für den Beweis der folgenden Aussagen verweisen wir auf [Sch17], Propositionen 1.3.4, 1.3.6 und 1.3.7.

Proposition 1.6. Sei $\varphi(X)$ eine Frobeniuspotenzreihe. Dann existiert eine eindeutige kommutative formale Gruppe $F_\varphi(X, Y) \in o[[X, Y]]$, sodass $\varphi \in \mathrm{End}_o(F_\varphi)$.

Definition. F_φ heißt *Lubin-Tate formale Gruppe* zur Frobeniuspotenzreihe φ.

Lemma 1.7. Seien $\varphi(X), \psi(X)$ zwei beliebige Frobeniuspotenzreihen (zu π). Dann existiert ein Isomorphismus $F_\varphi \cong F_\psi$.

Satz 1.8. Ist $\varphi(X)$ eine Frobeniuspotenzreihe, so existiert ein eindeutiger, injektiver Ringhomomorphismus $o \to \mathrm{End}_o(F_\varphi)$, $a \mapsto [a]_\varphi(X) := aX +$ höhere Terme, sodass $[\pi]_\varphi = \varphi$. Auf diese Weise ist eine Wirkung des Ringes o auf die Lubin-Tate formale Gruppe F_φ erklärt.

Sei nun $\varphi(X)$ eine feste Frobeniuspotenzreihe und F_φ die zugehörige formale Gruppe. Betrachte einen algebraischen Abschluss $\overline{L}$ von L und setze $\mathfrak{M} := \{z \in \overline{L} \,|\, |z| < 1\}$. Wir wollen auf gewisse Weise die im Satz eingeführte o-Wirkung auf $\mathfrak{M}$ erweitern. Betrachte dazu eine beliebige endliche Teilerweiterung $L \subseteq K \subseteq \overline{L}$, die vollständig und nichtarchimedisch ist (d. h. insbesondere setzt der Absolutbetrag auf K den auf L fort). Es bezeichne $\mathfrak{m}_K$ das Maximalideal des zugehörigen Ganzheitsringes in K. Offenbar konvergiert dann für beliebige $x, y \in \mathfrak{m}_K$ der Ausdruck $F_\varphi(x, y)$ mit Grenzwert in $\mathfrak{m}_K$. Man kann nun überprüfen, dass $\mathfrak{m}_K$ mit der Addition definiert durch $x +_{F_\varphi} y := F_\varphi(x, y)$ für $x, y \in \mathfrak{m}_K$ eine abelsche Gruppe ([Sch17], Abschnitt 1.3), und nach 1.8 sogar ein o-Modul ist.
Nun ist $\mathfrak{M} = \bigcup_K \mathfrak{m}_K$, wobei die Vereinigung über alle endlichen Teilerweiterungen von $\overline{L}/L$ läuft. Nach den obigen Betrachtungen haben wir also eine o-Wirkung auf $(\mathfrak{M}, +_{F_\varphi})$ gegeben durch

$$o \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},\ (a, z) \mapsto [a]_\varphi(z).$$

Betrachte nun für $n \geq 1$ die o-Untermoduln

$$\mathcal{F}_n := \ker\left([\pi^n]_\varphi\right) = \left\{z \in \mathfrak{M} \,\middle|\, [\pi^n]_\varphi(z) = 0\right\} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Setzen wir $L_n := L(\mathcal{F}_n)$, so erhalten wir einen Körperturm algebraischer Erweiterungen

$$L \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq L_\infty := \bigcup_n L_n \subseteq \overline{L}$$

Man überlegt sich (vgl. [Sch17], Bemerkung 1.3.8):

Satz 1.9. Die Körper L_n für $n \geq 1$ und L_∞ hängen nur von π, nicht aber von φ ab.

Weiterhin gilt (siehe [Sch17], Aussagen 1.3.10 und 1.3.12):

Proposition 1.10. Für jedes $n \geq 1$ ist $\mathcal{F}_n$ ein freier $o/\pi^n o$-Modul vom Rang 1 und die Erweiterung L_n/L endlich galoissch.

1.3 Tilts

Betrachte nun die Vervollständigung $\mathbb{C}_p$ des algebraischen Abschlusses $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Der Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}_p$ sei normalisiert durch $|\pi| = q^{-1}$ (wobei q die Kardinalität des Restklassenkörpers k von L bezeichnet). Wie zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt betrachten wir ohne Einschränkung L als Teilkörper von $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Definition. Ein Zwischenkörper $L \subseteq K \subseteq \mathbb{C}_p$ heißt *perfektoid*, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- K ist vollständig
- $K^\times$ liegt dicht in $\mathbb{R}_{>0}^\times$
- $(o_K/po_K)^p = o_K/po_K$, wobei o_K den Ganzheitsring von K bezeichne

Sei ab jetzt für den Rest des Abschnitts K ein perfektoider Zwischenkörper $L \subseteq K \subseteq \mathbb{C}_p$. Wir wollen diesem einen perfekten, vollständigen, nichtarchimedischen Körper derselben Charakteristik und mit gleicher Wertegruppe zuordnen.
Es bezeichne $\mathfrak{m}_K$ das Maximalideal von o_K. Wir wählen ein Element $\varpi \in \mathfrak{m}_K$ mit $|\varpi| \geq |\pi|$ und definieren eine k-Algebra $o_{K^\flat}$ durch

$$o_{K^\flat} := \varprojlim \left(\dots \xrightarrow{(\cdot)^q} o_K/\varpi o_K \xrightarrow{(\cdot)^q} o_K/\varpi o_K \xrightarrow{(\cdot)^q} \dots \xrightarrow{(\cdot)^q} o_K/\varpi o_K \right)$$

(man beachte, dass die Potenzierung mit q ein k-Algebrenhomomorphismus auf $o_K/\varpi o_K$ ist). Offensichtlich lässt sich $o_{K^\flat}$ als Teilmenge von $(o_K/\varpi o_K)^{\mathbb{N}_0}$ schreiben:

$$o_{K^\flat} = \left\{ (\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_1, \alpha_0) \in (o_K/\varpi o_K)^{\mathbb{N}_0} \,\middle|\, \alpha_{i+1}^q = \alpha_i \; \forall i \geq 0 \right\}.$$

Man überlegt sich leicht:

Lemma 1.11. $o_{K^\flat}$ ist eine perfekte k-Algebra.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass der q-Frobenius $o_{K^\flat} \to o_{K^\flat}, \alpha \mapsto \alpha^q$ bijektiv ist. Sei dazu zunächst $\alpha \in o_{K^\flat}$ ein Element mit $\alpha^q = 0$. Dann gilt aber für jedes $i \geq 0$, dass $\alpha_i = \alpha_{i+1}^q = 0$, also $\alpha = 0$. Umgekehrt ist für beliebiges $\alpha = (\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_1, \alpha_0) \in o_{K^\flat}$ das Element

$$\alpha^{1/q} := (\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_1)$$

per Definition ein Element mit $(\alpha^{1/q})^q = \alpha$. □

Wir wollen $o_{K^\flat}$ nun mit einem nichtarchimedischen Absolutbetrag $|\cdot|_\flat$ ausstatten, für den gelten soll $\left|o_{K^\flat}\right|_\flat = |o_K|$. Sei dazu $\alpha = (\dots, \alpha_1, \alpha_0)$ ein beliebiges Element in $o_{K^\flat}$. Wähle für jedes $i \geq 0$ einen Repräsentanten $a_i \in o_K$ von α_i und setze

$$\alpha^\sharp := \lim_{i \to \infty} a_i^{q^i} \in o_K.$$

Dass dieser Limes tatsächlich wohldefiniert ist, kann man beispielsweise in [Sch17], Abschnitt 1.4 nachlesen. Auch für den Beweis des nächsten Lemmas sei auf [Sch17] (Lemma 1.4.6) verwiesen.

Lemma 1.12. Die Abbildung $|\cdot|_\flat \colon o_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\alpha \mapsto \left|\alpha^\sharp\right|$ ist ein nichtarchimedischer Absolutbetrag mit $\left|o_{K^\flat}\right|_\flat = |o_K|$.
Es ist $\mathfrak{m}_{K^\flat} := \{\alpha \in o_{K^\flat} \,|\, |\alpha|_\flat < 1\}$ das eindeutige Maximalideal in $o_{K^\flat}$ und $o_{K^\flat}/\mathfrak{m}_{K^\flat} \cong o_K/\mathfrak{m}_K$.

Erweitere diesen Absolutbetrag nun multiplikativ auf den Quotientenkörper $K^\flat = Q(o_{K^\flat})$ (vgl. [Sch17], Abschnitt 1.4). Dann ist $|K^\flat|_\flat = |K|$ und $o_{K^\flat}$ ist der Ganzheitsring von $K^\flat$.

Definition. $K^\flat$ wird *Tilt* von K genannt.

Für folgendes Resultat verweisen wir erneut auf [Sch17] (Proposition 1.4.7).

Satz 1.13. Der Tilt $\left(K^\flat, |\cdot|_\flat\right)$ ist ein perfekter, vollständiger, nichtarchimedischer Körper der Charakteristik p.

1.4 Der Tate-Modul und der Normenkörper

Wie in Abschnitt 1.2 bezeichne $\mathcal{F}_n$ für $n \geq 1$ den o-Moduln $\ker\left([\pi^n]_\varphi\right)$.

Definition. Der o-Moduln

$$T := \varprojlim \left(\dots \xrightarrow{[\pi]_\varphi(\cdot)} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{[\pi]_\varphi(\cdot)} \mathcal{F}_n \xrightarrow{[\pi]_\varphi(\cdot)} \dots \xrightarrow{[\pi]_\varphi(\cdot)} \mathcal{F}_1 \right)$$

heißt der *Tate-Modul* zu $\mathfrak{M}$.

Da per Definition $\varphi(X) \equiv X^q \mod \pi o[[X]]$, gilt $y_{m+1}^q \equiv y_m \mod \pi o_{L_\infty}$ für jedes $(y_n)_{n\geq 1} \in T$ und jedes $m \geq 1$. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \iota\colon T &\to o_{\hat{L}_\infty^\flat}, \\ (y_n)_{n\geq 1} &\mapsto (\dots, y_n \mod \pi o_{L_\infty}, \dots, y_1 \mod \pi o_{L_\infty}, 0), \end{aligned}$$

wobei $\hat{L}_\infty$ die Vervollständigung von L_∞ bezeichne.
Man kann zeigen, dass T ein freier o-Modul vom Rang 1 ist und ein Elemen $(z_n)_{n\geq 1} \in T$ den o-Modul T genau dann erzeugt, wenn für jedes $n \geq 1$ das Element z_n den $o/\pi^n o$-Modul $\mathcal{F}_n$ erzeugt. Wir fixieren einen solchen Erzeuger $(z_n)_{n\geq 1}$ von T und setzen $\omega := \iota((z_n)_{n\geq 1})$. Es ist dann $\omega^\sharp = \lim_{n\to\infty} z_n^{q^n}$. Man überzeuge sich, dass die Gleichung $|z_n| = |\pi|^{\frac{1}{(q-1)q^{n-1}}}$ gilt, dann folgt:

$$|\omega|_\flat = |\omega^\sharp| = \lim_{n\to\infty} |z_n|^{q^n} = |\pi|^{\frac{q}{q-1}} < 1.$$

Nach 1.13 ist der Tilt $\hat{L}_\infty^\flat$ vollständig, und wir erhalten einen wohldefinierten k-Algebrenhomomorphismus

$$k[[X]] \to o_{\hat{L}_\infty^\flat},\ f(X) \mapsto f(\omega),$$

der sich wegen der Invertierbarkeit von ω im Körper $\hat{L}_\infty^\flat$ zu einer Körpereinbettung $k((X)) \to \hat{L}_\infty^\flat$ erweitert.

Definition. Das Bild dieser Abbildung nennen wir den *Normenkörper* E_L.

Bemerkung. Offenbar ist E_L ein vollständiger, nichtarchimedischer Körper mit Restklassenkörper k, und ω ist ein Primelement in seinem Ganzheitsring o_{E_L}, welcher isomorph zu $k[[X]]$ ist.

Bemerkung. Es sei E_L^{sep} der separable Abschluss von E_L in $\mathbb{C}_p$. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.2 haben wir eine Wirkung der Galoisgruppe $G_L = \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}_p/L\right)$ auf $W\left(E_L^{sep}\right)_L$: Man überlegt sich, dass die Gruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ stetig auf $\mathbb{C}_p$ wirkt und eine stetige Wirkung

$$G_L \times o_{\mathbb{C}_p^\flat} \to o_{\mathbb{C}_p^\flat},\ (\sigma, (\dots, a_i \mod \pi o_{\mathbb{C}_p}, \dots)) \mapsto (\dots, \sigma(a_i) \mod \pi o_{\mathbb{C}_p}, \dots)$$

induziert. Da diese offenbar den Betrag $|\cdot|_\flat$ erhält, erweitert sie sich zu einer stetigen Wirkung $G_L \times \mathbb{C}_p^\flat \to \mathbb{C}_p^\flat$, die wiederum eine entsprechende Wirkung auf den Wittvektoren $W(\mathbb{C}_p^\flat)_L$ induziert. Nun ist $\mathbb{C}_p^\flat$ gerade die Vervollständigung von E_L^{sep} bezüglich $|\cdot|_\flat$ (vergleiche [Sch17], Proposition 1.4.27), und wir erhalten eine Wirkung von G_L auf $W\left(E_L^{sep}\right)_L$.
Per Übergang zu den einzelnen Komponenten der Wittvektoren sieht man, dass diese Wirkung mit dem Frobenius auf $W\left(E_L^{sep}\right)_L$ kommutiert.

1.5 Der Koeffizientenring der Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir den Ring einführen, über dem die klassischen (φ, Γ)-Moduln definiert sind. Betrachte dazu die π-adische Vervollständigung von $o((X))$:

$$\mathcal{A}_L := \varprojlim_m o((X))/\pi^m o((X)) = \varprojlim_m o/\pi^m o((X)).$$

Wir wollen zunächst eine alternative Beschreibung für $\mathcal{A}_L$ finden.

Lemma 1.14. Es ist

$$\mathcal{A}_L = \left\{ f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \in o((X)) \,\middle|\, \lim_{i \to -\infty} a_i = 0 \right\}.$$

Beweis. Ist $f(X) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$ eine Laurent-Reihe über o mit $\lim_{i\to-\infty} a_i = 0$, dann gilt offenbar $\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} (a_i \mod \pi^m o) X^i\right)_m \in \mathcal{A}_L$.
Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir ein Element $\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} (a_{m,i} \mod \pi^m o) X^i\right)_m$ aus $\mathcal{A}_L$. Es gilt dann für jedes $i \in \mathbb{Z}$ und jedes $m \geq 1$:

$$a_{m+1,i} \equiv a_{m,i} \mod \pi^m o,$$

also existiert für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ein eindeutiges $a_i \in o$, sodass $a_i \equiv a_{m,i} \mod \pi^m o\ \forall m \geq 1$. Setze nun $f(X) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i \in o((X))$.
Wir finden für jedes $m \geq 1$ eine ganze Zahl $i(m) < 0$, sodass $a_{m,i} \equiv 0 \mod \pi^m o$ für alle $i < i(m)$, das heißt $a_{m,i} \in \pi^m o$ für alle $i < i(m)$. Insgesamt konvergiert für $i \to -\infty$ die Folge der a_i also gegen 0, und $f(X)$ ist Element der in der Behauptung definierten Menge. □

Wir können eine schwache Topologie auf $\mathcal{A}_L$ definieren, indem wir für $m \geq 1$ die $o[[X]]$-Untermoduln

$$U_m := X^m o[[X]] + \pi^m \mathcal{A}_L$$

als Fundamentalsystem von offenen Umgebungen der 0 in $\mathcal{A}_L$ betrachten.

Lemma 1.15. $\mathcal{A}_L$ ist eine vollständige, hausdorffsche topologische o-Algebra bezüglich der schwachen Topologie.

Man kann nun einen o-Algebrenhomomorphismus $\mathrm{j}\colon \mathcal{A}_L \to W(E_L)_L$ konstruieren, der den Isomorphismus $k((X)) \to E_L$, $X \mapsto \omega$ liftet, d.h. einen Morphismus sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_L \arrow[r, "\mathrm{j}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & W(E_L)_L \arrow[d, "\Phi_0"] \\ k((X)) \arrow[r, "\cong"] & E_L \end{tikzcd}$$

kommutiert (vgl. dazu [Sch17] Abschnitt 2.1), und eine topologische Einbettung bezüglich der schwachen Topologien auf beiden Seiten ist. Es bezeichne $A_L := \mathrm{im}(\mathrm{j})$ das Bild dieses Homomorphismus. Dann ist auch A_L eine vollständige, hausdorffsche topologische o-Algebra.

Es sei nun die Notation wie in Abschnitt 1.2. Als Teilring von $W(E_L)_L$ besitzt A_L eine Frobenius-Wirkung sowie eine Wirkung der Galoisgruppe $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$, wobei erstere durch den Frobenius F auf den Wittvektoren gegeben ist (vgl. Abschnitt 1.1) und letztere durch die Wirkung von G_L auf $\mathbb{C}_p^\flat$ induziert wird (man beachte, dass die Gruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L_\infty)$ den Körper $\hat{L}_\infty^\flat$ und damit E_L fest lässt). Beide Wirkungen sind stetig bezüglich der schwachen Topologie auf A_L. Wir wollen $\mathcal{A}_L$ mit passenden Wirkungen ausstatten, d. h. Wirkungen, die unter dem topologischen Isomorphismus j denen auf A_L entsprechen. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.16. Es gibt einen Isomorphismus $\chi_L\colon \Gamma_L \xrightarrow{\cong} o^\times$.

Beweis. Wir wissen (siehe 1.10), dass $\mathcal{F}_n$ für jedes $n \geq 1$ ein freier $o/\pi^n o$-Modul vom Rang 1 ist. Daher finden wir für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_n/L)$ ein eindeutiges Element $\chi_{L,n}(\sigma) \in (o/\pi^n o)^\times$, sodass für alle $z \in \mathcal{F}_n$ gilt:

$$\sigma(z) = [\chi_{L,n}(\sigma)]_\varphi(z).$$

Man überlegt sich, dass für jedes $n \geq 1$ die so definierte Abbildung $\chi_{L,n}\colon\ \mathrm{Gal}(L_n/L) \to (o/\pi^n o)^\times$ ein Gruppenisomorphismus ist. Der Übergang zum projektiven Limes liefert dann den gewünschten Isomorphismus $\chi_L\colon\ \mathrm{Gal}(L_\infty/L) \to o^\times$. □

Wir definieren nun zunächst eine Wirkung von $o^\times$ auf $\mathcal{A}_L$ durch

$$o^\times \times \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L,\ (a, f) \mapsto f([a]_\varphi(X))$$

(für die Wohldefiniertheit dieser Wirkung siehe z. B. [Sch17], Abschnitt 1.7). Über den im vorherigen Lemma definierten Isomorphismus erhalten wir eine Wirkung der Galoisgruppe Γ_L:

$$\Gamma_L \times \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L,\ (\sigma, f) \mapsto f([\chi_L(\sigma)]_\varphi(X)).$$

Weiter definieren wir eine Frobenius-Wirkung auf $\mathcal{A}_L$: Es gilt $[\pi]_\varphi(X) = \varphi(X) \equiv X^q \mod \pi\mathcal{A}_L$, und wir erhalten einen (injektiven) q-Frobenius auf $\mathcal{A}_L$ durch

$$\varphi_L\colon \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L,\ f \mapsto f([\pi]_\varphi(X)).$$

Für diese Wirkungen gilt (vgl. [Sch17], Proposition 1.7.8):

Satz 1.17. Der o-Algebrenhomomorphismus φ_L und die Γ_L-Wirkung sind stetig bezüglich der schwachen Topologie.

Wir werden später noch die folgenden Aussagen benötigen, die den Propositionen 1.7.3 und 2.1.16 in [Sch17] entsprechen:

Lemma 1.18. $\mathcal{A}_L$ ist ein freier $\varphi_L(\mathcal{A}_L)$-Modul vom Rang q.

