Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Der Lazardisomorphismus

Diplomarbeit

Betreuer: Prof. Dr. Otmar Venjakob

vorgelegt von
Jens Jürgens

Heidelberg, Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Für den Rest dieser Arbeit sei p eine Primzahl.

Motivation

Auf den ersten Blick scheint es schwierig diese Arbeit einer mathematischen Teildisziplin zuzuordnen. Etwas pauschal formuliert könnte man ihr Thema etwa so festlegen, dass man sich mit dem Studium von p-adischen Liegruppen, welche rein formal als Gruppenobjekte in der Kategorie der lokal analytische $\mathbb{Q}_p$-Mannigfaltigkeiten auftreten, mit Schwerpunkt auf ihre Gruppenkohomologie beschäftigt. Dabei geht es hier nicht so sehr um den Bezug zur algebraischen Zahlenthorie, was man vielleicht zuerst denken könnte, sondern eher um die algebraische Theorie dieser Liegruppen. Beginnt man sich in die Theorie der p-adischen Liegruppen einzuarbeiten, so sieht man sich sofort einigen Schwierigkeiten gegenübergestellt. Einige der Hauptschwierigkeiten sind neben der Fülle an unterschiedlichen Charakterisierungen und Klassifikationen von p-adischen Liegruppen die komplizierten Filtrationstechniken und Analytizitätsbegriffen, auf welchen die algebraische Theorie fußt. Deswegen ist es sicherlich wichtig, eine gute Motivation für die Beschäftigung mit p-adischen Liegruppen zu liefern. Diesbezüglich wird kurz auf eine Anwendung in der algebraischen Zahlentheorie und eine weitere Anwendung in der algebraischen Topologie eingegangen:
Bei der ersten Anwendung lohnt es sich kurz an die Situation der GL_2-Hauptvermutung für elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation zu erinnern. Sei hierzu E eine elliptische Kurve ohne komplexe Multiplikation über $\mathbb{Q}$ und sei E_{p^∞} die Gruppe der p-Potenz Divisionspunkte auf E. Man setze die Körpererweiterung $F_\infty = \mathbb{Q}(E_{p^\infty})$, die durch die Adjunktion der p-Potenz Divisionspunkte der elliptischen Kurve E entsteht. Dann ist die Galoisgruppe $G := Gal(F_\infty/\mathbb{Q})$ eine kompakte p-adische Liegruppe, genauer lässt sie sich nach einem Ergebnis von Serre sogar als abgeschlossene Untergruppe von $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ realisieren. Diese Tatsache trägt essentiell zur Formulierung und Diskussion der GL_2-Hauptvermutung bei.
Die zweite Anwendung stammt aus der stabilen Homotopietheorie der Kugel. Sei hierzu $\mathbb{W}_n := W_{\mathbb{F}_q}$ der Ring der Witt-Vektoren über $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^n$ und sei $\sigma : \mathbb{W}_n \to \mathbb{W}_n$ mit $w \mapsto w^\sigma$ die Liftung des Frobenius Automorphismusses $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ mit $x \mapsto x^p$. Sei weiter $\mathcal{O}_n$ die Ringerweiterung von $\mathbb{W}_n$, die durch die Adjunktion des Elements S, welches den Relationen $S^n = p$ und $Sw = w^\sigma S$ genügt, ensteht. Das Element S erzeugt ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{M}$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_n$ und es gilt $\mathcal{O}_n/\mathfrak{M} \cong \mathbb{F}_q$. Mit dem Kern S_n der Reduktionsabbildung $\mathcal{O}_n^\times \to \mathbb{F}_q^\times$ wird die strikte Morava-Stabilisator Gruppe bezeichnet. Man kann zeigen, dass S_n eine kompakte p-

adische Liegruppe ist. Mit ihrer stetigen Gruppenkohomologie lässt sich die E_2-Seite der Adams-Novikov Spektralsequenz berechnen. Diese ist wiederum von unabdingbarer Wichtigkeit in der eben genannten Homotopietheorie.
Nach dieser kurzen Illustration von zwei der vielen unterschiedlichen Anwendungen p-adische Liegruppen, beschäftigt sich diese Arbeit nun mit einem Vergleichsisomorphismus zwischen der stetigen Gruppenkohomologie von p-adischen Liegruppen und ihrer Lie-Algebra Kohomologie. Die ersten Resultate für einen solchen Vergleich lieferte Lazard in seinem bahnbrechenden Werk [Laz65] über p-adische Liegruppen. Genauer bewies Lazard, dass die stetige Gruppenkohomologie mit rationalen Koeffizienten von bestimmten torsionsfreien p-adischen Liegruppen mit der Lie-Algebra-Kohomologie mit rationalen Koeffizienten der Lie-Algebra dieser Gruppen übereinstimmt.([Laz65] V.2.4.9). Auch er stellte sich schon die Frage, die dann unter anderem von Totaro in [Tot99] weitergeführt wurde, warum diese Isomorphie nicht mit integralen Koeffizienten möglich ist. Lazard beschrieb dieses Problem als *reste á faire* und erst seit Neuestem sind die Autoren Huber-Klawitter, Kings und Naumann in [HKN06] erste Schritte in Richtung einer Lösung dieses Problems gegangen.
Um nun den Nutzen einer solchen integralen Lazardisomorphie zu motivieren, soll an die Arbeit [VO11] von Peter Schneider und Otmar Venjakob über die spezielle Whithead Gruppe erinnert werden, die vor allem für Aussagen der algebraischen K-Theorie wichtig ist.
Sei dazu G ein p-bewertete Gruppe [1], $\Lambda(G) := \varprojlim_N \mathbb{Z}_p(G/N)$ ihre Iwasawa-Algebra und man setze $\Lambda^\infty(G) := \varprojlim_N \mathbb{Q}_p(G/N)$, wobei der projektive Limes über alle normalen offenen Untergruppen N der Gruppe G genommen wird. Die spezielle Whitehead Gruppe wird in [VO11] durch

$$SK_1(\Lambda(G)) := ker(K_1(\Lambda(G)) \longrightarrow K_1(\Lambda^\infty(G)))$$

definiert. Mit Hilfe der integralen Lazard Isomorphie und einigen weiteren Zusatzbedingungen an die Gruppe G kann man $SK_1(\Lambda(G))$ explizit berechnen. Diese Resultate stellen weitere Mosaiksteine der Hauptvermutung in der nicht-kommutativen Iwasawa-Theorie dar.
Nach dieser Motivation, soll nun in dieser Arbeit die Frage beantwortet werden, für welche p-adischen Liegruppen ein integraler Lazard Isomorphismus möglich ist. Dabei wird unter anderem gezeigt, dass die Bedingung an die p-adische Liegruppe *uniform mächtig* zu sein nicht notwendig ist.

Leitfaden und Übersicht über die Ergebnisse

Das *erste Kapitel* bildet das technische Herz dieser Arbeit. Es widmet sich der Frage, wie man Ringen und Moduln Filtrierungen zuordnen kann. Diese werden zuerst ganz allgemein nach Lazarad [Laz65] Kapitel I eingeführt. Dabei bleibt zu bemerken, dass diese nicht-diskreten Filtrierungen im allgemeinen sehr schwer zu handhaben sind. Beispielsweise verliert der Funktor gr$(-)$ im nicht-diskreten Fall seine Exaktheitseigenschaften. Die Filtrierungen, welche in dieser Arbeit vorkommen sind zum

[1]Die präzisen Definitionen erfolgen zu einem späteren Zeitpunkt. Man stelle sich einfach eine torsionsfreie endlich erzeugte analytische pro-p Gruppe vor.

Glück alle diskret.

Anschließend zu diesen grundlegenden Konzepten bemüht man sich verschiedene Eigenschaften der zu den Filtrierungen assozierten Filtrierungstopologie wie etwa Kompaktheit oder Vollständigkeit zu untersuchen.
Im *zweiten Kapitel* geht es darum die p-adischen Liegruppen topologisch einzuführen. Die anschließende Darlegung orientiert sich an dem Buchprojekt von Peter Schneider [Sch08], sowie an den Arbeiten von Chistian Tobias Feaux de Lacroix [dLG99] und [dL92]. An erster Stelle steht das Studium von Räumen über nichtarchimedischen vollständigen Körpern und deren Eigenschaften. Als nächstes wird ein geeigneter lokal analytischer Funktionenbegriff für Abbildungen zwischen diesen Räumen entwickelt. Darauf folgend werden bestimmte topologische Hausdorff-Räume betrachtet, die unter Zusatzbedingungen die Grundlage für lokal analytische Mannigfaltigkeiten bilden. Schließlich werden die p-adischen Liegruppen definiert.

In *Kapitel 3* geht es um die Frage, wie man bestimmte p-adische Liegruppen als $\mathbb{Q}_p$-wertige Punkte von Gruppenschemata erhält. Dies ist ein erster Fingerzeig hinsichtlich der Beantwortung der Frage, wie man einen Lazard Isomorphismus auf der Ebene von Gruppenschemata konstruieren könnte, aus welchem die in [HKN06] bewiesene Lazardisomorphie und das klassische Ergebnis [Laz65] V.2.4.9 folgen würden. Das eine solche Isomorphie existiert, die mit der zuletzt genannten übereinstimmt, wurde bereits in [HK06] gezeigt. Jedoch handelt es sich in diesem Fall aber um eine Isomorphie zwischen *lokal analytischer Gruppenkohomologie* und Lie-Algebra Kohomologie. Deswegen ist es bis jetzt noch nicht einmal klar, ob eine solche allgemeine Lazardisomorphie in der stetigen oder in der lokal analytischen Gruppenkohomologie beschrieben werden sollte.
Um auf die zu Beginn des dritten Kapitels erwähnte Fragestellung zurückzukommen, werden die Objekte *glattes Gruppenschema* und dessen vervollständigte Version das *formale glatte Gruppenschema* eingeführt. Dabei beschränkt man sich auf die Kategorie $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$ der glatten separablen $\mathcal{O}$-Gruppenschemata von endlichem Typ, wobei $K/\mathbb{Q}_p$ eine endliche algebraische Körpererweiterung mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ ist. Um nun von der Kategorie der Schemata in die Kategorie der lokal analytischen Mannigfaltigkeiten zu gelangen, wird ein Analytifizierungsfunktor konstruiert, der in Kapitel 5.4 auf Objekte in $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$ angewendet wird.

Theorem: *(Analytifzierung)*
Sei $X \in Obj(\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt})$. Dann gilt:

1. *Es existiert eine lokal analytische Mannigfaltigkeit $(X^{an}, \mathcal{O}^{la}_{X^{an}})$ und eine kanonische Abbildung $\phi : X^{an} \longrightarrow X$, die eine Bijektion des zugrundeliegenden topologischen Raumes $|X^{an}|$ mit den K-rationalen Punkten $X(K)$ des Schemas X induziert.*

2. *Es existiert ein Analytifizierungsfunktor*

$$\left\{\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}\right\} \xrightarrow{(-)^{an}} \left\{\begin{matrix} \textit{lokal analytische} \\ K\textit{-Mannigfaltigkeiten} \end{matrix}\right\}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Seien X und Y Objekte in $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$, dann ist die Analytifizierung des Faserproduktes über K

$$(X \times_K Y)^{an} \cong X^{an} \times Y^{an}$$

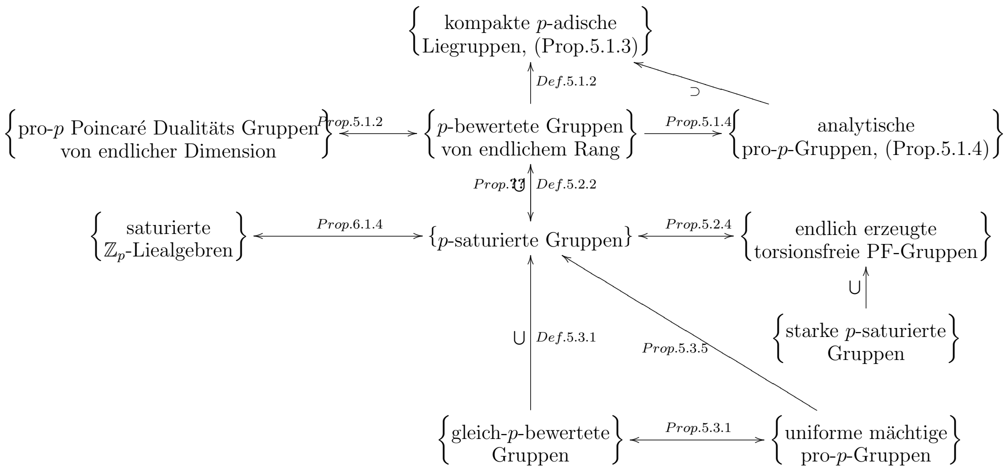
eine lokal analytische K-Produktmannigfaltigkeit.

(b) Gruppenobjekte in $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$ werden zu Gruppenobjekten in der Kategorie der lokal analytischen K-Mannigfaltigkeiten.

Als letzten Punkt in diesem Kapitel wird kurz auf die Weil-Restriktion eingegangen. Anhand dieser Vorbereitungen wird es in Kapitel 6 möglich sein, eine Version der Lazardisomorphie explizit auf dem Niveau der glatten Gruppenschemata anzugeben.

Im *vierten Kapitel* wird sowohl die Kohomologie von Lie-Algebren als auch die Kohomologie von Liegruppen eingeführt. Im nächsten Abschnitt werden einige Lemmata aus der homologischen Algebra bewiesen, welche für den Beweis der integralen Lazardisomorphie von unabdingbarer Wichtigkeit sind. Das erste ist das ursprünglich von Serre bewiesene Liftungslemma für Auflösungen. Daran anschließend wird das auf Lazard zurückgehende Vergleichslemma von gelifteten Auflösungen bewiesen. Darauffolgend wird die Lie-Algebra Kohomologie eingeführt und einige ihrer fundamentalen Eigenschaften gezeigt. Als nächstes geht es darum stetige Gruppenkohomologie analytischer pro-p-Gruppen mithilfe des Lazardschen *quasiminimalen Komplex* einzuführen.

Im *fünften Kapitel* werden alle in der gängigen Literatur auftretetenden kompakten p-bewerteten p-adischen Liegruppen klassifiziert und ihre wichtigsten Eigenschaften dargestellt. Dabei ist es von Vorteil in der Lazardschen Sprache der p-Bewertungen zu arbeiten und diese durch die rein gruppentheoretischen Charakterisierungen aus [DDSMS03] und [GS07] zu ergänzen. Hierbei ergibt sich folgendes kategorielles Übersichtsdiagramm:



Es ist wichtig einige Dinge zu diesem Diagramm zu bemerken. Die Definitionen einer p-bewerteten Gruppen sind zu einem geringen Ausmaß unterschiedlich zu den originalen Definitionen in [Laz65]. Lazard definiert die p-Bewertung zuerst einmal hinsichtlich einer abstrakten Gruppe. Für die Zwecke dieser Arbeit ist es nun übersichtlich und dienlich gleich von einer der Gruppen zugrundeliegenden analytischen

Struktur auszugehen. Diese Variante der Definition überträgt sich natürlich auf die p-saturierten Gruppen und die gleich p-bewerteten Gruppen.
Nach den grundsätzlichen Definitionen der unterschiedlichen Gruppen wird die Frage beantwortet, wann man die Modulstruktur eines G-Moduls auf eine $\operatorname{Sat}\Lambda(G)$-Modulstruktur erweitert kann, falls G eine p-saturierte Gruppe ist. Hinsichtlich dessen wird die Kategorie $\mathbf{mod}^{Sat}_{\Lambda(G)}$ der erweiterbaren Moduln eingeführt. Anschließend wird der Unterschied zwischen p-saturierten Gruppen und uniformen mächtigen pro-p-Gruppen mithilfe von Klopschs Veröffentlichung [Klo05] herausgearbeitet. Als nächstes wird die Frage aufgegriffen, in wieweit sich p-bewertete Gruppen G über ihre mod-p-Kohomologie - also die Gruppenkohomologie $\mathrm{H}^*(G, \mathbb{F}_p)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$ - klassifizieren lassen. Dabei wird die mod-p-Kohomologie von gleich-p-bewerteten Gruppen mithilfe der May-Spektralsequenz explizit berechnet und es wird mit den allgemein bekannten Ergebnissen aus Symonds [SW00] wiederholt, inwiefern man zumindest für diese Klasse eine kohomologische Klassifizierung erhält. Leider konnte bis jetzt nicht die weitaus neuere und interessantere Frage nach der Struktur der mod-p-Kohomologie von beispielsweise p-saturierten Gruppen beantwortet werden. Diesbezüglich ist es ziemlich wahrscheinlich, dass man mit der mod-p-Kohomologie von elementar abelschen p-Gruppen und Spektralsequenz Argumenten auch dieses Problem lösen kann und damit auch eine erste kohomologische Klassifizierung von nicht uniform mächtigen Gruppen hätte.
Abschließend wird die Klasse der starken p-saturierten Gruppen eingeführt, die eine PF-Filtrierung besitzen und darüber hinaus die Bedingung $\gamma_p(G) \subseteq \Phi(G)^p$ an den p-iterierten Kommutator erfüllen. Diese Bedingung dient vor allem dazu, dass man im Gegensatz zu den p-saturierten Gruppen allgemein sehr leicht eine handliche Filtrierung, etwa durch die Untere-p-Reihe oder durch Dimensionsuntergruppen findet. Diese Klasse von Gruppen dient später in Kapitel 7 dazu eine integrale Lazardisomorphie für p-bewertete Gruppen von endlichem Typ, die nicht p-saturiert sind, zu beweisen.
In *Kapitel 6* geht es nun darum, wie man einer kompakten p-adischen Liegruppe eine Lie-Algebra zuordnen kann. Diese Lie-Algebra einer Gruppe wird zuerst als Saturierung von bestimmten filtrierten Hopf-Algebren rein algebraisch eingeführt. Diese Konstruktion orientiert sich an [Laz65] Kapitel IV. Schließlich werden zwei für den Beweis der integralen Lazardisomorphie äußerst wichtige Vergleichsätze bewiesen. Der erste beschreibt eine Isomorphie zwischen den Saturierungen der Iwasawa Algebra und der universell einhüllenden Algebra der Lie-Algebra:

Proposition: *(Isomorphie der Saturierungen, [Laz65]IV,3.2.5) Sei G eine p-saturierte Gruppe, dann erhält man eine Isomorphie zwischen den p-saturierten Gruppen*

$$G \cong \mathcal{G}^* \operatorname{Sat} \mathbb{Z}_p[G]$$

und eine Isomorphie

$$\operatorname{Sat} \mathbb{Z}_p[G] \cong \operatorname{Sat} \mathcal{U}\mathfrak{L}(G)$$

zwischen der Saturierung der Iwasawa-Algebra von G und der Saturierung der Universell Einhüllenden Algebra der Lie-Algebra $\mathfrak{L}(G)$.

Der zweite auf Totaro (vgl.[Tot99] Beweis Theorm 9.1) zurückgehende Vergleichssatz beschreibt, wann die Graduierungen der beiden oben erwähnten Algebren isomorph sind. Dabei ist es wichtig zu bemerken, wann diese Isomorphie um den Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ *'korrigiert'* werden muss.

Proposition: *(Isomorphie der Graduierungen) Sei G eine p-saturierte Gruppe, $\Lambda(G)$ ihre Iwasawa-Algebra und $\mathfrak{L}(G)$ ihre integrale Lie-ALgebra. Dann folgt:*

1. *Angenommen die Bewertung von G ist nicht ganzzahlig, dann sind die korrigierten Graduierungen*
$$\operatorname{gr}\operatorname{Sat}\mathcal{O}_K[[G]] \cong \operatorname{gr}(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \operatorname{Sat}\mathcal{U}\mathfrak{L}(G))$$
isomorph.

2. *Für die Vervollständigung der universell Einhüllenden Algebra gilt*
$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{L}(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_K) \cong \widehat{\mathcal{U}(\mathfrak{L}(G)})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K.$$

Anschließend wird kurz auf die Lie-Korrespondenz für p-saturierte Gruppen eingegangen. Dabei wird auch untersucht, inwiefern sich eine solche Korrespondenz auf alle p-bewerteten Gruppen ausdehnen ließe. Als ersten Ansatz wird an die Idee von Pink aus [Pin93] erinnert. Als eine weitere etwas künstliche, aber trotzdem technisch korrekte Teillösung dieses Problems, wird die *transportable Gruppe* aus [Laz65]IV,3.4.8 eingeführt.
Daran anschließend wird gezeigt, inwiefern diese algebraische Konstruktion mit der geometrischen Intuition der Lie-Algebra einer Liegruppe als Tangentialraum im neutralen Element der Gruppe in Übereinstimmung gebracht werden kann.
Im *siebten Kapitel* wird nachstehendes Vergleichstheorem der beiden Kohomologietheorien bewiesen. Dabei wird im erheblichen Ausmaß auf die in Kapitel 1 entwickelten Filtrierungstechniken und dort bewiesenen Sätze zurückgegriffen.

Theorem: *(Integraler Lazard-Morphismus)*
Sei G eine gleich-p-bewertete Gruppe und M, M', M'' kompakte $\mathbb{Z}_p$-Moduln aus der Kategorie der erweiterbaren Moduln $\mathbf{mod}^{Sat}_{\Lambda(G)}$ (vgl. Proposition 5.2.2), dann gilt:

1. *Es existiert eine Isomorphie*
$$\phi_G(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K : H^*_{cts}(G, M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \cong H^*(\mathfrak{L}(G), M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$$
zwischen der stetigen Gruppenkohomologie von G und der Lie-Algebrakohomologie von $\mathfrak{L}(G)$;

2. *Sei H eine weitere Gruppe, welche die Bedingungen des Theorems erfüllt und sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist der Isomorphismus natürlich bezüglich f;*

3. *Die Isomorphien (1),(2) und (3) sind mit cup-Produkten verträglich, das heißt für $\alpha : M \otimes_{\mathbb{Z}_p} M' \to M''$ kommutiert folgendes Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{H}^*_{cts}(G, M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^*_{cts}(G, M')) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \arrow[r] \arrow[d, "\phi_G(M)\otimes\phi_G(M')"] & \mathrm{H}^*_{cts}(G, M'') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \arrow[d, "\phi_G(M'')"] \\
(\mathrm{H}^*(\mathfrak{L}(G), M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^*(\mathfrak{L}(G), M')) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \arrow[r] & \mathrm{H}^*(\mathfrak{L}(G), M'') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K
\end{tikzcd}$$

Der Beweis des Theorems wird aus der Arbeit [HKN06] von Huber-Klawitter, Kings und Naumann nochmals dargestellt. Dabei werden einige Stellen, die in dieser Arbeit nur skizziert werden, etwas detaillierter ausgearbeitet.

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Otmar Venjakob für seine Betreuung, den Vorschlag dieses anspruchsvollen und spannenden Themas und seine steten Ermutigungen und Denkanstöße bedanken. Ferner bedanke ich mich bei meinen Eltern und Schwiegereltern für ihre Unterstützung. Außerdem gilt mein Dank Alexandra Köthe und ganz besonders meiner Frau Birte Jürgens. Beide haben mir erheblich dabei geholfen, dass diese Arbeit lesbar und verständlich wurde.

Kapitel 1

Bewertete Ringe und Moduln

Für dieses Kapitel sei R ein Ring. Falls R nicht-kommutativ ist, so werde R-Moduln M immer als Rechts-R-Moduln betrachtet.

1.1 Filtrierungen

Definition 1.1.1. (filtrierter Ring)
Ein *filtrierter Ring* R ist ein Ring R mit einer reellwertigen Abbildung

$$v : R \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

welche folgenden Eigenschaften genügt: Für alle $\mu, \lambda \in R$ gilt

1. $v(\lambda - \mu) \geq \min(v(\lambda), v(\mu))$;
2. $v(\lambda\mu) \geq v(\lambda) + v(\mu)$;
3. $v(1) = 0$;

Die Abbildung v wird im folgenden *Bewertung* des Ringes R genannt.

Für alle $\nu \in \mathbb{R}$ setzt man die Mengen $R_\nu := \{\lambda \in R : v(\lambda) \geq \nu\}$ und $R_{\nu+} := \{\lambda \in R : v(\lambda) > \nu\}$. Durch die Eigenschaften (1) und (2) wird garantiert, dass die Familie $(R_\nu)_{\nu \in \mathbb{R}}$ zweiseitige Ideale des Ringes R sind, welche folgenden Eigenschaften genügen:

1. $R_\nu \subseteq R_{\nu'}$, falls $\nu \geq \nu'$;
2. $R_\nu = \bigcap_{\nu' < \nu} R_{\nu'}$, für alle $\nu \in \mathbb{R}$;
3. $R_\nu.R_{\nu'} \subset R_{\nu+\nu'}$, für alle $\nu, \nu' \in \mathbb{R}$;

Die Familie $(R_\nu)_\nu$ wird im folgenden die zu der *Bewertung v assozierte Filtrierung* oder kurz *Filtrierung* des Ringes R genannt. Für diese Arbeit wird als Konvention für $\lambda \in R$

$$v(\lambda) = \infty \text{ falls } \lambda \in \bigcap_{\nu \in \mathbb{R}} R_\nu$$

gesetzt.

Auf die gleiche Art lassen sich Filtrierungen für Moduln über filtrierten Ringen einführen.

Definition 1.1.2. (filtrierter Modul) Ein *filtrierter Modul* über einem filtrierten Ring R ist ein R-Modul M mit einer reellwertigen Abbildung

$$w_M : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

welche folgenden Eigenschaften genügt:

1. $w_M(x - y) \geq \min(w_M(x), w_M(y))$ für alle $x, y \in M$;

2. $w_M(\lambda x) \geq v(\lambda) + w_M(x)$ für $\lambda \in R$ und $x \in M$;

Die Abbildung w_M wird im folgenden *Bewertung* des R-Moduls M genannt. Falls aus dem Kontext heraus klar ist, welche Bewertung gemeint ist, wird statt w_M einfach w geschrieben.

Für alle $\nu \in \mathbb{R}$ setzt man die Mengen $M_\nu := \{\lambda \in M : w(x) \geq \nu\}$ und $M_{\nu+} := \{\lambda \in M : w(x) > \nu\}$. Durch die Eigenschaften (1) und (2) wird garantiert, dass die Familie $(M_\nu)_\nu$ Untermoduln des R-Moduls M sind, welche folgenden Eigenschaften genügen:

1. $M_\nu \subseteq M_{\nu'}$, falls $\nu \geq \nu'$;

2. $M_\nu = \bigcap_{\nu' < \nu} M_{\nu'}$, für alle $\nu \in \mathbb{R}$;

3. $R_\nu . M_{\nu'} \subset M_{\nu+\nu'}$, für alle $\nu, \nu' \in \mathbb{R}$;

Die Familie $(M_\nu)_{\nu \in \mathbb{R}}$ wird im folgenden die zu der *Bewertung w assozierte Filtrierung* oder kurz *Filtrierung* des R-Moduls M genannt. Für diese Arbeit wird als Konvention für $x \in M$

$$w_M(x) = \infty \text{ falls } x \in \bigcap_{\nu \in \mathbb{R}^+} M_\nu$$

gesetzt.
Sei M' ein R-Untermodul eines filtrierten R-Moduls M, dann erhält man durch die Beschränkung der Bewertung

$$w_{M'}(x) = w_M(x) \text{ für } x \in M',$$

die von M auf M' *induzierte Filtrierung*. Sei $f : M \to M'$ ein Epimorphismus von R-Moduln, wobei M filtriert ist. Man erhält auf dem R-Modul M' die *Quotientenfiltrierung*(vgl.[Laz65].I.2.1.7) bezüglich f durch die Bedingung

$$w_{M'}(x) = sup_{f(y)=x} w_M(y) \text{ für } x \in M'.$$

Definition 1.1.3. (Eigenschaften von Filtrierungen) Sei R ein filtrierter Ring mit Filtrierung $(R_\nu)_\nu$ und M ein filtrierter R-Modul M mit Filtrierung $(M_\nu)_\nu$.

1. Die Filtrierung des Ringes R respektive des R-Moduls M heißt diskret, falls alle ν ungleich ∞ Elemente einer diskreten Teilmenge $\mathbb{R}$ sind. Falls die Filtrierungen diskret sind, schreibt man $F_\nu R := R_\nu$ respektive $F_\nu M := M_\nu$ für alle $\nu \in T$.

2. Die Filtrierungen heißen *ausschöpfend*, falls $R = \bigcup_\nu R_\nu$ respektive $M = \bigcup_\nu M_\nu$;

3. Die Filtrierungen heißen *separabel*, falls $\bigcap_\nu R_\nu = 0$ respektive $\bigcap_\nu M_\nu = 0$;

Alle in dieser Arbeit zu Bewertungen assozierte Filtrierungen werden als ausschöpfend vorausgesetzt.
Im Allgemeinen ist größte Vorsicht bezüglich diskreter und nicht-diskreter Filtrierungen geboten. Viele der folgenden Sätze sind nur für diskrete Filtrierungen gültig und keinesfalls für nicht-diskrete Filtrierungen. Im jeweiligen Fall wird auf den Unterschied hingewiesen.

Definition 1.1.4. (filtrierte Morphismen) Sei R in filtrierter Ring und seien M, M' und M'' filtrierte R-Moduln.

1. ([Laz65]I.2.1.4) Ein *filtrierter Morphismus* $f : M \to M'$ ist eine R-lineare Abbildung, die bezüglich der Bewertung die Bedingung

$$w_{M'}(f(x)) \geq w_M(x) \text{ für } x \in M$$

erfüllt. Bezüglich der zu der Bewertung assozierten Filtrierung heißt das

$$f(M_\nu) \subset M'_\nu \text{ für } \nu \in \mathbb{R}^+.$$

2. ([Laz65]I.2.1.5) Eine *Isometrie* ist ein filtrierter Morphismus $f : M \to M'$, der injektiv ist und der die Bewertung erhält. Explizit bedeutet das, dass

$$w_{M'}(f(x)) = w_M(x) \text{ für } x \in M$$

gilt. Eine Isometrie erlaubt es das Bild $f(M)$ des R-Moduls M mit einem Untermodul des R-Moduls M' zu identifizieren, welcher mit der induzierten Filtrierung versehen wird.

3. ([Laz65].IV.2.2.3) Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

von filtrierten R-Moduln heißt *filtriert exakt*, falls für alle $\nu \in \mathbb{R}$ die Einschränkung auf die ν-ten Filtrierungsschritte als Sequenzen von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M'_\nu \xrightarrow{f_\nu} M_\nu \xrightarrow{g_\nu} M''_\nu \longrightarrow 0$$

exakt sind.

Der nächste wichtige Punkt bei Filtrierungen ist, dass sie eine Symbiose zwischen Algebra und Topologie bilden. Genauer ergibt sich dieser Zusammenhang wie folgt:

Definition 1.1.5. (topologische Ringe und Moduln, [Laz65].I.2.1.13) Ein filtrierter Ring R respektive filtrierter R-Modul M heißt ein *topologischer Ring respektive Modul*, falls die Filtrierungen $(R_\nu)_\nu$ respektive $(M_\nu)_\nu$ aus Definition 1.1.1 ein Fundamentalsystem der 0 in R respektive M bilden.

Es bleibt zu bemerken, dass eine diskrete Filtrierung nicht notwendigerweise eine diskrete Filtrierungstopologie zur Folge hat. Weiter gilt, dass ein filtrierter Morphismus eine stetige lineare Abbildung ist. (vgl. [Laz65].I.2.1.13)

Neben den fundamentalen topologischen Eigenschaften, wie etwa Kompaktheit oder Vollständigkeit, kann die Filtrierungstopologie folgende weitere Eigenschaften besitzen:

Definition 1.1.6. (Filtrierungstopologie, [LVO96].I.3.1) Sei R ein filtrierter Ring und M ein topologischer R-Modul.

1. ([Laz65]I.2.1.13) Die Topologie von M heißt *hausdorffsch*, wenn die Filtrierung von M separabel ist.

2. ([Laz65]I.3.2.9) Der R-Modul M heißt *linear topologisiert*, falls die offenen Untermodulen ein Fundamentalsystem von Umgebungen der 0 bilden.

1.2 Separable Vervollständigung

In diesem Abschnitt geht es nun darum einen Funktor $\widehat{(-)}$ von der Kategorie der filtrierten separablen Ringe in die Kategorie der vollständig-filtrierten Ringe zu beschreiben. Darüber hinaus werden seine funktorielle Eigenschaften dargestellt.

Definition 1.2.1. (Vollständigkeit,[Laz65]I.2.1.14)
Sei R ein filtrierter Ring und M ein filtrierter R-Modul. Der Ring R(resp. R-Modul M) heißt *vollständig* bezüglich einer separablen Filtrierung $(R_\nu)_\nu$ respektive $(M_\nu)_\nu$, falls

$$R \cong \varprojlim_\nu R/R_\nu \text{ respektive } M \cong \varprojlim_\nu M/M_\nu$$

Falls R bzw. M selbst nicht vollständig ist kann man ihm seine *Vervollständigung*

$$\widehat{R} := \varprojlim_\nu R/R_\nu \text{ respektive } \widehat{M} \cong \varprojlim_\nu M/M_\nu$$

zuordnen. In beiden Fällen erhält man eine kanonische Isometrie

$$i_R : R \to \varprojlim_\nu R/R_\nu \text{ respektive } i_M : M \to \varprojlim_\nu M/M_\nu$$

Diese Konstruktion ist funktoriell, dass heißt, man erhält eine Abbildung zwischen folgenden Kategorien von R-Moduln:

$$\left\{\begin{matrix}\text{filtrierte separable}\\ \text{Ringe(resp. Moduln)}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\widehat{(-)}} \left\{\begin{matrix}\text{vollständige-filtrierte}\\ \text{Ringe(resp. Moduln)}\end{matrix}\right\}$$

Proposition 1.2.1. *(universelle Eigenschaften der Vervollständigung,([Laz65].I.2.1.14))* *Sei R ein filtrierter Ring und M ein filtrierter R-Modul. Dann gilt, dass für alle filtrierten Morphismen $f : M \to N$ in einen vollständigen filtrierten R-Modul N genau ein filtrierter Morphismus $g : \widehat{M} \to N$ existiert derart, dass folgendes Diagramm*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\forall f"] \arrow[dr, "i_M"'] & & N \\ & \widehat{M} \arrow[ur, "\exists g"] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Für viele Zwecke ist es wichtig auch in der Kategorie der filtrierten Moduln ein Tensorprodukt einzuführen.

Definition 1.2.2. (filtriertes Tensorprodukt,[Laz65]I.2.1.9) Sei R ein filtrierter Ring und M, M' zwei filtrierte R-Moduln. Das Tensorprodukt $M \otimes_R M'$ heißt *filtriertes Tensorprodukt*, falls seine Bewertung das Infimum der Bewertungen für die

$$w_{M\otimes_R M'}(x \otimes y) \geq w_M(x) + w'_M(y)$$

für alle $x \in M$ und $y \in M'$ gilt, ist.

1.3 Die assozierte Graduierung gr(−)

Definition 1.3.1. (assozierte Graduierung, [Laz65].I.2.3.2)
Sei R ein filtrierter Ring und M ein filtrierter R-Modul. Man setzt:

$$gr(R) := \prod_{\nu\in\mathbb{R}} gr_\nu(R) := \prod_{\nu\in\mathbb{R}} R_\nu/R_{\nu+} \quad \text{bzw. } gr(M) := \prod_{\nu\in\mathbb{R}} gr_\nu(M) := \prod_{\nu\in\mathbb{R}} M_\nu/M_{\nu+}$$

und nennt dies, die zur Filtrierung $(R_\nu)_\nu$ beziehungsweise $(M_\nu)_\nu$ *assozierte Graduierung* des Ringes R bzw. des R-Moduls M. Zu jedem $x \in M_\nu$ assoziert man das sein Bild $x_{(\nu)} = x + M_{\nu+}$ unter der kanonische Surjektion in $\mathrm{gr}_\nu M$. Für $r_{(\nu)} \in R_\nu$ und $m_{(\mu)} \in M_\mu$ setzt man $r_{(\nu)}.m_{(\mu)} = (r.m)_{(\nu+\mu)}$ und erweitert dies zu einer $\mathrm{gr}(R)$-linearen Abbildung auf ganz $\mathrm{gr}(M)$. So erhält man auf $\mathrm{gr}(M)$ eine $\mathrm{gr}(R)$-Modul Struktur. In gleicher Weise verfährt man mit der assozierten Graduierung eines Ringes.
Falls $m \in M_\nu$ so heißt m homogenes Element von Grad ν. Für ein $m \in M$ bezeichnet $\sigma(m) = m_{(\nu)}$ den *Hauptteil* von m. Ein graduierter R-Modul M heißt *graduiert-frei*, falls er eine Basis aus homogenen Elementen besitzt.(vgl. [LVO96].I.4.1)
Falls man einen weiteren filtrierten R-Modul N besitzt und eine filtrierte Morphismus $f : M \to N$, so kann man durch die kanonischen Abbildungen auf den einzelnen Filtrierungsschritten eine Abbildung $gr(f) : gr(M) \to gr(N)$ einführen. Folglich erhält man einen Funktor:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{filtrierte Ringe}\\ \text{respektive } R\text{-Moduln}\end{array}\right\} \xrightarrow{\mathrm{gr}(-)} \left\{\begin{array}{c}\text{graduierte Ring}\\ \text{respektive } R\text{-Moduln}\end{array}\right\}$$

Im Folgenden findet sich eine Liste der wichtigsten funktoriellen Eigenschaften der assozierten Graduierung. Es wird wieder davon ausgegangen, dass die zugrundeliegenden Filtrierungen alle diskret sind.

Proposition 1.3.1. *(Eigenschaften des Funktors $gr(-)$)*
Seien M, N filtrierte R-Moduln mit Filtrierungen FM, FN. Es gelten folgende Eigenschaften:

1. *([Laz65].I.2.3.7,2.3.8.5) Der Funktor* $\mathrm{gr}(-)$ *kommutiert mit filtrierten direkten Summen, filtrierten direkten Produkten und filtrierten induktiven Limiten;*
2. *([Laz65].I.2.3.7.2) Die kanonische Isometrie $\imath_M : M \to \widehat{M}$ induziert einen graduierten Isomorphismus*
$$\mathrm{gr}(\imath_M) : \mathrm{gr}(M) \longrightarrow \mathrm{gr}(\widehat{M})$$
zwischen dem gr *R-Modul* $\mathrm{gr}\, M$ *und dem bezüglich FM vervollständigten* gr *R-Modul* $\mathrm{gr}\, \widehat{M}$*;*
3. *([Laz65].I.2.3.6) Die Filtrierung von R(oder M) ist genau dann diskret, wenn die Graduierung grR(oder grM) diskret ist;*
4. *([Laz65].I.2.3.8.2) Sei*
$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \qquad (*)$$
eine exakte Sequenz von filtrierten R-Moduln mit Filtrierungen FL, FM, FN respektive und sei
$$0 \longrightarrow grL \xrightarrow{gr(f)} grM \xrightarrow{gr(g)} grN \longrightarrow 0 \qquad \mathrm{gr}(*)$$
die Sequenz der assozierten Graduierung. dann ist $gr(*)$ exakt.

Falls man es mit einer nicht-diskreten Filtrierung zu tun hat, so verliert der Funktor $\mathrm{gr}(-)$ seine Exaktheitseigenschaften. (vgl. [Laz65].I.2.3.8.2)
Als nächstes stellt sich die Frage, welche Informationen man von der assozierten Graduierung eines Moduls auf den Modul selber liften kann. Lazard bietet zur Lösung dieser Frage folgende Sätze an:

Proposition 1.3.2. *(Liftungseigenschaften) Sei R ein filtrierter Ring.*

1. *(([Laz65].I.2.3.13) Sei $f : M \to M'$ ein filtrierter Morphismus von filtrierten R-Moduln M und M'. Angenommen die Filtrierung auf M' ist separabel und diskret und es existiert ein graduierte surjektive Abbildung* $\mathrm{gr}(f) : \mathrm{gr}(M) \to \mathrm{gr}(M')$*, dann ist das Bild $f(M)$ dicht in M'. Falls M zusätzlich vollständig ist, dann ist f surjektiv und M' vollständig.*
2. *([Laz65].I.2.3.14) Falls M filtriert und vollständig und M' eine diskrete und separable Filtrierung hat, dann ist jeder filtrierte Morphismus $f : M \to M'$ dessen assozierte Graduierung* $\mathrm{gr}(f)$ *bijektiv ist, ein Isomorophismus.*
3. *([Laz65].I.2.3.15) Angenommen $N \subseteq N'$ sind zwei abgeschlossene Untermoduln eines diskret filtrierten und separablen R-Moduls M und es gilt* $\mathrm{gr}(N) \cong \mathrm{gr}(N')$*, dann folgt $N \cong N'$.*

1.4 Filtriert-freie Moduln

Wie schon an verschieden Stellen angedeutet lassen sich zwar viele Definitionen bezüglich der Filtrierungen in nicht-diskreter Allgemeinheit einführen. Geht es nun aber darum konkrete Proposition zu beweisen, muss man sich auf eine bestimmte Kategorie von Moduln einschränken. Hinsichtlich dessen führt Lazard die Kategorie der bewerteten Ringe und Moduln in [Laz65]I ein.
Prinzipiell bildet diese Kategorien auch die Grundlage dieser Arbeit. Doch entgegen der großen Allgemeinheit der nicht-diskreten Filtrierungen, wie sie etwa in Lazard ansatzweise ausgeführt wird, reicht es sich für alle hier auftretenden Anwendungen auf diskret filtrierte bewertete Moduln und Ringe zu einschränken.
Doch bevor es um diese Anwendungen gehen kann, ist es erst einmal wichtig sich eine klare Übersicht über die verschiedenen Klassen von Moduln zu verschaffen.
Hinsichtlich dessen bietet sich eine Übersichtstafel der einzelnen Modulkategorien an. Zuerst werden die Definitionen und Beziehungen illustriert, bevor sie nachfolgend formal eingeführt und bewiesen werden.

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{filtriert-freie}\\ R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\} \arrow[r, "\subseteq", "1"'] \arrow[d, "\widehat{(-)}"] & \left\{\begin{matrix}\text{bewertete}\\ R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\} \arrow[d, "\widehat{(-)}"] \\
\left\{\begin{matrix}\text{vollständig-freie}\\ R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\} \arrow[r, "\subseteq", "2"'] & \left\{\begin{matrix}\text{bewertete vollständige}\\ R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\}
\end{tikzcd} \tag{D1}$$

Gesetzt dem Fall, dass es sich bei R um einen bewerteten vollständigen Ring handelt, ist man in der Situation, dass die Abbildungen (1),(2) eine Kategorienäquivalenz induzieren. (Proposition 1.4.3).

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{bewertete torsionsfreie}\\ R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\} \arrow[r, "\mathrm{Div}(-)", "Def.1.5.1"'] \arrow[d, "\widehat{(-)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Sat}(-)", "Prop.1.5.6"'] & \left\{\begin{matrix}\text{bewertete divisible}\\ R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\} \arrow[d, "\widehat{(-)}"] \\
\left\{\begin{matrix}\text{bewertete vollständige}\\ \text{torsionsfreie } R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}\text{bewertete vollständige}\\ \text{divisible } R\text{-Moduln}\end{matrix}\right\}
\end{tikzcd} \tag{D2}$$

Offensichtlich ist die Kategorie der bewerteten torsionsfreien R-Moduln eine Unterkategorie der bewerteten R-Moduln. Handelt es sich beim Ring R um einen vollständigen diskreten Bewertungsring, so erhält man eine Kategorienäquivalenz zwischen filtriert-freien, bewerteten torsionsfreien und bewerteten R-Modul. Dies folgt aus der Tatsache, das diskreter Bewertungsring insbedsondere ein Hauptidealring ist. Dies impliziert, dass ein endlich erzeugter torsionfreier Modul frei ist.
Mithin wird dadurch garantiert, dass der Funktor $\mathrm{Div}(-)$ nicht leer ist.
Bevor es nun um eine weitere Klärung der Diagramme **D1** beziehungsweise **D2** gehen kann, ist es wichtig die einzelnen Kategorien präzise zu definieren.

Definition 1.4.1. (filtriert-freie und vollständig-freie Moduln) Sei R ein filtrierter Ring.

1. ([Laz65].I.2.1.16) Ein R-Modul M heißt *filtriert-frei* bezüglich der filtrierten Basis $(x_i)_{i\in I}$, falls für alle $(\lambda_i)_{i\in I} \in R$, wobei fast alle null sind,
$$w_M(\sum_{\imath\in I} \lambda_i x_i) = inf_{i\in I}(w_M(x_i) + v(\lambda_i))$$
gilt.

2. ([Laz65].I.2.1.17) Sei R zusätzlich vollständig. Man nennt eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen des filtrierten R-Moduls M eine *topologische Basis* von M, falls sie filtriert-frei und falls M die Vervollständigung des von der Familie $(x_i)_{i\in I}$ erzeugten filtriert-freie Untermoduls ist. Ein R-Modul M heißt *vollständig-frei*, falls er eine topologische Basis besitzt.

Proposition 1.4.1. *(Eigenschaften)*

1. *([Laz65].I.2.3.12) M ist genau dann eine filtriert-freier R-Modul, wenn* $\mathrm{gr}(M)$ *ein graduiert-freier* $\mathrm{gr}(R)$*-Modul ist.*

2. *([Laz65].I.2.3.17) Sei R zusätzlich ein vollständiger Ring. Sei M ein filtrierter und vollständiger R-Modul. Falls die Filtrierung auf M diskret ist und* $\mathrm{gr}(M)$ *ein freier* $\mathrm{gr}(R)$*-Modul ist, dann ist M vollständig-frei und jede Familie von Repräsentanten einer Basis von* $\mathrm{gr}(M)$ *bilden eine topologische Basis von M.*

Als nächstes bietet es sich an, die Lazardschen *bewerteten Moduln* einzuführen. Als Referenz hierzu dient [Laz65]I.2.2.1 beziehungsweise I.2.2.2.

Definition 1.4.2. (bewertete Ringe und Moduln)
Ein Ring R heißt *bewertet*, falls er separabel-filtriert ist und folgende Bedingung an die zu der Filtrierung äquivalenten Bewertungsfunktion erfüllt:
$$v(\lambda\nu) = v(\lambda) + v(\nu) \quad \text{für alle } \lambda, \nu \in R.$$
Ein R-Modul M heißt bewertet, falls R bewertet ist, M separabel-filtriert und die zu der Filtrierung äquivalente Bewertungsfunktion folgende Bedingung erfüllt:
$$w(\lambda x) = v(\lambda) + w(x) \quad \text{für alle } \lambda \in R, x \in M.$$

Proposition 1.4.2. *(bewerteter Ring) Ein Ring R ist ein bewerteter Ring, wenn er ein Integritätsbereich ist.*

Beweis: Angenommen R ist ein filtrierter Ring der nicht integer ist. Dann existieren Elementen $0 \neq r, s \in R$ derart, dass
$$rs = 0$$
gilt. Nach Definition gilt aber $v(0) = \infty$, folglich muss $v(rs) = \infty$ gelten. Die Gleichung $\infty = v(r) + v(s)$ lässt sich jedoch nie als Summe darstellen, da $r, s \neq 0$ gilt. □

Proposition 1.4.3. *(filtriert-frei und bewertete Moduln) Sei $\mathcal{O}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring und M eine endlich erzeugeter $\mathcal{O}$-Modul. Dann gilt:*

1. *M ist genau dann filtriert-frei, wenn M ein bewerteter $\mathcal{O}$-Modul ist;*

2. *Angenommen M ist vollständig, dann ist M genau, dann vollständig-frei, wenn M bewertet ist.*

Beweis: zu (1): ($\Leftarrow$) Sei M ein bewerteter $\mathcal{O}$-Modul, dann folgt mit [Laz65].I.2.3.6 das die Graduierung $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$ ein torsionsfreier $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$-Modul ist. Da $\mathcal{O}$ nach Voraussetzung ein diskreter Bewertungsring ist, erhält man die Isomorphie $\mathrm{gr}(\mathcal{O}) \cong \kappa[\pi]$ mit $\kappa \cong \mathcal{O}/(\pi)$. Offensichtlich ist $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$ ein Hauptidealring, was zur Folge hat, dass $\mathrm{gr}(M)$ ein graduiert-freier $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$-Modul ist.
Aus den Eigenschaften über filtriert-freie Moduln (vgl. 1.4.1) folgt nun, dass ein gelifteter filtriert-freier $\mathcal{O}$-Modul M' mit $\mathrm{gr}\, M' \cong \mathrm{gr}\, M$ existiert. Nun gilt nach Voraussetzung , da $\mathcal{O}$ ein vollständiger Ring ist, dass die beiden $\mathcal{O}$-Moduln M und M' vollständig sind, da sie endlich erzeugt sind. Dies ist nach den Liftungseigenschaften des Funktors $\mathrm{gr}(-)$ zu

$$M' \cong M$$

äquivalent.
($\Rightarrow$) Diese Richtung resultiert aus der Definition in [Laz65]I.2.2.2 und der Äquivalenz von Proposition 1.4.1.
zu (2): Diese Aussage folgt aus (1.). □

Selbstverständlich lässt sich das Konzept der bewerteten Modul auch auf Algebren erweitern.