Proposition 1.19. Sei $f \in \mathcal{A}_L$. Es gelten für die Wirkungen auf $\mathcal{A}_L$ und A_L die folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{j}(f)) &= \mathfrak{j}(\varphi_L(f)),\\ \gamma.\mathfrak{j}(f) &= \mathfrak{j}(\gamma.f) = \mathfrak{j}(f([\chi_L(\gamma)]_\varphi(X))) \end{aligned}$$

für jedes $\gamma \in \Gamma_L$.

Notation. Ab jetzt bezeichnen wir den Frobenius auf A_L auch mit φ_L.

Zuletzt wollen wir nun noch die schwache Topologie auf endlich erzeugten A_L-Moduln definieren. Sei dazu zunächst $M = A_L^n$ für ein $n \geq 1$ ein endlich erzeugter, freier A_L-Modul. Wir statten diesen mit der Produkttopologie der schwachen Topologie auf jedem A_L aus und nennen dies die schwache Topologie auf M. Für einen allgemeinen endlich erzeugten A_L-Modul M wählen wir eine Surjektion $A_L^n \twoheadrightarrow M$, betrachten die eben erwähnte Produkttopologie auf A_L^n und statten M mit der zugehörigen Quotiententopologie aus. Dies ist die schwache Topologie auf M.

Bemerkung. Man überlegt sich mit Standardargumenten aus der Topologie folgende Aussagen:

1. Die so auf einem endlich erzeugten A_L-Modul M definierte Topologie ist unabhängig von der Wahl der Surjektion $A_L^n \twoheadrightarrow M$.

2. M mit der schwachen Topologie ist ein topologischer A_L-Modul.

Das folgende Lemma findet sich in [Sch17], Lemma 2.2.4:

Lemma 1.20. (i) Die schwache Topologie auf einem endlich erzeugten A_L-Modul ist vollständig und hausdorffsch.

(ii) Jeder Untermodul N eines endliche erzeugten A_L-Moduls M ist abgeschlossen, und die durch M auf N induzierte Topologie stimmt mit der schwachen Topologie auf N überein.

1.6 Die (φ, Γ)-Moduln über A_L

Wir beginnen diesen Abschnitt mit den Definitionen der grundlegenden Begriffe und werden danach die Konstruktion einer Kategorienäquivalenz zwischen gewissen (φ, Γ)-Moduln und Darstellungen der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ andeuten.

Definition. Ein (φ_L, Γ_L)-*Modul* über A_L ist ein endlich erzeugter A_L-Modul M zusammen mit

- einer Γ_L-Wirkung auf M durch semilineare Automorphismen, die stetig bezüglich der schwachen Topologie ist, und
- einem φ_L-linearen Endomorphismus φ_M, der mit der Γ_L-Wirkung kommutiert.

Bemerkung. Man kann sich überlegen, dass der Endomorphismus φ_M automatisch stetig ist (vgl. [Sch17], Bemerkung 2.2.5).

Definition. Ein (φ_L, Γ_L)-Modul M heißt *étale*, falls die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$A_L \otimes_{\varphi_L, A_L} M \to M, \ f \otimes m \mapsto f\varphi_M(m).$$

Hier bezeichne $A_L \otimes_{\varphi_L, A_L} M$ das gewöhnliche Tensorprodukt über A_L, wobei A_L über den Endomorphismus φ_L als A_L-Modul betrachtet wird, d. h. es gilt für alle $a, b \in A_L$ und alle $m \in M$ die Relation $a\varphi_L(b) \otimes m = a \otimes bm$.

Definition. Ein Homomorphismus zwischen (étalen) (φ_L, Γ_L)-Moduln M, N ist eine A_L-lineare Abbildung $f\colon M \to N$, sodass gilt

$$\varphi_N \circ f = f \circ \varphi_M, \ \gamma \circ f = f \circ \gamma \ \ \forall \gamma \in \Gamma_L.$$

Wir wollen uns nun der Kategorienäquivalenz zuwenden. Zunächst sei dazu festgehalten, was wir mit einer o-Darstellung der Galoisgruppe $G_L := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ meinen.

Definition. Eine stetige *o-Darstellung* von G_L ist ein endlich erzeugter o-Modul V zusammen mit einer o-linearen Wirkung $G_L \times V \to V$, die stetig bezüglich der π-adischen Topologie auf V ist.
Ein Homomorphismus zwischen zwei Darstellungen V und W von G_L ist eine G_L-äquivariante, o-lineare Abbildung $V \to W$.

Von nun an bezeichne $\mathrm{Rep}_o(G_L)$ die (abelsche) Kategorie der stetigen o-Darstellungen von G_L und $\mathrm{Mod}^{et}(A_L)$ die (abelsche) Kategorie der étalen (φ_L, Γ_L)-Moduln über A_L.

Satz 1.21. Es gibt eine Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Rep}_o(G_L)$ und $\mathrm{Mod}^{et}(A_L)$.

Die Konstruktion dieser Äquivalenz sei nun kurz angedeutet, bevor wir uns den (φ, Γ)-Moduln über dem Robba-Ring zuwenden. Im Detail können alle hier genannten Fakten und Konstruktionen in [Sch17], Kapitel 3 nachgelesen werden.

Es bezeichne E_L^{sep} wie üblich den separable Abschluss von E_L in $\mathbb{C}_p^\flat$. Aus der Theorie unverzweigter Erweiterungen wissen wir, dass $\mathrm{Q}(A_L)$ eine bis auf Isomorphie eindeutige maximal unverzweigte Erweiterung K hat.

Satz 1.22. Es existiert ein eindeutiger Zwischenring $A_L \subseteq A \subseteq W\left(E_L^{sep}\right)_L$, der isomorph zur π-adischen Vervollständigung des Ganzheitsringes o_K von K ist.

Bemerkung. A ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit Primelement π und Restklassenkörper E_L^{sep}.

Lemma 1.23. Der Frobenius F und die G_L-Wirkung auf $W\left(E_L^{sep}\right)_L$ erhalten A. Wir erhalten also aus der (φ_L, Γ_L)-Struktur auf A_L eine (φ_L, G_L)-Struktur auf A.

Notation. Sei G eine Gruppe, die auf eine abelsche Gruppe M wirkt, und sei $f\colon M \to M$ ein Endomorphismus. Dann bezeichnen wir mit

$$M^G := \{m \in M \mid g(m) = m \ \forall g \in G\}$$

die Invariantengruppe von M unter G und mit

$$M^{f=1} := \{m \in M \mid f(m) = m\}$$

die Gruppe der Elemente in M, die von f fest gelassen werden.

Sei nun $M \in \mathrm{Mod}^{et}(A_L)$. Wir betrachten den A-Modul $A \otimes_{A_L} M$ zusammen mit dem Endomorphismus $\varphi := F \otimes \varphi_M$ und der G_L-Wirkung

$$G_L \times (A \otimes_{A_L} M) \to A \otimes_{A_L} M,\ (\sigma, a \otimes m) \mapsto \sigma(a) \otimes \sigma(m),$$

wobei G_L über die Projektion $G_L \twoheadrightarrow \Gamma_L$ auf M wirkt. Offenbar kommutieren die so definierten Wirkungen von φ und G_L miteinander (man beachte 1.23 und die Definition von (φ_L, Γ_L)-Moduln), sodass wir eine induzierte G_L-Wirkung auf dem endlich erzeugten o-Modul

$$\mathcal{V}(M) := (A \otimes_{A_L} M)^{\varphi=1}$$

erhalten. Diese Wirkung ist o-linear und stetig bezüglich der π-adischen Topologie auf $\mathcal{V}(M)$, was $\mathcal{V}(M)$ zu einem Objekt in $\mathrm{Rep}_o(G_L)$ macht.

Für den Funktor in die umgekehrte Richtung sei $V \in \mathrm{Rep}_o(G_L)$. Wir betrachten den A-Modul $A \otimes_o V$ zusammen mit dem Endomorphismus $\varphi := F \otimes \mathrm{id}$ und der G_L-Wirkung

$$G_L \times (A \otimes_o V) \to A \otimes_o V,\ (\sigma, a \otimes v) \mapsto \sigma(a) \otimes \sigma(v).$$

Analog zu oben sieht man leicht, dass diese Wirkungen miteinander kommutieren. Setze nun $\mathcal{D}(V) := (A \otimes_o V)^{H_L}$, wobei H_L die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L_\infty)$ bezeichne. Dann haben wir eine wohldefinierte Wirkung der Gruppe $\Gamma_L = G_L/H_L$ auf $\mathcal{D}(V)$ und einen damit kommutierenden Endomorphismus $\varphi_{\mathcal{D}(V)} := \varphi_{|\mathcal{D}(V)}$, was $\mathcal{D}(V)$ zu einem étalen (φ_L, Γ_L)-Modul macht.

Zusammengefasst können wir 1.21 konkretisieren zu:

Satz 1.24. Die Funktoren $\mathcal{V}\colon \operatorname{Mod}^{et}(A_L) \to \operatorname{Rep}_o(G_L)$ und $\mathcal{D}\colon \operatorname{Rep}_o(G_L) \to \operatorname{Mod}^{et}(A_L)$ definieren quasi-inverse Kategorienäquivalenzen zwischen der Kategorie der étalen (φ_L, Γ_L)-Moduln über A_L und der Kategorie der stetigen o-Darstellungen von G_L.

2 (φ, Γ)-Moduln über dem Robba-Ring

In diesem Abschnitt werden wir zunächst den Robba-Ring über einem Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}_p$ einführen. Danach soll das Konzept der (φ, Γ)-Moduln, wie sie in Abschnitt 1 vorgestellt wurden, auf den Robba-Ring als Koeffizientenring übertragen werden. Wir orientieren uns hierbei an [BF17] und [FX13], die Notation ist an [BF17] angelehnt. Weiterhin übernehmen wir die Notation aus dem vorherigen Abschnitt.

2.1 Der Robba-Ring

Definition. Der *Robba-Ring* über L ist definiert als

$$B^{\dagger}_{rig,L} := \left\{ f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \;\middle|\; a_i \in L, \exists\, \varepsilon < 1 : f(X) \text{ konvergiert auf dem Kreisring } \varepsilon \leq |X| < 1 \right\}.$$

Bemerkung. Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir setzen

$$\mathcal{E}^{[r,1)} := \left\{ f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \;\middle|\; a_i \in L, f(X) \text{ konvergiert auf dem Kreisring } r \leq |X| < 1 \right\}.$$

Es ist klar, dass sich der Robba-Ring dann schreiben lässt als $B^{\dagger}_{rig,L} = \bigcup_{r>0} \mathcal{E}^{[r,1)}$. Dies wird in der Literatur auch oft als Definition des Robba-Ringes verwendet (siehe z. B. bei [FX13]).

Der folgende Satz geht auf Lazard zurück ([Laz62]). Man vergleiche beispielsweise auch mit [Ber02] (Satz 4.12) und [Ked04] (Satz 3.20).

Satz 2.1. $B^{\dagger}_{rig,L}$ ist ein Bézout-Ring, d. h. jedes endlich erzeugte Ideal in $B^{\dagger}_{rig,L}$ ist ein Hauptideal.

Um dies zu zeigen, orientieren wir uns an einem Vorlesungsskript von Schneider ([Sch06]). Sei $r > 0$. Zunächst führen wir eine Topologie auf $\mathcal{E}^{[r,1)}$ ein: Sei $\delta \in [r, 1)$ und $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \in \mathcal{E}^{[r,1)}$, dann setzen wir

$$\|f\|_\delta := \max_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| \delta^i.$$

Dies definiert eine Norm auf $\mathcal{E}^{[r,1)}$. Wir statten nun $\mathcal{E}^{[r,1)}$ mit der gröbsten Topologie aus, sodass alle Normen $\|\cdot\|_\delta$ mit $r \leq \delta < 1$ stetig sind.

Bevor wir den Satz beweisen, benötigen wir einige vorbereitende Lemmata. Das erste findet sich in [Sch06], Satz 9.18.

Lemma 2.2. Sei $r > 0$. Jedes abgeschlossene Ideal in $\mathcal{E}^{[r,1)}$ ist ein Hauptideal.

Notation. Für $0 < r < \varepsilon$ setzen wir

$$\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]} := \left\{ f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \;\middle|\; a_i \in L, f(X) \text{ konvergiert auf dem Kreisring } r \leq |X| \leq \varepsilon \right\}.$$

Dann gilt offenbar $\mathcal{E}^{[r,1)} = \bigcap_{r \leq \varepsilon < 1} \mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$.

Wir statten $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ mit einer Norm aus, indem wir für $f \in \mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ setzen:

$$\|f\|_{r,\varepsilon} := \max(\|f\|_r, \|f\|_\varepsilon),$$

wobei $\|f\|_\delta$ für $r \leq \delta \leq \varepsilon$ analog zu oben definiert sei.

Bemerkung. Da der nichtarchimedische Betrag auf L vollständig ist, ist $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ mit der so definierten Norm offenbar ein vollständiger normierter Raum. Damit ist auch der Schnitt $\mathcal{E}^{[r,1)}$ mit der zuvor definierten Topologie vollständig.

Lemma 2.3. Im Ring $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ ist jedes Ideal abgeschlossen.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ ein Hauptidealring ist. Dazu überlege man sich ([Sch06], Korollar 9.13), dass sich jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ schreiben lässt als

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap L[X])\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}.$$

Die Behauptung folgt, da $L[X]$ ein Hauptidealring ist.
Sei nun also $\mathfrak{a} = (f)$ ein beliebiges Ideal in $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ mit $f \neq 0$. Wir wählen eine Folge $(g_i)_i$ in $\mathfrak{a}$, die einen Grenzwert g in $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ besitzt. Wir müssen zeigen, dass g schon in $\mathfrak{a}$ liegt.
Wir finden für jedes $i \in I$ ein $h_i \in \mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$, sodass $g_i = fh_i$. Da die Folge $(g_i)_i$ ein Cauchy-Folge ist, gibt es für jedes $\delta \in [r, \varepsilon]$ eine offene Umgebung der 0, sodass für fast alle $i \in I$ der Ausdruck $\|g_i - g_{i+1}\|_\delta$ in dieser Umgebung liegt. Wegen der Multiplikativität der Norm $\|\cdot\|_\delta$ und wegen $f \neq 0$ folgt damit, dass auch $\|h_i - h_{i+1}\|_\delta$ für fast alle i in dieser Umgebung liegt, d. h. auch $(h_i)_i$ ist eine Cauchy-Folge. Da $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$ vollständig ist, existiert also ein $h \in \mathcal{E}^{[r,\varepsilon]}$, gegen das die Folge $(h_i)_i$ konvergiert. Wir fassen zusammen: Einerseits ist g der Grenzwert der Folge $(g_i)_i$, andererseits lässt sich dies auch schreiben als f multipliziert mit dem Grenzwert der Folge $(h_i)_i$. Es ist also $g = f \cdot h$ und damit $g \in (f) = \mathfrak{a}$. □

Lemma 2.4. Es sei $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $r < \varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_j < \cdots < 1$ und $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 1$. Weiter seien ein $f \in \mathcal{E}^{[r,1)}$ und für alle $j \geq 1$ Elemente $g_j \in \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$ vorgegeben, sodass für alle j gilt:

$$g_{j+1} - g_j \ \in f\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}.$$

Dann existiert ein $g \in \mathcal{E}^{[r,1)}$, sodass $g - g_j \in f\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$ für alle $j \geq 1$.

Beweis. Laut Annahme gilt für alle $j \geq 1$:

$$g_{j+1} + f\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_{j+1}]} \subseteq g_j + f\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}.$$

Man rechne nach, dass die Normen $\|\cdot\|_{r,\varepsilon_j}$ die $g_j + f\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$ zu vollständigen metrischen Räumen machen, und die Inklusionen aus der Annahme diesbezüglich stetige Abbildungen mit dichtem Bild sind. Wir verwenden nun den allgemeinen Satz von Mittag-Leffler (siehe [Are58], Theorem 2.4), der besagt, dass unter diesen Voraussetzungen der Schnitt

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} g_j + f\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$$

nichtleer ist. Jedes Element g aus diesem Schnitt erfüllt die Behauptung. □

Lemma 2.5. Für jedes $r > 0$ ist der Ring $\mathcal{E}^{[r,1)}$ ein Bézout-Ring.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugtes Ideal in $\mathcal{E}^{[r,1)}$. Per Induktion können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathfrak{a} = (f, g)$ mit zwei Elementen $f, g \in \mathcal{E}^{[r,1)}$. Nach 2.2 ist der Abschluss von $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal (h) mit $h \in \mathcal{E}^{[r,1)}$. Es genügt nun zu zeigen, dass h schon in $\mathfrak{a}$ liegt.
Zunächst gilt per Definiton, dass $f = hf_0$ und $g = hg_0$ mit $h_0, g_0 \in \mathcal{E}^{[r,1)}$. Ferner gilt mit der Notation von oben für jedes $j \geq 1$ (vgl. 2.4): Jedes Ideal in $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$ ist abgeschlossen, insbesondere also auch das von f und g in diesem Ring erzeugte Ideal. Es folgt, dass h in diesem Ideal liegt. Also finden wir für jedes $j \geq 1$ Elemente $a_j, b_j \in \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$, sodass gilt:

$$h = a_j f + b_j g.$$

Wir setzen ein:

$$h = a_j h f_0 + b_j h g_0,$$

und da $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$ nullteilerfrei ist, erhalten wir

$$a_j f_0 + b_j g_0 = 1.$$

Weil die $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$ ineinander enthalten sind, haben wir diese Gleichung auch für den Index $j+1$:

$$a_{j+1} f_0 + b_{j+1} g_0 = 1 \text{ in } \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}.$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} b_{j+1} - b_j &= (b_{j+1} - b_j)\, a_j f_0 + (b_{j+1} - b_j)\, b_j g_0 \\ &= (b_{j+1} - b_j)\, a_j f_0 + (a_j - a_{j+1})\, b_j f_0 \ \in f_0\, \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}. \end{aligned}$$

Nach 2.4 existiert also ein $b \in \mathcal{E}^{[r,1)}$, sodass für alle $j \geq 1$ gilt:

$$b - b_j = c_j f_0 \text{ mit } c_j \in \mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}.$$

Wir erhalten insgesamt für alle $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} bg - h = h(bg_0 - 1) &= h((b - b_j)g_0 - a_j f_0) \\ &= h(c_j g_0 - a_j) f_0 \\ &= (c_j g_0 - a_j) f. \end{aligned}$$

Setze nun $d := c_j g_0 - a_j$. Da die $\mathcal{E}^{[r,\varepsilon_j]}$ nullteilerfrei sind, sieht man mit einer analogen Rechnung zu der oben, dass d nicht von j abhängt und damit im Schnitt $\mathcal{E}^{[r,1)}$ liegt. Insgesamt erhalten wir $h = -df + bg \in (f, g)$, was wir zeigen wollten. ◻

Beweis von 2.1. Sei $\mathfrak{a} \subseteq B^{\dagger}_{rig,L}$ ein endlich erzeugtes Ideal, d. h. es existieren $f_1, \ldots, f_n \in B^{\dagger}_{rig,L}$ mit $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$. Dann finden wir ein $r > 0$, sodass alle f_i für $1 \leq i \leq n$ in $\mathcal{E}^{[r,1)}$ liegen. Wegen 2.5 ist aber das von den f_i in $\mathcal{E}^{[r,1)}$ erzeugte Ideal ein Hauptideal (f) und somit auch $\mathfrak{a} = (f)$. ◻

Nachdem wir nun eine wichtige Eigenschaft des Robba-Ringes gezeigt haben, wollen wir jetzt die Wirkungen von φ und Γ_L auf $\mathcal{A}_L$ aus Abschnitt 1.5 auch auf $B^{\dagger}_{rig,L}$ einführen. Wir definieren diese wie zuvor als stetige Erweiterung der entsprechenden Wirkungen auf $o[[X]]$ auf den gesamten Robba-Ring, d. h. wir haben eine (offensichtlich injektive) Frobeniusabbildung auf $B^{\dagger}_{rig,L}$ gegeben durch:

$$\varphi_L \colon B^{\dagger}_{rig,L} \to B^{\dagger}_{rig,L},\ f(X) \mapsto f([\pi]_{\varphi}(X)).$$

Für die Γ_L-Wirkung $\Gamma_L \times B^{\dagger}_{rig,L} \to B^{\dagger}_{rig,L}$ wird wieder der Isomorphismus $\chi_L \colon \Gamma_L \xrightarrow{\cong} o^{\times}$ verwendet und wir haben

$$\gamma.f := f([\chi_L(\gamma)]_{\varphi}(X)).$$

Dann gilt analog zu 1.18:

Lemma 2.6. $B^{\dagger}_{rig,L}$ ist ein freier $\varphi_L\left(B^{\dagger}_{rig,L}\right)$-Modul vom Rang q.