Definition 1.4.3. (bewertete Algebra) Sei R ein bewerteter Ring, dann nennt man eine R-Algebra bewertet, wenn der zugrundeliegende R-Modul bewertet ist.

Theorem 1.4.4. *(bewertetes Tensorprodukt,[Laz65].I.3.2) Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring und M und M' zwei bewertete R-Moduln, sowie $M'' = M \otimes_R M'$ ihr filtriertes Tensorprodukt. Dann gilt:*

1. *Der R-Modul M'' ist bewertet;*

2. *Für alle $\nu \in \mathbb{R}$ werden die Untermoduln M''_ν von den Elementen $x \otimes y$ mit $x \in M$ und $y \in M'$ und $w_M(x) + w_{M'}(y) \geq \nu$ erzeugt;*

3. *Seien N, N' zwei bewertete R-Moduln und $f : N \to M$, $f' : N' \to M$ zwei Isometrien. Dann ist das Tesorprodukt $f \otimes f' : N \otimes_R N' \to M \otimes_R M'$ eine Isometrie;*

4. *Für alle $x \in M$ und $y \in M'$ erhält man $w_{M\otimes_R M'}(x \otimes y) = w_M(x) + w_{M'}(y)$;*

Definition 1.4.4. (vervollständigtes Tensorprodukt,[Laz65],I.3.2.6) Sei R ein (bewerteter Ring?) und seien M und M' zwei bewertete R-Moduln. Man nennt die Vervollständigung des bewerteten Tensorprodukts *das vervollständigte Tensorprodukt* und schreibt hierfür $M \widehat{\otimes_R} M'$.

1.5 Die Funktoren Div(−) und Sat(−)

Wenn man sich nun an das Diagramm **D2** zurückerinnert, ist es sicherlich aufgefallen, dass bis jetzt erst die Klassen der filtriert/vollständig-filtrierten Modul beziehungsweise bewerteten Moduln eingeführt wurden. Nun geht es darum, einen Funktor Div(−) einzuführen, der jedem Modul seine *divisible Hülle* zuordnet.
Danach wird diese Situation durch den Funktor Sat(−) auf die Klasse der vollständigen, bewerteten und divisiblen Moduln übertragen. Insgesamt erhält man dadurch die Kategorie der *saturierten Moduln*.

Definition 1.5.1. (divisibler Modul, [Laz65]I.2.2.8)
Sei R ein bewerteter Ring und M ein bewerteter R-Modul. Der Modul M heißt divisibel, falls für alle $\lambda \in R$ und $x \in M$ mit $v(\lambda) \leq w_M(x)$ ein $y \in M$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$\lambda y = x.$$

Proposition 1.5.1. *(Divisible Hülle, [Laz65]I.2.2.8) Sei R ein kommutativer bewerteter Ring mit Quotientenkörper K und M ein torsionsfreier bewerteter R-Modul. Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiger torsionsfreier divisibler bewerteter R-Modul M' und eine kanonische Isometrie $i_M : M \to M'$.*

Beweis: Sei R ein kommutativer bewerteter Ring mit Bewertung v und M ein torsionsfreier bewerteter R-Modul mit Bewertung w_M. Sei $K := Quot(R)$ der Quotientenkörper von R. Die Bewertung von R lässt sich durch die Bedingung

$$v(\lambda^{-1}\mu) = v(\mu) - v(\lambda) \text{ für alle } 0 \neq \lambda \in R \text{ und } \mu \in R$$

auf den Körper K erweitern. Folglich ist K im Sinne von [Laz65].I.2.2.5 ein bewerteter Körper.
Um nun die divisible Hülle von M zu konstruieren, realisiert man M als Einheitskugel eines normierten Vektorraumes. Explizit geht man wie folgt vor:
Man versehe den aus dem Tensorprodukt $V := K \otimes_R M$ entstanden K-Vektorraum, dessen Elemente die Form $\lambda^{-1} \otimes x$ mit $0 \neq \lambda \in R$ und $x \in M$ haben, mit der Bewertung $w_V(\lambda^{-1} \otimes x) = w_M(x) - v(\lambda)$.
Diese Bewertung definiert eine Norm $| - | := q^{-w_V(y)}$ für eine feste reelle Zahl $0 \neq q \in \mathbb{R}^+$ und für alle $y \in V$. Folglich ist $(V, | - |)$ ein normierter K-Vektorraum.
Man setze die Menge

$$M' := \{y \in K \otimes_R M : w_{K \otimes_R M}(y) \geq 0\},$$

die bezüglich der Norm $| - |$ zum Einheitsball

$$\{y \in K \otimes_R M : 0 \leq |y| \leq 1\}$$

des K-Vektorraums V korrespondiert. Durch die Bedingung an die Bewertung $w_{K \otimes_R M}$ und aus der Konstruktion des normierten K-Vektorraums V ist klar, dass M' ein R-Modul ist. Da M' als R-Modul in V eingebettet ist, kann M' selbst keine R-Torsion haben. Dies garantiert, dass M' ein bewerteter R-Modul ist.

Als Kandidaten für die kanonischen Abbildung von M in seine divisible Hülle bietet sich die lineare Abbildung

$$i_M : M \to M'$$

$$x \to 1 \otimes x,$$

an. Es bleibt zu zeigen, dass i_M ein Isometrie ist. Sei $x \in M$, dann gilt:

$$\begin{aligned} w_{M'}(i_M(x)) &= w_{M'}(1 \otimes x) \\ &= w_M(x) - v(1) \\ &= w_M(x) \end{aligned}$$

Folglich ist i_M ein filtrierter Morphismus, welcher die Filtrierungen erhält. Darüber hinaus ist dieser Morphismus injektiv, folglich ist i_M ein Isometrie.
Sei nun $\lambda \in R$ und $x \in M, 0 \neq \lambda \in R$ mit der Eigenschaft, dass $v(\lambda) \leq w_M(x)$. Um die Divisibilität von M' zu zeigen, muss man ein $m' \in M'$ mit $\lambda m' = x$ finden. Als Kandidat hierfür bietet sich natürlich $m' := \lambda^{-1} \otimes x$ mit $\lambda^{-1} \in K$ an.
Dann gilt nach Konstruktion der Bewertung auf der divisiblen Hülle

$$w_M(\lambda(\lambda^{-1} \otimes x)) = v(\lambda) - v(\lambda) + w_M(x) = w_M(x)$$

also

$$\lambda m' = x.$$

Folglich erhält man die Divisibilität des bewerteten und torsionsfreien R-Moduls M'.
Sei nun $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal des Ringes R mit induzierter Filtrierung. Sei $\mathfrak{a} \to M'$ ein filtrierter Morphismus und $0 \neq \lambda \in \mathfrak{a}$ ein Element des Ideals.
Da f ein filtrierter Morphismus ist, gilt $v(\lambda) \leq w_M(f(\lambda))$ und wie eben gezeigt findet man ein Element $m' \in M'$ mit $\lambda m' = f(\lambda)$.
Sei nun $\mu \in \mathfrak{a}$ ein beliebiges Element des Ideals, dann gilt:

$$f(\mu)\lambda = f(\mu\lambda) = f(\lambda\mu) = f(\lambda)\mu = m'\lambda\mu = m'\mu\lambda,$$

folglich, da M' torsionsfrei ist, $f(\mu) = m'\mu$ für alle $\mu \in \mathfrak{a}$. Nach dem Kriterium von Baer im filtrierten Setting (vgl.[LVO96].I.Definition 6.10) ist M' filtriert-injektiv und erfüllt folgende zu filtriert-projektive duale universelle Liftungseigenschaft:
Für alle filtrierten Morphismen $f : M \to N$ in einen divisiblen, torsionsfreien und bewerteten R-Modul M existiert ein filtrierter Morphismus g derart, dass folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & & \\ & M \arrow[rr, "\forall f"] \arrow[dr, "i_M"'] & & N \\ & & M' \arrow[ur, "\exists g"] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei nun M'' ein divisibler, torsionsfreier und bewerteter R-Modul mit kanonischer Isometrie $i_M : M \to M''$. Dann ergibt sich aus der filtrierten Injektivität der R-Moduln M' und M'' folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[rr, "i_M"] \arrow[dr, "i_M"'] & & M'' \arrow[dl, shift left, "\exists g'"] \\
& & M' \arrow[ur, shift left, "\exists g"] &
\end{tikzcd}$$

Da das Diagramm kommutiert sind die filtierten Morphismen $g : M' \to M''$ und $g' : M'' \to M'$ zueinander invers. Folglich gilt $M' \cong M''$. □

Definition 1.5.2. (divisible Hülle) Sei M ein bewerteter torsionsfreier R-Modul über einem bewerteten Ring R, dann bezeichnet man mit dem bewerteten, torsionsfreien und divisiblen R-Modul M' aus Proposition 1.5.1 die *divisible Hülle* des R-Moduls M und schreibt kurz $\mathrm{Div}(M) := M'$

Wie man aus dem Beweis der Proposition 1.5.1 herauslesen konnte, lässt sich die divisible Hülle auch von einem anderen Standpunkt aus interpretieren. Die divisible Hülle eines Moduls über einem bewerteten Ring ist der Einheitsball des kleinsten Vektorraums über dem Quotientenkörper des Ringes, welcher den Modul enthält.

Proposition 1.5.2. *(Charakterisierung der divisiblen Hülle,[Laz65].I.2.2.9) Sei R ein bewerteter Ring und M, M' zwei bewertete R-Moduln mit $M \subseteq M'$. Dann gilt genau dann für die divisible Hülle* $\mathrm{Div}(M) \cong M'$, *wenn:*

1. *M' divisibel ist;*
2. *M'/M ein R-Torsionsmodul ist;*

Beweis: zu (1): Diese Aussage wurde schon Proposition 1.5.1 gezeigt.
zu (2): Sei also M' ein bewerteter R-Modul, welcher den Untermodul M enthält. Man betrachetet die kanonische exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M' \xrightarrow{\phi} M'/M \longrightarrow 0$$

und stattet den R-Modul M'/M mit der Quotientenfiltrierung bezüglich des kanonischen Epimorphismusses ϕ und den R-Modul M mit von M' induzierter Filtrierung bezüglich der Injektion i aus. Angenommen M'/M ist ein R-Torsionsmodul, dann existiert für alle $y \in M'$ ein λ mit $\lambda y = 0 \mod M$. Das heißt λy liegt im Kernel des kanonischen Epimorphismusses ϕ und man findet ein $x \in M$ mit $\phi(x) = \lambda y$. Das heißt es gilt

$$x = \lambda \phi^{-1}(y).$$

Da M' ein bewerteter R-Modul und i eine Isometrie ist, folgt

$$w_M(x) = w_{M'}(x) = w_{M'}(\lambda \phi^{-1}(y)) = v(\lambda) + w_{M'}(\phi^{-1}(y)).$$

Deswegen erhält man sicher $v(\lambda) \leq w_M(x)$. In letzter Konsequenz bedeutet das nach (1) $\mathrm{Div}(M) = M'$.
Gelte nun andererseits $\mathrm{Div}(M) = M'$, dann ist $\mathrm{Div}(M)/M$ sicher ein R-Torsionsmodul.
□

Proposition 1.5.3. *(Divisibles Tensorprodukt,[Laz65].I.3.2.7) Seien M, M' zwei bewertete R-Moduln, dann gilt für die divisible Hülle des bewerteten Tensorprodukts $M \otimes_R M'$ (vgl. Proposition 1.4.4)*

$$\mathrm{Div}(M \otimes_R M') \cong \mathrm{Div}(\mathrm{Div}(M) \otimes_R \mathrm{Div}(M')).$$

Definition 1.5.3. Sei R ein bewerteter Ring. Ein bewerteter R-Modul M heißt *saturiert*, falls er divisibel im Sinne von Definition 1.5.1 und vollständig ist.

Natürlich ist die Vervollständigung eines divisiblen Moduls saturiert. Hingegen ist die divisible Hülle eines vollständigen Moduls nicht notwendig vollständig.
Beschränkt man sich wieder auf den etwas einfacheren Fall der filtriert-freien Moduln, über einem (vollständigen) diskreten Bewertungsring, so kann man sowohl die divisible Hülle als auch die Saturierung dieser Moduln sehr konkret beschreiben.
In folgender Proposition ist $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierender π und Verzweigungsindex e. Es sei darin erinnert, dass in diesem Fall die Kategorie der bewerteten $\mathcal{O}$-Moduln äquivalent zur Kategorie der filtriert-freien $\mathcal{O}$-Moduln und diese wiederum äquivalent zur Kategorie der bewerteten torsionsfreien $\mathcal{O}$-Moduln ist.

Proposition 1.5.4. *(divisible Hülle eines filtriert-freien Moduls, [Laz65] I.3.1.6) Sei $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring und M ein filtriert-freier $\mathcal{O}$-Modul mit Basis $(x_i)_{i\in I}$ und man setze $w_M(x_i) =: (\tau_i)_{i\in I}$ und als Bewertung für die Uniformisierende von $\mathcal{O}$ $v(\pi) = e^{-1}$. Dann gilt:*

1. *Die divisible Hülle* $\mathrm{div}\, M$ *von M ein filtriert-freier $\mathcal{O}$-Modul bezüglich der Basis $y_i = \pi^{-n_i} x_i$ für alle $i \in J$ mit der Bewertung $w_{\mathrm{Div}(M)}(y_i = k_i - n_i e^{-1}$, wobei $n_i = [k_i e]$*

2. *Die assozierte Graduierung der divisiblen Hülle*

$$gr(\mathrm{Div}(M)) = (\kappa[\pi, \pi^{-1}]) \otimes_{\kappa[\pi]} gr(M))_{Grad \geq 0}$$

   ist ein graduiert-freier $\kappa[\pi]$-Modul.

Beweis: zu (1): [Laz65] I.3.1.6.
zu (2): [Tot99] Theorem 9.1. □

Proposition 1.5.5. *(divisible Hülle von Moduln über Algebren,[HKN06],Lemma 3.4.3) Sei $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring, A eine assoziative bewertete $\mathcal{O}$-Algebra und M ein filtriert-freier A-Modul mit Basis $e_1, ..., e_r$. Dann gilt:*

1. *Die divisiblen Hüllen*

$$\mathrm{Div}(A) \otimes_A M \cong \mathrm{Div}(M)$$

   sind als A-Moduln isomorph;

2. *Der filtriert-freie Div(A)-Modul* $\mathrm{Div}(M)$ *besitzt Erzeuger $e_1, ..., e_r$, die der Beziehung*

$$e'_j = \pi^{-ew_M(e_i)} e_i \text{ für } 1 \leq j \leq r$$

   genügen;

Beweis: Im Voraus muss an folgende Sachen erinnert werden. Die divisible Hülle $\mathrm{Div}(A)$ der assoziativen bewerteten $\mathcal{O}$-Algebra ist nach dem Beweis von Proposition 1.5.1 selbst eine bewertete $\mathcal{O}$-Algebra, die in demselben normierten K-Vektorraum $K \otimes_{\mathcal{O}} A$ wie A eingebettet ist.
Ein filtrierter A-Modul wird durch die Isomorphie $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} A \otimes_A M \cong M$ zum bewerteten $\mathcal{O}$-Modul. Folglich besitzt die divisible Hülle $\mathrm{Div}(M)$ die Struktur eines $\mathrm{Div}(A)$-Moduls.
Man betrachte nun für den Beweis der Proposition folgendes Diagramm von Einbettung von $\mathcal{O}$ respektive K-Moduln. Der Übersicht halber setzt man V für den K-Vektorraum $K \otimes_{\mathcal{O}} A \otimes_A M$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "i_{\mathrm{Div}(A)} \otimes id"] & (K \otimes_{\mathcal{O}} M)_{w_V \geq 0} \arrow[d] \\ (K \otimes_{\mathcal{O}} A)_{w_{K \otimes A} \geq 0} \otimes_A M \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

Es bleibt zu bemerken, dass sich die Bewertung w_A der $\mathcal{O}$-Algebra A durch die Bedingung $w_{K \otimes_{\mathcal{O}} A}(\lambda^{-1} \otimes x) := w_A(x) - v(\lambda)$ auf den K-Vektorraum $K \otimes_{\mathcal{O}} A$ erweitert wird. Da die Operation $\mathrm{Div}(-)$ interpretiert als Tensorprodukt mit endlichen direkten Summen kommutiert, reicht es davon auszugehen, dass M von einem Element e_1 mit Bewertung $w_M(e_1) =: t$ erzeugt wird. Die Bewertung lässt sich folglich sehr einfach durch die Bedingung

$$w_V((\lambda^{-1} \otimes x)e_1) := w_{K \otimes_{\mathcal{O}} A}(\lambda^{-1} \otimes x) + t$$

auf den normierten K-Vektorraum V erweitern. Die Abbildungen i_A und i_M sind jeweils die kanonischen Isometrien der divisiblen Hüllen.
Nach Proposition 1.5.4 gilt für eine Element $x \in V$ die Beziehung

$$x = \pi^v a e_1 = \pi^{v+et} a e_1'$$

für $v \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$. Nach der Bedingung an die Bewertung der divisiblen Hülle gilt:

$$x \in \mathrm{Div}(M) \text{ genau dann, wenn } w_V(x) = -v/e + w_A(a) + t \geq 0$$

Man weiß nun, dass A als $\mathcal{O}$-Modul bewertet ist, damit folgt:

$$w_{\mathrm{Div}(A)}(\pi^{v+et} a) = -v/e + t + w(a)$$

Falls dann die obige Ungleichung erfüllt ist, folgt auch

$$\pi^{v+et} a \in \mathrm{Div}(A).$$

Insgesamt erhält man also $x \in \mathrm{Div}(A).e_1' \cong \mathrm{Div}(A) \otimes_{\mathcal{O}} M$. Damit ist alles gezeigt. □

Abschließend bietet sich eine zusammenfassende funktorielle Beschreibung von $\mathrm{Div}(-)$ und $\mathrm{Sat}(-)$. Hierzu gilt folgende Proposition:

Proposition 1.5.6. *(funktorielle Eigenschaften von* $\mathrm{Div}(-)$ *und* $\mathrm{Sat}(-)$*) Sei R ein bewerteter Ring.*

1. *([Laz65] I.2.2.8,I.2.2.9) Man erhält einen Funktor* Div(−) *zwischen den Kategorien*

$$\left\{\begin{matrix} \textit{torsionsfreie bewertete} \\ \textit{R-Moduln} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\mathrm{Div}(-)} \left\{\begin{matrix} \textit{bewertete torsionsfreie} \\ \textit{divisible R-Moduln} \end{matrix}\right\}$$

der folgenden Eigenschaften besitzt:

   (a) Div(−) *ist additiv;*

   (b) *Angenommen*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N$$

   ist eine filtriert exakte Sequenz von bewerteten R-Moduln, dann ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Div}(M) \longrightarrow \mathrm{Div}(N)$$

   filtriert exakt;

2. *([Laz65].I.2.2.11) Man erhält einen Funktor* Sat(−) *zwischen den Kategorien*

$$\left\{\begin{matrix} \textit{torsionsfreie bewertete} \\ \textit{R-Moduln} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\mathrm{Div}(-)} \left\{\begin{matrix} \textit{bewertete torsionsfreie} \\ \textit{saturierte R-Moduln} \end{matrix}\right\}$$

der folgende Eigenschaften besitzt:

   (a) *Sat(−) ist additiv;*

   (b) *Angenommen*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N$$

   ist eine filtriert exakte Sequenz von bewerteten R-Moduln, dann ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sat}(M) \longrightarrow \mathrm{Sat}(N)$$

   filtriert exakt;

   (c) *Sei M' ein weiterer bewerteter R-Modul, dann gilt für die Saturierung des divisiblen Tensorpodukts*

$$\mathrm{Sat}(M \otimes M') \cong \mathrm{Sat}(\mathrm{Sat}(M) \otimes \mathrm{Sat}(M').$$

Beweis: zu 1: Sei $f; M \to M'$ ein filtrierter Morphismus von bewerteten R-Moduln M und M'. Man betrachte die von f induzierte Abbildung

$$1 \otimes f : \mathrm{Div}(M) \to \mathrm{Div}(N)$$

auf den divisiblen Hüllen. Da sich sowohl M als auch N isometrisch in $\mathrm{Div}(M)$ und $\mathrm{Div}(N)$ einbetten lassen, ist auch die Abbildung $\mathrm{Div}(f) := 1 \otimes f$ ein filtrierter Morphismus. zu 1a: Die Additivität von Div(−), folgt aus der Additivität von $(- \otimes_R -)$.
zu 1b: Sei

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N$$

eine Isometrie. Da die divisible Hülle funktoriell ist, existiert ein filtrierter Morphismus $\mathrm{Div}(i)$. Seien $y, y' \in \mathrm{Div}(M)$ mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Div}(i)(y) = \mathrm{Div}(i)(y')$ in $\mathrm{Div}(N)$. Nach Konstruktion existieren $0 \neq \lambda, \lambda' \in R$ sowie $x, x' \in M$ mit $v(\lambda) \leq w_M(x)$ und $v(\lambda') \leq w_M(x')$ derart, dass $\mathrm{Div}(i)(\lambda^{-1} \otimes x) = \mathrm{Div}(i)(\lambda'^{-1} \otimes x')$. Da die Isometrie i per Definition injektiv ist, muss aber $x = x'$ gelten. Nach Konstruktion der Abbildung $\mathrm{Div}(i)$ gilt zudem $\lambda = \lambda'$. Daraus folgt, dass $\mathrm{Div}(i)$ eine Isometrie ist.
zu (2a): Die Verknüpfung additiver Funktoren ist additiv.
zu (2b): Hier geht man wie in (1b) bezüglich der kanonischen Isometrie $i : M \to \widehat{M}$ vor.
zu (2c): vgl. [Laz65]I.3.2.8.

□

Für viele Zwecke wäre es äusserst wünschenswert die Frage zu klären, ob die Saturierung $\mathrm{Sat}(A)$ eine bewerteten assoziativen Algebra flach als A-Modul ist. Wie in Proposition 1.5.6 gezeigt, weiß man ja schon, dass die divisible Hülle $\mathrm{Div}(A)$ flach als A-Modul ist. Man müsste folglich Antworten darauf finden, wann die Vervollständigung $\widehat{\mathrm{Div}(A)}$ flach als $\mathrm{Div}(A)$-Modul wäre. Hierzu müsste man sehr genaue Aussagen über die Struktur der assozierten Graduierung $\mathrm{gr}(\mathrm{Div}(A))$ treffen können, was sich im Allgemeinen als sehr schwierig herausstellt.

Proposition 1.5.7. *(Vergleich der Saturierungen) Sei $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring, A eine assoziative bewertete $\mathcal{O}$-Algebra und M ein filtriert-freier A-Modul. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sat}(A) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{Sat}(M) \longrightarrow coker(i) \longrightarrow 0$$

filtriert exakt und $coker(i)$ ein $\mathcal{O}$-Torsionsmodul.

Beweis: Nach den Eigenschaften des saturierten Tensorproduktes (vgl. Proposition 1.5.6(2c)) gilt die Isomorphie

$$\mathrm{Sat}(M) \cong \mathrm{Sat}(A \otimes_A M) \cong \mathrm{Sat}(\mathrm{Sat}(A) \otimes \mathrm{Sat}(M)).$$

Also ist $\mathrm{Sat}(M)$ die Saturierung des A-Moduls $\mathrm{Sat}(A) \otimes_A \mathrm{Sat}(M)$. Als Folge der Eigenschaft (3) des bewerteten Tensorprodukts 1.4.4 ist $\mathrm{Sat}(A) \otimes_A M$ isometrisch in $\mathrm{Sat}(A) \otimes_A \mathrm{Sat}(M)$ eingebettet. Da die Saturierung aber eindeutig bis auf Isomorphie ist, ist $\mathrm{Sat}(M)$ folglich auch die Saturierung von $\mathrm{Sat}(A) \otimes_A M$. Man erhält also auch hier ein kanonische Isometrie $i : \mathrm{Sat}(A) \otimes_A M \to \mathrm{Sat}(M)$ Offensichtlich ist dann die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sat}(A) \otimes_A M \xrightarrow{i} \mathrm{Sat}(M) \longrightarrow coker(i) \longrightarrow 0$$

filtriert exakt.
Per Definition ist die Saturierung divisibel und $\mathrm{Sat}(M)$ folglich die divisible Hülle von $\mathrm{Sat}(A) \otimes_A M$. Nach der Charakterisierung der divisiblen Hülle aus Proposition 1.5.2 ist dann coker(i) ein $\mathcal{O}$-Torsionsmodul. □

Da $\mathrm{Sat}(A) \otimes_A M$ als A-Modul im Allgemeinen nicht saturiert ist, kann die strikt injektive Abbildung i aus der vorhergehenden Proposition im Allgemeinen nicht surjektiv sein.
Tensoriert man jedoch die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sat}(A) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{Sat}(M) \longrightarrow coker(i) \longrightarrow 0$$

mit dem Quotientenkörper K des diskreten Bewertungsringes $\mathcal{O}$, so wird der R-Torsionsmodul $coker(i)$ trivial. Folglich gilt in diesem Fall die Isomorphie $K \otimes_R \mathrm{Sat}(A) \otimes_A M \cong K \otimes_R \mathrm{Sat}(M)$.

1.6 Universell einhüllende Algebra

Was auf der Seite der p-adischen Liegruppe die Gruppenalgebra ist, wird auf der Seite der Lie-Algebren durch das Prinzip der universell einhüllenden Algebra beschrieben. Dieses Konzept wird in Analogie zu [Sch08], Kap.14 eingeführt und mit [Laz65]IV 2.2 ergänzt.

Definition 1.6.1. (Universell einhüllende Algebra)
Sei R ein diskreter Bewertungsring und $\mathfrak{g}$ eine bewertete R-Lie-Algebra. Sei $T^n(\mathfrak{g})$ die Tensoralgebra mit der Filtration

$$F_nT(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{0\leq i\leq n} \mathfrak{g} \otimes_R \cdots \otimes_R \mathfrak{g} = \bigoplus_{0\leq i\leq n} \mathfrak{g}^{\otimes i}$$

Man bezeichnet mit $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}) := x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ für $x, y \in \mathfrak{g}$ das zweiseitige Ideal aus $T(\mathfrak{g})$ mit induzierter Filtrierung. Weiter setzt man:

$$\mathcal{U}\mathfrak{g} := T(\mathfrak{g})/\mathfrak{J}(\mathfrak{g})$$

mit der Quotientenfiltrierung und nennt $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die *universell einhüllende Algebra* der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Diese Algebra besitzt folgende universelle Eigenschaft.

Proposition 1.6.1. *(universelle Eigenschaft)*
Sei $\mathfrak{g}$ eine bewertete R-Lie-Algebra und A eine bewertete assoziative R-Algebra. Dann gilt: Für alle filtrierten Homomorphismen $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ existiert ein filtrierter Homomorphismus $\bar{\sigma} : \mathcal{U}\mathfrak{g} \longrightarrow A$ derart, dass folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & A \\ & \mathcal{U}\mathfrak{g} \arrow[ur, "\bar{\sigma}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Dies führt weiter zu einer filtrierten Version des Poincaré-Birkhoff-Witt Theorems.

Proposition 1.6.2. *(Poincare-Birkhoff-Witt Theorem)*
Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $\mathfrak{g}$ eine bewertete R-Lie-Algebra, dann gilt:

1. *die bewerteten R-Algebren* $\mathcal{U}gr\mathfrak{g} \cong gr\mathcal{U}\mathfrak{g}$ *sind isomorph;*

2. *falls* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *ein strikt filtrierter Morphismus ist, dann ist auch* $\mathcal{U}(f)$ *ein strikt filtrierter Morphismus;*

3. *Falls* $\mathfrak{g}$ *filtriert-frei ist, dann ist auch* $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ *filtriert-frei und* $\widehat{\mathcal{U}\mathfrak{g}}$ *vollständig-frei;*

4. *Im folgenden Diagramm sind Zeilen und Spalten exakt.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F_{n-1}\mathfrak{I}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & F_{n-1}T(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & F_{n-1}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_n\mathfrak{I}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & F_nT(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & F_n\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}^n(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Vergleiche hierzu [Laz65] IV Korollar 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7 Die Eigenschaften des Diagramms in (4) werden in [Laz65]IV 2.1.3 diskutiert. □

Korollar 1.6.3. *Sei R ein bewerteter Ring. Angenommen* $\mathfrak{g}$ *ist eine bewertete R-Lie-Algebra der rugrundeliegender Modul frei von Rang r ist, dann ist die Graduierung der universell einhüllenden Algebra von* $\mathfrak{g}$

$$gr\mathcal{U}\mathfrak{g} \cong \kappa[x_1, ..., x_r]$$

zum Polynomring über dem Restklassenkörper κ *von R in r Variablen isomorph.*

Beweis: Man betrachte die letzte Spalte des Diagramms aus der Proposition 1.6.2. Wie gezeigt wurde, ist die Spalte exakt, dass heißt für die Filtrierung $F\mathcal{U}\mathfrak{g}$ und ein $s \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_s\mathcal{U}\mathfrak{g}/F_{s+1}\mathcal{U}\mathfrak{g} \cong \mathcal{S}^s(\mathfrak{g}).$$

Betrachtet man nun die Graduierung

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{U}\mathfrak{g} \cong \mathcal{S}\mathfrak{g},$$

so ist diese zur symmetrischen Algebra der bewerteten R-Lie-Algebra isomorph. Da der zugrundeliegende R-Modul frei und endlich erzeugt ist folgt

$$\mathcal{S}\mathfrak{g} \cong \kappa[x_1, ..., x_r].$$

Kapitel 2

Lokal Analytische Mannigfaltigkeiten

Bevor es nun um das eigentliche Thema geht, werden auf einem sehr formalen Weg Gruppenobjekte in Kategorien mit beliebigen endlichen Produkten eingeführt. Dieses abstrakte Gerüst wird später als Grundlage der Definition der p-adischen Liegruppe oder später der des Gruppenschemas dienen.

Definition 2.0.2. (Gruppenobjekt in einer Kategorie) Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie mit beliebigen endlichen Produkten, dass heißt unter anderem, dass ein finales Objekt $*$ in $\mathbf{C}$ existiert. Ein *Gruppenobjekt* in $\mathbf{C}$ ist eine Objekt G aus $\mathbf{C}$ zusammen mit Morphismen

1. $\mu : G \times G \to G$,
2. $e : * \to G$,
3. $inv : G \to G$

derart, dass folgende Eigenschaften gelten:

1. *(Assoziativität)* Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times id"] \arrow[d, "id \times \mu"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

   kommutiert;

2. *(Einheit)* Es existiert ein Morphismus $e : * \to G$, derart, dass folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} * \times G \arrow[r, "e \times id"] \arrow[d, "pr_2"] & G \arrow[dl, "\mu"] \\ G & \end{tikzcd}$$

   kommutiert;

3. *(Inverses Element)* Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "id \times inv"] & & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r] & * \arrow[r, "e"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

2.1 Lokal analytische Funktionen

Bevor es nun um die Definition von lokal analytischen Funktionen gehen kann, werden die Räume, zwischen welchen sie Abbildungen sind, eingeführt.

Proposition 2.1.1. *(Erweiterung der Bewertung,[Sch08] Kapitel 2) Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und sei K vollständig bezüglich der Norm $|\cdot|$. Dann lässt sich die Bewertung auf eindeutige Weise zu einer Bewertung $|\cdot|'$ auf L ausdehnen. Genauer*

$$|\alpha|' = |N_{K(\alpha)/K}|^{\frac{1}{d}}$$

für Elemente $\alpha \in L$ und $N_{K(\alpha)/K}$ als Norm von $K(\alpha)$ über K. Falls L endlich algebraisch ist, dann ist L vollständig bezüglich $|\cdot|'$

Bemerkung: (Klassische Topologie auf K)
Sei K ein vollständiger, nicht archimedischer Körper mit Bewertung $|\cdot|$. Durch die Bewertung erhält man in folgender Art eine Metrik für einen K-Vektorraum. Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter K-Vektorraum ([Sch08]Def.2.2), dann wird er durch

$$d(x,y) = ||x-y||,$$

für alle $x, y \in (V, ||\cdot||)$, zu einem *ultrametrischen K-Raum*. Das Bemerkenswerte an diesen normierten K-Vektorräumen ist, dass sie die strikte Dreiecksungleichung

$$||x+y|| \leq max\{||x||, ||y||\}$$

erfüllen. Dies hat erhebliche Konsequenzen für die noch zu definierende Topologie des K-Raumes V. Man setze dazu in $(V, ||\cdot||)$ folgende Mengen:

$$B_\epsilon(x) = \{y \in V; d(x,y) < \epsilon\}.$$

Diese Mengen sind offen und abgeschlossen bezüglich der durch die Metrik $||\cdot||$ induzierten Topologie und bilden eine Basis dieser Topologie. Falls man nun eine endliche Körpererweiterung L/K betrachtet, lässt sich die Topologie durch die Erweiterung der Bewertung von K auf L ausdehnen. (vgl. Proposition 2.1.1). Man nennt einen ultrametrischen Raum *vollständig*, falls er vollständig bezüglich seiner Metrik ist. Vollständige ultrametrischen K-Räume werden auch als *K-Banachräume* bezeichnet.

Für den Rest des Kapitels 2 wird mit $(K, |\cdot|)$ ein nicht-archimedischer vollständiger Körper und mit $(V, ||\cdot||)$ in K-Banachraum fixiert. Falls aus dem Kontext heraus klar ist, welche Bewertung $|\cdot|$ beziehungsweise Norm $||\cdot||$ gemeint ist, wird auch nur K beziehungsweise V geschrieben.
Im Weiteren soll es nun darum gehen, eine vernünftigen Funktionenbegriff für Räume über einem nichtarchimedischen Körper zu entwickeln. Dazu werden zuerst konvergente Potenzreihen eingeführt.

Definition 2.1.1. (Konvergente Potenzreihe,[Sch08],Kapitel 5)
Sei V ein K-Banachraum. Eine Potenzreihe $f(X)$ in r Variablen $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_r)$ mit Koeffizienten in V bezeichnen man eine formale Reihe:

$$f(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^r} \mathbf{X}^\alpha v_\alpha \qquad \text{(mit } v_\alpha \in V\text{)}$$

und $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_r$, falls $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{N}_0^r$.
Für ein $\epsilon > 0$ nennen man eine formale Potenzreihe $f(X) = \sum_\alpha X^\alpha v_\alpha$ ϵ-konvergent, falls

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} \epsilon^{|\alpha|} ||v_\alpha|| = 0$$

gilt. Mit $\mathcal{F}_\epsilon(K^r, V)$ bezeichnen wir den K-Banachraum der ϵ-konvergenten formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in V.

Dadurch, dass man nun einen Begriff von formalen Potenzreihen hat, liegt folgende Definition einer lokal analytischen Funktion nahe:

Definition 2.1.2. (Lokal analytische Funktion)([Sch08],Kapitel 6)
Sei $U \subset K^r$ und V eine K-Banach-Raum. Eine Funktion $f : U \to V$ heißt *lokal analytisch*, falls für alle Punkte $x_0 \in U$ ein offener Ball $B_\epsilon(x_0) \subset U$ als Umgebung von x_0 und eine eine ϵ-konvergente Potenzreihe $F \in \mathcal{F}_\epsilon(K^r, V)$ derart existieren, dass

$$f(x) = F(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in B_\epsilon(x_0).$$

Die Menge der lokal analytischen Funktionen $f : U \to V$ wird mit $\mathcal{C}^{an}(U, V)$ bezeichnet und man kann zeigen, dass dieser Raum ein topologischer K-Vektorraum ist. (vgl.[Sch08] Kapitel 11)

Es bleibt noch zu erwähnen, dass es natürlich für lokal analytische Funktionen Aussagen über Differenzierbarkeit und Sätze über lokale Umkehrbarkeit gibt. Diese Proposition werden im Allgemeinem aus Aussagen über formale Potenzreihen abgeleitet. Eine ausschöpfende Diskussion dieser Sätze und Definition würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weswegen auf die entsprechenden Kapitel 3,4,5 und 6 in [Sch08] verwiesen wird.
Um aber trotzdem den Nutzen der erwähnten Techniken zu präsentieren, wird im Folgenden eine lokal analytische Version des *Satzes über implizite Funktionen* dargestellt.

Proposition 2.1.2. *(Satz über implizite Funktionen)*
Sei $f : U \longrightarrow Z$ eine lokal analytische Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset X \times Y$ des Produktes der Banachräume $X \times Y$ in einen Banachraum Z. Sei

$(a,b) \in U$ ein Punkt. Angenommen die Einschränkung des Differentials $d_{(a,b)}f|_Y$ ist invertierbar, dann existieren offene Umgebungen $(a,b) \in A \times B \subset U$ und eine lokal analytische Funktion $g : A \longrightarrow B$ derart, dass ihr Graph $\Gamma(g)$ die Nullstellenmenge von f ist. Explizit bedeutet das:

$$\{(x,y) \in A \times B : y = g(x)\} = \{(x,y) \in A \times B : f(x,y) = 0\}.$$

Beweis: Sei $p := (a,b) \in U \subseteq X \times Y$ eine offene Umgebung des Punktes p. Man setzt die Abbildung

$$\Phi : U \longrightarrow U \times Z$$

$$(x,y) \mapsto (x, f(x,y)))$$

Φ ist lokal analytisch , da $\Delta \circ (id, f)$ als Verknüpfung lokal analytischer Funktionen selber lokal analytisch ist.
Das Differential

$$d_p\Phi = \begin{pmatrix} id & 0 \\ d_pf|_X & d_pf|_Y \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. Dies folgt daraus, dass die Jacobi-Matrix $d_p\Phi$ vollen Rang hat, da $d_pf|_Y$ nach Voraussetzung invertierbar ist. Folglich kann man den Satz über die lokale Umkehrbarkeit anwenden ([Sch08], Proposition 6.4). Explizit heißt das, dass für Punkte $(a,b) \in U$ folgende Umgebungen existieren:

$$\begin{aligned} a \in A_1 &\quad \text{wobei } A_1 \subset X \text{ offen;} \\ b \in B_1 &\quad \text{wobei } B_1 \subset Y \text{ offen;} \\ \Phi(a,b) = (a,0) \in C_1 &\quad \text{wobei } C_1 \subset Z \text{ offen;} \end{aligned}$$

Die oben eingeführte lokal analytische Abbildung Φ wird nach Aussage des Satzes über lokale Umkehrbarkeit auf den Umgebungen

$$\Phi : A_1 \times B_1 \longrightarrow C_1$$

zu eine Homeomorphie. Darüber hinaus ist ihre Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} : C_1 \longrightarrow A_1 \times B_1$$

$$(x,y) \mapsto (x, \tilde{g}(x,y))$$

mit $\tilde{g} : C_1 \to B_1$ nach der Aussage desselben Satzes lokal analytisch.
Offensichtlich gelten die Äquivalenzen

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x,y) = (x,0) \Leftrightarrow y = \tilde{g}(x,0).$$

Da $\tilde{g}$ stetig ist, findet man offene Umgebungen $a \in A_2 \subset A_1$und $b \in B_2 \subset B_1$ derart, dass für alle $x \in A_2$ das Bild $\tilde{g}(x,0) \in B_2$ liegt. Man setzt $g(x) := \tilde{g}(x,0)$ und erhält damit die gesuchte Abbildung

$$g : A := A_2 \to B_2 =: B.$$

□

Nach diesem kurzen Zwischenspiel soll es nun darum gehen, lokal analytische Mannigfaltigkeiten einzuführen. Hierzu betrachtet man einen topologischen Hausdorff-Raum M und den K-Banachrum K^r, welcher als Modellierungsraum für M bezüglich bestimmter Karten $\{\phi_i\}_{i\in I}$ dienen soll. Genauer ergibt sich folgendes Bild:
Seien J, I Indexmengeen $\{U_i\}_{i\in I} \subset M$ offene Teilmengen eines topologischen Hausdorff-Raumes und seien $\phi_i \in \mathcal{C}^{an}(U_i, K^r)$ für alle $i \in I$ lokal analytische Funktionen. Zwei Tupel $\{(\phi_i, U_i)\}_{i\in I}, \{(\phi_j, U_j)\}_{j\in J}$ heißen *kompatibel*, falls sie leeren Schnitt haben oder, falls $\phi_i(U_i \cap U_j)$ und $\phi_j(U_i \cap U_j)$ offen in K^r sind und der Kartenwechsel

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to K^r$$

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to K^r$$

für alle $i, j \in I, J$ lokal analytisch ist.
Man nennt die Menge $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ der kompatiblen Karten einen *Atlas* für M. Die *Dimension des Altlanten* $\mathcal{A}$ richtet sich nach der Dimension des Raumes der lokal analytische Karten in $\mathcal{C}^{an}(-, K^r)$. Der Atlas $\mathcal{A}$ heißt r-dimensional, falls alle Karten r-dimensional sind.
Für den gegebenen topologischen Hausdorff-Raum M existieren eine Vielzahl an unterschiedlichen Atlanten und man ist darum bemüht, den bestmöglichsten bezüglich der *Verfeinerung* zu finden.
Man führt diesbezüglich auf der Menge der Atlanten folgende Äquivalenzrelation ein:
Seien etwa $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Atlanten von M, dann sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ äquivalent, falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ auch eine Atlas für M ist. Man nennt einen Atlas $\mathcal{A}$ den *feinsten Atlas*, also denjenigen mit den meisten Karten von M, falls für jeden zu $\mathcal{A}$ äquivalenten Atlas $\mathcal{B}$ die Bedingung $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ gilt. Hat man den feinsten Atlas gefunden, ist man in der günstigen Position, dass die offenen Mengen $\{V_i\}_{i\in K}$ des feinsten Atlanten $\mathcal{A} = \{(V_i, \zeta_i)\}_{i\in K}$ eine Basis der Topologie von M bilden. ([Sch08],Lemma 7.3)
Falls man noch eine zusätzliche Bedingung an den topologischen Raum M stellt, kann man noch weitere Aussagen über die Atlanten treffen.

Bemerkung: (disjunkter Atlas)([dL92], Definition 3.3.1)
Sei M ein strikt parakompakter topologischer Hausdorff-Raum, dass heißt, dass jede offene Überdeckung von X eine disjunkte offene Verfeinerung besitzt. Dann heißt ein Atlas $\mathcal{B}$ von M *disjunkter Atlas*, wenn die Definitionsbereiche der Karten aus diesem Atlas paarweise disjunkt sind. Sei $\mathcal{A}$ eine Atlas von M, dann findet man immer einen feineren disjunkten Atlas $\mathcal{C}$ von M.

Nach dieser Vorarbeit ist nun möglich, die lokal analytischen K-Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der Atlanten einzuführen.

Definition 2.1.3. (lokal analytische K-Mannigfaltigkeit)([Sch08],Def 8)
Eine lokal analytische K-Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A})$ ist ein topologischer Hausdorffraum, welcher mit dem feinsten Atlanten $\mathcal{A}$ ausgestattet wurde. Die Mannigfaltigkeit heißt n-dimensional, falls der Atlas n-dimensional ist.

Es ist wichtig zu bemerken, dass man die lokal analytische Mannigfaltigkeiten relativ zu dem Körper K definiert. Dies erlaubt einem eine flexiblere Auffassung des Begriffs der lokal analytischen Mannigfaltigkeit.

Definition 2.1.4. (Morphismen von lokal analytischen Mannigfaltigkeiten)

1. ([Sch08] Definition 8.2) Ein Funktion $f : M \to E$ heißt lokal analytisch, falls die Verknüpfung $f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^{an}(M, E)$ für alle Karten (U, ϕ) der lokal analytischen Mannigfaltigkeit M.

2. ([dL92] 3.1.3) Seien M und N zwei lokal analytischen Mannigfaltigkeiten. Ein *Morphismus* von lokal analytischen Mannigfaltigkeiten ist eine stetige Abbildung $f : M \to N$ von topologischen Räumen derart, dass für jede Karte (V, ψ) die Verknüpfung $\psi \circ f$ nach (1) lokal analytisch ist.

Lemma 2.1.3. *(strikt parakompakt) Sei $(M, \mathcal{A})$ eine lokal analytische K-Mannigfaltigkeit, dann ist M strikt parakompakt und $\mathcal{A}$ lässt sich zu einem disjunkten Atlas verfeinern.*

Beweis: Die Aussage das eine lokal analytische K-Mannigfaltigkeit eine strikt parakompakter Raum ist, wird in ([dL92],3.2.3) bewiesen. Die Aussage über die den disjunkten Atlas folgt aus obiger Bemerkung 2.1. $\square$

2.2 Lokal analytische Mannigfaltigkeiten

Proposition 2.2.1. *($\mathcal{C}^{an}(-, K)$ ist topologische Algebra)*
Sei M eine lokal analytische K-Mannigfaltigkeit, dann wird $\mathcal{C}^{an}(M, K)$ durch die Abbildung

$$\mathcal{C}^{an}(M, K) \times \mathcal{C}^{an}(M, K) \longrightarrow \mathcal{C}^{an}(M \times M, K),$$

welche aus dem Produkt

$$\mathcal{F}_\epsilon(K^r, K) \times \mathcal{F}_\epsilon(K^r, K) \to \mathcal{F}_\epsilon(K^r, K)$$

$$\Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^r} \mathbf{X}^\alpha v_\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^r} \mathbf{X}^\alpha w_\alpha\Big) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_o^r} \Big(\sum_{\beta+\gamma} v_\beta w_\gamma\Big) \mathbf{X}^\alpha$$

im Raum der ϵ-konvergenten Potenzreihen stammt, zu einer vollständigen topologischen K-Algebra.

Beweis: Die Aussage des Satzes findet sich nach längeren technischen Vorbereitungen in [dL92] 3.8.5. Die Behauptung, dass diese topologische K-Algebra vollständig ist, steht in [dL92] 3.7.6. $\square$

Als einfaches Beispiel eine lokal analytische K-Mannigfaltigkeit dient der Graph einer lokal analytischen Funktion:

Beispiel: (Graph)
Sei K ein nichtarchimedischer vollständiger Körper, sowie $U \subset K^r$ und $V \subset K^l$ offene Teilmengen und $g : U \longrightarrow K^l$ eine lokal analytische Funktion. Man setzt

$$\Gamma(g) = \{(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_l) \in K^{l+r} | (x_1, ..., x_r) \in U \text{ und } (y_1, ..., y_l) = g(x_1, ..., x_r)\}$$

und nennt dies den Graphen von g. Weiter versieht man den topologische Hausdorff-Raum $K^r \times K^l$ mit der klassischen Produkttopologie, folglich wird auch $\Gamma(g)$ durch

die Teilraumtopologie zum topologischen Hausdorff-Raum. Es bleibt zu zeigen, dass $\Gamma(g)$ eine lokal analytische Mannigfaltigkeit ist.
Im Hinblick darauf betachtet man die Abbildung

$$\Phi_g : U \longrightarrow \Gamma(g)$$

$$(x_1, ..., x_r) \mapsto (x_1, ..., x_r, g(x_1, ..., x_r)),$$

welche als Produkt der lokal analytischen Funktionen $\Delta \circ (id, g)$ lokal analytisch ist und die lokal analytische Umkehrabbildung $\pi(x, y) = x$ besizt.
Offensichtlich ist Φ_g stetig, da lokal analytisch und induziert somit einen Homeomorphismus von topologischen Räumen

$$\Phi_g^{-1} : \Gamma(g) \to U.$$

Somit wird $\Gamma(g) \subseteq K^{l+r}$ als offene Untermannigfaltigkeit der kanonischen Mannigfaltigkeit K^{l+r}

Um nun den Rahmen dieses Kapitels zu schließen, ist man in der günstigen Situation ein handfeste Definition für K-Liegruppen zu geben.
Dazu benutzt man die eingangs erwähnte Definition eines Gruppenobjekts für die Kategorie $\mathbf{C} = \{$lokal analytische K-Mannigfaltigkeiten$\}$ mit den Morphismen aus Definition 2.1.4. Das finale Objekt * in $\mathbf{C}$ ist der 1-Punkt-Raum.