Insbesondere haben wir für diese Ringerweiterung eine wohldefinierte Spur $\mathrm{sp}_{B^{\dagger}_{rig,L}/\varphi_L(B^{\dagger}_{rig,L})}$, die wir nun verwenden wollen, um ein Linksinverses zur Frobenius-Abbildung φ_L auf dem Ring $B^{\dagger}_{rig,L}$ zu definieren.

Lemma 2.7. Es existiert ein eindeutiger Morphismus $\psi_L \colon B^{\dagger}_{rig,L} \to B^{\dagger}_{rig,L}$, der die Gleichung

$$\varphi_L \circ \psi_L = q^{-1}\,\mathrm{sp}_{B^{\dagger}_{rig,L}/\varphi_L(B^{\dagger}_{rig,L})}$$

erfüllt. Weiterhin gilt für alle $a, b \in B^{\dagger}_{rig,L}$:

$$\psi_L(\varphi_L(a)\, b) = a\psi_L(b),$$

also insbesondere $\psi_L \circ \varphi_L = \mathrm{id}$.

Beweis. Für die Existenz von ψ_L bemerken wir, dass die Abbildung $\varphi_L \colon B^{\dagger}_{rig,L} \to \varphi_L\left(B^{\dagger}_{rig,L}\right)$ bijektiv ist, und wir somit auf dem Bild der Spur $\mathrm{sp}_{B^{\dagger}_{rig,L}/\varphi_L(B^{\dagger}_{rig,L})}$ von der Umkehrabbildung φ_L^{-1} sprechen können. Setze nun

$$\psi_L := q^{-1}\varphi_L^{-1} \circ \mathrm{sp}_{B^{\dagger}_{rig,L}/\varphi_L(B^{\dagger}_{rig,L})}.$$

Die Eindeutigkeit von ψ_L folgt auf offensichtliche Weise aus der Injektivität von φ_L.
Seien nun $a, b \in B^{\dagger}_{rig,L}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_L(\psi_L(\varphi_L(a)\, b)) &= q^{-1}\,\mathrm{sp}_{B^{\dagger}_{rig,L}/\varphi_L(B^{\dagger}_{rig,L})}(\varphi_L(a)\, b) \\
&= q^{-1}\varphi_L(a)\,\mathrm{sp}_{B^{\dagger}_{rig,L}/\varphi_L(B^{\dagger}_{rig,L})}(b) \\
&= \varphi_L(a)\, q^{-1}\,\mathrm{sp}_{B^{\dagger}_{rig,L}/\varphi_L(B^{\dagger}_{rig,L})}(b) \\
&= \varphi_L(a)\,\varphi_L(\psi_L(b)) \\
&= \varphi_L(a\psi_L(b)),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung gilt, da $\varphi_L(a) \in \varphi_L\left(B^\dagger_{rig,L}\right)$, also von der Spur fest gelassen wird. Die Behauptung folgt aus der Injektivität von φ_L. □

Bemerkung. Analog sieht man, dass für $a, b \in B^\dagger_{rig,L}$ auch gilt: $\psi_L(a\varphi_L(b)) = \psi_L(a)b$.

Lemma 2.8. Der Morphismus ψ_L kommutiert mit der Γ_L-Wirkung.

Beweis. Per Definition kommutieren φ_L und Γ_L. Wir müssen uns überlegen, dass auch die Spur mit der Wirkung der Galoisgruppe kommutiert, um die Aussage zu zeigen. Dies folgt aber leicht aus der Tatsache, dass φ_L und Γ_L kommutieren, denn damit sehen wir, dass $\varphi_L(B^\dagger_{rig,L})$ stabil unter Γ_L ist. Damit ist aber $\gamma \circ \mathrm{sp}_{B^\dagger_{rig,L}/\varphi_L(B^\dagger_{rig,L})} \circ \gamma^{-1} = \mathrm{sp}_{B^\dagger_{rig,L}/\varphi_L(B^\dagger_{rig,L})}$ für alle $\gamma \in \Gamma_L$. □

Zuletzt wollen wir die schwache Topologie auf dem Robba-Ring einführen. Diese ist durch die $o[[X]]$-Untermoduln $U_m := X^m o[[X]] + \pi^m B^\dagger_{rig,L}$ als Fundamentalsystem von Umgebungen der 0 gegeben. Wir erweitern dies analog zu Abschnitt 1.5 auf freie $B^\dagger_{rig,L}$-Moduln von endlichem Rang, indem wir einen solchen mit $\left(B^\dagger_{rig,L}\right)^n$ für ein $n \geq 1$ identifizieren und dieses mit der Produkttopologie der schwachen Topologie auf jedem Faktor ausstatten.

Bemerkung. Man kann wie im Fall von $\mathcal{A}_L$ zeigen: Die φ_L- und die Γ_L-Wirkungen auf $B^\dagger_{rig,L}$ sind stetig bezüglich der schwachen Topologie.

2.2 Die (φ, Γ)-Moduln über $B^\dagger_{rig,L}$

Wir wollen nun das Konzept der (φ, Γ)-Moduln auf den oben betrachteten Ring erweitern. Die Definition ist analog zu der über $\mathcal{A}_L$.

Definition. Ein (φ, Γ)-*Modul* über $B^\dagger_{rig,L}$ ist ein freier $B^\dagger_{rig,L}$-Modul M von endlichem Rang zusammen mit

- einer Γ_L-Wirkung durch semilineare Automorphismen, die stetig bezüglich der schwachen Topologie ist, und
- einem φ_L-linearen Endomorphismus φ_M, dessen Darstellungsmatrix invertierbar ist und der mit der Γ_L-Wirkung kommutiert.

Die Definition eines étalen (φ, Γ)-Moduls weicht nun allerdings etwas von der schon bekannten ab, die wir um eine Bedingung erweitern müssen. Sei also M ein (φ, Γ)-Modul über $B^\dagger_{rig,L}$, sodass die Abbildung

$$\tilde{\varphi}_M \colon B^\dagger_{rig,L} \otimes_{\varphi_L, B^\dagger_{rig,L}} M \to M,\ f \otimes m \mapsto f\varphi_M(m)$$

bijektiv ist (Erinnerung: Dies war die Bedingung für einen étalen Modul über A_L). Es bezeichne v die diskrete Bewertung auf L. Wir definieren zunächst eine diskrete Bewertung auf $B^\dagger_{rig,L}$ durch

$$\omega\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i\right) := \min_i v(a_i)$$

für $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i \in B^\dagger_{rig,L}$.

Lemma 2.9. Diese Definition liefert tatsächlich eine diskrete Bewertung.

Beweis. Angenommen wir haben $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i \in B^\dagger_{rig,L}$ mit $\omega(f) = \infty$. Dann ist per Definition $\min v(a_i) = \infty$, insbesondere $v(a_i) = \infty$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, und da v eine Bewertung ist, also $a_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.
Seien nun $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$ und $g = \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i X^i$ Elemente aus $B^\dagger_{rig,L}$. Dass $\omega(fg) \geq \omega(f) + \omega(g)$, ist eine direkte Konsequenz der Dreiecksungleichung für die Bewertung v. Für die umgekehrte Abschätzung seien k_0 und l_0 die kleinsten Indizes, sodass $\omega(f) = v(a_{k_0})$ und $\omega(g) = v(b_{l_0})$. Setze $i_0 := k_0 + l_0$. Angenommen wir haben $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq k_0$ und $l \neq l_0$, sodass $i_0 = l + k$, dann folgt $k < k_0$ oder $l < l_0$, also $\omega(f) < v(a_k)$ oder $\omega(g) < v(b_l)$. Insbesondere gilt

$$v\left(\sum_{k+l=i_0} a_k b_l\right) = v\left(a_{k_0} b_{l_0}\right).$$

Wir erhalten

$$\omega(fg) \leq v\left(\sum_{k+l=i_0} a_k b_l\right) = v(a_{k_0}) + v(b_{l_0}) = \omega(f) + \omega(g),$$

was zusammen mit der obigen Abschätzung die gewünschte Gleichheit liefert.
Weiter haben wir

$$\omega(f+g) = \omega\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} (a_i + b_i) X^i\right) = \min_i v(a_i + b_i).$$

Da v eine Bewertung ist, gilt für jedes i, dass $v(a_i + b_i) \geq \min(v(a_i), v(b_i))$, insbesondere ist also $\omega(f+g)$ stets größer gleich der minimal möglichen Bewertung der a_i und b_j, d. h.

$$\omega(f+g) \geq \min\left(\min_i v(a_i), \min_j v(b_j)\right) = \min(\omega(f), \omega(g)).$$

Dass ω diskret ist, ist offensichtlich, weil v eine diskrete Bewertung ist. □

Diese Bewertung ermöglicht uns die folgende Definition für den (φ, Γ)-Modul M (vergleiche [Ked04]).

Definition. Der *Anstieg* von M ist definiert als die rationale Zahl

$$\mu(M) := \frac{\omega(\det(\varphi_M))}{\operatorname{rg}(M)}.$$

Bemerkung. Die Wohldefiniertheit von $\mu(M)$ folgt aus der Tatsache, dass ω eine diskrete Bewertung ist, und daraus, dass nach Voraussetzung $\det(\varphi_M)$ eine Einheit, also $\omega(\det(\varphi_M)) \neq \infty$ ist.

Wir können nun die Eigenschaft étale für (φ,Γ)-Moduln über dem Robba-Ring definieren:

Definition. Es sei M ein (φ,Γ)-Modul über $B^{\dagger}_{rig,L}$. Wir nennen M *étale*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Abbildung $\tilde{\varphi}_M$ ist bijektiv,
- $\mu(M) = 0$ und
- für jeden φ_M-invarianten Untermodul $N \subseteq M$, für den $\widetilde{(\varphi_M|_N)}$ bijektiv ist, gilt $\mu(N) \geq 0$.

2.3 L-Analytizität

Um nun im nächsten Abschnitt ein Analogon zur Kategorienäquivalenz 1.21 über dem Robba-Ring formulieren zu können, müssen wir zunächst die dafür benötigten Begriffe von L-analytischen Darstellungen und (φ,Γ)-Moduln einführen. Dies soll in diesem Abschnitt geschehen. Wir beginnen mit den L-analytischen Darstellungen:

Es bezeichne $\mu_{p^n}(\overline{L})$ die Gruppe der p^n-ten Einheitswurzeln in einem algebraischen Abschluss von L und χ_p den p-adischen zyklotomischen Charakter auf $\mu_{p^\infty}(\overline{L}) = \bigcup_n \mu_{p^n}(\overline{L})$. Weiter sei $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n}(\overline{L})$ der p-adische Tate-Modul von L.

Definition. Sei $r \geq 0$. Die *Tate-Twists* von $\mathbb{Z}_p$ seien wie folgt definiert:

$$\mathbb{Z}_p(r) := \mathbb{Z}_p^{\otimes r}, \qquad \mathbb{Z}_p(-r) := \mathbb{Z}_p(r)^\vee,$$

wobei $\mathbb{Z}_p(r)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(\mathbb{Z}_p(r), \mathbb{Z}_p\right)$ das lineare Dual von $\mathbb{Z}_p(r)$ meint.
Weiter definieren wir die Tate-Twists eines beliebigen $\mathbb{Z}_p[G_L]$-Moduls M durch

$$M(r) := \mathbb{Z}_p(r) \otimes_{\mathbb{Z}_p} M.$$

Bemerkung. Bekanntermaßen ist $\mathbb{Z}_p(1)$ ein freier $\mathbb{Z}_p$-Modul vom Rang 1. Nach Wahl einer Basis entspricht dann der r-te Tate-Twist von M gerade dem Modul M mit der G_L-Wirkung gegeben durch $\gamma.m = \chi_p(\gamma)^r\gamma(m)$ für $\gamma \in G_L$ und $m \in M$.

Definition. Eine $\mathbb{C}_p$-semilineare Darstellung von G_L ist ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}_p$-Vektorraum W zusammen mit einer stetigen, semilinearen G_L-Wirkung, d. h. $\gamma(cw) = \gamma(c)\gamma(w)$ für alle $\gamma \in G_L$, $c \in \mathbb{C}_p$ und $w \in W$. Wir bezeichnen die (abelsche) Kategorie solcher Darstellungen mit $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p}(G_L)$.

Bemerkung. Sei $\mathrm{Rep}_L(G_L)$ die Kategorie der stetigen, L-linearen Darstellungen von G_L. Es ist klar, dass ein $V \in \mathrm{Rep}_L(G_L)$ uns über die Zuordnung

$$V \mapsto \mathbb{C}_p \otimes_{\tau,L} V$$

ein Element in $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p}(G_L)$ liefert, indem wir die G_L-Wirkung durch $\gamma(c \otimes v) := \gamma(c) \otimes \gamma(v)$ definieren. Hierbei sei $\tau\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ eine Einbettung und das Tensorprodukt wie in Abschnitt 1.6 definiert.

Sei nun $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p}(G_L)$. Für $q \in \mathbb{Z}$ betrachten wir den L-Vektorraum $W\{q\} := W(q)^{G_L}$, welcher nach Wahl einer Basis von $\mathbb{Z}_p(1)$ offenbar isomorph zu $\left\{w \in W \mid \gamma(w) = \chi_p(\gamma)^{-q} w \;\; \forall \gamma \in G_L\right\}$ ist. Wir haben eine natürliche L-lineare, G_L-äquivariante Abbildung

$$L(-q) \otimes_L W\{q\} \hookrightarrow L(-q) \otimes_L W(q) = \mathbb{Z}_p(-q) \otimes_{\mathbb{Z}_p} L \otimes_L \mathbb{Z}_p(q) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \cong W,$$

gegeben durch die Multiplikation $a \otimes w \mapsto aw$. Diese erweitern wir nun linear zu einer Abbildung

$$\mathbb{C}_p(-q) \otimes_L W\{q\} \to W$$

in $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p}(G_L)$ und erhalten den folgenden Satz, der auf Serre und Tate zurückgeht.

Satz 2.10. Sei $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_p}(G_L)$. Dann ist die natürliche Abbildung

$$\xi_W : \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \left(\mathbb{C}_p(-q) \otimes_L W\{q\}\right) \to W$$

injektiv. Insbesondere gilt $W\{q\} \neq 0$ für nur endlich viele q.

Für den Beweis orientieren wir uns an [BC09]. Dazu benötigen wir noch folgende Definition:

Definition. Sei $x = (x_q)_q \in \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \left(\mathbb{C}_p(-q) \otimes_L W\{q\}\right)$. Dann ist die Länge von x definiert durch

$$\ell(x) := \sum_q \ell(x_q),$$

wobei $\ell(x_q)$ die kleinste ganze Zahl $n_q \geq 0$ sei, sodass x_q sich als Summe aus n_q Elementartensoren schreiben lässt.

Bemerkung. Da $\ell(x_q) \neq 0$ nur für endlich viele q gilt, ist die Länge wohldefiniert.

Beweis von 2.10. Angenommen es ist $\ker(\xi_W) \neq 0$. Dann wählen wir ein nichttriviales Element $v = (v_q)_q \in \ker(\xi_W)$ von minimaler Länge. Wir zeigen, dass $\ell(v) = 1$ gelten muss.
Zunächst existiert nach Voraussetzung ein $q_0 \in \mathbb{Z}$, sodass $v_{q_0} \neq 0$. Durch eventuelles Skalieren mit Elementen aus $\mathbb{C}_p^\times$ (man beachte, dass dies die Länge nicht verändert) können wir erreichen, dass v_{q_0} eine Darstellung minimaler Länge

$$v_{q_0} = \sum_j c_j \otimes y_j$$

hat mit $c_j \in \mathbb{C}_p^\times$, $y_j \in W\{q_0\}$ und einem Index j_0, sodass $0 \neq c_{j_0} \in \mathbb{Q}_p(q_0)$.
Sei nun $\gamma \in G_L$, dann liegt auch $\gamma(v)$ und damit $\gamma(v) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v$ in $\ker(\xi_W)$. Wir zeigen zunächst,

dass letzteres Element trivial sein muss. Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ sei dazu $\sum_j c_{j,q} \otimes y_{j,q}$ eine Darstellung minimaler Länge von v_q. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma(v_q) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v_q &= \gamma\left(\sum_j c_{j,q} \otimes y_{j,q}\right) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} \sum_j c_{j,q} \otimes y_{j,q} \\
&= \sum_j \left(\gamma(c_{j,q} \otimes y_{j,q}) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} c_{j,q} \otimes y_{j,q}\right) \\
&= \sum_j \left(\gamma(c_{j,q}) \otimes \chi_L(\gamma)^{-q} y_{j,q} - \chi_L(\gamma)^{-q_0} c_{j,q} \otimes y_{j,q}\right) \\
&= \sum_j \left(\chi_L(\gamma)^{-q} \gamma(c_{j,q}) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} c_{j,q}\right) \otimes y_{j,q},
\end{aligned}$$

also hat $\gamma(v_q) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v_q$ höchstens Länge $\ell(v_q)$. Damit gilt aber auch

$$\ell\left(\gamma(v) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v\right) \leq \ell(v).$$

Diese Ungleichung ist tatsächlich strikt, denn: Ein Summand von $\ell(v)$ ist die Länge des Ausdrucks

$$\gamma(v_{q_0}) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v_{q_0} = \sum_j \left(\chi_L(\gamma)^{-q_0} \gamma(c_j) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} c_j\right) \otimes y_j.$$

Es war aber ein Index j_0 gewählt, für den gilt $c_{j_0} \in \mathbb{Q}_p(q_0)$, d. h. an der Stelle j_0 verschwindet die Differenz $\chi_L(\gamma)^{-q_0} \gamma(c_{j_0}) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} c_{j_0}$, und damit hat obiger Ausdruck Länge echt kleiner $\ell(v_{q_0})$. Insgesamt erhalten wir $\ell(\gamma(v) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v) < \ell(v)$, und wegen $\ell(\gamma(v) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v) \in \ker(\xi_W)$ und der Minimalität von v also $\gamma(v) - \chi_L(\gamma)^{-q_0} v = 0$.
Folglich ist $\chi_L(\gamma)^{q_0} \gamma(v) = v$ für alle $\gamma \in G_L$, d. h. $v \in \mathbb{Q}_p(-q_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} W\{q_0\}$, aber hier lassen sich alle Elemente als Elementartensoren schreiben und somit gilt $\ell(v) = 1$.
Wir haben also gezeigt, dass ein nichttriviales Element minimaler Länge in $\ker(\xi_W)$ immer die Form $v = c \otimes w$ hat mit $c \in \mathbb{C}_p^\times$ und $0 \neq w \in W\{q_0\}$. Es folgt der Widerspruch

$$0 = \xi_W(v) = \xi_W(c \otimes w) = cw \neq 0.$$

□

Definition. Sei $V \in \mathrm{Rep}_L(G_L)$ eine Darstellung, $\tau\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ eine Einbettung und $W := \mathbb{C}_p \otimes_{\tau,L} V$. Wir nennen die $q \in \mathbb{Z}$, für die $W\{q\} \neq 0$ gilt, die *Hodge-Tate Gewichte* von V an τ.

Nun haben wir alles zusammen, um L-analytische Darstellungen definieren zu können:

Definition. Ein $V \in \mathrm{Rep}_L(G_L)$ heißt *L-analytisch*, wenn die Hodge-Tate Gewichte von V an jeder Einbettung $\mathrm{id} \neq \tau\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ gleich Null sind.

Wir wollen auch für (φ, Γ)-Moduln ein Konzept von L-Analytizität definieren. Dazu benötigen wir elementares Wissen aus der p-adischen Topologie und Lie-Theorie. Die wichtigsten Resultate sind in Appendix A aufgelistet.

Wegen des Isomorphismus $\chi_L \colon \Gamma_L \to o^\times$ ist Γ_L auf natürliche Weise eine Lie-Gruppe über L. Weiters induziert χ_L einen Isomorphismus $\mathrm{Lie}(\Gamma_L) \to o$, sodass wir $\mathrm{Lie}(\Gamma_L)$ mit dem Ganzheitsring in L identifizieren können.

Sei nun M ein (φ, Γ)-Modul über $B^\dagger_{rig,L}$. Wir wählen eine Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von M und definieren einen Modul über $\mathcal{E}^{[r,1)}$ durch

$$M^{[r,1)} := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^{[r,1)} \cdot e_i.$$

Bemerkung. Die Definition von $M^{[r,1)}$ hängt offenbar von der Wahl der Basis ab. Ist aber r hinreichend groß, so gilt für zwei Basen $(e_1, \ldots, e_n)$ und $(e'_1, \ldots, e'_n)$, dass

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^{[r,1)} \cdot e_i = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{E}^{[r,1)} \cdot e'_i.$$

Weiterhin ist für hinreichend großes r der Modul $M^{[r,1)}$ stabil unter der Γ_L-Wirkung auf M.

Sei $\gamma \in \Gamma_L$. Wir interessieren uns für den Ausdruck

$$\log \gamma := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\gamma - 1)^i (-1)^{i-1}}{i}$$

und insbesondere dafür, ob und wann dieser auf $M^{[r,1)}$ konvergiert. Dieser Ausdruck wird uns dann eine gewisse Abbildung liefern, mit deren Hilfte wir sagen können, was es für den (φ, Γ)-Modul M heißt, L-analytisch zu sein.

Wir erinnern zunächst an folgenden Begriff aus der Algebra:

Definition. Eine *Gruppenfiltrierung* einer Gruppe G ist eine absteigende Folge von normalen Untergruppen $G = G_0 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} \supseteq \ldots$.

Bemerkung. Für die Gruppe Γ_L wählen wir die kanonische Filtrierung gegeben durch die Normalteiler

$$\Gamma_{L,n} := \mathrm{Gal}(L_\infty / L_n).$$

Definiere nun eine Bewertung auf $\mathcal{E}^{[r,1)}$ wie folgt: Sei s eine natürliche Zahl mit $r \geq s > 0$ und sei $f \in \mathcal{E}^{[r,1)}$, dann setzen wir

$$v^{[s,r]}(f) := \inf_{\substack{z \in \mathbb{C}_p, \\ s \leq v_p(z) \leq r}} v_p(f(z)).$$

Lemma 2.11. Für alle $r > s > 0$ existiert eine hinreichend großer Index n, sodass für alle $\gamma \in \Gamma_{L,n}$ und alle $z \in \mathcal{E}^{[r,1)}$ gilt:

$$v^{[s,r]}((1-\gamma)z) \geq v^{[s,r]}(z) + 1.$$

Beweis. Angenommen, wir haben $z \in L$. Dann ist $\gamma(z) = z$ für alle $\gamma \in \Gamma_L$ und die Aussage gilt trivialerweise. Sei also ohne Einschränkung $z = X^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Für $k \geq 0$ gilt

$$(\gamma - 1)(X^k) = \gamma(X^k) - X^k = X^k \left(\frac{\gamma(X)}{X} - 1\right)\left(\frac{\gamma(X^{k-1})}{X^{k-1}} + \cdots + 1\right)$$

und wir erhalten für die Bewertung:

$$v^{[s,r]}\left(\gamma(X^k) - X^k\right) \geq v^{[s,r]}(X^k) + v^{[s,r]}\left(\frac{\gamma(X)}{X} - 1\right) + v^{[s,r]}\left(\frac{\gamma(X^{k-1})}{X^{k-1}} + \cdots + 1\right).$$

Für $\gamma \to 1$ nähert sich aber $\frac{\gamma(X)}{X} - 1$ immer weiter der Null an, die mittlere Bewertung geht also gegen unendlich. Damit ist der Ausdruck für hinreichend kleines γ auf jeden Fall größer gleich $v^{[s,r]}(X^k) + 1$.
Für $k < 0$ greift die gleiche Argumentation mit dem Ausdruck

$$\gamma(X^{-k}) - X^{-k} = X^{-k}\left(\frac{X}{\gamma(X)} - 1\right)\left(\frac{X^{k-1}}{\gamma(X^{k-1})} + \cdots + 1\right).$$

□

Mit dem gerade gezeigten Lemma (und der Stetigkeit der Γ_L-Wirkung) sehen wir, dass der oben definierte Ausdruck $\log\gamma$ für $\gamma \to 1$ auf dem Untermodul $M^{[r,1)} \subseteq M$ konvergiert. Wir erhalten also die Zuordnung

$$\mathrm{d}\,\Gamma_L\colon\ \mathrm{Lie}(\Gamma_L) \to \mathrm{End}_L\left(M^{[r,1)}\right),\quad t \mapsto \log(\exp(t)),$$

wobei exp die Exponentialabbildung von Γ_L auf einer Umgebung der Null in $\mathrm{Lie}(\Gamma_L)$ bezeichne (siehe auch Appendix A). Über $\mathbb{Z}_p$-Linearität erweitern wir diese Abbildung auf ganz $\mathrm{Lie}(\Gamma_L)$ und erhalten eine $\mathbb{Q}_p$-lineare Abbildung

$$(\mathrm{d}\,\Gamma_L)_M :\ \mathrm{Lie}(\Gamma_L) \to \mathrm{End}_L(M).$$

Definition. Der (φ,Γ)-Modul M heißt *L-analytisch*, falls die Abbildung $(\mathrm{d}\,\Gamma_L)_M$ sogar L-linear ist.

Bemerkung. Angenommen, M ist L-analytisch. Seien $t, t' \in o$, beide nicht Null. Dann haben wir:

$$\frac{(\mathrm{d}\,\Gamma_L)_M\,(t)}{t} - \frac{(\mathrm{d}\,\Gamma_L)_M\,(t')}{t'} = \frac{t'\,(\mathrm{d}\,\Gamma_L)_M\,(t) - t\,(\mathrm{d}\,\Gamma_L)_M\,(t')}{tt'} = 0,$$

der Ausdruck $\frac{(\mathrm{d}\,\Gamma_L)_M(t)}{t}$ hängt also nicht von der Wahl von t ab. Den resultierenden Operator auf M bezeichnen wir mit ∇_M.

2.4 Die Kategorienäquivalenz

Wir wollen nun eine Kategorienäquivalenz analog zu der schon bekannten aus 1.21 formulieren. Wir werden uns dabei an die Notation aus dem entsprechenden Abschnitt halten: A_L sei der Ring, über dem wir klassisch die (φ, Γ)-Moduln definiert haben, B_L sein Quotientenkörper und A der bis auf Isomorphie eindeutige Ring, der isomorph zur π-adischen Vervollständigung des Ganzheitsringes der maximal unverzweigten Erweiterung von B_L ist. Weiter bezeichne $B_L^\dagger$ den Teilring von B_L, der aus den Potenzreihen mit nichtleerem Konvergenzbereich besteht.

Es ist klar, dass sich die Definition von (φ, Γ)-Moduln über A_L auf Vektorräume über B_L erweitert. Ein étaler (φ, Γ)-Modul ist dann einer, der eine Basis hat, sodass die Darstellungsmatrix von φ_L invertierbar ist und Einträge in A_L hat. Die Aussage aus 1.21 wird in diesem Fall zu:

Satz 2.12. Wir haben eine Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Rep}_L(G_L)$ und $\mathrm{Mod}^{et}(B_L)$, gegeben durch die Funktoren $V \mapsto \mathcal{D}(V) = (A \otimes_L V)^{H_L}$ und $D \mapsto \mathcal{V}(D) = (A \otimes_{B_L} D)^{\varphi_L = 1}$.

Um dies auf den Robba-Ring zu übertragen, benötigen wir die folgende Definition:

Definition. Ein (φ, Γ)-Modul M über B_L heißt *überkonvergent*, wenn er eine Basis besitzt, sodass die Darstellungsmatrizen von φ_L und jedem $\gamma \in \Gamma_L$ Einträge in $B_L^\dagger$ haben. Eine solche Basis erzeugt einen $B_L^\dagger$-Vektorraum, den wir mit $M^\dagger$ bezeichnen.
Entsprechend nennen wir eine Darstellung $V \in \mathrm{Rep}_L(G_L)$ *überkonvergent*, wenn $\mathcal{D}(V)$ überkonvergent ist. Wir bezeichnen dann mit $\mathcal{D}^\dagger(V)$ den korrespondierenden $B_L^\dagger$-Vektorraum.

Notation. Sei V eine überkonvergente Darstellung von G_L. Dann schreiben wir

$$\mathcal{D}^\dagger_{rig}(V) := B^\dagger_{rig,L} \otimes_{B_L^\dagger} \mathcal{D}^\dagger(V).$$

Der folgende Satz ist Theorem 10.1 in [Ber16]:

Satz 2.13. Jede L-analytische Darstellung ist überkonvergent.

Damit erhalten wir die folgende Kategorienäquivalenz, die Theorem 10.4 in [Ber16] entspricht.

Satz 2.14. Der Funktor $V \mapsto \mathcal{D}^\dagger_{rig}(V)$ liefert eine Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie der L-analytischen Darstellungen von G_L und der Kategorie der étalen, L-analytischen (φ, Γ)-Moduln über $B^\dagger_{rig,L}$.

3 Kohomologie für (φ, Γ)-Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Kohomologietheorien für (φ, Γ)-Moduln über dem Robba-Ring beschäftigen. Wir beginnen mit einer kurzen Einführung der EM-Kohomologie einer gewissen Halbgruppe, danach werden wir uns der analytischen Kohomologie widmen. Beide Theorien haben sich als nützlich bei der Analyse von Eigenschaften von endlichen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$ erwiesen. So zeigen beispielsweise Fourquaux und Xie in [FX13], dass es für eine endliche Erweiterung $F/\mathbb{Q}_p$ mit $F \neq \mathbb{Q}_p$ Darstellungen der absoluten Galoisgruppe G_F gibt, die nicht überkonvergent sind. Dass dies im Fall $F = \mathbb{Q}_p$ nicht der Fall ist, ist ein Resultat von Colmez (siehe [Col08]).

3.1 EM-Kohomologie

Sei M ein (φ, Γ)-Modul über $B^{\dagger}_{rig,L}$. Aufgrund der (φ, Γ)-Modulstruktur erhalten wir eine Wirkung der Halbgruppe $G^+ := \varphi_L^{\mathbb{N}_0} \times \Gamma_L$ auf M. Betrachte nun den Komplex

$$C^\bullet(G^+, M) := \qquad 0 \longrightarrow C^0(G^+, M) \xrightarrow{d_1} C^1(G^+, M) \xrightarrow{d_2} \dots,$$

wobei $C^0(G^+, M) = M$ und $C^n(G^+, M) = C_{\mathrm{st}}((G^+)^n, M)$ für $n \geq 1$ die stetigen Funktionen von $(G^+)^n$ nach M seien. Die Differentiale sind gegeben durch

$$d_n c(g_0, \dots, g_{n-1}) = g_0 \cdot c(g_1, \dots, g_{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{i+1} c(g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n-1}) + (-1)^n c(g_0, \dots, g_{n-2}).$$

Man überzeugt sich durch Nachrechnen, dass $d_{n+1} \circ d_n = 0$ gilt, diese Definition also in der Tat einen Komplex liefert.

Definition. Wie in der Kohomologietheorie üblich bezeichne $Z^n(G^+, M) = \ker d_{n+1}$ die Gruppe der *Kozykeln* und $B^n(G^+, M) = \operatorname{im} d_n$ die Gruppe der *Koränder*. Dann heißen die Gruppen

$$H^n(M) := H^n(G^+, M) = Z^n(G^+, M)/B^n(G^+, M)$$

die *Eilenberg-MacLane-Kohomologiegruppen* oder kurz *EM-Kohomologiegruppen* von M.

Diese Kohomologie weist einige Parallelen und Verbindungen zu der im nächsten Abschnitt definierten analytischen Kohomologie auf, weshalb wir die folgenden Aussagen hier festhalten wollen.

Notation. Seien M_1 und M_2 zwei (φ, Γ)-Moduln über $B^{\dagger}_{rig,L}$. Dann bezeichnen wir mit $\operatorname{Ext}(M_1, M_2)$ den L-Vektorraum der Erweiterungen von M_1 durch M_2 in der Kategorie der (φ, Γ)-Moduln über $B^{\dagger}_{rig,L}$.

Sei M ein (φ, Γ)-Modul über $B^{\dagger}_{rig,L}$. Wir wollen eine natürliche Abbildung

$$\Theta^M\colon \operatorname{Ext}(B^{\dagger}_{rig,L}, M) \to H^1(M)$$

konstruieren. Sei dazu N eine Erweiterung von $B^{\dagger}_{rig,L}$ durch M. Per Definition haben wir dann die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow B^{\dagger}_{rig,L} \longrightarrow 0.$$

Wähle nun einen Lift $e \in N$ der $1 \in B^{\dagger}_{rig,L}$ und betrachte die stetige Abbildung $c\colon G^+ \to M$, $g \mapsto g \cdot e - e$. Diese ist wohldefiniert, da e ein Lift der 1 und obige Folge exakt ist: Für jedes $g \in G^+$ wird das Element $ge - e \in N$ unter obiger Abbildung $N \to B^{\dagger}_{rig,L}$ auf das Nullelement in $B^{\dagger}_{rig,L}$ abgebildet, kommt also wegen der Exaktheit der Folge schon aus M.
Nun gilt für beliebige $g_1, g_2 \in G^+$:

$$d_2c(g_1, g_2) = g_1 \cdot c(g_2) - c(g_1g_2) + c(g_1) = 0,$$

d. h. c ist ein 1-Kozykel und induziert somit ein Element in $H^1(M)$. Dieses ist offenbar unabhängig von der Wahl von e, denn ist $\tilde{e} \in N$ ein weiterer Lift der $1 \in B^{\dagger}_{rig,L}$ und bezeichne $\tilde{c}$ den zugehörigen 1-Kozykel, so ist $d_1(e - \tilde{e}) = c - \tilde{c}$ und damit $c = \tilde{c}$ in $H^1(M)$.
Ingesamt erhalten wir wie gewünscht eine wohldefinierte Abbildung

$$\Theta^M\colon \operatorname{Ext}(B^{\dagger}_{rig,L}, M) \to H^1(M), \quad N \mapsto c,$$

wobei c das wie oben definierte Element in $H^1(M)$ sei.

Satz 3.1. Die Abbildung Θ^M ist für jeden (φ, Γ)-Modul M über $B^{\dagger}_{rig,L}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Injektivität. Sei also N eine Erweiterung von $B^{\dagger}_{rig,L}$ durch M mit $N \in \ker \Theta^M$. Sei weiter $e \in N$ ein Lift der $1 \in B^{\dagger}_{rig,L}$. Da per Definition das Bild des zu N gehörigen 1-Kozykels $c\colon\ g \mapsto ge - e$ in $H^1(M)$ trivial ist, existiert ein $m \in M$, sodass

$$ge - e = gm - m,$$

also $g(e - m) = e - m$ für alle $g \in G^+$. Damit haben wir aber

$$N = M \oplus B^{\dagger}_{rig,L}(e - m)$$

als (φ, Γ)-Moduln.
Für die Surjektivität wählen wir einen beliebigen 1-Kozykel $c\colon G^+ \to M$. Definiere einen (φ, Γ)-Modul N durch

$$N := M \oplus B^{\dagger}_{rig,L}(e),$$

wobei e ein formales Element über $B^\dagger_{rig,L}$ sei. Weiter definieren wir eine Abbildung $N \to B^\dagger_{rig,L}$ durch $e \mapsto 1$. Dann haben wir eine kurze exakte Folge wie gewünscht und e ist ein Lift der $1 \in B^\dagger_{rig,L}$. Nun erweitern wir noch die (φ, Γ)-Struktur von M auf N, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \varphi_L(e) &:= e + c(\varphi_L) \quad \text{und} \\ \gamma(e) &:= e + c(\gamma) \quad \text{für } \gamma \in \Gamma_L. \end{aligned}$$

Dann gilt für beliebiges $\gamma \in \Gamma_L$:

$$\begin{aligned} \varphi_L(\gamma(e)) &= \varphi_L(e + c(\gamma)) \\ &= e + c(\varphi_L) + \varphi_L(c(\gamma)) \\ &= e + c(\varphi_L \gamma) \\ &= e + c(\gamma \varphi_L) \\ &= \gamma(\varphi_L(e)), \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Gleichung verwendet haben, dass c ein 1-Kozykel ist. Also ist N tatsächlich ein (φ, Γ)-Modul über $B^\dagger_{rig,L}$.
Dass sich c nun schreiben lässt als $g \mapsto ge - e$, gilt per Definition der (φ, Γ)-Wirkung (wir haben zum Beispiel $\varphi_L(e) - e = e + c(\varphi_L) - e = c(\varphi_L)$; die Rechnung für $\gamma \in \Gamma_L$ ist analog). Somit sehen wir, dass N unter der Abbildung Θ^M tatsächlich auf c abgebildet wird, was den Beweis abschließt. □

3.2 Analytische Kohomologie

Sei M ein L-analytischer (φ, Γ)-Modul über $B^\dagger_{rig,L}$. Wir betrachten in diesem Abschnitt den folgenden Komplex:

$$C^\bullet_{\varphi_L,\nabla}(M) := \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_1} M \oplus M \xrightarrow{f_2} M \longrightarrow 0,$$

wobei f_1 die Abbildung $m \mapsto ((\varphi_L - 1)m, \nabla m)$ und f_2 die Abbildung $(m, n) \mapsto \nabla m - (\varphi_L - 1)n$ seien. Dass dies tatsächlich einen Komplex definiert, ist offensichtlich.
Für $i = 0, 1, 2$ setzen wir nun

$$H^i_{\varphi_L,\nabla}(M) := H^i\left(C^\bullet_{\varphi_L,\nabla}(M)\right),$$

wobei wie üblich die Kohomologiegruppen als Kozykel modulo Koränder definiert seien.

Bemerkung. Wegen der (φ, Γ)-Modulstruktur von M, der Definition von ∇ und der Kommutativität von Γ_L sind f_1 und f_2 offenbar Γ_L-äquivariant. Wir erhalten also eine wohldefinierte Wirkung von Γ_L auf den Gruppen $H^i_{\varphi_L,\nabla}(M)$.

Definition. Für $i = 0, 1, 2$ heißen die Gruppen

$$H^i_{\mathrm{an}}(M) := H^i_{\varphi_L,\nabla}(M)^{\Gamma_L}$$

die *analytischen Kohomologiegruppen* von M.

Einfaches Einsetzen der Definition und Nachrechnen zeigt das folgende Lemma:

Lemma 3.2. Für die EM- und die analytische Kohomologie gilt:

$$H^0(M) = H^0_{\mathrm{an}}(M) = M^{\varphi_L=1,\Gamma_L},$$

wobei $M^{\varphi_L=1,\Gamma_L}$ wie in Abschnitt 1.6 definiert sei, d. h.

$$M^{\varphi_L=1,\Gamma_L} = \{m \in M \mid \varphi_L(m) = m, \gamma(m) = m \ \forall\gamma \in \Gamma_L\}.$$

Notation. Schreibe nun:

$$\begin{aligned} Z^1_{\varphi_L,\nabla}(M) &:= \ker f_2, \\ B^1_{\mathrm{an}}(M) &:= \operatorname{im} f_1, \\ Z^1_{\mathrm{an}}(M) &:= \left\{(m,n) \in Z^1_{\varphi_L,\nabla}(M) \,\middle|\, (m,n) \sim \gamma(m,n) \ \ \forall\gamma \in \Gamma_L\right\}, \end{aligned}$$

wobei für $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in Z^1_{\varphi_L,\nabla}(M)$ die Relation definiert sei durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow (m_1 - m_2, n_1 - n_2) \in B^1_{\mathrm{an}}(M).$$

Lemma 3.3. Es gilt $H^1_{\mathrm{an}}(M) = Z^1_{\mathrm{an}}(M)/B^1_{\mathrm{an}}(M)$.

Beweis. Dies ist einfaches Auspacken der Definitionen der beiden Gruppen. □

Notation. Seien M_1 und M_2 zwei L-analytische (φ, Γ)-Moduln über $B^\dagger_{rig,L}$. Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{Ext}_{\mathrm{an}}(M_1, M_2)$ die Erweiterungen von M_1 durch M_2 in der Kategorie der L-analytischen (φ, Γ)-Moduln über $B^\dagger_{rig,L}$.