Definition 2.2.1. (K-Liegruppe)
Eine K-Liegruppe $\mathcal{G}$ über einem nichtarchimedischen vollständigen Körper K ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der lokal analytischen K-Mannigfaltigkeiten.

Setzt man $K = \mathbb{Q}_p$, so erhält man die für diese Arbeit äußerst wichtige Kategorie der p-adischen Liegruppen. Man beschränkt sich im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf *kompakte p-adische Liegruppen*, da beispielsweise ihre Iwasawa-Algebra besonders gute ringtheoretische Eigenschaften besitzt.

Kapitel 3

Gruppenschemata

3.1 Gruppenschemata und formale Gruppenschemata

Zu Beginn dieses Abschnitts ist es sicherlich dienlich, noch einmal an eine Definition des Schemas zu erinnern.
Ein Schema ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart besitzt , dass Ringe $\{A_i\}_{i \in I}$ existieren mit der Eigenschaft, dass alle für alle $i \in I$ die lokal geringten Räume $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ isomorph zu $(\operatorname{Spec} A_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_i})$ sind. Diese Beschreibung resultiert in der Einführung eines Gruppenobjekts:

Definition 3.1.1. (Gruppenschemata) Sei R ein Ring. Ein R-Schema $\mathbb{G}$ heißt *Gruppenschema*, falls es eine Gruppenobjekt in der Kategorie der R-Schemata mit finalem Objekt $* = \operatorname{Spec} R$ ist. Falls man sich in der Kategorie der affinen R-Schemata bewegt, heißt $\mathbb{G}$ affines R-Gruppenschema.

Ähnlich wie bei affinen R-Schemata erhält man nun eine Äquivalenz von Katgeorien

$$\{R\text{-Hopfalgebren}\} \underset{\Gamma}{\overset{Spec(-)}{\rightleftarrows}} \{\text{affine } R\text{-Gruppenschemata}\},$$

wobei die Kategorie der R-Hopfalgebren das den R-Gruppenschemata entsprechende Objekt ist.
Besitzt eine R-Hopfalgebra eine separable Filtrierung, kann man bezüglich dieser vervollständigen. Es liegt auf der Hand, dass es auf der Seite des R-Gruppenschemas eine ähnliche Konstruktion gibt. Ganz allgemein gilt folgender Satz:

Proposition 3.1.1. *(Vervollständigung bezüglich abgeschlossenem Unterschema , [GDdhés71],10.8.3)*
Sei $X = Spec(A)$ ein affines Schema und A ein noetherscher Ring. Sei Y ein abgeschlossenes Unterschema, welches durch die Garbe von Idealen $\mathcal{J}$ definiert wird, dann definiert man die formale Vervollständigung von X entlang Y, bezeichnet mit $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ als den folgenden geringten Raum:

$$(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) := (Spf(\hat{A}), \varprojlim_n (\mathcal{O}_X)/\mathcal{J}^n),$$

wobei $\hat{A}$ die separable Komplettierung bezüglich der $\mathcal{J}$-adische Topologie ist.

Weiter besitzt man auch ein vervollständigtes Faserprodukt:

Proposition 3.1.2. *(vervollständigtes Faserprodukt,[GDdhés71],10.9.7)*
Seien X, Y zwei S-Schemata, $g : X \to S, h : Y \to S$ zwei Morphismen, $S' \subset S, X' \subset X, Y' \subset Y$ abgeschlossene Unterschemata mit definierenden Idealen $\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ mit $g^*(\mathcal{J})\mathcal{O}_X \subset \mathcal{K}, h^*(\mathcal{J})\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{L}$. Sei $Z = X \times_S Z$ das Faserprodukt und sei $Z' = p^{-1}(X') \cap q^{-1}(Y')$ der Schnitt der Urbilder unter den kanonischen Projektionen. Dann identifziert man das vervollständigte Faserprodukt mit

$$\widehat{Z} = \widehat{X} \times_{\widehat{S}} \widehat{Y}$$

und den vervollständigten Morphismen $\widehat{g}, \widehat{h}, \widehat{p}, \widehat{q}$. Das Faserprodukt wird lokal durch das vollständige Tensorprodukt $(-\widehat{\otimes}-)$ gegeben.

Die Aussage über die Vervollständigung eines Schemas bezüglich eines Unterschemas, lässt sich natürlich auch auf Gruppenschemata übertragen und man erhält daraus folgend die Kategorie der *formalen Schemata*. Diese Tatsache gibt Anlass für folgende Definition:

Definition 3.1.2. (formales Gruppenschema) Sei R ein Ring. Ein R-Schema $\mathbb{G}$ heißt *formales Gruppenschema*, falls es ein Gruppenobjekt in der Kategorie der formalen Schemata ist. Falls $\mathbb{G}$ zudem affin ist, nennt man es affines formales Gruppenschema.

Auch in diesem Fall erhält man wieder eine Äquivalenz von Kategorien:

$$\{\text{topologische } R\text{-Hopfalgebren}\} \underset{\Gamma(-,-)}{\overset{Spec(-)}{\rightleftarrows}} \{\text{affine formale } R\text{-Gruppenschemata}\}.$$

3.2 Glatte Morphismen

Das Thema der Glattheit von Morphismen von Schemata wird an dieser Stelle nur hinsichtlich des Jakobi-Kriteriums abgehandelt. Natürlich ist eine weitaus allgemeinerer Abhandlung möglich, doch für die Zwecke dieser Arbeit ist der gewählte spezielle Rahmen vollkommen ausreichend.
Sei R ein Ring und $S := \mathrm{Spec}(R)$ ein Basisschema. Sei X ein S-Schema. Der Diagonalmorphismus

$$X \to X \times_S X$$

erzwingt einen Isomorphismus von X auf sein Bild $\Delta(X)$, welches ein lokal abgeschlossenes Unterschema von $X \times_S X$ ist. Das heißt es existiert ein offenes Unterschema $W \subset X \times_S X$ derart, dass $\Delta(X) \subset W$ abgeschlossen ist. Sei $\mathcal{J}$ die Idealgarbe, welche $\Delta(X)$ als abgeschlossenes Unterschema von W definiert. Man kann nun folgende Definition einführen:

Definition 3.2.1. (Garbe der relativen Differentiale)([BLR90] Definition 2.1) Man setzt den quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul

$$\Omega^1_{X/S} = \Delta^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

und nennt diesen die *Garbe der relative Differentialformen* vom Grad 1 von X über S. Weiter heißt die kanonische Abbildung

$$d_{X/S} : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/S}$$

$$f \mapsto p_2^* f - p_1^* f$$

äußeres Differential, wobei die Morphismen p_i die Projektionen des Faserprodukts $X \times_S X$ sind.

Definition 3.2.2. (Glattheit)([BLR90],§6, Definition 2.1)
Ein Morphismus $f : X \to S$ von Schemata heißt *glatt* bei $x \in X$ von relativer Dimension r, falls ein offene Umgebung U von x und eine S-Immersion

$$j : U \to \mathbf{A}_S^n$$

von U in den linearen Raum $\mathbf{A}_S^n$ über S derart existiert, dass folgende Bedingungen gelten:

1. Lokal bei $y := j(x)$ wird die Idealgarbe, welche $j(U)$ als ein Unterschema von $\mathbf{A}_S^n$ definiert von $(n - r)$ Sektionen $g_{r+1}, ..., g_n$ definiert;

2. Die Differentiale $dg_{r+1}(y), ..., dg_n(y)$ sind lineaer unabhängig über $\Omega^1_{\mathbf{A}_S^n/S} \otimes \kappa(y)$.

Ein Morphismus heißt glatt, falls er bei allen Punkten glatt ist. Ein Morphismus heißt étale (bei einem Punkt), falls er (bei einem Punkt) glatt von relativer Dimension 0 ist.

Weiter erhält man das wichtige Jakobi-Kriterium:

Proposition 3.2.1. *(Jakobi-Kriterium,[BLR90], 2.2, Proposition 7)*
Sei X, Z S-Schemata und sei $j : X \to Z$ eine abgeschlossene Immersion, welche lokal von endlicher Präsentation ist. Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Z$ die Idealgarbe, welches X als Unterschema von Z definiert. Sei $x \in X$ ein Punkt und setze $z := j(x)$. Angenommen Z ist glatt bei z von relativer Dimension n, dann sind folgende Bedingngen äquivalent:

1. *Als S-Schema ist X glatt bei x von relativer Dimension r;*

2. *Die kanonische Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln*

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow j^*\Omega^1_{X/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0$$

   ist spaltend exakt bei x und es gilt $r = rnk(\Omega^1_{X/S} \otimes \kappa(x))$;

3. *Falls $dz_1, ..., dz_n$ eine Basis von $(\Omega^1_{X/S})_z$ und falls $g_1, ...g_N$ lokale Sektionen von $\mathcal{O}_Z$ sind, welche $\mathcal{J}$ erzeugen, dann existiert eine Umindizierung derart, dass $g_{r+1}, ..., g_n$ die Idealgarbe $\mathcal{J}$ bei z erzeugen und derart, dass $dz_1, ..., dz_r, dg_{r+1}, ..., dg_n$ den Modul $(\Omega^1_{X/S})_z$ erzeugen;*

4. *Es existieren lokale Sektionen $g_{r+1}, ..., g_n$ von $\mathcal{O}_Z$, welche $\mathcal{J}_z$ derart erzeugen, dass $dg_{r+1}(z), ..., dg_n(z)$ linear unabhängig in $\Omega^1_{X/S} \otimes \kappa(z)$ sind.*

3.3 Weil-Restriktion

Definition 3.3.1. (Weil-Restriktion $\mathfrak{R}_{S'/S}(X'))$([BLR90],7.6) Sei $h : S' \longrightarrow S$ ein Morphismus von Schemata, dann ist der kontravariante Funktor von der Kategorie S-Schemata in die Kategorie der Mengen

$$\mathfrak{R}_{S'/S}(X') : (S - Schemata)^{opp} \to (Mengen)$$

$$T \mapsto \mathrm{Morph}(T \times_S S', X')$$

wohldefiniert. Falls dieser Funktor darstellbar ist, wird das korrespondierende S-Schema wieder mit $\mathfrak{R}_{S'/S}(X')$ bezeichnet und die Weil-Restriktion von X' bezüglich h genannt. Insbesondere wird die Weil-Restriktion also durch folgenden funktoriellen Isomorphismus charakterisiert

$$\mathrm{Morph}_S(T, \mathfrak{R}_{S'/S}(X')) \cong \mathrm{Morph}_{S'}(T \times_S S', X).$$

Proposition 3.3.1. *(Eigenschaften der Weil-Restriktion)*

1. *Sei $h : \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ ein Morphismus von Schemata, wobei R/S eine endliche Ringerweiterung von diskreten Bewertungsringen ist und sei $\mathbb{G}$ ein glattes separables Gruppenschema von endlichem Typ, dann existiert die Weil-Restriktion $\mathfrak{R}_{S'/S}(\mathbb{G})$ als S-Gruppenschema.*

2. *Sei $h : S' \to S$ ein endlicher und lokal freier Morphismus von Schemata und X' ein S'-Schema. Angenommen die Weil-Restriktion $X := \mathfrak{R}_{S'/S}(X')$ existiert als S-Schema, dann ist*

   (a) X glatt, wenn X' glatt ist;

   (b) X separabel, wenn X' separabel ist;

   (c) X lokal von endlichem Typ, wenn X' lokal von endlichen Typ ist.

3. *Sei $h : S' \to S$ ein Morphismus von Schemata, dann ist der kanonische Morphismus*
$$X \to \mathfrak{R}_{S'/S}(X \times_S S')$$
   eine abgeschlossene Immersion, falls X separabel ist.

Beweis: zu (1): R/S ist eine endliche Ringerweiterung diskreter Bewertungsringe und $\mathbb{G}$ ist ein glattes separables Gruppenschema von endlichem Typ. Nach Theorem [BLR90]§4.1 ist $\mathbb{G}$ quasi-projektiv und erfüllt damit nach Theorem [BLR90]§6.4 das Kriterium für die Existenz der Weil-Restriktion. Da die Weil-Restriktion mit Faserprodukten vertauscht, ist $\mathfrak{R}_{S'/S}(\mathbb{G})$ tatsächlich eine S-Gruppenschema.
zu (2): Wird in [BLR90]§6 Proposition 5 gezeigt.
zu (3): Wird in [BLR90]§6 Proposition 5 ff gezeigt. □

Beispiel: (Gruppenschema über Ganzheitsring)
Sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche algebraische Körpererweiterung und R ihr Bewertungsring. Sei $\mathbb{G}$ ein glattes separables $\mathrm{Spec}(R)$-Gruppenschema. Da R der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}_p$ in L, die Körpererweiterung L widerum endlich algebraisch über $\mathbb{Q}_p$ ist, existiert

nach eben gezeigter Proposition die Weil-Restriktion $\mathbb{G}' = \mathfrak{R}_{R/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{G})$ als $\mathbb{Z}_p$-Schema. Weiter folgt mit den definierende Eigenschaften, dass die Mengen

$$\mathbb{G}'(\mathbb{Z}_p) \cong \mathfrak{R}_{R/\mathbb{Z}_p}(\mathbb{G})(\mathbb{Z}_p) \cong (\mathbb{G})(\mathbb{Z}_p \otimes R) \cong \mathbb{G}(R)$$

in Bijektion stehen.

3.4 Analytifizierung

In diesem Kapitel geht es nun darum, einer bestimmten Kategorie von Schemata lokal analytische Mannigfaltigkeiten zuzuordnen. Eine Möglichkeit wäre dies in Analogie zu Serres GAGA-Theoremen, wie sie etwa von Grothendieck in [GR71].XII Theorem 1.1 beschrieben wird, zu versuchen. Leider scheint es schwierig die lokal analytischen Mannigfaltigkeit als lokal geringten Raum einzuführen, denn der topologische K-Vektorraum $\mathcal{C}^{an}(M, K)$ von lokal analytischen Funktionen auf einer lokal analytischen Mannigfaltigkeit erfüllt im Allgemeinen nicht die Garbeneigenschaft. An dieser Stelle müsste man *rigiden analytischen Varietäten* arbeiten, da der Ring der rigid analytischen Funktionen für bestimmte zulässige offene Überdeckungen die Garbeneigenschaft erfüllt. Diese Konzepte lassen sich dann, wie in [HK06] skizziert identifizieren.
Im Gegensatz dazu wird hier ein einfacherer möglicher Weg der Analytifizierung dargestellt, welcher für diese Arbeit vollkommen ausreicht. Der Übersicht halber setzt man folgende Kategorie:

$$\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt} := \left\{ \begin{matrix} \text{glatte separable } \mathcal{O}\text{-Schemata} \\ \text{lokal von endlichen Typ} \end{matrix} \right\},$$

wobei $K/\mathbb{Q}_p$ eine endliche algebraische Körpererweiterung ist mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ ist.

Theorem 3.4.1. *(Analytifizierung)*
Sei $X \in Obj(\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt})$. Dann gilt:

1. *Es existiert eine lokal analytische Mannigfaltigkeit X^{an} und eine kanonische Abbildung $\phi : X^{an} \longrightarrow X$, die eine Bijektion des zugrundeliegenden topologischen Raumes $|X^{an}|$ mit den K-rationalen Punkten $X(K)$ des Schemas X induziert.*

2. *Es existiert ein Analytifizierungsfunktor*

$$\left\{\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}\right\} \xrightarrow{(-)^{an}} \left\{ \begin{matrix} \textit{lokal analytische} \\ K\textit{-Mannigfaltigkeiten} \end{matrix} \right\}$$

mit folgenden Eigenschaften:

   (a) *Seien X und Y Objekte in $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$, dann ist die Analytifizierung des Faserproduktes über K*

$$(X \times_K Y)^{an} \cong X^{an} \times Y^{an}$$

   eine lokal analytische K-Produktmannigfaltigkeit.

(b) *Gruppenobjekte in* $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$ *werden zu Gruppenobjekten in der Kategorie der lokal analytischen* K*-Mannigfaltigkeiten.*

Beweis: zu (1): Sei X ein Objekt in $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$. Per Defintion besitzt X eine offene Überdeckung $(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \cong (Spec(A_i), A_i)$, wobei die Ringe $A_i = \mathcal{O}[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{a}_i$ endlich erzeugte $\mathcal{O}$-Algebren mit passenden Idealen $\mathfrak{a}_i$ sind.
Der Beweis wird nun so geführt, dass man zuerst die Analytifizierung des affinen Raumes, und daran anschließend die Analytifizierung von abgeschlossen affinen Unterschemata von X betrachtet.
Hierzu ergibt sich folgende Bijektion bezüglich der K-wertigen Punkte des affinen Raumes

$$\mathbb{A}_n(K) \cong \mathrm{Morph}(Spec(K), Spec(\mathcal{O}[T_1, ..., T_n])) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}[T_1, ..., T_n], K) \cong K^n.$$

Versieht man K^n mit der nicht-archimedischen Topologie aus 2.1, so ist K^n ein topologischer Hausdorff-Raum.
Weiter wird nun gezeigt, dass die K-wertigen Punkte eines abgeschlossenen affinen Unterschemas X_i von X eine lokal K-analytische Mannigfaltigkeit bilden. Dazu benutzt man die Kategorienäquivalenz:

$$\left\{\text{affine Objekte in } \mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{endlich erzeugte} \\ K\text{-Algebren}\end{matrix}\right\}$$

Weiter ausformuliert induziert diese Kategorienäquivalenz folgende mengentheoretische Bijektionen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}-Alg}(A_i, K) \arrow[r, "1:1"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Morph}_{Sch}(SpecK, SpecA_i) \arrow[d, "="] \\
V(\mathfrak{a}_i) \arrow[r, "1:1"] \arrow[d, "="] & \{\mathfrak{M}_x \in X_i : \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{M}_x \text{ und } \kappa(x) \cong K\} \\
\{x \in K^n : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}_i\} \subset K^n &
\end{tikzcd}$$

Wie gewohnt setzt man $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X_i,x}/\mathfrak{M}_x$ für den Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{X_i}$ im Punkt x. Wie man aus dem Diagramm erkennt, setzt man als Kandidaten für die kanonische Abbildung

$$\phi : V(\mathfrak{a}_i) \longrightarrow X_i$$
$$x \mapsto \mathfrak{M}_x,$$

die jeden Punkt der Teilmenge $V(\alpha_i)$ des topologischen Hausdorff-Raumes K^n auf seinen abgeschlossenen Punkt $\mathfrak{M}_x$ im Schema X_i abbildet.
Es bleibt also zu zeigen, dass die Menge $V(\alpha_i)$ eine lokal K-analytische Mannigfaltigkeit ist.
Dabei muss man den Mengen $V(\alpha_i)$ zuerst eine Topologie zuordnen. Hierzu betrachtet man die Teilraumtopologie

$$T_{V(\mathfrak{a}_i)} := \{U \subset V(\mathfrak{a}_i) \text{ offen } | U = V(\mathfrak{a}_i) \cap V \text{ und } V \subseteq K^n \text{ offen }\},$$

durch welchen die $V(\alpha_i)$ zu offenen Teilmengen des topologischen Hausdorff-Raumes K^n werden.
Es stellt sich die Frage, wieso dieser topologische Raum eine lokal K-analytische Mannigfaltigkeit ist. Für eine positive Antwort benutzt man die Glattheit des Schemas X, welches es einem durch das Jakobi-Kriterium ermöglicht, den Satz über implizite Funktionen anzuwenden.
Angenommen, das Schema X ist glatt von relativer Dimension n über $\operatorname{Spec} K$. Nach den Charakterisierungen der Glattheit von Schemata (vgl. Proposition 3.2.1(4)) findet man, da X_i glatt bei einem Punkt $\mathfrak{M}_x \in X$ von relativer Dimension d ist, Sektionen $g_1, ..., g_d \in \mathcal{O}_{X_i}$, die das Ideal $\mathfrak{M}_x = (g_1, .., g_d)$ für $1 \leq d \leq n$, d passend erzeugen. Diese besitzen nach der gleichen Proposition die Eigenschaft, dass ihre Ableitungen dg_i im Raum der relativen Differentiale $\Omega^1_{X_i/\operatorname{Spec} K} \otimes \kappa(x)$ linear unabhängig sind. (∗) Da man nur Punkte $x \in X_i$ mit $\kappa(x) \cong K$ zulässt, sind die Ableitungen dg_i linear unabhängig über K.
Man definiert nun für Koordinaten $\underline{x} := (x_1, ..., x_{n-d})$ und $\underline{y} := (y_1, ..., y_d)$ eine Abbildung von $A \times B \subseteq V(\alpha_i)$

$$f : A \times B \to K^d$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto (g_1(\underline{x}, \underline{y}), ..., g_d(\underline{x}, \underline{y})).$$

Aufgrund des Jakobi-Kriteriums (∗), ist das auf B eingeschränkte Differential

$$d_{(\underline{x},\underline{y})} f|_B = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\underline{x}) \in M_{(n-d \times n)}(K)$$

invertierbar.
Als letzte Voraussetzung für den Satz über implizite Funktionen bleibt nur die lokale Analytizität der g_i für alle i zu zeigen. Dazu weiß man, dass die $(g_i)_{1 \leq i \leq d}$ Polynome sind, folglich durch die Auswertung für ein $\beta \in V(\alpha_i)$ durch

$$\mathcal{O}_X(A \times B) \to \mathcal{O}_{X,\beta}/\mathfrak{M}_\beta$$

$$g_i \mapsto g_i(\beta) \in K$$

für $1 \leq i \leq d$ auch als lokal analytische Funktionen angesehen werden können. Insgesamt kann man folglich den Satz über implizite Funktionen (Proposition 2.1.2)anwenden. Danach existieren lokal analytische Funktionen $h_i : A \to B$ mit der Eigenschaft, dass

$$\Gamma(h_i) = V(\alpha_i).$$

Nach dem Beispiel 2.2 ist $\Gamma(g_i)$ eine lokal analytische K-Mannigfaltigkeit der Dimension $n - d + d = n$, wodurch auch $(V(\alpha_i), \mathcal{O}^{la}_{\Gamma(h_i)})$ zu einer lokal analytischen K-Mannigfaltigkeit wird. Schlussendlich setzt man also für den der Analytifizierung von X_i zugrundeliegenden topologischen Raum

$$|X_i|^{an} = V(\alpha_i) = \Gamma(h_i).$$

Weiter setzt man für die in der Behauptung des Theorems geforderte kanonische Abildung, die weiter oben eingeführte Abbildung $\phi : |X_i|^{an} \to X$.
Zu (2): Als nächstes soll auf die Funktorialität der Konstruktion eingegangen werden.