Analog zum vorherigen Abschnitt wollen wir nun eine natürliche Abbildung

$$\Theta^M_{\mathrm{an}} \colon \mathrm{Ext}_{\mathrm{an}}(B^\dagger_{rig,L}, M) \to H^1_{\mathrm{an}}(M)$$

konstruieren. Sei dazu also N eine L-analytische Erweiterung von $B^\dagger_{rig,L}$ durch M. Wähle nun einen Lift $e \in N$ der $1 \in B^\dagger_{rig,L}$ und betrachte das Element $((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) \in M \oplus M$ (dass die einzelnen Komponenten tatsächlich schon in M liegen, argumentiert man analog zum vorherigen Abschnitt darüber, dass e ein Lift der 1 und die Erweiterungsfolge exakt ist). Offenbar gilt $((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) \in \ker f_2$ und weiter für beliebiges $\gamma \in \Gamma_L$:

$$\begin{aligned} ((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) - \gamma((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) &= ((\varphi_L - 1)e - \gamma(\varphi_L - 1)e, \nabla_N e - \gamma\nabla_N e) \\ &= ((\varphi_L - 1)(1 - \gamma)e, \nabla_N(1 - \gamma)e), \end{aligned}$$

wobei wir wie üblich die (φ, Γ)-Modulstruktur von M und die Kommutativität von Γ_L ausgenutzt haben. Nun ist $(1-\gamma)e$ ein Element in M und es folgt

$$((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) - \gamma((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) \in \operatorname{im} f_1.$$

Damit ist aber $((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) \in Z^1_{\mathrm{an}}(M)$ und induziert ein Element in $H^1_{\mathrm{an}}(M)$. Dieses ist offenbar unabhängig von der Wahl von e, denn ist $\tilde{e} \in N$ ein weiterer Lift der $1 \in B^\dagger_{rig,L}$, so gilt

$$((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e) - ((\varphi_L - 1)\tilde{e}, \nabla_N \tilde{e}) = ((\varphi_L - 1)(e - \tilde{e}), \nabla_N(e - \tilde{e})) \in \operatorname{im} f_1.$$

Insgesamt erhalten wir die gewünschte Abbildung

$$\Theta^M_{\mathrm{an}} \colon \operatorname{Ext}_{\mathrm{an}}(B^\dagger_{rig,L}, M) \to H^1_{\mathrm{an}}(M),\ N \mapsto ((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e).$$

Satz 3.4. Die Abbildung Θ^M_{an} ist für jeden L-analytischen (φ, Γ)-Modul M über $B^\dagger_{rig,L}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Injektivität. Sei also N eine L-analytische Erweiterung von $B^\dagger_{rig,L}$ durch M mit $N \in \ker \Theta^M_{\mathrm{an}}$. Sei weiter $e \in N$ ein Lift der $1 \in B^\dagger_{rig,L}$. Da per Definition das Bild des Elementes $((\varphi_L - 1)e, \nabla_N e)$ in $H^1_{\mathrm{an}}(M)$ trivial ist, existiert ein $m \in M$, sodass

$$(\varphi_L - 1)e = (\varphi_L - 1)m \text{ und } \nabla_N e = \nabla_N m,$$

also $e - m \in N^{\varphi_L = 1, \nabla = 0}$. Nun ist aber die Wirkung von Γ_L auf $N^{\varphi_L = 1, \nabla = 0}$ lokal konstant, also halbeinfach. Folglich finden wir einen Lift $e' \in N^{\varphi_L = 1, \nabla = 0}$ der $1 \in B^\dagger_{rig,L}$ mit $\gamma e' = e'$ für alle $\gamma \in \Gamma_L$. Damit muss N die triviale Erweiterung sein und die Injektivität folgt.
Für den Beweis der Surjektivität sei hier nur eine Skizze angegeben, da die detaillierten Schritte zu weit führen würden. Genauer nachlesen kann man den Beweis in [FX13].
Sei also $z \in H^1_{\mathrm{an}}(M)$ und sei $(x, y) \in Z^1_{\mathrm{an}}(M)$ ein Repräsentant von z. Per Definition ist z invariant unter Γ_L, d. h. für jedes $\sigma \in \Gamma_L$ ist das Bild des Elementes $(\sigma - 1)(x, y)$ in $H^1_{\mathrm{an}}(M)$ trivial, insbesondere also $(\sigma - 1)(x, y) \in \operatorname{im} f_1$. Also existiert für jedes $\sigma \in \Gamma_L$ ein $y_\sigma \in M$, sodass

$$(\sigma - 1)(x, y) = ((\varphi_L - 1)y_\sigma, \nabla y_\sigma).$$

Dieses y_σ ist eindeutig bis auf ein Element aus $M^{\varphi_L = 1, \nabla = 0}$, denn angenommen $y'_\sigma \in M$ ist ein weiteres Element mit der gleichen Eigenschaft, dann haben wir:

$$\begin{aligned} 0 &= ((\varphi_L - 1)y_\sigma, \nabla y_\sigma) - ((\varphi_L - 1)y'_\sigma, \nabla y'_\sigma) \\ &= ((\varphi_L - 1)(y_\sigma - y'_\sigma), \nabla(y_\sigma - y'_\sigma)). \end{aligned}$$

Es ist also $y_\sigma - y'_\sigma \in M^{\varphi_L = 1, \nabla = 0}$ und unsere Behauptung folgt.
Definiere nun eine Abbildung $y_{\bullet,\bullet} \colon \Gamma_L^2 \to M$ durch $(\sigma, \tau) \mapsto y_{\sigma,\tau} := y_{\sigma\tau} - \sigma y_\tau - y_\sigma$. Es bezeichne

$$\delta_n \colon C\left(\Gamma_L^{n-1}, M\right) \to C\left(\Gamma_L^n, M\right)$$

die Übergangsabbildungen der gewöhnlichen stetigen Gruppenkohomologie von Γ_L mit Koeffizienten im Γ_L-Modul M (zur Erinnerung: die δ_n sind analog zu den Übergangsabbildungen d_n der EM-Kohomologie für (φ, Γ)-Moduln definiert[1]). Dann haben wir:

$$\begin{aligned}\delta_3 y_{\bullet,\bullet}(\rho,\sigma,\tau) &= \rho y_{\bullet,\bullet}(\sigma,\tau) - y_{\bullet,\bullet}(\rho\sigma,\tau) + y_{\bullet,\bullet}(\rho,\sigma\tau) - y_{\bullet,\bullet}(\rho,\sigma)\\ &= \rho y_{\sigma,\tau} - y_{\rho\sigma,\tau} + y_{\rho,\sigma\tau} - y_{\rho,\sigma}\\ &= 0,\end{aligned}$$

also ist $y_{\bullet,\bullet}$ ein 2-Kozykel.
Eine einfache Rechnung zeigt weiter, dass für alle σ, $\tau \in \Gamma_L$ gilt: $y_{\sigma,\tau} \in M^{\varphi_L=1,\nabla=0}$.
Wir wollen nun einsehen, dass für $z = 0$ automatisch $y_{\bullet,\bullet}$ ein Korand sein muss. Zunächst bedeutet $z = 0$, dass $(x, y) \in \operatorname{im} f_1$, d. h. es existiert ein $m \in M$, sodass

$$x = (\varphi_L - 1)m, \quad y = \nabla m.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi_L - 1)(y_\sigma - (\sigma - 1)m) &= (\varphi_L - 1)y_\sigma - (\varphi_L - 1)(\sigma - 1)m\\ &= (\varphi_L - 1)y_\sigma - (\sigma - 1)x\\ &= 0\end{aligned}$$

und analog

$$\nabla(y_\sigma - (\sigma - 1)m) = \nabla y_\sigma - (\sigma - 1)y = 0$$

per Definition von y_σ. Wir sehen also $y_\sigma - (\sigma - 1)m \in M^{\varphi_L=1,\nabla=0}$, d. h. für jedes $\sigma \in \Gamma_L$ existiert ein $m_\sigma \in M^{\varphi_L=1,\nabla=0}$, sodass $y_\sigma = (\sigma - 1)m + m_\sigma$. Insbesondere können wir schreiben

$$y_{\sigma,\tau} = m_{\sigma\tau} - \sigma m_\tau - m_\sigma.$$

Bezeichnen wir nun mit $m_\bullet : \Gamma_L \to M^{\varphi_L=1,\nabla=0}$ die Abbildung $\sigma \mapsto m_\sigma$, so gilt

$$\begin{aligned}\delta_2(-m_\bullet)(\sigma,\tau) &= -\sigma m_\tau + m_{\sigma\tau} - m_\sigma\\ &= y_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

und $y_{\bullet,\bullet}$ ist also ein 2-Korand.
Insgesamt erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$H^1_{\mathrm{an}}(M) \to H^2\left(\Gamma_L, M^{\varphi_L=1,\nabla=0}\right),$$

[1] Dies liegt daran, dass es sich hier eigentlich um die gleiche Kohomologietheorie handelt, wobei wir sie aber im Fall von Halbgruppen statt wie üblich von Gruppen definiert haben. Die EM-Kohomologie für Halbgruppen findet weniger Anwendung als die für Gruppen und wohlbekannte Sätze aus der Gruppenkohomologie wie der Satz von Stallings-Swan gelten für Halbgruppenkohomologie nicht mehr, siehe z. B. [Nov08].

die einem Element aus $H^1_{\mathrm{an}}(M)$ die Klasse eines wie oben definierten 2-Kozykels $y_{\bullet,\bullet}$ zuordnet. Wir wollen nun zeigen, dass das Bild von z unter dieser Abbildung Null ist, und mit diesem Wissen ein gewisses Element aus der EM-Kohomologie $H^1(M)$ konstruieren, welches uns nach 3.1 eine Erweiterung von $B^\dagger_{rig,L}$ durch M liefert. Es bleibt dann nachzuweisen, dass diese Erweiterung tatsächlich analytisch ist. Diesen gesamten Teil des Beweises werden wir nur skizzenhaft darstellen.

Fixiere eine Basis $(e_1, \ldots, e_m)$ von M über $B^\dagger_{rig,L}$. Weiter sei $r > 0$ und $s \in [r, 1)$. Dann definieren wir analog zu vorher

$$M^{[r,1)} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{E}^{[r,1)} e_i \quad \text{und}$$
$$M^{[r,s]} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{E}^{[r,s]} e_i.$$

Dann sind $M^{[r,1)}$ und $M^{[r,s]}$ stabil unter der Γ_L-Wirkung und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass φ_L den Modul $M^{[r,s]}$ auf den Modul $M^{[r/q,s/q]}$ abbildet. Weiterhin können wir annehmen, dass $x, y \in M^{[r,1)}$.

Man macht sich nun klar, dass Γ_L auch eine Wirkung ∇ auf $M^{[r,s]}$ induziert. Dann konvergiert für $\sigma \in \Gamma_L$ nahe genug bei 1 die Reihe von Operatoren

$$E(\sigma) := \ell(\sigma) + \frac{\ell(\sigma)^2}{2}\nabla + \frac{\ell(\sigma)^3}{3}\nabla^2 + \ldots$$

auf $M^{[r,s]}$ und damit wegen der Stetigkeit von φ_L auch auf $M^{[r/q,s/q]}$. Dabei ist $\ell(\sigma) = \log(\chi_L(\sigma))$, wo log den gewöhnlichen Logarithmus auf der Erweiterung $L/\mathbb{Q}_p$ bezeichne.

Man wähle nun eine offene Untergruppe $\Gamma' \subseteq \Gamma_L$, sodass die $\sigma \in \Gamma'$ nahe genug an 1 sind, um die Konvergenz von $E(\sigma)$ zu sichern, und überlege sich, dass $E(\sigma)y \in M^{[r,1)}$ gilt. Weiterhin sieht man ein, dass man für $\sigma \in \Gamma'$ das Element y_σ wählen kann als $E(\sigma)y$. Damit folgt aber $y_{\sigma,\tau} = 0$ für $\sigma, \tau \in \Gamma'$. Mit anderen Worten: Die Einschränkung von Γ' auf das Bild von z in $H^2\left(\Gamma_L, M^{\varphi_L=1,\nabla=0}\right)$ ist 0, und damit folgt, dass das Bild von z selbst Null sein muss. Dies bedeutet, dass wir die Definition von y_σ durch ein Element aus $M^{\varphi_L=1,\nabla=0}$ abändern können, sodass $y_{\sigma,\tau}$ identisch Null ist. Dann gilt offensichtlich für alle $\sigma, \tau \in \Gamma_L$ auch $y_{\tau,\sigma} - y_{\sigma,\tau} = 0$ und damit

$$(\sigma - 1)y_\tau = (\tau - 1)y_\sigma.$$

Man sieht so ein, dass die Zuordnung $\varphi_L \mapsto x$, $\sigma \mapsto y_\sigma$ für $\sigma \in \Gamma_L$ ein Element in $H^1(M)$ liefert, und nach 3.1 erhalten wir eine Erweiterung von $B^\dagger_{rig,L}$ durch M.

Um zu zeigen, dass diese Erweiterung L-analytisch ist, reicht es zu zeigen, dass $\sigma \mapsto y_\sigma$ eine lokal analytische Abbildung ist. Dazu überlegt man sich, dass man für jedes σ in einer offenen Untergruppe Γ' wie oben schreiben kann

$$y_\sigma - E(\sigma)y = \lambda(\sigma),$$

für ein $\lambda \in \mathrm{Hom}(\Gamma_L, H^0(M))$. Dies zeigt die Behauptung. □

In [Col16] findet sich eine alternative Definition der analytischen Kohomologiegruppen, die den Zusammenhang zwischen EM-Kohomologie und analytischer Kohomologie verdeutlicht. Dazu sei G eine L-analytische Halbgruppe, d. h. eine Halbgruppe, die gleichzeitig analytische Mannigfaltigkeit ist, sodass die Halbgruppenverknüpfung analytisch ist. Für uns ist dann der Fall $G = G^+$ interessant, wobei $\varphi_L^{\mathbb{N}_0}$ diskret ist und die L-analytische Struktur von der auf Γ_L kommt.

Es sei an folgende Begriffe aus der Topologie erinnert:

Definition. Ein *Fréchet-Raum* über L ist ein hausdorffscher topologischer Raum M, dessen Topologie durch eine abzählbare Familie von Halbnormen induziert werden kann, sodass M bezüglich dieser Familie vollständig ist.
Ein *LF-Raum* ist ein direkter Limes von Fréchet-Räumen in der Kategorie der lokal konvexen topologischen Räume (d. h. in der Kategorie der topologischen Räume, deren Topologie durch eine Menge von Halbnormen beschrieben werden kann).

Man überlegt sich leicht (siehe z. B. [Kri16], Satz 1.7):

Satz 3.5. Es gibt eine 1:1-Korrespondenz zwischen den Fréchet-Räumen über L und den projektiven Limiten von Banachräumen über L.

Bemerkung. Insbesondere lässt sich also jeder LF-Raum M schreiben als $M = \varinjlim_i \varprojlim_j M_{ij}$ mit Banachräumen M_{ij}.

Definition.
- Sei $M = \varinjlim_i \varprojlim_j M_{ij}$ ein LF-Raum. Die Banachräume M_{ij} seien mit kompatiblen lokal analytischen G-Wirkungen ausgestattet. Dann erhalten wir eine Wirkung von G auf M und nennen diese eine *pro-L-analytische* Wirkung von G auf M.[2]
- Eine Abbildung $f\colon G \to M$ heißt pro-L-analytisch, falls es ein i gibt, sodass ihr Bild in $\varprojlim_j M_{ij}$ liegt und die Abbildungen $\pi_j \circ f\colon G \to M_{ij}$ für alle j lokal analytisch sind.

Wir betrachten nun den folgenden Komplex:

$$C^\bullet_{\mathrm{an}}(G,M) := \qquad 0 \longrightarrow C^0_{\mathrm{an}}(G,M) \xrightarrow{d_1} C^1_{\mathrm{an}}(G,M) \xrightarrow{d_2} \dots,$$

wobei $C^n_{\mathrm{an}}(G,M)$ die Menge der pro-L-analytischen Funktionen von G^n nach M bezeichne. Die Übergangsabbildungen sind wie für die EM-Kohomologie bekannt gegeben durch

$$d_{n+1}c(g_0,\dots,g_n) = g_0\cdot c(g_1,\dots,g_n)+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}c(g_0,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n)+(-1)^{n+1}c(g_0,\dots,g_{n-1}).$$

Wir schreiben $\tilde{H}^i_{\mathrm{an}}(G,M)$ für die i-te Kohomologiegruppe dieses Komplexes.

[2] Eine genauere Betrachtung von pro-L-analytischen Gruppenwirkungen findet sich in [Ber16], Abschnitt 2.

Bevor wir zeigen, dass dies im Fall von $G = G^+$ und M ein (φ, Γ)-Modul über $B^{\dagger}_{rig,L}$ für $i = 0, 1, 2$ in der Tat eine alternative Beschreibung für $H^i(M)$ liefert, werden wir zunächst noch einige nützliche Eigenschaften dieser Kohomologie betrachten und insbesondere das Shapiro-Lemma und Restriktion und Korestriktion für den analytischen Fall angeben.

Proposition 3.6. Sei $M = \varprojlim M_n$ ein Fréchet-Raum, sodass für alle $j \geq 0$ das Bild von M_{n+j} dicht in M_n liegt. Dann gilt

$$\tilde{H}^1_{\text{an}}(G, M) = \varprojlim_n \tilde{H}^1_{\text{an}}(G, M_n).$$

Beweis. Per Definition haben wir für jedes n eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow \tilde{B}^1_{\text{an}}(G, M_n) \longrightarrow \tilde{Z}^1_{\text{an}}(G, M_n) \longrightarrow \tilde{H}^1_{\text{an}}(G, M_n) \longrightarrow 0,$$

wobei $\tilde{B}^1_{\text{an}}(G, M_n)$ die 1-Koränder und $\tilde{Z}^1_{\text{an}}(G, M_n)$ die 1-Kozykel des definierenden Komplexes bezeichnen.
Über den Homomorphiesatz für die Abbildung $M \to \tilde{B}^1_{\text{an}}(G, M_n), g \mapsto (g-1)m$ sehen wir $\tilde{B}^1_{\text{an}}(G, M_n) = M_n/M_n^G$. Insbesondere folgt damit und mit der Voraussetzung, dass das Bild von M_{n+j} für jedes $j \geq 0$ dicht in M_n liegt, dass das System der $\tilde{B}^1_{\text{an}}(G, M_n)$ ein Mittag-Leffler-System ist. Wir erhalten also eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n \tilde{B}^1_{\text{an}}(G, M_n) \longrightarrow \varprojlim_n \tilde{Z}^1_{\text{an}}(G, M_n) \longrightarrow \varprojlim_n \tilde{H}^1_{\text{an}}(G, M_n) \longrightarrow 0.$$

Nun sieht man durch einfaches Auspacken der Definition der projektiven Limiten, dass

$$\begin{aligned}
&\varprojlim_n \tilde{B}^1_{\text{an}}(G, M_n) = \tilde{B}^1_{\text{an}}(G, \varprojlim M_n) \text{ und}\\
&\varprojlim_n \tilde{Z}^1_{\text{an}}(G, M_n) = \tilde{Z}^1_{\text{an}}(G, \varprojlim M_n).
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Wir betrachten nun den speziellen Fall, dass G eine kompakte Gruppe ist. Sei $H \subseteq G$ eine offene Untergruppe und M ein Modul mit einer pro-L-analytischen Wirkung von H.

Definition. Der *koinduzierte Modul* von M ist definiert als

$$\operatorname{Koind}_G^H M := \{f : G \to M \text{ pro-}L\text{-analytisch} \mid f(hg) = hf(g) \;\; \forall h \in H, g \in G\};$$

für die G-Wirkung setzen wir $(gf)(g') := f(g'g)$ und erhalten so offensichtlich eine pro-L-analytische Wirkung von G auf $\operatorname{Koind}_G^H M$.

Satz 3.7 (Shapiro's Lemma)**.** Mit den gleichen Voraussetzungen von zuvor gilt

$$\tilde{H}^i_{\text{an}}(G, \operatorname{Koind}_G^H M) = \tilde{H}^i_{\text{an}}(H, M)$$

für $i = 0, 1, 2$.