Sei dazu $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Morphismus zwischen zwei Objekten $X, Y \in Obj(\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt})$ mit affinen offenen Überdeckungen $Y = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec} A_i = \bigcup_{i\in I} X_i$ und $Y = \bigcup_{j\in J} \operatorname{Spec} B_j = \bigcup_{i\in I} Y_j$.
Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung

$$f|_{SpecA_i} =: t : X_i \to Y_j.$$

Sei $y \in X_i$ ein abgeschlossener Punkt derart, dass für $x \in X_i^{an}$ mit $\phi(x) = y$ gilt. Sei nun $t(x) \in (V, \mu)$ eine Umgebung von $t(x)$. Man erhält folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "t"] & Y_j \\ X_i^{an} \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "t^{an}"] & Y_j^{an} \arrow[u, "\phi"] \end{tikzcd},$$

Man setzt als $t^{an} := \phi^{-1} \circ t \circ \phi$ und muss noch zeigen, dass t^{an} stetig und $\psi \circ t^{an} \in \mathcal{C}^{an}((t^{an})^{-1}(V), K^n)$ gilt. Dann folgt mit [Sch08] Lemma 8.3, dass t^{an} lokal analytisch im Sinne von Definition 2.1.4 und damit ein Morphismus von lokal analytischen Mannigfaltigkeiten ist.
Als letzten Punkt für den Beweis von (1) und (2) muss man zeigen, dass die Analytifizierung mit der Verklebung verträglich ist. Wie gezeigt wurde, sind alle Behauptungen für die affinen Bausteine des K-Schemas X gezeigt. Um nun dem globalen Objekt X eine Analytifizierung zuzuordnen, muss man mit Verklebeargumenten arbeiten. Dafür setzt man

$$X_{ij} = X_i \cap X_j.$$

Da X ein separables Schema ist, sind X_{ij} selber wieder Schemata. Um ein Verklebedatum zu erhalten muss man Isomorphien $\phi_{ij} : X_{ji} \to X_{ij}$ finden derart, dass (a)$X_{ii} = X_i$ und (b) die Kozykelbedingung erfüllt ist. Die Bedingung (a) ist trivialerweise erfüllt, also bleibt (b) zu zeigen:
Setze als den Morphismus von Schemata

$$\phi_{ij} : X_{ij} \longrightarrow X_{ji}$$

mit folgender Eigenschaft: Sei $x \in X_{ij}$, dann finden man immer eine offene Umgebung $D(f) = W \subseteq X_{ij}$ mit $f \in \mathcal{O}_X(W)$, d.h. $\phi_{ij}|_W = id$. Aus dem gleichen Grund gilt

$$X_{ij} \cap X_{ik} \cong X_{ji} \cap X_{jk}.$$

Analytifiziert man nun dieses Verklebedatum des Schemas X, dann erhält man folgende Verklebedaten einer lokal analytischen K-Mannigfaltigkeit. $(V(\mathfrak{a}_i), V(\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j), \phi_{ij}^{an})$ und eine bis auf Isomorphie eindeutige lokal analytische K-Mannigfaltigkeit X^{an}.
zu (3),(a): Seien $X, Y \in Obj(\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt})$ mit affinen offenen Überdeckungen $Y = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec} A_i = \bigcup_{i\in I} X_i$ und $Y = \bigcup_{j\in J} \operatorname{Spec} B_j = \bigcup_{i\in I} Y_j$ und $X \times_K Y$ ihr Faserprodukt über $\operatorname{Spec} K$ mit offener affiner Überdeckung $Z := Spec(A_i \otimes_K B_j)$. Man beginnt wieder zuerst damit, dass man die Behauptung für die offene affine Überedeckung zeigt und schließlich verklebt.

Hierzu betrachtet man die K-wertigen Punkte des Faserprodukts $X_i \times_K Y_j$ und erhält folgende Kette von Isomorphien

$$\mathrm{Morph}(\mathrm{Spec}\, K, \mathrm{Spec}(A_i \otimes B_j)) \cong \mathrm{Hom}(A_i \otimes B_j, K)$$

$$\cong \mathrm{Hom}(A_i, K) \times \mathrm{Hom}(B_j, K)$$
$$\cong V(\alpha_i) \times V(\beta_j),$$

für geeignete Ideale $\alpha_i \subseteq A_i$ und $\beta_j \subseteq B_j$. Die Mengen $V(\alpha_i) \times V(\beta_j)$ werden durch die in (1) beschriebene Analytifizerung und der Teilraumtopologie der Produktmannigfaltigkeit $K^n \times K^{n'}$ zu lokal analytischen Mannigfaltigkeit.
Durch die in (1) beschrieben Verklebung erhält man auch hier wieder ein globales Objekt $X^{an} \times Y^{an}$ und schlussendlich folgende Beziehung

$$(X \times_K Y)^{an} = X^{an} \times Y^{an}.$$

zu (3),(b): Sei $\mathbb{G}$ ein Gruppenobjekt in $\mathbf{Sch}^{\mathcal{O}}_{glatt}$. Man muss die Eigenschaften von Definition 2.0.2 überprüfen. Wegen (3)(b) und da $(-)^{an}$ ein Funktor ist, sind alle Eigenschaften trivialerweise erfüllt. Man erhält folglich eine Gruppenobjekt in der Kategorie der lokal analytischen Mannigfaltigkeiten. $\square$

Kapitel 4

Kohomologie

4.1 G-Moduln und $\mathfrak{g}$-Moduln

Sei G eine abstrakte Gruppe und sei $\mathbb{Z}_p[G]$ der freie $\mathbb{Z}_p$-Modul, welcher durch die Elemente von G erzeugt wird. Explizit bedeutet dies, dass sich jedes Element aus $\mathbb{Z}_p[G]$ eindeutig in der Form $\sum \lambda_g.g$ mit $\lambda_g \in \mathbb{Z}_p$ und $g \in G$ schreiben lässt. Die Multiplikation der Gruppe überträgt sich auf den Modul $\mathbb{Z}_p[G]$ und dieser wird zum *Gruppenring*.
Im weiteren Verlauf soll nun klar werden, inwiefern dieser Gruppenring beziehungsweise im Falle, dass G ein proendliche Gruppe ist, der vervollständigte Gruppenring $\mathbb{Z}_p[[G]]$ für die Kohomologie wichtig ist.
Doch zuerst die allgemeine Definition des *vervollständigten Gruppenrings*.

Definition 4.1.1. (Iwasawa Algebra)([Ven03] Kapitel 2) Sei $(\mathcal{O}, \mathfrak{M})$ ein kommutativer noetherscher lokaler Ring, welcher bezüglich der $\mathfrak{M}$-adische Topologie vollständig ist. Es wird angenommen, dass der Restklassenkörper $\kappa \cong \mathcal{O}/\mathfrak{M}$ ein endlicher Körper der Charakteristik p ist. Sei G eine kompakte p-adische Liegruppe, dann wird der vervollständigte Gruppenring

$$\Lambda(G) := \mathcal{O}[[G]] = \varprojlim_{U} \mathcal{O}[G/U],$$

wobei der projektive Limes über die offenen normalen Untergruppen $U \subset G$ von G läuft, die *Iwasawa Algebra* von G genannt.

An dieser Stelle sei kurz auf eine gewisse Ambiguität in der Notation dieser Arbeit hingewiesen. An manchen Stellen gilt $\Lambda(G) = \mathbb{Z}_p[[G]]$, deswegen benutze man hierfür einfach die Definition 4.1.1 mit dem Ring $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$.

Definition 4.1.2. (G-Moduln,[NSW08] Definition 1.1.7)
Sei G eine proendliche Gruppe. Ein *topologischer G-Modul M* ist eine abelsche topologische Hausdorff Gruppe, welche die Struktur eines abstrakten G-Moduls derart besitzt, dass die Wirkung $G \times M \longrightarrow M$ stetig ist.
Man nennt M einen *diskreten G-Modul*, falls die Gruppenwirkung bezüglich der diskreten Topologie stetig ist.

Man könnte sich nundarüber Gedanken machen, inwiefern man die stetige Gruppenkohomologie mithilfe von derivierten Funktorn eingeführt werden kann. Dabei ist es wichtig, dass die Kategorie der diskreten und topologischen Moduln genügend viele Injektive besitzt. Wie man weiter sehen werden ist dies in der Kategorie der diskreten G-Moduln kein Problem. In der Kategorie der topologischen Moduln gestaltet sich die Sache etwas schwieriger.

Lemma 4.1.1. *(Invarianten)*
Sei A ein G-Modul, G eine Gruppe und sei $\mathcal{O}$ der trivialer G-Modul. Dann gilt:

$$A^G \cong \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}, A).$$

Beweis: Vergleiche hierzu [Wei95] Lemma 6.1.1 □

Um nun weiter auf die einleitende Fragestellung einzugehen, wird an dieser Stelle [NSW08] Proposition 5.2.4 angeführt. Die Behauptung lässt sich leicht mithilfe der Pontryagin-Dualität verifizieren.

Proposition 4.1.2.
1. *Jeder kompakte $\Lambda(G)$-Modul ist der projektive Limes von endlichen Moduln, dass heißt, insbesondere ist er eine abelsche pro-p-Gruppe. Die Kategorie der kompakten Moduln besitzt genügend viele Projektive und exakte inverse Limiten;*
2. *Jeder diskrete $\Lambda(G)$-Modul ist direkter Limes von endlichen Moduln, insbesondere ist er eine abelsche p-Torsionsgruppe. Die Kategorie der diskreten G-Moduln besitzt genügend viele Injektive.*

Ein analoges Konzept wie das der G-Moduln für eine Gruppe G ergibt sich auf der Seite der Lie-Algebren mit $\mathfrak{g}$-Moduln. Diese werden wie folgt eingeführt:

Definition 4.1.3. ($\mathfrak{g}$-Modul)
Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Ein $\mathcal{O}$-Modul M ist eine $\mathfrak{g}$-Modul, falls ein billineare Abbildung

$$\mathfrak{g} \otimes M \to M$$
$$g \otimes m \to g.m$$

derart existiert, dass

$$[g, h].m = g.(h.m) - h.(g.m) \text{ für alle } g, h \in \mathfrak{g} \text{ und } m \in M.$$

Um diese $\mathfrak{g}$-Moduln mit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Moduln der universell einhüllenden Algebra in Zusammenhang zu bringen, benötigen man folgende zwei Lemmata.

Lemma 4.1.3. *(vgl.[Wei95] Übung 7.3.3) Der Funktor*

$$\mathcal{U}(-) : \textit{Lie-Algebra} \longrightarrow \textit{assoziative Algebra}$$

der universelle Einhüllenden und der Funktor

$$Lie(-) : \textit{assoziative Algebra} \longrightarrow \textit{Lie-Algebra}$$

der Lie-Algebren sind folgendermaßen adjungiert

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(A))) \cong \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, A)$$

Beweis: Die Hinrichtung folgt aus der universellen Eigenschaft der Universell einhüllenden Algebra, die Rückrichtung folgt aus der universellen Eigenschaft der Lie-Algebra. □

Proposition 4.1.4. *($\mathcal{U}\mathfrak{g}$-Moduln) Es gilt:*

$$\mathfrak{g}-\mathbf{mod} \cong \mathcal{U}\mathfrak{g}-\mathbf{mod}.$$

Beweis: Nach den fundamentalen Eigenschaften (vgl.[Wei95] 7.3) von $\mathfrak{g}$-Moduln folgt

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(End(M)))) \cong \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, End(M)).$$

Ein $\mathfrak{g}$-Modul ist ein $\mathcal{O}$-Modul M zusammen mit einer Abbildung $\mathfrak{g} \to Lie(End_{\mathcal{O}}(M))$(Lemma**??**) und ein $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-Modul ist auch ein $\mathcal{O}$-Modul M zusammen mit einer Abbildung $\mathcal{U}\mathfrak{g} \to End_{\mathcal{O}}(M)$. Daraus folgt die Isomorphie der Kategorien. □

Es bleibt zu bemerken, dass alle Aussagen für den Fall, dass $\mathfrak{g}$ ein bewertet Lie-Algebra ist, übertragen werden können.

4.2 Lie-Algebra Kohomologie

Sei $\mathcal{O}$ ein assoziativer Ring. Als nächstes wird die Kohomologie einer $\mathcal{O}$-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eingeführt. Die nachfolgenden Definitionen und Sätze stammen aus dem Buch von Weibel [Wei95] Kapitel 7 und werden an den Stellen, an welchen es sich sich anbietet durch die Definitionen von Lazard [Laz65] V ergänzt.
Wie in [Wei95] Kapitel 7 beschrieben, existieren in er Kategorie der $\mathfrak{g}$-Moduln genügend viele injektive und projektive Objekte. Damit kann man folgende Definition führen:

Definition 4.2.1. (Lie-Algebra Kohomologie, [Wei95] Def.7.2.2) Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathcal{O}$-Lie-Algebra und M ein $\mathfrak{g}$-Modul, dann wird mit dem rechtsderivierten Funktor des Invariantenfunktors $(-)^{\mathfrak{g}}$

$$\mathrm{H}^*_{Lie}(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{R}^*(-^{\mathfrak{g}})(M)$$

die *Lie-Algebra-Kohomologie* mit Koeffizienten in M bezeichnet.

Nachdem man nun die Lie-Algebra Kohomologie durch einen abgeleiteten Funktor eingeführt hat, geht es nun darum, wie man diesen durch $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-Auflösungen berechnet.

Definition 4.2.2. (Chevalley-Eilenberg-Komplex, [Wei95] Def.7.7.1)
Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathcal{O}$-Lie-Algebra, die frei als $\mathcal{O}$-Modul ist, und sei $\Lambda^p\mathfrak{g}$ das p-te äußere Produkt und sei $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ die universelle Einhüllende Lie-Algebra von $\mathfrak{g}$, dann wird mit

$$\ldots \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^2\mathfrak{g} \xrightarrow{d} \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^1\mathfrak{g} \xrightarrow{d} \mathcal{U}\mathfrak{g} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{O}$$

und dem Differential

$$\begin{gathered} d : V_p(\mathfrak{g}) \to V_{p-1}(\mathfrak{g}) \\ u \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x_i} \wedge \ldots \wedge x_p \\ + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x_i} \wedge \ldots \wedge \hat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_p \end{gathered}$$

der *Chevalley-Eilenberg-Komplex* (kurz: CE-Komplex) $V_*(\mathfrak{g})$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bezeichnet.

Im Folgenden werden nun zwei Fälle unterschieden. Im ersten Fall betrachtet man eine Lie-Algebra über einem allgemeinen Ring $\mathcal{O}$. Im zweiten Fall geht man zu einer bewerteten $\mathcal{O}_K$-Lie-Algebra über, deren Kohomologie Koeffizienten in einem vollständig-freien Modul M hat. Insgsamt ergibt sich folgende Proposition:

Proposition 4.2.1. *(Projektive Auflösung, [Wei95] Theorem 7.7.2)*

1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine $\mathcal{O}$-Lie-Algebra frei vom Rang r, dann ist*

$$V_*(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{O}$$

   eine projektive $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-Auflösung des trivialen $\mathfrak{g}$-Moduls $\mathcal{O}$;

2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine bewertete $\mathcal{O}_K$-Lie-Algebra frei von endlichen Rang, dann ist die Vervollständigung des filtrierten Komplexes*

$$\widehat{V_*(\mathfrak{g})} \longrightarrow \mathcal{O}_K$$

   eine projektive $\widehat{\mathcal{U}\mathfrak{g}}$-Auflösung des trivialen $\mathfrak{g}$-Moduls $\mathcal{O}_K$.

Beweis: 1. vergleiche [Wei95] Theorem 7.7.2

2. Nach 1, findet man leicht eine projektive $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-Auflösung von $\mathcal{O}_K$, welche eine kanonische ausschöpfende und separable $F_*V_*(\mathfrak{g})$ Filtrierung trägt. Die Frage, welche es zu lösen gilt, ist, ob die Vervollständigung bezüglich dieser Filtrierung eine $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-Auflösung von $\mathcal{O}_K$ ist.
   Hierzu benutzt man wieder die zu dieser Filtrierung assozierte homologische Spektralssequenz

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_pV_{p+q}(\mathfrak{g})/F_{p-1}V_{p+q}(\mathfrak{g})) \Rightarrow H_{p+q}(V_*(\mathfrak{g}))$$

   aus [Wei95] Theorem 7.7.2. Da die Vervollständigung Isomorphien $F_sV_*(\mathfrak{g})/F_{s-1}V_*(\mathfrak{g}) \cong F_s\widehat{V_*(\mathfrak{g})}/F_{s-1}\widehat{V_*(\mathfrak{g})}$ induziert, erhält man eine Isomorphie von Spektralsequenzen. Das heißt:

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_pV_{p+q}(\mathfrak{g})/F_{p-1}V_{p+q}(\mathfrak{g})) \Rightarrow H_{p+q}(V_*(\mathfrak{g})) \cong H_{p+q}(\widehat{V_*(\mathfrak{g})}).$$

   Wie nun in [Wei95] Theorem 7.7.2 gezeigt wurde, besteht die 1-Seite dieser Spektralsequenz aus der Homologie des Koszul-Komplexes ein regulären Sequenz. Folglich gilt

$$0 = H_{p+q}(\widehat{V_*(\mathfrak{g})}) \cong H_{p+q}(V_*(\mathfrak{g}))$$

   und es folgt die Behauptung.

□

Da man nun eine projektive $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-Auflösung des trivialen $\mathfrak{g}$-Moduls $\mathcal{O}$ (bzw. $\mathcal{O}_K$) gefunden hat, erlaubt diese Tatsache eine genauere Beschreibung der Lie-Algebra-Kohomologie, die sich in folgender Proposition wiederfindet:

Proposition 4.2.2. *(Lie-Algebra-Kohomologie)*

1. *([Wei95] Korollar 7.7.3) Sei $M \in \mathfrak{g} - -\mathbf{mod}$ ein $\mathfrak{g}$-Modul, dann ergeben sich die Kohomologiemoduln $H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ als Kohomologie der Komplexe*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_*(\mathfrak{g}), M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^* \mathfrak{g}, M);$$

2. *([Tot99], Lemma 9.2)Ist M zusätzlich vollständig-frei und $\mathfrak{g}$ eine bewertete $\mathcal{O}_K$-Lie-Algebra, dann sind die Komplexe*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_*(\mathfrak{g}), M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\widehat{V_*(\mathfrak{g})}, M))$$

quasiisomorph.

Beweis: 1. Folgt sofort aus vorhergehender Proposition 4.2.1, genauer gilt:

$$\mathrm{H}^*_{Lie}(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{R}^*(-)^{\mathfrak{g}}(M) = \mathrm{R}^* \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-, M)(\mathcal{O}_K) = \mathrm{H}^* \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_*(\mathfrak{g}), M);$$

2. An dieser Stelle nutzt man wieder vorherige Proposition 4.2.1(2) aus:

$$\mathrm{H}^* \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_*(\mathfrak{g}), M) \cong \mathrm{H}^* \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\widehat{V_*(\mathfrak{g})}, M),$$

da der rechtsderivierte Funktor $\mathrm{R}^* \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-, M)(\mathcal{O}_K)$ unabhängig von der projektiven Auflösung von $\mathcal{O}_K$ berechnet werden kann.

□

4.3 (Ko-)homologische Lemmata

Für den Beweis der Lazardisomorphie, sei sie nun integral oder rational, werden folgende zwei Lemmata aus der homologischen Algebra äußerst wichtig sein. Das erste geht auf Serre zurück und das zweite wird von Lazard in [Laz65]V.2.1.5 bewiesen.

Proposition 4.3.1. *(Serres Lemma,[Tot99] Proposition 8.1) Sei R ein vollständiger und filtrierter Ring und noetherscher assozierter Graduierung* $\mathrm{gr}(R)$*. Sei A eine vollständige und filtrierte R-Algebra mit noetherscher assozierter Graduierung* $\mathrm{gr}(A)$*. Sei M ein vollständig-filtrierter A-Modul, dessen assozierte Graduierung endlich erzeugt über* $\mathrm{gr}(A)$ *ist. Dann kann eine graduiert-freie* $\mathrm{gr}(A)$*-Auflösung des endlich erzeugten* $\mathrm{gr}(A)$*-Moduls* $\mathrm{gr}(M)$ *zu einer filtriert-freien A-Auflösung des vollständig-freien A-Moduls M geliftet werden.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist die assozierte Graduierung $\mathrm{gr}(A)$ noethersch und die assozierte Graduierung $\mathrm{gr}(M)$ endlich erzeugt über $\mathrm{gr}(A)$. Man findet folglich ein graduiert-freie $\mathrm{gr}(A)$-Auflösung

$$\ldots G_0 \xrightarrow{\bar{d}_1} \mathrm{gr}(M) \longrightarrow 0$$

des endlich erzeugten graduiert-freien $\mathrm{gr}(R)$-Moduls $\mathrm{gr}\, M$.
Da die einzelnen G_i für alle $i > 0$ mit $G_0 := \mathrm{gr}\, M$ graduiert frei sind, findet man

mit der Liftungseigenschaft aus Proposition 1.4.1 einen filtriert-freien A-Modul L_i und filtrierte Morphismen d_i mit $\operatorname{gr} L_i \cong G_i$ und $\operatorname{gr} d_i = \bar{d}_i$. Insgesamt erhält man also eine Sequenz von filtriert-freien A-Moduln

$$\ldots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{d_1} M.$$

Es bleibt zu zeigen, dass dies eine filtriert-freie A-Auflösung von M ist. Sei nun $K_i := ker(L_i \to L_{i-1})$ für $i \geq 0$ mit von L_i induzierter Filtrierung und setze $K_{-1} = M$.
Zum einen weiß man, dass für alle $i \geq 0$ die Sequenzen

$$0 \longrightarrow \operatorname{gr}(K_{i-1}) \longrightarrow \operatorname{gr}(L_{i-1})$$

und

$$\operatorname{gr}(L_i) \longrightarrow ker(\operatorname{gr}(L_{i-1} \to \operatorname{gr}(L_{i-2})) \longrightarrow 0$$

exakt sind. Da G_* ein graduiert-freie $\operatorname{gr}(A)$-Auflösung von $\operatorname{gr}(M)$ ist, lässt sich die letzt Seuqenz auch als exakte Sequenz

$$\operatorname{gr}(L_i) \longrightarrow im(\operatorname{gr}(L_i \to \operatorname{gr}(L_{i-1})) \longrightarrow 0$$

lesen. Folglich gilt, dass die natürliche Abbildung $\operatorname{gr}(L_i) \to \operatorname{gr}(K_{i-1})$ surjektiv ist. Betrachtet man nun die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{gr}(K_i) \longrightarrow G_i \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{gr}(K_{i-1}) \longrightarrow 0,$$

so hängt die Frage, ob die Sequenz von filtriert-freien A-Moduln L_* eine Auflösung von M ist natürlich davon ab, ob die gelifteten Sequenzen

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow L_i \longrightarrow K_{i-1} \xrightarrow{f} 0$$

für alle $i \geq 0$ strikt exakt sind. Nun weiß man, dass L_i ein endlich erzeugter filtriert-freier A-Modul über einer vollständigen R-Algebra A ist. Folglich muss L_i selbst vollständig sein. Nach den Liftungseigenschaften der assozierten Graduierung aus Proposition 1.3.2 folgt nun, dass dann f mit $\operatorname{gr}(f) = \bar{f}$ für alle Filtrierungsschritte surjektiv ist. Induktiv gilt dies natürlich für alle weiteren $i > 0$.
Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{gr}(K_i) \cong ker(\operatorname{gr}(L_i) \to \operatorname{gr}(L_{i+1}))$ gilt. Man weiß aber, dass $\operatorname{gr}(K_i) \subset \operatorname{gr}(R_i)$, also folgt diese Eigenschaft sofort. Es handelt sich bei der Sequenz von filtriert-freien A-Moduln

$$\ldots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{d_1} M$$

also tatsächlich um eine filtriert-freie A-Auflösung von M, die aus der Liftung von G_* entstand. □

Das zweite versprochene Lemma soll nun einen Vergleich zwischen zwei gelifteten Auflösungen schaffen.

Proposition 4.3.2. *(Lazards Lemma, [Laz65].V.2.1.5) Sei R ein vollständiger und filtrierter Ring, A eine vollständige und filtrierte Algebra und M und M' zwei filtriert-vollständige A-Moduln.*
Seien

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[d, "f_{-1}"] \\ \cdots \arrow[r] & X'_1 \arrow[r] & X'_0 \arrow[r, "\epsilon'"] & M' \end{tikzcd}$$

filtriert-freien A-Auflösungen von M (respektive M'). Seien

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \operatorname{gr} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & \operatorname{gr} X_0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g_0"] & \operatorname{gr} M \arrow[d, "g_{-1}"] \\ \cdots \arrow[r] & \operatorname{gr} X'_1 \arrow[r, "\delta'"] & \operatorname{gr} X'_0 \arrow[r, "\delta'"] & \operatorname{gr} M' \end{tikzcd}$$

endlich erzeugte graduiert-freie $\operatorname{gr} A$*-Auflösung von M (respektive M'). Weiter sei $g_* : \operatorname{gr} X_* \to \operatorname{gr} X'_*$ ein Morphismus von Kettenkomplexen derart, dass $\operatorname{gr}(\epsilon) \circ g = \operatorname{gr}(f) \circ \operatorname{gr}(\epsilon)$ gilt.*
Dann existiert ein bis auf Homotopie eindeutiger Morphismus $f_* : X_* \to X'_*$ von Kettenkomplexen derart, dass $\operatorname{gr} f_* = g_*$.

Beweis: Das Lemma wird in [Laz65].V.2.1.5 gezeigt. Es bleibt die Eindeutigkeit bis auf Homotopie zu zeigen. Diese Homotopie lässt sich, da alle Moduln filtriert-frei sind, explizit aus der projektiven Liftungseigenschaft konstruieren.

□

Schlussendlich erhält man folgendes Korollar:

Korollar 4.3.3. *Sei R eine filtrierter und vollständiger Ring, A eine filtrierte und vollständige R-Algebra und M ein vollständig-freier A-Modul. Seien X_* und X'_* zwei filtriert-freie A-Auflösungen von M, welche die Bedingungen des Lazard-Lemmas erfüllen, mit der Eigenschaft, dass die assozierte Graduierung*

$$\operatorname{gr} X_* \cong \operatorname{gr} X'_*$$

als freie $\operatorname{gr}(A)$*-Komplexe isomorph sind, dann sind auch die Liftungen*

$$X_* \cong X'_*$$

als filtriert-freie A-Komplexe isomorph und homotop.

Oft ist es wichtig, den Basisring des Koeffizientenmoduls bei der Kohomologie zu wechseln. Dies ist selbstverständlich nur unter bestimmten Bedingungen möglich. Genauer betrachtet man folgendes Setting:

Proposition 4.3.4. *(flacher Basiswechsel) Seien R und T zwei Ringe. Angenommen T ist flach als Rechts-R-Modul. Dann gilt für alle T-Moduln C und R-Moduln A, dass für alle n*

$$Ext^n_R(A, C) \to Ext^n_T(T \otimes_R A, C)$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis: Man wähle eine projektive R-Auflösung P_* von A. Die $Ext_R(-,C)$-Gruppen werden durch die Kohomologie des Komplexes $\mathrm{Hom}_R(P_*,C)$ berechnet.
Da T flach als Rechts-R-Modul ist, sind die T-Moduln $T\otimes_R P_n$ für alle n projektiv. Folglich ist der Komplex $T\otimes_R P_*$ eine projektive T-Auflösung von $T\otimes_R A$. Um die Kohomologie des Komplexes $\mathrm{Hom}_T(T\otimes_R P_*,C)$ zu berechnen, betrachte man folgende Isomorphien. Zuerst gilt

$$\mathrm{Hom}_T(T\otimes_R P_*,C)\cong \mathrm{Hom}_T(T,\mathrm{Hom}_R(P_*,C))$$

nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts. Als nächstes folgt aus der Flachheit von T über R die Isomorphie (vgl. [Eis95] Proposition 2.10)

$$\mathrm{Hom}_T(T\otimes_R P_*,C)\cong T\otimes_T \mathrm{Hom}_R(P_*,C)).$$

Folglich erhält man wieder die Kohomologie des Komplexes $\mathrm{Hom}_R(P_*,C)$. □

Proposition 4.3.5. *Sei A eine assoziative $\mathcal{O}$-Algebra, $\mathcal{O}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring und X_* eine endliche filtriert-freie A-Auflösung des trivialen A-Moduls $\mathcal{O}$. Dann ist auch die saturierter Auflösung $\mathrm{Sat}(X_*)$ eine endliche filtriert-freie $\mathrm{Sat}(A)$-Auflösung von $\mathcal{O}$.*

Beweis: Sei also

$$\cdots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

eine endliche filtrierte-freie A-Auflösung von $\mathcal{O}$. Folglich ist X_* spaltend exakt. Das heißt explizit gilt

$$X_{k-1}\cong ker(d_{k-1})\oplus im(d_k).$$

Wie in Proposition 1.5.6 gezeigt wurde, ist der Funktor $\mathrm{Sat}(-)$ additiv, dass heißt es gilt

$$\mathrm{Sat}(X_k)\cong \mathrm{Sat}(ker(d_{k-1}))\oplus \mathrm{Sat}(im(d_k))$$

und folglich ist $\mathrm{Sat}(X_*)$ eine A-Auflösung von $\mathrm{Sat}(\mathcal{O})\cong\mathcal{O}$ □

Proposition 4.3.6. *Sei $\mathcal{O}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring, A ein assoziative $\mathcal{O}$-Algebra, X_* eine projektive A-Auflösung von $\mathcal{O}$ und M ein torsionsfreier A-Modul.*
Dann gilt für die Kohomologie mit Koeffizienten in M

$$\mathrm{H}^n\,\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Sat}(A)\otimes_A X_*,M)\cong \mathrm{H}^n\,\mathrm{Hom}_A(Sat(X_*),M).$$

Beweis: Man betrachte für alle k die exakten Sequenzen von $\mathrm{Sat}(A)$-Komplexen

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Sat}(A)\otimes_A X_k,M)\xrightarrow{i_k}\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Sat}(X_k),M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(coker(i_k),M)\longrightarrow 0 \tag{1}$$

In Proposition 1.5.7 wurde gezeigt, dass für alle k der $coker(i_k)$ ein $\mathcal{O}$-Torsionsmodul ist. Da der A-Modul M als torsionsfrei vorausgesetzt wurde, ist $\mathrm{Hom}(coker(i_*),M)=0$. Assoziert man also zu der exakten Sequenz (1) von $\mathrm{Sat}(A)$-Moduln die lange exakte Kohomologiesequenz, so ist $\mathrm{H}^n\,\mathrm{Hom}(coker(i_*),M)=0$ für alle n. Dies erzwingt die Isomorphie

$$\mathrm{H}^n\,\mathrm{Hom}(\mathrm{Sat}(A)\otimes_A X_*)\cong \mathrm{H}^n\,\mathrm{Hom}(\mathrm{Sat}(X_*),M)$$

für alle n. □

4.4 Stetige Gruppenkohomologie analytischer pro-p-Gruppen

Sei G ganz allgemein eine proendliche Gruppe und M ein beliebiger topologischer G-Modul. Man bildet den stetigen Kokettenkomplex $C^*_{cts}(G,M)$ bezüglich der Gruppe G, indem man die G-Invarianten der stetigen Standardauflösung $X^*_{cts}(G,M)$, die genau in der gleichen Weise wie in [NSW08]I§2 eingeführt wird, bildet.

Definition 4.4.1. (stetige Gruppenkohomologie,[NSW08] Definition 2.7.1) Man nennt die n-te Kohomologiegruppe des stetigen Kokettenkomplexes $C^*_{cts}(G,M)$ die *n-te stetige Kohomologiegruppe* von G mit Koeffizienten im G-Modul M. Diese Gruppe wird mit $\mathrm{H}^n_{cts}(G,M)$ bezeichnet.

Proposition 4.4.1. *([Laz65] V.2.2.2) Sei G eine p-bewertete Gruppe von endlichen Rang r und $\mathcal{O}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring. Dann existiert eine endliche filtriert-freie $\Lambda(G)$-Auflösung*

$$X_* := \qquad \dots X_0 \xrightarrow{\bar{d_1}} \mathcal{O} \longrightarrow 0,$$

deren filtriert-freie $\Lambda(G)$-Moduln $(X_k)_{1\leq k\leq r}$ eine Basis $(\mathcal{B}_k)_{1\leq k\leq r}$ der Länge $\binom{r}{k}$ besitzen.

Beweis: Da G p-bewertet und von endlichen Rang ist existiert nach [Sch09] Theorem 10.3 eine Isomorphie

$$\mathrm{gr}(\Lambda(G)) \cong \mathrm{gr}(\mathcal{O}) \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} \mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G)$$

von graduierten $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$-Algebren.
Betrachtet man vorerst die graduierte $\mathbb{F}_p[\pi]$-Lie-Algebra $\mathrm{gr}(G)$ allein, so ist diese sicher frei und endlich erzeugt als $\mathbb{F}_p[\pi]$-Modul, da G endlichen Rang hat. Durch den Chevalley-Eilenberg-Komplex findet man folglich eine graduiert-freie $\mathrm{gr}(G)$-Auflösung

$$\dots \mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G) \otimes_{\mathrm{gr}(\mathcal{O})} \Lambda^1 \mathrm{gr}(G) \longrightarrow \mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

von $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$. Da $\mathrm{gr}(G)$ graduiert-frei von Rang r, kann diese Auflösung nach Konstruktion nur die Länge r besitzen. Darüber hinaus ist aus dieser Form der Auflösung sofort ersichtlich, dass für alle $0 \leq k \leq r$ die Basen $(\bar{\mathcal{B}}_k)$ der $\mathrm{gr}(G)$-Moduln $\mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G) \otimes_{\mathrm{gr}(\mathcal{O})} \Lambda^k \mathrm{gr}(G)$ von Elementen der Form $ux_{i_1}G_{\omega(x_{i_1})} \wedge \dots \wedge x_{i_l}G_{\omega(x_{i_l})}$ mit $u \in \mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G)$ und Indizees $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$ erzeugt werden. Folglich hat die Basis $\bar{\mathcal{B}}_k$ die Länge $\binom{r}{k}$.
Nach der eingangs erwähnten Isomorphie von graduierten $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$-Algebren kann man die graduiert-freie $\mathrm{gr}(G)$-Auflösung von $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$ auch als graduiert-freie $\mathrm{gr}(\Lambda(G))$-Auflösung von $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$ lesen. Nun ist $\Lambda(G)$ sicherlich eine vollständige $\mathcal{O}$-Algebra, $\mathcal{O}$ vollständig nach Vorausetzung und $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$ endlich erzeugt über $\mathrm{gr}(\Lambda(G))$. Man kann folglich Serres Lemma (vgl. Proposition 4.3.1) anwenden und erhält eine endliche filtriert-freie $\Lambda(G)$-Auflösung

$$X_* := \qquad \dots X_0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

des trivialen $\Lambda(G)$-Moduls $\mathcal{O}$. Die Forderung an die Basen $\mathcal{B}_k$ der $\Lambda(G)$-Moduln X_k sind durch die Liftungseigenschaft $\mathrm{gr}(\mathcal{B}_k) \cong \bar{\mathcal{B}}_k$ für alle $0 \leq k \leq r$ erfüllt. $\square$

Definition 4.4.2. (quasiminimaler Komplex,[Laz65] V.2.2.2) Sei G eine p-bewertete Gruppe von endlichen Rang mit geordneter Basis $(x_i)_{1\leq i\leq r}$. Als Bewertung der Basiselemente setzt man $\omega(x_i) = \tau_i$. Man nennt die geliftete $\Lambda(G)$-Auflösung aus Proposition 4.4.1 den *quasiminimalen Komplex* der Gruppe G. Für alle $0 \leq k \leq r$ setzt man als Bewertung der Basiselemente $e_I \in \mathcal{B}_k$ mit $I = \{i_1, ..., i_l : 1 \leq i_i < ... < i_l \leq k\}$

$$w_{X_k}(e_I) = \sum_{i=1}^{k} \omega(x_i).$$

Auf den ersten Blick ist nicht ganz klar, welcher Zusammenhang zwischen dem quasiminimalen Komplex einer p-bewerteten Gruppe von endlichen Rang und der stetigen Gruppenkohomologie dieser Gruppe besteht. Diese Frage klärt folgendes Lemma:

Lemma 4.4.2. *(stetige Gruppenkohomologie) Sei G eine p-bewertete Gruppe von endlichen Rang und sei M ein kompakter G-Modul. Dann berechnet der quasiminimale Komplex X_* der Gruppe G die stetige Gruppenkohomologie $H^*_{cts}(G, M)$.*

Beweis: Sei X_* der quasiminimale Komplex der p-bewerteten Gruppe G. Nach der Proposition 5.2.14 in [NSW08] gilt die Isomorphie

$$H^n_{cts}(G, M) \cong Ext^n_{\Lambda(G)}(\mathcal{O}, M).$$

Wie im Beweis von Proposition 4.4.1 gezeigt wurde, ist der quasiminimale Komplex X_* eine filtriert-freie $\Lambda(G)$-Auflösung von $\mathcal{O}$, also sicher eine projektive Auflösung von $\mathcal{O}$. Es gilt folglich

$$Ext^n_{\Lambda(G)}(\mathcal{O}, M) \cong H^n Hom_{\Lambda(G)}(X_*, M).$$

Wie eingangs erwähnt wurde, ist gerade dies die stetige Gruppenkohomologie. □

Um später gewisse Klassen von analytischen pro-p-Gruppen zu unterscheiden, benötigt man eine bestimmte Form der stetigen Gruppenkohomologie. Diese wird einfach mod-p-Kohomologie genannt und folgendermaßen eingeführt:

Definition 4.4.3. ($mod - p$-Kohomologie)
Sei G eine analytische pro-p-Gruppe. Dann wird mit der stetigen Gruppenkohomologie

$$\mathrm{H}^*_{cts}(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Ext}^n_{\Lambda(G)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$$

die mod-p-Kohomologie bezeichnet.

Für die Klassifizierung von pro-p-Gruppen wird folgende Spektralsequenz von großem Nutzen sein. Es bleibt zu bemerken, dass man über die höheren Differentiale dieser Spektralsequenz so gut wie nichts weiß.

Proposition 4.4.3. *(May-Spektralsequenz,[SW00] Theorem 5.1.12) Sei G eine kompakte p-adische Liegruppe und N ein diskreter filtriert-freier $\mathbb{Z}_p$-Modul mit G-Wirkung, dann existiert eine kohomologische Spektralsequenz $(E_*^{(*,*)}, d_r), d_r : E_r^{(s,t)} \to E_r^{(s+r,t-r+1)}$ im zweiten Quadranten*

$$E_1^{s,t} := \mathrm{Ext}^{s+t}_{\mathrm{gr}\,\Lambda(G)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p),$$

die gegen

$$E_\infty^{s,t} := F_s \operatorname{H}^{s+t}(G, \mathbb{F}_p)/F^{s+1} \operatorname{H}^{s+t}(G, \mathbb{F}_p)$$

konvergiert. Die Filtrierung F_* ist die ausschöpfende und separble kanonische Filtrierung des quasiminimalen Komplexes.

Abschliessend wir ein Produkt bezüglich der Kohomologie eingeführt, welche es einem ermöglicht, beispielsweise eine Ringstruktur auf der Kohomologie einzuführen.

Definition 4.4.4. (Cup-Produkt für Hopfalgebren) Sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring, A eine Hopfalgebra und M, M', N drei A-Moduln mit einer lineare Abbildung $M \otimes_{\mathcal{O}} M' \longrightarrow N$. Dann nennt man die billineare Abbildung

$$\operatorname{H}^*(A, M) \times \operatorname{H}^*(A, M') \longrightarrow \operatorname{H}^*(A, N)$$

das *Cup-Produkt*.

Proposition 4.4.4. *(Cup-Produkt,[Laz65],V.2.5.4) Sei G eine analytische pro-p-Gruppe mit quasiminimalen Komplex X_* und Iwasawa-Algebra $\Lambda(G)$ aus Definition 4.1.1. Seien M, M' und N drei kompakte $\mathcal{O}$-Modul mit stetiger G-Wirkung und $M \otimes M' \longrightarrow N$ eine lineare stetige Abbildung. Dann induziert die Abbildung [Laz65]V.2.5.2.2*

$$D : X_* \longrightarrow \widehat{X_* \otimes_{\mathcal{O}} X_*}$$

ein Cup-Produkt

$$H^*_{cts}(G, M) \times H^q_{cts}(G, M') \longrightarrow H^{p+q}_{cts}(G, N)$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cup \beta$$

bezüglich der stetigen Gruppenkohomologie.

Kapitel 5

p-adische Liegruppen

5.1 p-bewertete Gruppen und kompakte p-adische Liegruppen

Es mag etwas ungewöhnlich erscheinen, dieses Unterkapitel mit der Definition von Poincaré Dualitäts Gruppen zu beginnen, doch wird sich dieser Umstand im weiteren Verlauf klären.

Definition 5.1.1. (Poincaré-Dualitäts Gruppen,[Laz65]V.2.5.7) Eine pro-p-Gruppe G heißt *Poincaré-Dualitäts Gruppen* der Dimension r, falls folgendes gilt:

1. Der Kohomologiering $\mathrm{H}^s(G, \mathbb{F}_p)$ ist für alle $s \in \mathbb{N}$ endlich;

2. $dim_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{H}^r(G, \mathbb{F}_p)) = 1$;

3. Die kanonische Paarung

$$\mathrm{H}^s(G, \mathbb{F}_p) \otimes \mathrm{H}^{r-s}(G, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}^r(G, \mathbb{F}_p),$$

   welche durch das Cup-Produkt induziert wird, ist nicht degeneriert.

Weiter wird später folgende Aussage von Serre benötigt:

Proposition 5.1.1. *(Serre) Sei G eine torsionsfreie analytische pro-p Gruppe mit offener Untergruppe $H \subseteq G$, dann gilt für die kohomologischen Dimensionen:*

$$cd(G) = cd(H)$$

Um nun genauere Aussagen über p-adische Liegruppen treffen zu können, führt Lazard die p-Bewertung ein. Diese Bewertung hat viele nützliche Eigenschaften, welche nun hier kurz dargestellt werden.

Definition 5.1.2. ([Laz65]III Def 2.1.2, p-Bewertung und p-bewertete Liegruppe) Eine p-Bewertung auf einer filtrierten Gruppe G ist eine Funktion $\omega : G \to (0, \infty]$, welche folgende Axiome für alle g und h aus G erfüllt:

1. $\omega(e) = \infty$ und $1/(p-1) < \omega(g) < \infty$ für $g \neq 1$;

2. $\omega(gh^{-1}) \geq min\{\omega(g), \omega(h)\}$;

3. $\omega(g^{-1}h^{-1}gh) \geq \omega(g) + \omega(h)$;
4. $\omega(g^p) = \omega(g) + 1$.

Eine kompakte p-adische Liegruppe (G, ω)heißt *p-bewertete Gruppe*, falls sie eine p-Bewertung ω besitzt.

Setzt man

$$G_\nu := \{g \in G : \omega(g) \geq \nu\} \quad G_{\nu+} := \{g \in G : \omega(g) > \nu\},$$

so sind diese nach der Definition der p-Bewertung normale Untergruppen von G. Weiter sieht man, dass die Untergruppen G_ν eine absteigende ausschöpfende und separable Filtrierung der Gruppe G bilden mit den zusätzlichen Eigenschaften, dass

$$G_\nu := \bigcap_{\nu' < \nu} G_{\nu'} \quad \text{und}[G_\nu, G_{\nu'}] \subseteq G_{\nu+\nu'}$$

gilt. Folglich erhält man eine eindeutige topologische Hausdorff-Gruppenstrukur auf G, welche durch die p-Bewertung ω induziert wird. Dadurch, dass man auf G eine Filtrierung durch die Untergruppen G_ν hat, lässt sich dieser Filtrierung eine Graduierung zuordnen.

$$\operatorname{gr} G := \bigoplus_\nu gr_\nu G = \bigoplus_\nu G_\nu / G_{\nu+}.$$

Dies gibt Anlass zu folgender Definition:

Definition 5.1.3. (Rang einer p-bewerteten Gruppe) Sei (G, ω) eine p-bewertete Gruppe. Dann wird durch

$$rnk(G, \omega) := rnk_{\mathbb{F}_p[\pi]} \operatorname{gr} G$$

der Rang der Gruppe G gegeben. Die p-bewertete Gruppe heißt von *endlichem Rang*, falls $rnk(G, \omega) < \infty$ ist.

Es bleibt zu bemerken, dass der Rang einer p-bewerteten Gruppe nicht immer mit ihrer Dimension als lokal analytische Mannigfaltigkeit übereinstimmt. Weiter besitzt das zu der Gruppe G assozierte graduierte Objekt folgende wichtige Eigenschaften:

Proposition 5.1.2. *(assozierte Graduierung eine p-bewerteten Gruppe) Sei (G, ω) eine p-bewertete Gruppe und $\operatorname{gr} G$ ihre assozierte Graduierung. Dann gilt:*

1. $\operatorname{gr}(G)$ *ist eine torsionsfreie beschränkte $\mathbb{F}_p[\pi]$-Lie-Algebra;*
2. *Falls G endlichen Rang besitzt, dann existiert eine geordnete Basis, deren Länge gleich dem Rang der Gruppe ist. Darüber hinaus ist G topologisch endlich erzeugt;*
3. *Falls G endlichen Rang besitzt, dann definiert jede beliebige andere p-Bewertung ω' auf G die Topologie von G und genügt der Gleichung $rnk(G, \omega) = rnk(G, \omega')$;*
4. *Jede p-bewertete pro-p-Gruppe G von endlichem Rang trägt die natürliche Struktur einer kompakten p-adischen Liegruppe und es gilt $dim(G) = rnk(G)$;*

5. *Eine p-bewertete Gruppe von endlichen Rang ist eine Poincaré Dualitäts Gruppe.*

Beweis: zu (1): Diese Aussage wird in [Sch09] Bemerkung 7.2 gezeigt. Prinzipiell folgt die Behauptung aus der Definition der p-Bewertung und den daraus resultierenden Konsequenzen für die Filtrierung einer p-bewerteten Gruppe.
zu (2): Die erste Aussage entspricht **??** Proposition 8.5. Die zweite Aussage der Behauptung steht implizit in der ersten, entspricht explizit aber **??** Korollar 8.6.
zu (3): Man vergleiche hierzu **??** Proposition 8.15.
zu (4): Vergleiche [Sch09], Korollar 11.6. zu (5): Streng genommen dürfte diese Aussage erst in einem nachfolgenden Kapitel stehen. Sie wird aber aufgrund einer zusammenhängenderen Darstellung hier bewiesen.
Sei G eine p-bewertete Gruppe von Rang r. Dann gilt für die mod-p-Kohomologie nach [Laz65]V.2.2.3.4

$$dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^n_{cts}(G, \mathbb{F}_p) \leq \binom{r}{n}.$$

Weiter besitzt G nach [Laz65]V.2.2.7.1 eine offen Untergruppe U mit kohomologischer Dimension

$$cd(U) = r.$$

Mit Serres Aussage 5.1.1 muss dann auch für G

$$cd(G) = r$$

gelten. Nach Theorem [Laz65]V.2.5.8 ist G folglich eine Poincaré Dualitäts Gruppe. □

Es ist wichtig zu bemerken, dass nicht jede analytische pro-p-Gruppe eine p-bewertete Gruppe ist. Als Beispiel hierfür dient schon allein $GL_n(\mathbb{Q}_p)$. Bei der nun folgenden Vielzahl von unterschiedlichen Charakterisierungen der verschiedenen Klassen von p-adischen Lieruppen, ist es wichtig, folgende Hauptkategorien einzuführen. Dabei bietet es sich an, die Beschreibungen von Lazard anzugeben.

Theorem 5.1.3. *(kompakte p-adische Liegruppe) Eine topologische Gruppe ist genau dann eine kompakte p-adische Liegruppe, wenn sie eine offene normale p-bewertete Untergruppe von endlichem Rang besitzt.*

Beweis: [Laz65]V.2.4.3 □

Etwas spezieller gilt dann folgenden Proposition.

Proposition 5.1.4. *(analytische pro-p-Gruppe) Eine topologische Gruppe ist genau dann eine analytische pro-p Gruppe, wenn sie eine offene normale p-bewertete Untergruppe mit Rang p^n für eine $n \in \mathbb{N}$ besitzt.*

Beweis: [Laz65]III.3.2.3 □

Abschließend ergibt sich folgende nützliche Liste von Eigenschaften

Proposition 5.1.5. *(Eigenschaften p-bewerteter Liegruppen)*

1. *Das direkte Produkt $G \times H$ von p-bewerteten Liegruppen ist eine p-bewertete Liegruppe und es gilt:*
$$\dim(G \times H) = \dim G + \dim H;$$
2. *Alle abgeschlossenen Untergruppen einer p-werteten Liegruppe sind p-bewertet;*
3. *Alle aufsteigenden Ketten von abgeschlossenen Untergruppen einer p-bewerteten Gruppe werden stationär;*
4. *Angenommen H ist eine von der p-bewerteten Liegruppe G unterschiedliche Untergruppe und G/H ist torsionsfrei, dann ist G/H eine p-bewertete Liegruppe.*

Beweis: Diese Eigenschaften werden in [Laz65]III 3.1.7 bewiesen. □

Gesetzt dem Fall, dass es sich um eine p-bewertete Gruppe G handelt, ist es möglich sehr genaue Aussagen über ihre Iwasawa Algebra $\Lambda(G)$ zu machen. Diese Aussagen betreffen sowohl die ringtheoretische Struktur von $\Lambda(G)$, als auch die Struktur von $\operatorname{gr}\Lambda(G)$.