Beweis. Man überlegt sich zunächst, dass der Komplex $C^\bullet_{\mathrm{an}}(G, M)$ mit dem Komplex $X^\bullet(G, M)^G$ übereinstimmt, wobei $X^n(G, M)$ die pro-L-analytischen Abbildungen von G^{n+1} nach M bezeichne. Die Übergangsabbildungen sind wie folgt gegeben: Die Projektionen $p_i \colon G^{n+1} \to G^n$ für $i = 0, \ldots, n$ induzieren Abbildungen $\delta_i \colon X^{n-1}(G, M) \to X^n(G, M)$ und wir setzen

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i \colon X^{n-1} \to X^n.$$

Man rechnet nach, dass $d \circ d = 0$ und $X^\bullet(G, M)$ somit in der Tat einen Komplex definiert. Nun haben wir Isomorphismen

$$X^n(G, M)^G \to C^n_{\mathrm{an}}(G, M), \quad f \mapsto ((g_1, \ldots, g_n) \mapsto f(1, g_1, \ldots, g_n)),$$

welche einen Komplexisomorphismus $\left(X^\bullet(G, M)^G, d_\bullet\right) \to (C^\bullet_{\mathrm{an}}(G, M), d_\bullet)$ liefern.
Mit diesem Wissen orientiert man sich nun am Beweis von Shapiros Lemma in [NSW08], Proposition (1.6.4). Es ist klar, dass die durch

$$\mathrm{Koind}_G^H M \to M, \quad f \mapsto f(1)$$

für $n \geq 0$ induzierte Abbildung

$$X^n(G, \mathrm{Koind}_G^H M)^G \to X^n(G, M)^H$$

und die angegebene Umkehrabbildung

$$y \mapsto \left(x \colon G^{n+1} \to \mathrm{Koind}_G^H M, \ \ (x(g_0, \ldots, g_n))(g) := y(gg_0, \ldots, gg_n)\right)$$

analytisch sind. □

Definition. Sei G eine kompakte Gruppe und $H \subseteq G$ eine offene Untergruppe. Sei M ein Modul mit einer pro-L-analytischen Wirkung von G. Wir haben dann offensichtlich auch eine pro-L-analytisce Wirkung von H auf M.

- Betrachte die injektive Abbildung

  $$\iota \colon M \to \mathrm{Koind}_G^H M$$

  gegeben durch $\iota(m)(g) = gm$. Übergang zur Kohomologie liefert dann für alle $i \geq 0$ die *Restriktion*

  $$\mathrm{res} \colon \tilde{H}^i_{an}(G, M) \to \tilde{H}^i_{\mathrm{an}}(G, \mathrm{Koind}_G^H M) = \tilde{H}^i_{\mathrm{an}}(H, M),$$

  wobei die letzte Gleichung nach 3.7 gilt.

- Sei S ein Repräsentantensystem für G/H. Betrachte die surjektive Abbildung

  $$\pi\colon \operatorname{Koind}_G^H M \to M$$

  gegeben durch $\pi(f) = \sum_{s\in S} sf(s^{-1})$. Übergang zur Kohomologie liefert dann für alle $i \geq 0$ die *Korestriktion*

  $$\operatorname{cor}\colon \tilde{H}^i_{\mathrm{an}}(H, M) \to \tilde{H}^i_{\mathrm{an}}(G, M),$$

  wobei wir wieder 3.7 verwendet haben.

Seien die Voraussetzungen wie in der vorherigen Definition und sei weiter $f \in \tilde{Z}^1_{\mathrm{an}}(H, M)$ ein 1-Kozykel. Das folgende Lemma folgt mit Standardargumenten aus der Kohomologietheorie, weshalb der Beweis nur kurz angeschnitten ist. Alle verwendeten Techniken kann man beispielsweise in [Neu11] nachlesen.

Lemma 3.8. (i) Es gilt $\operatorname{cor} \circ \operatorname{res} = [G\colon H]$.

(ii) Angenommen, es ist $M \subseteq N$ für einen G-Modul N und es gibt ein $n \in N$, sodass sich f schreiben lässt als $f(h) = (h-1)n$. Dann gilt

$$\operatorname{cor}(f)(g) = (g-1)\sum_{s\in S} sn.$$

(iii) Für $g \in G$ bezeichne $\tau_g\colon S \to S$ die Permutation $\tau_g(s)H = gsH$. Dann gilt

$$\operatorname{cor}(f)(g) = \sum_{s\in S} \tau_g(s) f(\tau_g(s)^{-1}gs).$$

Beweis. (i) Die Gleichung ist im Grad 0 klar: Sei $m \in M^G = \tilde{H}^0_{\mathrm{an}}(G, M)$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus der vorherigen Definition, dass

$$\operatorname{cor} \circ \operatorname{res}(m) = \operatorname{cor}(\iota_m) = \sum_{s\in S} s\iota_m(s^{-1}) = \sum_{s\in S} ss^{-1}m = [G\colon H]m.$$

Für allgemeinen Grad folgt die Aussage durch Dimensionsverschiebung.

(ii) Sei $g \in G$. Indem man die notwendigen kommutativen Diagramme betrachtet, sieht man, dass die Korestriktion auf Kozykelebene im Grad 1 die Form

$$(\operatorname{cor} f)(g) = \sum_{s\in S} sf(s^{-1}g\tau_g(s))$$

hat. Damit lässt sich die Behauptung einfach auf Kozykelebene nachrechnen.

(iii) Diese Aussage ist mit der in (ii) genannten Darstellung von $\operatorname{cor} f$ klar.

□

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun zeigen, dass für $i = 0, 1, 2$ die Definitionen der analytischen Kohomologie nach [Col16] und [FX13] übereinstimmen:

Satz 3.9. Sei M ein (φ, Γ)-Modul (und damit ein Fréchet-Raum) über $B^{\dagger}_{rig,L}$. Dann gilt

$$H^i_{\mathrm{an}}(M) = \tilde{H}^i_{\mathrm{an}}(G^+, M)$$

für alle $i = 0, 1, 2$.

Beweis. Wir machen eine Fallunterscheidung nach den verschiedenen Werten von i:

- $i = 0$
  Hier ist die Gleichheit einfaches Einsetzen der Definition der beiden Kohomologien.

- $i = 1$
  Wir definieren eine Abbildung $c_{\bullet,\bullet}\colon H^1_{\mathrm{an}}(M) \to \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(G^+, M)$ und zeigen, dass diese bijektiv ist. Sei dazu $z \in H^1_{\mathrm{an}}(M)$ mit Repräsentanten $(x, y) \in M \oplus M$, sodass $\nabla x = (\varphi_L - 1)y$. Für jedes $\sigma \in \Gamma_L$ sei y_σ wie im Beweis zu 3.4 definiert. Dann setzen wir

  $$\begin{aligned} c_{x,y}\colon G^+ \to M,\ \varphi_L &\mapsto x,\\ \sigma &\mapsto y_\sigma \text{ (für } \sigma \in \Gamma_L).\end{aligned}$$

  Aus dem Beweis zu 3.4 wissen wir, dass dies ein 1-Kozykel ist. Indem wir dessen Bild in $\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(G^+, M)$ betrachten, erhalten wir unsere gewünschte Abbildung $c_{\bullet,\bullet}$.
  Wir zeigen nun zunächst die Injektivität von $c_{\bullet,\bullet}$. Sei dazu $z \in H^1_{\mathrm{an}}(M)$ mit Repräsentanten $(x, y) \in M \oplus M$, sodass $c_{x,y} = 0$ in $\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(G^+, M)$, also $c_{x,y} \in \operatorname{im} d_1$. Damit existiert ein $m \in M$, sodass $(g - 1)m = c_{x,y}(g)$ für alle $g \in G^+$. Es gilt dann aber:

  $$(\varphi_L - 1)m = c_{x,y}(\varphi_L) = x$$

  und für jedes $\sigma \in \Gamma_L$:

  $$(\sigma - 1)\nabla m = \nabla(\sigma - 1)m = \nabla y_\sigma = (\sigma - 1)y,$$

  also $\nabla m = y$ und damit insgesamt $(x, y) \in \operatorname{im} f_1$, womit $z = 0$ folgt.
  Für die Surjektivität sei c ein beliebiges Element in $\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(G^+, M)$. Nach 3.1 haben wir eine korrespondierende Erweiterung

  $$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow B^{\dagger}_{rig,L} \longrightarrow 0$$

  von $B^{\dagger}_{rig,L}$ durch M. Sei $e \in N$ ein Lift der $1 \in B^{\dagger}_{rig,L}$. Wir setzen

  $$x := (\varphi_L - 1)e, \quad y := \nabla e.$$

Wegen der Exaktheit der obigen Folge und da e ein Lift der 1 ist, sind dies Elemente in M und offensichtlich auch in $\ker f_2$. Es bleibt zu zeigen, dass $c_{x,y} = c$. Zunächst gilt (vgl. im Beweis zu 3.1)

$$c(\varphi_L) = \varphi_L(e) - e = x$$

und außerdem

$$(\sigma - 1)y = (\sigma - 1)\nabla e = \nabla(\sigma - 1)e = \nabla c(\sigma),$$

d. h. $c(\sigma) = y_\sigma$.

- $i = 2$
  Man überlegt sich die Exaktheit der Folge

$$0 \longrightarrow M^{\varphi_L^{\mathbb{N}_0}} \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi_L - 1} M \longrightarrow \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}\left(\varphi_L^{\mathbb{N}_0}, M\right) \longrightarrow 0,$$

womit wir insbesondere sehen, dass $\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}\left(\varphi_L^{\mathbb{N}_0}, M\right) \cong M/(\varphi_L - 1)M$. Mit der Hochschild-Serre Spektralfolge für die kurze exakte Folge $1 \to \varphi^{\mathbb{N}_0} \to G^+ \to \Gamma_L \to 1$ folgt

$$\tilde{H}^i_{\mathrm{an}}\left(\Gamma_L, \tilde{H}^j_{\mathrm{an}}(\varphi_L^{\mathbb{N}_0}, M)\right) \Rightarrow \tilde{H}^{i+j}_{\mathrm{an}}(G^+, M),$$

also

$$\tilde{H}^2_{\mathrm{an}}(G^+, M) = \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}\left(\Gamma_L, \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\varphi_L^{\mathbb{N}_0}, M)\right) = \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}\left(\Gamma_L, M/(\varphi_L - 1)M\right).$$

Nun gilt für einen allgemeinen Fréchet-Raum D mit einer pro-L-analytischen Wirkung von Γ_L, dass es einen Isomorphismus $\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, D) \cong (D/\nabla D)^{\Gamma_L}$ gibt (siehe [BF17], Proposition 2.1.3). Um dies zu zeigen, sei zunächst D ein Banachraum. Wir betrachten die Abbildung $\tilde{Z}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, D) \to D$, $c \mapsto c'(1)$, wobei $c'(1)$ die Ableitung von c an der Identität bezeichne. Angenommen, c ist ein 1-Korand, d. h. es existiert ein $d \in D$, sodass $c(g) = (g-1)d$ für alle $g \in \Gamma_L$. Dann ist per Definition $c'(1) = \nabla d$ und wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, D) \to D/\nabla D$$

induziert durch $c \mapsto c'(1)$.
Sei nun $h \in \Gamma_L$, dann gilt mit den schon bekannten Bezeichnungen:

$$(h-1)c'(1) = \lim_{g \to 1} (h-1)\frac{c(g)}{\ell(g)} = \lim_{g \to 1} (g-1)\frac{c(h)}{\ell(g)} = \nabla c(h)$$

und wir sehen, dass das Bild von $c \mapsto c'(1)$ in $(D/\nabla D)^{\Gamma_L}$ liegt.
Die Bijektivität der so konstruierten Abbildung $\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, D) \to (D/\nabla D)^{\Gamma_L}$ ist einfach nachzurechnen. Angenommen wir haben ein c, sodass das Bild $c'(1)$ trivial ist, d. h. $c'(1) = \nabla d$ für ein $d \in D$. Dann ist die Ableitung von $g \mapsto c(g) - (g-1)d$ an der Identität gleich Null, also gilt $c(g) = (g-1)d$ auf einer offenen Untergruppe Γ' von Γ_L. Damit haben wir aber

$$c = [\Gamma_L : \Gamma']^{-1} \operatorname{cor} \circ \operatorname{res}(c) = 0,$$

was die Injektivität der Abbildung zeigt.
Für die Surjekivität kann man ähnlich vorgehen und zunächst einen Kozykel auf einer offenen Untergruppe von Γ_L definieren, den man durch die Korestriktion auf einen Kozykel auf der gesamten Gruppe erweitern kann. Da man hier keine neuen Erkenntnisse gewinnt, wollen wir dies hier nicht konkret ausführen und nur auf den Beweis zu [BF17], Proposition 2.1.3 verweisen.
Zu guter letzt erweitern wir die Aussage wie folgt auf den Fall $D = \varprojlim_n D_n$ ein allgemeiner Fréchet-Raum: Die wie oben konstruierte Abbildung $\tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, D) \to (D/\nabla D)^{\Gamma_L}$ induziert durch $c \mapsto c'(1)$ ist wohldefiniert und hat ein Inverses gegeben durch die Komposition

$$(D/\nabla D)^{\Gamma_L} \to \varprojlim_n (D_n/\nabla D_n)^{\Gamma_L} \to \varprojlim_n \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, D) \to \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, D),$$

wobei die mittlere Abbildung durch $y \mapsto (c_y \colon g \mapsto gy)$ gegeben ist.
Setzen wir nun unsere Ergebnisse zusammen, so erhalten wir:

$$\tilde{H}^2_{\mathrm{an}}(G^+, M) = \tilde{H}^1_{\mathrm{an}}(\Gamma_L, M/(\varphi_L - 1)M) = (M/(\varphi_L - 1, \nabla)M)^{\Gamma_L} = H^2_{\mathrm{an}}(M).$$

□

Nachdem wir einige nützliche Aussagen über die analytische Kohomologie festgehalten haben, wollen wir nun diese allgemeinen Betrachtungen abschließen und den Hauptsatz dieses Abschnittes formulieren.

Satz 3.10. Sei V eine L-analytische Darstellung von G_L und $\mathcal{D}^\dagger_{rig}(V)$ der nach 2.14 korrespondierende L-analytische (φ, Γ)-Modul über $B^\dagger_{rig,L}$. Weiter bezeichnen wir mit $H^1_{\mathrm{an}}(L, V)$ die L-analytischen Erweiterungen von L durch V. Dann gilt

$$H^1_{\mathrm{an}}(L, V) = H^1_{\mathrm{an}}\left(G^+, \mathcal{D}^\dagger_{rig}(V)\right),$$

wobei letzterer Ausdruck die in diesem Abschnitt eingeführte erste analytische Kohomologiegruppe bezeichne.

Beweis. Nach 3.4 entspricht $H^1_{\mathrm{an}}\left(G^+, \mathcal{D}^\dagger_{rig}(V)\right)$ gerade den L-analytischen Erweiterungen von $B^\dagger_{rig,L}$ durch $\mathcal{D}^\dagger_{rig}(V)$, welche wiederum nach 2.14 den L-analytischen Erweiterungen von L durch V entsprechen. □

Appendix

A Grundlagen der p-Adischen Lie-Theorie

In diesem Kapitel wollen wir einen Überblick über die im Hauptteil der Arbeit benötigten Aussagen und Konzepte aus der p-adischen Lie-Theorie geben. Wir werden deshalb größtenteils auf Beweise verzichten, sondern nur auf die entsprechende Literatur verweisen. Auch für ein tiefergehendes Verständnis der hier aussschnitthaft dargestellten Theorie sollte man sich an der Literatur orientieren. Eine gute Referenz ist beispielsweise [Sch11].

Im gesamten Abschnitt bezeichne K einen nichtarchimedischen Körper über $\mathbb{Q}_p$. Mit m und n meinen wir stets natürliche Zahlen.

Definition. Sei U eine offene Teilmenge des K^n und V ein K-Banachraum. Wir nennen eine Abbildung $f\colon U \to V$ *lokal analytisch*, falls für jedes $x_0 \in U$ ein Ball $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ und eine Potenzreihe $g = \sum_{i \in \mathbb{N}_0^n} X^i v_i$ mit $v_i \in V$ und $X^i = X_1^i \cdot \ldots \cdot X_n^i$ existieren, sodass g auf $B_\varepsilon(x_0)$ konvergiert und

$$f(x) = g(x - x_0) \text{ für alle } x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Wir bezeichnen die Menge der lokal analytischen Funktionen von U nach V mit $C^{\mathrm{an}}(U, V)$.

Definition. Sei M ein hausdorffscher topologischer Raum über K.

- Eine *Karte* für M ist ein Tripel (U, φ, K^n) aus einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, einem K^n und einer Abbildung $\varphi\colon U \to K^n$, sodass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:
  (i) $\varphi(U)$ ist offen in K^n,
  (ii) $\varphi\colon U \xrightarrow{\cong} \varphi(U)$ ist ein Homöomorphismus.
- Zwei Karten $(U_1, \varphi_1, K^{n_1})$ und $(U_2, \varphi_2, K^{n_2})$ für M heißen *kompatibel*, wenn beide Abbildungen

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) \underset{\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}}{\overset{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}}{\rightleftarrows}} \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

  lokal analytisch sind.
- Ein *Atlas* für M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, K^{n_i})\}_{i \in I}$ bestehend aus paarweise kompatiblen Karten für M, sodass $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- Ein Atlas $\mathcal{A}$ für M heißt *maximal*, falls für jeden Atlas $\mathcal{B}$ für M, sodass $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ auch ein Atlas für M ist (d. h. sodass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ *äquivalent* sind), gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.
- Eine lokal analytische *Mannigfaltigkeit* über K ist ein hausdorffscher topologischer Raum M zusammen mit einem maximalen Atlas $\mathcal{A}$.

Das Konzept einer *lokal analytischen Abbildung* lässt sich wie folgt auf Mannigfaltigkeiten übertragen: Seien M, N zwei lokal analytische Mannigfaltigkeiten über K und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Ist f stetig und gilt

$$\psi \circ f \in C^{\mathrm{an}}(f^{-1}(V), K^m)$$

für jede Karte (V, ψ, K^m) für N, so nennen wir f lokal analytisch.

Das folgende nützliche Lemma findet sich in [Sch11] (Lemma 8.3). Die Aussage lässt sich leicht direkt zeigen.

Lemma A.1. Seien M, N zwei lokal analytische Mannigfaltigkeiten über K und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist lokal analytisch.

(ii) Für jedes $x \in M$ existieren eine Karte (U, φ, K^n) für M um x und eine Karte (V, ψ, K^m) für N um $f(x)$, sodass $f(U) \subseteq V$ und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^{\mathrm{an}}(\varphi(U), K^m)$ gilt.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit für spezielle lokal analytische Mannigfaltigkeiten:

Definition. Eine (p-adische) *Lie-Gruppe* über K ist eine Menge G, die sowohl eine Gruppenstruktur als auch eine Struktur als lokal analytische Mannigfaltigkeit (über K) trägt, sodass die Abbildung

$$G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

lokal analytisch ist.
Ein *Lie-Gruppenhomomorphismus* zwischen zwei Lie-Gruppen G_1 und G_2 über K ist ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$, der lokal analytisch ist.

Beispiel.

1. K^n mit der Addition ist eine Lie-Gruppe.
2. $K^\times$ mit der Multiplikation ist eine Lie-Gruppe. Im allgemeinen Setting dieser Arbeit ist $o^\times \subseteq L^\times$ eine Lie-Gruppe über L, und wegen dem Isomorphismus $\chi_L\colon \Gamma_L \to o^\times$ trägt also Γ_L auf natürliche Weise die Struktur einer Lie-Gruppe über L.
3. $\mathrm{GL}_n(K)$ mit der Matrixmultiplikation ist eine Lie-Gruppe.

Wir wollen nun zunächst die allgemeine Definition einer Lie-Algebra geben, bevor wir dazu übergehen, einer Lie-Gruppe eine zugehörige Lie-Algebra zuzuordnen.

Definition. Eine *Lie-Algebra* (über K) ist ein K-Vektorraum V zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon V \times V \to V$, die alternierend ist (d. h. $[v, v] = 0$ für alle $v \in V$) und die Jacobi-Identität erfüllt (d. h. $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$ für alle u, v, $w \in V$).
Es seien $(V_1, [\cdot,\cdot]_1)$ und $(V_2, [\cdot,\cdot]_2)$ zwei Lie-Algebren über K. Ein *Lie-Algebrenhomomorphismus* zwischen V_1 und V_2 ist eine lineare Abbildung $\sigma\colon V_1 \to V_2$, sodass gilt:

$$[\sigma(v), \sigma(w)]_2 = \sigma([v, w]_1) \ \ \forall v, w \in V_1.$$

Beispiel. 1. $\mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt ist eine Lie-Algebra.

2. Für einen K-Vektorraum V ist die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}(V)$ zusammen mit dem Kommutator $[A, B] = AB - BA$ für $A, B \in \mathrm{End}(V)$ eine Lie-Algebra.

3. Allgemein ist jede assoziative K-Algebra A mit dem Kommutator $[a, b] = ab - ba$ für $a, b \in A$ eine Lie-Algebra.

Wie kann man nun einer Lie-Gruppe eine Lie-Algebra zuordnen? Wir erinnern zunächst an das Konzept der Differenzierbarkeit auf normierten Räumen (über K) und führen Tangentialräume ein.

Definition. Seien V und W normierte K-Vektorräume, $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge und $f : U \to W$ eine Abbildung. Wir nennen f *differenzierbar* im Punkt $v_0 \in U$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $\mathrm{D}_{v_0} f : V \to W$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung $U_\varepsilon(v_0) \subseteq U$ um v_0, sodass

$$\|f(v) - f(v_0) - \mathrm{D}_{v_0} f(v - v_0)\| \leq \varepsilon \|v - v_0\|.$$

Die Abbildung $\mathrm{D}_{v_0} f$ ist eindeutig bestimmt (wie man leicht mit Standardargumenten aus der Analysis zeigt) und heißt *Ableitung* von f im Punkt v_0.

Man kann nun die folgenden beiden Aussagen zeigen:

Bemerkung. 1. Kettenregel: Seien V, W_1 und W_2 normierte K-Vektorräume, $U \subseteq V$ und $U_1 \subseteq W_1$ offene Teilmengen und $f : U \to U_1$ und $g : U_1 \to W_2$ Abbildungen. Es sei weiter f differenzierbar in $v_0 \in U$ und g differenzierbar in $f(v_0)$. Dann ist auch $g \circ f$ differenzierbar in v_0 und es gilt: $\mathrm{D}_{v_0}(g \circ f) = D_{f(v_0)} g \circ D_{v_0} f$ (siehe [Sch11], Bemerkung 4.1(ii)).

2. Eine lokal analytische Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N über K ist differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in M$ (vergleiche [Sch11], Bemerkung 8.2(i)).

Sei nun M eine lokal analytische Mannigfaltigkeit über K. Fixiere einen Punkt $a \in M$. Wir betrachten Paare (c, v) bestehend aus einer Karte $c = (U, \varphi, K^n)$ für M mit $a \in U$ und einem $v \in K^n$. Zwei solche Paare (c, v) und (c', v') werden als *äquivalent* bezeichnet, falls

$$\mathrm{D}_{\varphi(a)} \left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)(v) = v'.$$

Der linke Ausdruck ist wohldefiniert, da die Abbildung $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$ nach Definition einer Mannigfaltigkeit lokal analytisch und damit nach obiger Bemerkung differenzierbar in $\varphi(a) \in \varphi(U \cap U')$ ist.

Lemma A.2. Diese Definition von Äquivalenz liefert in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Paare (c, v) wie oben.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Reflexivität. Sei dazu (c, v) ein Paar wie oben. Dann ist $\varphi \circ \varphi^{-1}$ gerade die Identität auf $\varphi(U)$. Nun gilt aber für beliebiges w in einer ε-Umgebung um $\varphi(a)$:

$$\|\operatorname{id}(w) - \operatorname{id}(\varphi(a)) - \operatorname{id}(w - \varphi(a))\| = \|w - \varphi(a) - (w - \varphi(a))\| = 0 \leq \varepsilon\|w - \varphi(a)\|,$$

d. h. die Identität erfüllt die definierende Eigenschaft von $\mathrm{D}_{\varphi(a)} \operatorname{id}$. Wegen der Eindeutigkeit der Ableitung folgt also

$$\mathrm{D}_{\varphi(a)} \operatorname{id}(v) = \operatorname{id}(v) = v$$

und damit, dass (c, v) äquivalent zu sich selbst ist.
Es seien nun (c, v) und (c', v') zwei Paare, sodass (c, v) äquivalent zu (c', v') ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\varphi'(a)}(\varphi \circ \varphi'^{-1})(v') &= \left(\mathrm{D}_{\varphi'(a)}(\varphi \circ \varphi'^{-1}) \circ \mathrm{D}_{\varphi(a)}(\varphi' \circ \varphi^{-1})\right)(v) \\
&= \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left((\varphi \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})\right)(v) \\
&= \mathrm{D}_{\varphi(a)} \operatorname{id}(v) = v,
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Gleichung die Tatsache, dass (c, v) äquivalent zu (c', v') ist, und in der zweiten die Kettenregel ausgenutzt haben.
Es bleibt die Transitivität der Relation zu zeigen. Seien also (c, v), (c', v') und (c'', v'') Paare, sodass (c, v) äquivalent zu (c', v') und (c', v') äquivalent zu (c'', v'') ist. Wir müssen zeigen, dass dann auch (c, v) äquivalent zu (c'', v'') ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\varphi'' \circ \varphi^{-1}\right)(v) &= \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left((\varphi'' \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})\right)(v) \\
&= \left(\mathrm{D}_{(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(a))}(\varphi'' \circ \varphi'^{-1}) \circ \mathrm{D}_{\varphi(a)}(\varphi' \circ \varphi^{-1})\right)(v) \\
&= \mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(\varphi'' \circ \varphi'^{-1}\right)(v') \\
&= v''.
\end{aligned}$$

Hierbei folgt die zweite Gleichung aus der Kettenregel, die dritte aus der Äquivalenz von (c, v) zu (c', v') und die letzte aus der Äquivalenz von (c', v') zu (c'', v''). □

Definition. Ein *Tangentialvektor* von M im Punkt a ist eine Äquivalenzklasse $[c, v]$ von Paaren (c, v) wie oben. Die Menge dieser Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathrm{T}_a(M)$ und nennen sie *Tangentialraum* von M in a.

Bemerkung. Für zwei Klassen $[c_1, v_1]$ und $[c_2, v_2]$ in $\mathrm{T}_a(M)$, wobei $c_1 = (U_1, \varphi_1, K^{n_1})$ und $c_2 = (U_2, \varphi_2, K^{n_2})$, gilt stets $n_1 = n_2$.

Beweis. Per Definition gilt $a \in U_1 \cap U_2$. Die Abbildungen

$$\begin{aligned}
f &:= \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \text{ und} \\
g &:= \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \colon \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2)
\end{aligned}$$

sind lokal analytisch, da c_1 und c_2 kompatible Karten sind. Nun können wir offenbar schreiben $\varphi_2(a) = f(\varphi_1(a))$. Mit der Kettenregel gilt:

$$\mathrm{D}_{\varphi_2(a)}\, g \circ \mathrm{D}_{\varphi_1(a)}\, f = \mathrm{D}_{f(\varphi_1(a))}\, g \circ \mathrm{D}_{\varphi_1(a)}\, f = \mathrm{D}_{\varphi_1(a)}(g \circ f) = \mathrm{D}_{\varphi_1(a)}\, \mathrm{id} = \mathrm{id},$$

also sind die linearen Abbildungen $\mathrm{D}_{\varphi_1(a)}\, f\colon K^{n_1} \to K^{n_2}$ und $\mathrm{D}_{\varphi_2(a)}\, g\colon K^{n_2} \to K^{n_1}$ invers zueinander. Es folgt $n_1 = n_2$. □

Lemma A.3. Sei $c = (U, \varphi, K^n)$ eine Karte für M um a. Es gibt eine eindeutige topologische Struktur auf $\mathrm{T}_a(M)$, sodass die Abbildung $\theta_c\colon K^n \to \mathrm{T}_a(M)$, $v \mapsto [c, v]$ ein topologischer Isomorphismus ist. Diese Struktur ist unabhängig von der Wahl der Karte c.

Beweis. Dies ist Lemma 9.1 in [Sch11]. Man überlegt sich leicht, dass θ_c eine bijektive Abbildung ist. Die Unabhängigkeit von der Wahl der Karten folgt daraus, dass für zwei Karten c und c' die Abbildung $\theta_{c'}^{-1} \circ \theta_c$ ein Vektorraumisomorphismus ist. □

Definition. Sei N eine weitere Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to N$ eine lokal analytische Abbildung. Nach A.1 gibt es Karten $c = (U, \varphi, K^n)$ für M um a und $\tilde{c} = (V, \psi, K^m)$ für N um $f(a)$, sodass $f(U) \subseteq V$ ist. Dann nennen wir die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathrm{T}_a(f)\colon\ \mathrm{T}_a(M) \xrightarrow{\theta_c^{-1}} K^n \xrightarrow{\mathrm{D}_{\varphi(a)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})} K^m \xrightarrow{\theta_{\tilde{c}}} \mathrm{T}_{f(a)}(N)$$

die *Tangentialabbildung* von f im Punkt a.

Lemma A.4. Die Definition von $\mathrm{T}_a(f)$ ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Wahl der Karten c und $\tilde{c}$.

Für den Beweis sei zunächst an den Satz über lokale Invertierbarkeit erinnert (vergleiche [Sch11] Proposition 4.3):

Lemma A.5. Seien V und W zwei K-Banachräume, $U \subseteq V$ eine offene Menge und $f\colon U \to W$ eine Abbildung. Angenommen f ist in $v_0 \in U$ differenzierbar und die Ableitung $\mathrm{D}_{v_0} f\colon V \to W$ ist ein Homöomorphismus. Dann existieren offene Umgebungen $U_0 \subseteq U$ um v_0 und $U_1 \subseteq W$ um $f(v_0)$, sodass Folgendes gilt:

(i) $f\colon U_0 \to U_1$ ist ein Homöomorphismus;

(ii) die inverse Abbildung $f^{-1}\colon U_1 \to U_0$ ist stetig differenzierbar in $f(v_0)$ und es gilt

$$\mathrm{D}_{f(v_0)}(f^{-1}) = (\mathrm{D}_{v_0} f)^{-1}\,.$$

Beweis von A.4. Seien $c' = (U', \varphi')$ bzw. $\tilde{c}' = (V', \psi')$ weitere Karten für M um a bzw. für N um $f(a)$. Zunächst gilt für c und c' (und analog für $\tilde{c}$ und $\tilde{c}'$) per Definition der Äquivalenzrelation, dass

$$[c, v] = \left[c', \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)(v)\right],$$

wobei $v \in K^n$. Damit folgt aber $\theta_{c'}^{-1} \circ \theta_c = \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)$. Diese Gleichung werden wir im Folgenden verwenden.
Wir müssen zeigen, dass $\theta_{\tilde{c}'} \circ \mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}\right) \circ \theta_{c'}^{-1} = \theta_{\tilde{c}} \circ \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \theta_c^{-1}$ gilt. Dazu betrachten wir zunächst den mittleren Ausdruck auf der linken Seite:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}\right) &= \mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(\psi' \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi'^{-1}\right)\\
&= \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\psi' \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(\varphi \circ \varphi'^{-1}\right)\\
&= \mathrm{D}_{\psi(f(a))}\left(\psi' \circ \psi^{-1}\right) \circ \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(\varphi \circ \varphi'^{-1}\right)\\
&= \mathrm{D}_{\psi(f(a))}\left(\psi' \circ \psi^{-1}\right) \circ \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \left(\mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir für die zweite und dritte Gleichung die Kettenregel verwendet. Für die vierte Gleichung beachte man, dass $\mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(\varphi \circ \varphi'^{-1}\right) = \theta_c^{-1} \circ \theta_{c'}$ gilt. Der Ausdruck ist also nach Lemma A.3 ein Homömorphismus und wir können Lemma A.5 anwenden.
Die Behauptung folgt schließlich, indem wir die oben gezeigten Gleichungen

$$\begin{aligned}
\theta_{\tilde{c}} &= \theta_{\tilde{c}'} \circ \mathrm{D}_{\psi(f(a))}\left(\psi' \circ \psi^{-1}\right) \qquad \text{und}\\
\theta_c^{-1} &= \left(\mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)\right)^{-1} \circ \theta_{c'}^{-1}
\end{aligned}$$

einsetzen. □

Bemerkung. Es gilt offensichtlich:

1. $\mathrm{T}_a(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_a(M)}$
2. Sind $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ lokal analytische Abbildungen, so ist

$$\mathrm{T}_a(g \circ f) = \mathrm{T}_{f(a)}\, g \circ \mathrm{T}_a\, f.$$

Nun wollen wir die disjunkte Vereinigung $\mathrm{T}(M) \coloneqq \bigcup_{a \in M} \mathrm{T}_a(M)$ der Tangentialräume betrachten. Wir zeigen, dass dies auch eine lokal analytische Mannigfaltigkeit über K ist. Dazu überlegen wir uns zunächst mögliche Kandidaten für Karten von $\mathrm{T}(M)$ bezüglich einer noch zu definierenden Topologie.

Betrachte die Projektion $p_M\colon\ \mathrm{T}(M) \to M,\ t \mapsto a$ für $t \in \mathrm{T}_a(M)$. Es ist klar, dass dann

$$\mathrm{T}(M) = \bigcup_{c=(U,\varphi)} p_M^{-1}(U)$$

gilt, wobei die Vereinigung über alle Karten für M läuft. Wir wollen also versuchen, eine Topologie zu definieren, bezüglich derer die $p_M^{-1}(U)$ offen in $\mathrm{T}(M)$ sind. Wenden wir uns aber zunächst

den möglichen Kartenabbildungen zu.
Sei $c = (U, \varphi, K^n)$ eine Karte für M. Nach unseren bisherigen Betrachtungen ist die Abbildung

$$\tau_c \colon U \times K^n \to p_M^{-1}(U),\ (a, v) \mapsto [c, v] \text{ betrachtet in } \mathrm{T}_a(M)$$

bijektiv und damit

$$\varphi_c := (\varphi \times \mathrm{id}) \circ \tau_c^{-1}$$

eine Bijektion auf eine offene Teilmenge des $K^{2n} \cong K^n \times K^n$. Die Idee ist es nun, eine topologische Struktur auf $\mathrm{T}(M)$ zu definieren, sodass $c_T := \left(p_M^{-1}(U), \varphi_c, K^{2n}\right)$ eine Karte für $\mathrm{T}(M)$ ist. Zunächst überlegen wir uns, dass zwei solche Karten kompatibel wären. Sei also $\tilde{c} = (V, \psi, K^n)$ eine weitere Karte für M.

Lemma A.6. Die Abbildung $\psi_{\tilde{c}} \circ \varphi_c^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \times K^n \to \psi(U \cap V) \times K^n$ ist lokal analytisch.

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, wie die Abbildungsvorschrift konkret aussieht. Sei dazu $(x, v) \in \varphi(U \cap V) \times K^n$. Es gilt:

$$\varphi_c^{-1}(x, v) = \tau_c\left((\varphi \times \mathrm{id})^{-1}(x, v)\right) = \tau_c\left(\varphi^{-1}(x), v\right) = [c, v],$$

wobei die Äquivalenzklasse in $\mathrm{T}_{\varphi^{-1}(x)}(M)$ betrachtet wird. Für dieses Element erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\psi_{\tilde{c}}([c, v]) &= (\psi \times \mathrm{id})\left(\tau_{\tilde{c}}^{-1}([c, v])\right)\\
&= (\psi \times \mathrm{id})\left(\tau_{\tilde{c}}^{-1}\left(\left[\tilde{c}, \mathrm{D}_x\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(v)\right]\right)\right)\\
&= (\psi \times \mathrm{id})\left(\varphi^{-1}(x), \mathrm{D}_x\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(v)\right)\\
&= \left(\psi \circ \varphi^{-1}(x), \mathrm{D}_x\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(v)\right).
\end{aligned}$$

Zusammengesetzt sehen wir, dass die Abbildung in der ersten Komponente per Definition lokal analytisch ist, da M eine Mannigfaltigkeit ist und φ und ψ kompatible Karten sind. Es verbleibt, die zweite Komponente genauer zu untersuchen. Man kann diese aufspalten in die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned}
&f_1 \colon \varphi(U \cap V) \times K^n \to \mathrm{Hom}\left(K^n, K^n\right) \times K^n,\ (x, v) \mapsto \left(\mathrm{D}_x\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right), v\right) \text{ und}\\
&f_2 \colon \mathrm{Hom}\left(K^n, K^n\right) \times K^n \to K^n,\ (f, v) \mapsto f(v).
\end{aligned}$$

Dass diese lokal analytisch sind, kann man in [Sch11], Proposition 6.1 und Lemma 9.5(i) nachlesen. □

Nun wollen wir eine Topologie auf $\mathrm{T}(M)$ definieren, bezüglich derer die c_T Karten für $\mathrm{T}(M)$ bilden, und so die gesuchte Mannigfaltigkeitsstruktur erhalten.

Definition. Wir nennen eine Teilmenge $X \subseteq \mathrm{T}(M)$ offen, falls für jede Karte $c = (U, \varphi, K^n)$ für M die Menge $\tau_c^{-1}\left(X \cap p_M^{-1}(U)\right)$ offen in $U \times K^n$ ist.

Lemma A.7. Die so definierte Topologie auf $\mathrm{T}(M)$ erfüllt die gewünschten Eigenschaften, das heißt:

(i) Für jedes Karte (U, φ, K^n) für M ist die Abbildung $\tau_c \colon U \times K^n \to p_M^{-1}(U)$ ein Homöomorphismus bezüglich der Teilraumtopologie auf $p_M^{-1}(U) \subseteq \mathrm{T}(M)$. Insbesondere ist dann auch die Abbildung φ_c ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

(ii) Die Abbildung p_M ist stetig. Insbesondere ist dann $\mathrm{T}(M) = \bigcup_{c=(U,\varphi)} p_M^{-1}(U)$ eine offene Überdeckung von $\mathrm{T}(M)$.

(iii) $\mathrm{T}(M)$ ist hausdorffsch.

Beweis. (i) Per Definition der Topologie auf $\mathrm{T}(M)$ ist die Abbildung τ_c stetig. Wir zeigen, dass sie auch offen ist. Sei also $Y \subseteq U \times K^n$ offen. Wir behaupten, dass dann $\tau_c(Y)$ offen in $\mathrm{T}(M)$, also $\tau_{\tilde{c}}^{-1}\left(\tau_c(Y) \cap p_M^{-1}(V)\right)$ offen in $V \times K^m$ für jede Karte $\tilde{c} = (V, \psi, K^m)$ für M ist. Ohne Einschränkung sei $U \cap V \neq \emptyset$, d. h. $m = n$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\tau_{\tilde{c}}^{-1}\left(\tau_c(Y) \cap p_M^{-1}(V)\right) &= \tau_{\tilde{c}}^{-1}\left(\tau_c(Y) \cap p_M^{-1}(U) \cap p_M^{-1}(V)\right) \\
&= \tau_{\tilde{c}}^{-1}\left(\tau_c(Y) \cap p_M^{-1}(U \cap V)\right) \\
&= \tau_{\tilde{c}}^{-1}\left(\tau_c(Y \cap ((U \cap V) \times K^n))\right),
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Gleichung ausgenutzt haben, dass $\tau_c(Y) \subseteq p_M^{-1}(U)$, und in der letzten, dass τ_c eine bijektive Abbildung ist. Nun ist aber $Y \cap ((U \cap V) \times K^n)$ offen in $(U \cap V) \times K^n$. Aus dem Beweis von Lemma A.6 sehen wir, dass

$$(U \cap V) \times K^n \xrightarrow{\tau_c} p_M^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\tau_{\tilde{c}}^{-1}} (U \cap V) \times K^n$$

ein Homöomorphismus ist, und damit folgt die Behauptung.

(ii) Sei $c = (U, \varphi, K^n)$ eine Karte für M. Wählen wir oben $Y = U \times K^n$, so ist $\tau_c(Y) = p_M^{-1}(U)$ offen. Da die Definitionsbereiche eines Atlas für M eine Basis der Topologie auf M bilden, folgt somit die Aussage.

(iii) Seien $s \neq t \in \mathrm{T}(M)$. Angenommen, es ist $p_M(s) \neq p_M(t)$. Da M hausdorffsch ist, finden wir Umgebungen $U \subseteq M$ von $p_M(s)$ und $V \subseteq M$ von $p_M(t)$, sodass $U \cap V = \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von p_M sind dann $p_M^{-1}(U)$ und $p_M^{-1}(V)$ offene Umgebungen von s bzw. t und es gilt $p_M^{-1}(U) \cap p_M^{-1}(V) = p_M^{-1}(U \cap V) = \emptyset$.
Nehmen wir nun an, dass $p_M(s) = p_M(t) =: a$. Wir wählen eine Karte $c = (U, \varphi, K^n)$ für M um a. Dann gilt $s, t \in p_M^{-1}(U)$, was offen in $\mathrm{T}(M)$ ist. Nach (i) ist $p_M^{-1}(U)$ homöomorph zu $U \times K^n$ und insbesondere hausdorffsch (da letzterer Raum hausdorffsch ist). Wir können also s und t in $p_M^{-1}(U)$ trennen und damit auch in $\mathrm{T}(M)$.

□

Wir haben also gezeigt, dass $\mathrm{T}(M)$ zusammen mit der oben definierten Topologie und dem Atlas $\{c_T \mid c \text{ Karte für } M\}$ eine lokal analytische Mannigfaltigkeit ist.

Definition. Die Mannigfaltigkeit $\mathrm{T}(M)$ heißt *Tangentialbündel* von M.

Sei $f\colon M \to N$ eine lokal analytische Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N. Wir definieren die induzierte Abbildung $\mathrm{T}(f)\colon \mathrm{T}(M) \to \mathrm{T}(N)$ durch

$$\mathrm{T}(f)_{|\mathrm{T}_a(M)} = \mathrm{T}_a(f).$$

Lemma A.8. (i) $\mathrm{T}(f)$ ist eine lokal analytische Abbildung.

(ii) Sind $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ zwei lokal analytische Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten L, M und N, so ist

$$\mathrm{T}(g \circ f) = \mathrm{T}(g) \circ \mathrm{T}(f).$$

Beweis. (i) Da f lokal analytisch ist, finden wir per Definition Karten $c = (U, \varphi, K^n)$ für M und $\tilde{c} = (V, \psi, K^m)$ für N, sodass $f(U) \subseteq V$. Dann ist

$$\varphi(U) \times K^n \xrightarrow{\varphi_c^{-1}} p_M^{-1}(U) \xrightarrow{\mathrm{T}(f)} p_N^{-1}(V) \xrightarrow{\psi_{\tilde{c}}} \psi(V) \times K^m$$

eine wohldefinierte Abbildung und gegeben durch

$$\begin{aligned} (x, v) &\mapsto [c, v] && \left(\text{in } \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(x)}\right) \\ &\mapsto \left[\tilde{c}, \mathrm{D}_x\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(v)\right] && \left(\text{in } \mathrm{T}_{f(\varphi^{-1}(x))}\right) \\ &\mapsto \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x),\, \mathrm{D}_x\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(v)\right)\right). \end{aligned}$$

Dass dies lokal analytisch ist, haben wir im Beweis von Lemma A.6 gesehen.

(ii) Dies folgt direkt aus der analogen Aussage für die Tangentialabbildungen.

□

Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge. Ein *Vektorfeld* ξ auf U ist eine lokal analytische Abbildung $\xi\colon U \to \mathrm{T}(M)$, für die $p_M \circ \xi = \mathrm{id}_U$ gilt.
Die Menge der Vektorfelder auf U bezeichnen wir mit $\Gamma(U, \mathrm{T}(M))$.

Wir wollen nun $\Gamma(U, \mathrm{T}(M))$ zu einer Lie-Algebra machen. Dazu benötigen wir zunächst eine weitere topologische Definition:

Definition. Eine Mannigfaltigkeit M wird als *parakompakt* bezeichnet, wenn jede offene Überdeckung von M zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung von M verfeinert werden kann, d. h. zu einer offenen Überdeckung $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, sodass jedes $x \in M$ eine offene Umgebung U_x hat, für die die Menge $\{i \in I \mid U_x \cap U_i \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Sei nun E ein Banachraum (über K). Wir nennen eine Abbildung $f\colon M \to E$ lokal analytisch, falls $f \circ \varphi^{-1} \in C^{\mathrm{an}}(\varphi(U), E)$ für jede Karte $c = (U, \varphi)$ für M gilt.
Sei also f eine solche lokal analytische Abbildung. Wir wählen ein $a \in M$ sowie eine Karte $c = (U, \varphi, K^n)$ für M. Dann ist

$$\begin{array}{llllll} d_a f\colon & \mathrm{T}_a(M) & \xrightarrow{\theta_c^{-1}} & K^n & \xrightarrow{\mathrm{D}_{\varphi(a)}(f\circ\varphi^{-1})} & E \\ & [c, v] & \longmapsto & v & \longmapsto & \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(v) \end{array}$$

eine stetige lineare Abbildung. Wir nennen sie die *Ableitung* von f in a.

Lemma A.9. Die Abbildung $d_a f$ hängt nicht von der Wahl der Karte $c = (U, \varphi, K^n)$ ab.

Beweis. Sei $c' = (U', \varphi', K^n)$ eine weitere Karte für M um a. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \theta_c^{-1} &= \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)^{-1} \circ \theta_{c'}^{-1} \\ &= \mathrm{D}_{\varphi'(a)}\left(f \circ \varphi'^{-1}\right) \circ \theta_{c'}^{-1}, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichung Lemma A.5 verwendet haben. □

Lemma A.10. Sei $a \in M$. Es gilt die *Produktregel*: Sind $g \in C^{\mathrm{an}}(M, K)$ und $f \in C^{\mathrm{an}}(M, E)$, so haben wir die Gleichung

$$d_a(gf) = g(a) \cdot d_a f + d_a g \cdot f(a).$$

Beweis. Sei $[c, v] \in \mathrm{T}_a(M)$, dann haben wir

$$\begin{aligned} d_a(gf)([c, v]) &= \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left((gf) \circ \varphi^{-1}\right)(v) \\ &= \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(\left(g \circ \varphi^{-1}\right) \cdot \left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)(v) \\ &= \left(g \circ \varphi^{-1}(\varphi(a))\right) \cdot \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(v) + \mathrm{D}_{\varphi(a)}\left(g \circ \varphi^{-1}\right)(v) \cdot \left(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(a))\right) \\ &= g(a) \cdot d_a f([c, v]) + d_a g([c, v]) \cdot f(a), \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichung die wohlbekannte Produktregel für die Ableitung auf normierten Räumen verwendet haben. In [Sch11] kann man sie in Bemerkung 4.1.(iv) nachlesen. □

Sei $f \in C^{\mathrm{an}}(M, E)$. Wir können die gerade definierte Ableitung auf das Tangentialbündel $\mathrm{T}(M)$ erweitern, indem wir definieren:

$$df\colon\ \mathrm{T}(M) \to E,\ t \mapsto d_{p_M(t)} f(t).$$

Lemma A.11. Die Abbildung df ist linear und lokal analytisch.

Beweis. Die Linearität ist eine einfache Konsequenz daraus, dass per Definition $\mathrm{D}_{\varphi(a)}(f \circ \varphi^{-1})$ linear ist.
Für die lokale Analytizität sei $c = (U, \varphi, K^n)$ eine Karte für M, also φ_c eine Kartenabbildung für $\mathrm{T}(M)$. Wir müssen zeigen, dass $df \circ \varphi_c^{-1} : \varphi(U) \times K^n \to E$ lokal analytisch ist. Diese Abbildung ist aber gegeben durch $(x, v) \mapsto \mathrm{D}_x\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(v)$, von der wir bereits eingesehen haben, dass sie lokal analytisch ist. □

Mit diesen Definitionen können wir nun die folgende bilineare Abbildung betrachten:

$$\begin{aligned} \Gamma(M, \mathrm{T}(M)) \times C^{\mathrm{an}}(M, E) &\to C^{\mathrm{an}}(M, E) \\ (\xi, f) &\mapsto D_\xi(f) := df \circ \xi. \end{aligned}$$

Lemma A.12. Sei $\xi \in \Gamma(M, \mathrm{T}(M))$ ein Vektorfeld. Dann ist die Abbildung

$$D_\xi : C^{\mathrm{an}}(M, K) \to C^{\mathrm{an}}(M, K), \ f \mapsto df \circ \xi$$

eine Derivation.

Beweis. Offenbar ist D_ξ linear. Seien nun $f, g \in C^{\mathrm{an}}(M, K)$ und $x \in M$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} D_\xi(fg)(x) &= d(fg) \circ \xi(x) \\ &= d_{p_M(\xi(x))}(fg)(\xi(x)) \\ &= f(p_M(\xi(x))) \cdot d_{p_M(\xi(x))} g(\xi(x)) + d_{p_M(\xi(x))} f(\xi(x)) \cdot g(p_M(\xi(x))) \\ &= f(x) \cdot D_\xi(g)(x) + D_\xi(f)(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der dritten Gleichung Lemma A.10 und in der vierten die Tatsache verwendet, dass $p_M \circ \xi = \mathrm{id}_M$. □

Satz A.13. Sei M eine parakompakte Mannigfaltigkeit. Dann existiert für jede Derivation D auf $C^{\mathrm{an}}(M, K)$ ein eindeutiges Vektorfeld ξ auf M, sodass $D = D_\xi$.

Diesen Satz werden wir nicht beweisen, sondern möchten nur auf die entsprechende Literatur verweisen. Man findet die Aussage in [Sch11], Proposition 9.16.

Im Falle, dass M eine parakompakte Mannigfaltigkeit ist, wollen wir nun $\Gamma(M, \mathrm{T}(M))$ zu einer Lie-Algebra machen. Dazu müssen wir das Lie-Produkt zweier Vektorfelder $\xi, \eta \in \Gamma(M, \mathrm{T}(M))$ definieren. Wir betrachten die zugehörigen Derivationen D_ξ und D_η sowie die Differenz

$$D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi.$$

Einfaches Nachrechnen zeigt, dass dies wieder eine Derivation ist. Nach A.13 existiert also ein eindeutiges Vektorfeld $[\xi, \eta]$, sodass $D_{[\xi,\eta]}$ mit obigem Ausdruck übereinstimmt. Dieses Vektorfeld definieren wir als das Lie-Produkt von ξ und η.

Dass $(\Gamma(M, \mathrm{T}(M)), [\cdot,\cdot])$ tatsächlich eine Lie-Algebra ist, d. h. dass $[\cdot,\cdot]$ bilinear und alternierend ist und die Jacobi-Identität erfüllt, lässt sich leicht nachrechnen.

Diese Definition wollen wir nun verwenden, um unser Endziel, einer Lie-Gruppe eine zugehörige Lie-Algebra zuzuordnen, zu erreichen. Wir benötigen dazu den folgenden Satz (vgl. [Sch11], Korollar 18.8), den wir hier nicht beweisen wollen.

Satz A.14. Jede Lie-Gruppe ist parakompakt.

Sei ab jetzt G eine Lie-Gruppe. Wir betrachten für beliebiges $g \in G$ die Rechtsmultiplikation $r_g \colon G \to G, h \mapsto hg$. Diese ist lokal analytisch (vgl. [Sch11], Lemma 13.1).

Lemma A.15. Sei $g \in G$. Dann ist die Abbildung $\mathrm{T}_e(r_g)\colon\ \mathrm{T}_e(G) \to \mathrm{T}_g(G)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Offenbar ist $r_{g^{-1}}$ invers zu r_g. Damit gilt:

$$T_g(r_{g^{-1}}) \circ T_e(r_g) = T_e(r_{g^{-1}} \circ r_g) = \mathrm{T}_e(\mathrm{id_G}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_e(G)}\,.$$

Dass $T_g(r_{g^{-1}})$ auch ein Rechtsinverses ist, zeigt man vollständig analog. □

Die folgenden Lemmata sind Proposition 13.9 und Korollar 13.10 in [Sch11].

Lemma A.16. Die Abbildung $r^T\colon\ \mathrm{T}_e(G) \times G \to \mathrm{T}(G)$, $(t, g) \mapsto \mathrm{T}_e(r_g)(t)$ ist ein lokal analytischer Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten.

Lemma A.17. Die Abbildung $C^{\mathrm{an}}(G, \mathrm{T}_e(G)) \to \Gamma(G, \mathrm{T}(G))$, $f \mapsto \xi^r_f := \big(g \mapsto r^T(f(g), g)\big)$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Notation. Sei $t \in \mathrm{T}_e(G)$. Dann schreiben wir $\xi^r_t := \xi^r_{\mathrm{const}_t}$, wobei $\mathrm{const}_t \in C^{\mathrm{an}}(G, T_e(G))$ die Abbildung sei, die jedes $g \in G$ auf t abbildet.

Definition. Ein Vektorfeld $\xi \in \Gamma(G, \mathrm{T}(G))$ wird *rechtsinvariant* genannt, falls für alle $g \in G$ gilt:

$$\xi(g) = \mathrm{T}_e(r_g)(\xi(e)).$$

Das folgende Lemma ist Korollar 13.13 in [Sch11]:

Lemma A.18. Seien $\xi, \eta \in \Gamma(G, \mathrm{T}(G))$ zwei rechtsinvariante Vektorfelder. Dann ist auch $[\xi, \eta]$ rechtsinvariant.

Lemma A.19. Die Abbildung $f\colon\ \mathrm{T}_e(G) \to \{\xi \in \Gamma(G, \mathrm{T}(G)) \mid \xi \text{ ist rechtsinvariant}\}$, $t \mapsto \xi^r_t$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Die Abbildung ist per Definition wohldefiniert. Betrachte die Zuordnung

$$\tilde{f}\colon \{\xi \in \Gamma(G, \mathrm{T}(G)) \mid \xi \text{ ist rechtsinvariant}\} \to \mathrm{T}_e(G), \quad \xi \mapsto \xi(e).$$

Seien zunächst $g \in G$ und $\xi \in \Gamma(G, \mathrm{T}(G))$ ein rechtsinvariantes Vektorfeld. Dann gilt:

$$\left(f \circ \tilde{f}(\xi)\right)(g) = f(\xi(e))(g) = \xi^r_{\xi(e)}(g) = \mathrm{T}_e(r_g)(\xi(e)) = \xi(g),$$

wobei die letzte Gleichung die Rechtsinvarianz von ξ verwendet.
Sei umgekehrt $t \in \mathrm{T}_e(G)$ und sei weiter $c = (U, \varphi)$ eine Karte für $T_e(G)$. Wir haben dann:

$$\tilde{f} \circ f(t) = \tilde{f}(\xi^r_t) = \xi^r_t(e) = \mathrm{T}_e(r_e)(t),$$

und die Abbildung $\mathrm{T}_e(r_e)$ ist per Definition gegeben durch $\theta_c \circ \mathrm{D}_{\varphi(e)}\left(\varphi \circ r_e \circ \varphi^{-1}\right) \circ \theta_c^{-1}$. In der Mitte steht aber die Identität, und so folgt $\tilde{f} \circ f(t) = t$.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $\tilde{f}$ das Inverse zu f ist, und die Aussage folgt. $\square$

Seien $s, t \in \mathrm{T}_e(G)$. Wir definieren wie folgt ein Lie-Produkt von s und t: Nach Lemma A.18 ist das Vektorfeld $[\xi^r_s, \xi^r_t]$ rechtsinvariant. Also existiert nach Lemma A.19 ein eindeutig bestimmter Tangentialvektor $[s, t]$, sodass

$$\xi^r_{[s,t]} = [\xi^r_s, \xi^r_t]\,.$$

Dieser Tangentialvektor sei das Lie-Produkt von s und t. Dass $[\cdot, \cdot]$ tatsächlich die Eigenschaften eines Lie-Produktes erfüllt, folgt aus den entsprechenden Eigenschaften für das Lie-Produkt von Vektorfeldern.

Definition. Sei G eine Lie-Gruppe. Dann ist $\mathrm{Lie}(G) := (\mathrm{T}_e(G), [\cdot, \cdot])$ die zu G assoziierte *Lie-Algebra*.

Zum Abschluss wollen wir nun noch kurz an eine Abbildung zwischen G und $\mathrm{Lie}(G)$, die Exponentialabbildung, erinnern. Genauer nachlesen kann man Existenz und Wohldefiniertheit in [Bou89], Kapitel 3, Abschnitt 4.3.

Definition. Es bezeichne $o \subseteq K$ den Ganzheitsring von K. Sei $U \subseteq \mathrm{Lie}(G)$ eine offene Umgebung der 0 mit $oU \subseteq U$. Eine lokal analytische Abbildung $\exp_G\colon U \to G$ heißt *Exponentialabbildung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $\exp_G(0) = e$,
- $\mathrm{T}_0(\exp_G) = \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(G)}$ und
- $\exp_G((x + y)t) = \exp_G(xt) \cdot \exp_G(yt)$ für alle $x, y \in o$ und $x \in U$.

Bemerkung. Für jede Lie-Gruppe G existiert eine Exponentialabbildung. Ferner stimmen zwei Exponentialabbildungen von G auf einer Umgebung der Null überein, insbesondere sprechen wir auf einer Umgebung der Null auch von *der* Exponentialabbildung.

Literatur

[Are58] Richard Arens. “Dense Inverse Limit Rings”. In: *Michigan Math. J. 5* 2 (1958), S. 169–182.

[BC09] Olivier Brinon und Brian Conrad. *CMI Summer School Notes on p-Adic Hodge Theory*. Juni 2009. verfügbar unter math.stanford.edu/~conrad/papers/notes.pdf, zuletzt aufgerufen am 09.04.2018.

[Ber02] Laurent Berger. “Représentations p-adiques et équations différentielles”. In: *Invent. Math. 148* 2 (2002), S. 219–284.

[Ber16] Laurent Berger. “Multivariable (φ, Γ)-modules and locally analytic vectors”. In: *Duke Math. J. 165* 18 (2016), S. 3567–3595.

[BF17] Laurent Berger und Lionel Fourquaux. “Iwasawa Theory and F-analytic Lubin-Tate (φ, Γ)-Modules”. Preprint, arXiv:1512.03383v2 [math.NT]. 2017.

[Bou89] Nicolas Bourbaki. *Lie Groups and Lie Algebras. Chapter 1-3*. 1989.

[Col08] Pierre Colmez. “Représentations triangulines de dimension 2”. In: *Astérisque* 319 (2008), S. 213–258.

[Col16] Pierre Colmez. “Représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules”. In: *Representation Theory* 20 (2016), S. 187–248.

[FX13] Lionel Fourquaux und Bingyong Xie. “Triangulable O_F-analytic (φ_q, Γ)-modules of rank 2”. In: *Algebra Number Theory 7* 10 (2013), S. 2545–2592.

[Ked04] Kiran S. Kedlaya. “A p-adic local monodromy theorem”. In: *Annals of Math. 160* (2004), S. 93–184.

[Kri16] Andreas Kriegl. *Fréchet Spaces*. Vorlesung in Wien, SoSe 2016. verfügbar unter www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/2016SS.pdf, zuletzt aufgerufen am 15.07.2018.

[Laz62] Michel Lazard. “Les zéros d’une fonction analytique d’une variable sur un corps valué complet”. In: *Publications mathématiques de l’I.H.É.S. 14* (1962), S. 47–65.

[Neu11] Jürgen Neukirch. *Klassenkörpertheorie*. Neu herausgegeben von Alexander Schmidt. Springer, 2011.

[Nov08] Boris Novikov. “Semigroup cohomology and applications”. Survey of author’s research, arXiv:0803.0463v1 [math.RA]. 2008.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt und Kay Wingberg. *Cohomology of Number Fields*. Springer, 2008.

[Sch06] Peter Schneider. *Die Theorie des Anstieges*. Vorlesung in Münster, WS 2006/07. verfügbar unter https://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/Theorie-des-Anstiegs.pdf, zuletzt aufgerufen am 02.04.2018.

[Sch11] Peter Schneider. *p-Adic Lie Groups*. Springer, 2011.

[Sch17] Peter Schneider. *Galois representations and* (φ, Γ)*-Modules*. Cambridge University Press, 2017.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die inhaltlich oder wörtlich übernommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Heidelberg, 29. August 2018