Proposition 5.1.6. *(Eigenschaften der Iwasawa-Algebra $\Lambda(G)$) Sei $\mathcal{O}$ der Ganzheitsring einer endlichen Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}_p$. Sei (G, ω) eine p-bewertete Gruppe mit Basis $(g_1, ..., g_d)$ und sei $\Lambda(G)$ die Iwasawa-Algebra von G aus Definition 4.1.1. Dann gilt*

1. *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von topologische $\mathcal{O}$-Algebren*
$$\Lambda(G) \cong \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[G]],$$
der auf $\Lambda(G)$ die Tensorproduktfiltrierung induziert;
2. *Es gibt einen Isomorphismus von graduierten $gr\mathcal{O}$-Algebren*
$$gr\Lambda(G) \cong \mathcal{U}(gr\mathcal{O} \otimes_{gr\mathbb{Z}_p} grG),$$
wobei $\mathcal{U}(gr\mathcal{O} \otimes_{gr\mathbb{Z}_p} grG)$ die universell einhüllende Algebra ist;
3. *Man findet eine p-Bewertung ω' auf G derart, dass $gr_{\omega'}\Lambda(G) \cong gr\mathcal{O}[X_1, .., X_d]$ gilt.*

Beweis: Die Punkte (1)-(3) werden in [Ven03] Proposition 2.3 bewiesen. □

5.2 p-saturierte Gruppen und PF-Gruppen

Im Verlauf der nächsten Kapitel werden gruppentheoretische Aussagen über p-bewertete Gruppen gemacht. Infolge dessen muss man einige Definitionen aus [DDSMS03] wiederholen.

Definition 5.2.1. (Gruppentheoretische Notationen)

1. ([DDSMS03].0.2) Sei G ein Gruppe. Man setzt die *Untere Zentralreihe* als $\gamma_1(G) := G$ und $\gamma_{i+1}(G) := [\gamma_i(G), G]$ für alle $i \geq 1$;

2. ([DDSMS03].0.5) Sei G eine endliche p-Gruppe, dann bezeichnet man mit

$$\Phi(G) := [G, G]G^p$$

die *Frattini-Untergruppe* von G;

3. ([DDSMS03] Definition 1.15) Sei G ein pro-p-Gruppe, dann bezeichnet man mit $P_1(G) := G$ und für alle $i \geq 1$ $P_{i+1}(G) := P_i(G)^p[P_i(G), G]$ als die *Untere-p-Reihe* der Gruppe G.

Definition 5.2.2. (p-saturierte Gruppe)
Eine p-bewertete endlich erzeugte Gruppe G heißt p-saturiert, falls sie vollständig ist und für jedes $x \in G$ mit $\omega(x) > \frac{p}{p-1}$ ein $y \in$ G mit $y^p = x$ existiert.

Durch die Klasse der p-saturierten Gruppen lässt sich die Aussage aus Proposition 5.1.4 hinsichtlich der offenen Untergruppe einer kompakten p-adische Liegruppe präzisieren.

Proposition 5.2.1. *(p-saturierte Untergruppe)*
Sei G eine kompakte p-adische Liegruppe, dann existiert eine kompakte offene Untergruppe $G' \subseteq G$ und eine ganzzahlige p-Bewertung auf G', welche die Topologie auf G' derart definiert, dass

1. *(G', ω) ist p-saturiert;*

2. *$rnk(G') = dimG$.*

Beweis: der Beweis dieser Aussage findet sich in [Sch09], Theorem 9.1. □

Sei nun M ein filtriert-freier $\mathbb{Z}_p$-Modul mit G-Wirkung. Wie in Kapitel 4.2 gezeigt wurde, lässt sich die Modul-Struktur leicht auf $\Lambda(G)$ erweitern, gesetzt dem Fall, dass G eine pro-p-Gruppe ist. Im weiteren Verlauf ist es wichtig, die Frage zu klären, wann man die Modulstruktur von M von einer $\Lambda(G)$-Struktur auf eine Sat $\Lambda(G)$-Struktur erweitern kann. Diese Frage wird in [Tot99] Korollar 9.3 beantwortet und an dieser Stelle wiedergegeben:

Sei dazu (G, ω) eine p-bewertete Gruppe und M ein bewerteter $\mathbb{Z}_p$-Modul oder bewerteter $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum. Die Bewertungen von (G, ω) und (M, w_M) heißen *verträglich*, falls für die Gruppenwirkung die Bedingung

$$\omega((g-1).x) \geq \omega(g) + w_M(x) \qquad \textbf{(Komp)}$$

für alle $g \in G$ und $x \in M$ erfüllt ist.
Falls der Modul M die Bedingung **Komp** erfüllt, so ist M als $\mathbb{Z}_p[G]$-Modul vollständig (vgl. [Tot99] Theorem 9.1), also ein Modul über $\Lambda(G)$. Weiter ist die Einbettung $\Lambda(G) \to \operatorname{Div} \Lambda(G)$ eine Isometrie, also wirkt die divisible Hülle der Iwasawa-Algebra $\operatorname{Div} \Lambda(G)$ auf die divisible Hülle $\operatorname{Div} M$ und erfüllt dabei wieder die Bedingung

Komp. Folglich lässt sich die Operation auf die Saturierung Sat $\Lambda(G)$ des saturierten Moduls Sat(M) erweitern.
Für diesen Zusammenhang bietet es sich an, die Kategorie der *erweiterbaren* $\Lambda(G)$-Moduln einzuführen:

$$\mathbf{mod}_{\Lambda(G)}^{Sat} := \left\{ \begin{matrix} \text{endlich erzeugte freie } \mathbb{Z}_p\text{-Moduln} \\ \text{mit stetiger } G\text{-Wirkung, die } \mathbf{Komp} \text{ erfüllen} \end{matrix} \right\}.$$

Proposition 5.2.2. *(Erweiterung der Modulstruktur, [Tot99] Korollar 9.3) Sei G eine kompakte p-adische Liegruppe, welche stetig auf die endlich erzeugten freien $\mathbb{Z}_p$-Moduln M operiert. Das Bild von G in $Aut(M)$ ist genügend klein, dass heißt es gilt*

1. *das Bild ist eine pro-p-Gruppe und $p > rnk(M) + 1$, oder*

2. *G operiert trivial auf M/p für p ungerade.*

Dann gilt: Der endlich erzeugte freie $\mathbb{Z}_p$-Modul M gehört zur Kategorie der erweiterbaren Moduln $\mathbf{mod}_{\Lambda(G)}^{Sat}$, falls er volltreu ist und die Bedingung (1) oder (2) erfüllt.

Beweis: Sei also M ein endlich erzeugter volltreuer freier $\mathbb{Z}_p$-Modul. Angenommen N erfüllt die Bedingung (2), dann folgt die Aussage aus Lemma [Laz65]V 2.3.4.
Angenommen N erfüllt die Bedingung (1), dann folgt die Aussage aus Lemma [Laz65] V.2.4.4. □

Um einen gruppentheoretischen Zugang zu den p-saturierten Gruppen zu erhalten, bietet sich folgende Definition an:

Definition 5.2.3. (PF-Filtrierung, [GS07],2.) Sei G eine pro-p-Gruppe. Man nennt eine Familie $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Untergruppen von G eine *starke Filtrierung* von G, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $N_i \leq N_j$ für alle $i \geq j$;

2. $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i = 1$;

3. $[N_i, G] \leq N_{i+1}$ für alle i;

4. $[N_i, p-1G] \leq N_{i+1}^p$ für alle i, wobei $p-1G$ der p-1-iterierte Kommutator ist.

Falls es eine starke Filtrierung in G gibt, die mit einer Untergruppe N beginnt, so nennt man N *PF-eingebettet* in G. Falls G PF-eingebettet in G ist, dann ist G eine *PF-Gruppe*.

Die starken Filtrierungen haben folgende herausragende Eigenschaften:

Proposition 5.2.3. *(Eigenschaften der starken Filtrierung, [GSK09],2.) Sei G eine pro-p Gruppe und seien N, M PF-eingebettete Untergruppen von G. Dann gilt:*

1. *$NM, N^p, [N, kG]$ sind PF-eingebett in G,*

2. *$[N^p, G] = [N, G]^p$,*

3. *$N^p = \{x^p | x \in N\}$,*
4. *Falls G torsionsfrei ist und $x \in G$ mit $x^p \in N^p$, dann ist $x \in N$. Falls darüber hinaus $x, y \in N$ mit $x^p = y^p$ dann gilt $x = y$.*

Dadurch, dass man starke Filtrierungen auf pro-p-Gruppen einführt, erhält man eine besonders zugängliche gruppentheoretische Beschreibung der p-saturierten Gruppen.

Proposition 5.2.4. *([GS07],Theorem 3.4) Sei G eine torsionsfreie endlich erzeugte pro-p Gruppe, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *G ist eine p-saturierte Gruppe;*
2. *G ist eine PF-Gruppe;*
3. *$G/\Phi(G)^p$ ist eine PF-Gruppe, wobei $\Phi(G)$ die Frattini Untergruppe von G ist.*

Insbesondere, falls die Bedingung $\gamma_p(G) \leq \phi(G)^p$ erfüllt ist, ist G p-saturiert.

Nach der Bemerkung in [GSK09] Theorem 2.2 erhält die starke Filtrierung bei einer bestimmten Klasse von pro-p-Gruppen eine gut bekannte Form.

Proposition 5.2.5. *(Untere-p-Reihe) Sei G eine torsionsfreie endlich erzeugte pro-p-Gruppe mit $\gamma_p(G) \subseteq \Phi(G)^p$, dann ist die Untere-p-Reihe eine starke Filtrierung.*

Beweis: Setze $N_1 := G$ und $N_i := [N_{i-1}, G]N_{i-1}^p$ für $i \geq 2$. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.
Sei also $i = 1$, dann gilt:

$$[N_1, p-1G] = \gamma_p(G) \leq \phi(N_1)^p = N_2^p.$$

Sei $i \geq 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
[N_i, p-1G] &= [[N_{i-1}, p-1G]N_{i-1}^p, p-1G] \\
&\leq [N_{i-1}, p-1G][N_{i-1}^p, p-1G] \\
&\leq [N_i^p, G][N_{i-1}, p-1G] \\
&\leq [N_i, G]^p (N_i^p)^p \\
&\leq N_{i+1}^p,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus Proposition 5.2.3(4) folgt. □

Eine ganze Fülle an Beispielen findet sich bei den analytischen pro-p-Gruppen von kleiner Dimension. Genauer ergibt sich folgender Zusammenhang:

Proposition 5.2.6. *(Saturierung) Jede torsionsfreie analytische pro-p Gruppe, deren Dimension echt kleiner als p ist, ist p-saturiert.*
Andererseits existiert eine torsionsfreie, analytische pro-p Gruppe, deren Dimension gleich p ist, die nicht p-saturiert ist.

Beweis: bewiesen in [GSK09] Theorem A. □

Es ist klar, dass gerade die torsionsfreien analytischen pro-p-Gruppen mit Dimension echt kleiner p eine starke Filtrierung in der unteren-p-Reihe finden.

5.3 Gleich-p-bewertete Gruppen und uniforme mächtige pro-p Gruppen

Wie man nach dieser kurzen Einführung über die p-saturierten Gruppen gesehen hat, ist deren Gruppenstruktur etwas komplizierter. Lazard führt im weiteren Verlauf seiner Arbeit die gleich-p-bewerteten Gruppen ein, die im Gegensatz zu den p-saturierten Gruppen eine *uniform mächtige* Gruppenstruktur besitzen. Darüber hinaus erhält man für diese Klasse von Gruppen sehr gute Ergebnisse bezüglich der mod-p-Kohomologie, was in letzter Konsequenz impliziert, dass sie *Poincare-Dulität-Gruppen* sind.
Die Aussage aus Proposition 5.1.3 lässt sich folglich noch einmal präzisieren:
Eine topologische Gruppe ist genau dann eine kompakte p-adische Liegruppe, wenn sie eine offene normale Poincaré Dualitäts Untergruppe von endlichem Rang besitzt.
Nach diesem Vorspiel geht es nun darum, das Behauptete zu beweisen. Dazu betrachtet man zuerst folgende Gruppenobjekte.

Definition 5.3.1. ([Laz65]V.2.2.7, gleich-p-bewertete Gruppe)
Eine p-saturierte und endlich erzeugte Gruppe (G, ω) heißt *gleich-p-bewertet*, falls für ihre geordnete Basis $\{g_1, ..., g_d\}$

$$\omega(g_i) = \omega(g_j) \qquad \text{(für alle } 1 \leq i \neq j \leq d)$$

gilt.

Nach [L]V 2.2.6 besitzen diese Gruppen eine interessante mod-p-Kohomologie, die nun nach einer Skizze in [SW00] *Proof of Theorem 5.1.5* ausgeführt wird.

Theorem 5.3.1. *Sei G eine gleich-p-bewertete Gruppe mit Basis $\{x_1, ..., x_d\}$, dann gilt:*

1. *Der mod-p-Kohomologiering*

$$H^*(G, \mathbb{F}_p) = \Lambda^*(H^1(G, \mathbb{F}_p))$$

ist eine äussere Algebra;

2. *G ist eine Poincaré Dualitäts Gruppe der Dimension d.*

Beweis: zu (1): Sei G eine gleich-p-bewertete Gruppe mit Bewertung ω. Explizit bedeutet dies, dass für alle $\omega(x_j) = t$ für $1 \leq j \leq d$ und ein $t \in \mathbb{R}$. Folglich wird die Graduierung $\mathrm{gr}_\omega(G)$ nur von Elementen vom Grad t erzeugt Man kann nach [Laz65]III.3.1.11 zu einer p-Bewertung ω' übergehen, die die topologische Struktur der Gruppe G nicht verändert, aber der assozierten Graduierung $\mathrm{gr}_{\omega'}(G)$ eine besonders einfache Form verleiht.
Genauer gilt dann, dass $\mathrm{gr}_{\omega'} G$ ein abelsche $\mathbb{F}_p[\pi]$-Lie-Algebra frei vom Rang d ist.(Man vergleiche [CSS03] Proposition 6.2) Der Einfachheit halber wird im Folgenden die Indizierung durch ω' bei der assozierten Graduierung $\mathrm{gr}_{\omega'}(G)$ weggelassen.
Für die Universell Einhüllende Algbra erhält man folglich die Isomorphie:

$$\mathcal{U}\,\mathrm{gr}\, G \cong \mathbb{F}_p[X_0, ..., X_d].$$

Man betrachte die E_0-Terme $E_0^{i,q}$ der kohomologischen Spektralsequenz aus Proposition 4.4.3. Aus Übersichtsgründen wird $\mathbb{F}_p[\underline{X}] := \mathbb{F}_p[X_0, ..., X_d]$ gesetzt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_i X_{q+1}, \mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[d, "d_0^{i,q+1}"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_i X_q, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "d_0^{i,q}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_i X_1, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "d_0^{i,1}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_p[\underline{X}], \mathbb{F}_p) \arrow[d, "\cong"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_{i+1} X_{q+1}, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "d_0^{i+1,q+1}"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_{i+1} X_q, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "d_0^{i+1,q}"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_{i+1} X_1, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "d_0^{i+1,1}"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_p[\underline{X}], \mathbb{F}_p) \\
& \vdots & \vdots & . & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Die Zeilen von $E_0^{i,q}$ entstehen aus der graduiert-freien $\mathcal{U}\,\mathrm{gr}\,G$ Chevalley-Eilenberg-Komplex. Da die Isomorphie $\mathcal{U}\,\mathrm{gr}\,G \cong \mathbb{F}_p[\underline{X}]$ gilt, ist dies nichts anderes als der Koszul Komplex des regulären lokalen Ring $\mathbb{F}_p[\underline{X}]$. Explizit ergeben sich folglich die E_1-Terme als Kohomologie des Koszul-Komplexes

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^{i,q+1}\mathbb{F}_p[\underline{X}], \mathbb{F}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^{i,q}\mathbb{F}_p[\underline{X}], \mathbb{F}_p) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^{i,1}\mathbb{F}_p[\underline{X}], \mathbb{F}_p) \xrightarrow{d_0^{i,1}} \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_p[\underline{X}], \mathbb{F}_p)$$

durch

$$E_1^{p,q} = \mathrm{Ext}^{p,q}_{\mathbb{F}_p[\underline{X}]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \cong \Lambda^{p,q}[y_0, ..., y_d].$$

Dies liegt vor allem darin begründet dass $im(d_0^{*,q}) = 0$ ist. Aus der Eigenschaft der Gruppe G, dass $\mathrm{gr}_t\, G = \mathrm{gr}\, G$, folgt, dass für alle i und $q > \frac{1}{p-1}$ die Terme $E_0^{i,*} \cong E_0^{i+1,*}$ isomorph sind.
Es soll nun gezeigt werden, dass die Spektralsequenz degeneriert, was man insofern lesen kann, als dass $E_2^{i,q} = 0$ ist.
Die Differential für die E_1-Terme ergeben sich wie folgt:

$$\Lambda^{i,q+1}[y_0, ...y_d] = E_1^{i,q+1} \to E_1^{p-1,q} \cong E_1^{i,q} = \Lambda^{i,q+1}[y_0, ...y_d]$$

$$y_0 \wedge ... \wedge y_d \mapsto d_1^{p,q} := \sum_i (-1)^i y_0 \wedge ...y_{i-1} \wedge y_{i+q} \wedge ... \wedge y_d.$$

Folglich ist $E_1^{i,q}$ exakt, was impliziert, dass $E_2^{p,q} = 0$ ist. Nach [NSW08] Proposition 2.1.3, gilt dann

$$E_1^{i,q} = E_\infty,$$

was nach der Konvergenz der Spektralsequenz gleichbedeutend zu

$$\Lambda^{i,q}[y_0, ..., y_d] = \mathrm{H}^{i+q}(G, \mathbb{F}_p)$$

ist. Weiter gilt nach einer Aussage von Serre, dass die Dimension von $H^1(G, \mathbb{F}_p)$ gleich der minimale Anzahl der Erzeuger ist. Insgesamt folgt also

$$H^*(G, \mathbb{F}_p) = \Lambda^* H^1(G, \mathbb{F}_p).$$

Die Aussage (2) folgt nun direkt aus (1) nach Definition 5.1.1 der Poincaré Dualitäts Gruppe. $\square$

An dieser Stelle bietet sich ein kurzer Einschub über die uniformen mächtigen pro-p Gruppen an. Die Definitionen finden sich alle in [DDSMS03] wieder. Das Hauptresultat betrifft die mod-p-Kohomologie einer uniformen mächtigen pro-p-Gruppe. Der Beweis dieser Aussage findet sich in [SW00] Theorem 5.1.5 wieder.

Definition 5.3.2. (uniforme mächtige pro-p-Gruppe,[DDSMS03], Definition 4.1) Eine pro-p-Gruppe G ist eine uniforme mächtige pro-p-Gruppe, falls

1. G endlich erzeugt ist;
2. Für $p \neq 2$(bzw. $p = 2$) ist G/G^p (bzw. G/G^4) abelsch;
3. Für alle i gilt $|P_i(G) : P_{i+1}(G)| = |G : P_2(G)|$ mit $P_{i+1}(G) = P_i(G)^p[P_i(G), G]$ und $P_1(G) = G$, dass heißt
$$P : P_i(G)/P_{i+1}(G) \cong P_{i+1}(G)/P_{i+2}(G).$$

Nebenbei bemerkt, wird an dieser Stelle nicht ganz klar, inwiefern eine uniforme mächtige pro-p-Gruppe uniform ist. Auch die Autoren von [DDSMS03] bieten hierfür keine Definition, sondern nur folgende Charakterisierung an:

Proposition 5.3.2. *(Uniformität, [DDSMS03], Theorem 4.5) Eine endlich erzeugte mächtige pro-p Gruppe ist genau dann uniform, wenn sie torsionsfrei ist.*

Proposition 5.3.3. *(mod-p Kohomologie)*
Eine endlich erzeugt pro-p-Gruppe mit $p \neq 2$ ist genau dann uniform pro-p, wenn gilt
$$H^*(G, \mathbb{F}_p) = \Lambda^*_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{F}_p)).$$

Beweis: vergleiche hierzu den Beweis von [SW00] Korollar 5.1.7. □

Korollar 5.3.4. *Eine p-bewertete Gruppe ist genau dann eine gleich-p-bewertete Gruppe, wenn sie eine uniforme mächtige pro-p-Gruppe ist.*

Beweis: Dieses Korollar folgt aus eben dargestellter Proposition in Verbindung mit Proposition 5.3.1. □

Abschließend wird noch einmal explizit auf den Unterschied zwischen einer uniformen mächtigen pro-p-Gruppe und einer p-saturierten Gruppe eingegangen.

Proposition 5.3.5. *(uniform mächtig pro-p ist p-saturiert, [Klo05], Bemerkung 2.1) Jede uniforme mächtige pro-p-Gruppe ist eine p-saturierte Gruppe.*

Beweis: Sei G uniform pro-p. Man setzt $\epsilon := 0$, falls $p > 2$ und $\epsilon := 1$, falls $p = 2$ und setzt
$$G_n := G^{p^{n-1}}$$
als eine Filtrierung durch offene normale Untergruppen mit $\cap G_n = \{e\}$ Weiter gilt nach [Klo05] Lemma A.1, dass $[G_m, G_n] \subseteq G_{m+n+\epsilon}(*)$ und das man durch die p-Potenz Abbildung einen Isomorphismus
$$G_{m+1}/G_m \longrightarrow G_{m+2}/G_{m+1} \qquad (**)$$
erhält.
Setzt man nun als Bewertung
$$\omega : G \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \mapsto \epsilon + sup\{n \in \mathbb{N} : x \in G_n\},$$
wird ω durch (*) zur p-Bewertung und insgesamt zu einer p-saturierten Gruppe, da alle $g \in G$ mit $\omega(g) > p/(p-1)$ durch den Isomorphismus (**) p-Potenzen sind. □

Weiter illustriert Klopsch in [Klo05] noch einmal deutlich den Unterschied zwischen uniformen mächtigen pro-p-Gruppe und p-saturierten Gruppe anhand der pro-p Sylow Untergruppen von $GL_n(\mathcal{O}_K)$.

Beispiel: (Sylow Untergruppen von $GL_n(\mathcal{O}_K)$)
Sei $K/\mathbb{Q}_p$ eine total verzweigte algebraische Körpererweiterung von Verzweigungsgrad e. Sei $\mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring dieser Körpererweiterung mit Restklassenkörper $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$. Weiter ist $M_n(\mathcal{O}_K)$ der Ring der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$ und $GL_n(\mathcal{O}_K)$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $M_n(\mathcal{O}_K)$.
Für eine Matrix $X \in GL_n(\mathcal{O}_K)$ setzt man als Bewertung

$$w(X) = min_{1 \leq i,j \leq n} v(x_{i,j}),$$

wobei v die p-adische Bewertung ist. Durch das Beispiel aus [Sch09],5.2 weiß man, dass w eine p-Bewertung auf $GL_n(\mathcal{O}_K)$ induziert. Man betrachte den Epimorphismus

$$r : GL_n(\mathcal{O}_K) \longrightarrow GL_n(\kappa)$$

Nach [Klo05] ist die Gruppe der unipotenten triangulären Matrizen $U_n(\mathcal{O}_K)$ eine Sylowuntergruppe von $GL_n(\kappa)$. Das Urbild $r^{-1}(U_n)$ ist dann ein p-Sylowuntergruppe von $GL_n(\mathcal{O}_K)$.
Nach [Klo05],Proposition .2.3 ist diese Gruppe genau dann p-saturiert, falls $ne < p - 1$ gilt.
Betrachtet man nun den Fall $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ etwas genauer. Eine 3-Sylow-Untergruppe ist

$$G := \{ \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix} | c \in \mathbb{Z}_3, a, b, d \in 3\mathbb{Z}_3 \},$$

Damit G uniform mächtig pro-p wäre, müsste der Kommutator $[g, h]$ von zwei Elementen $g, h \in G$ eine p-Potenz sein. Dies ist aber nicht erfüllt, da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.4 Analytifzierung von Gruppenschemata

Für den Rest dieses Unterkapitels ist $\mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring einer endlichen algebraischen Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}_p$. Es soll nun die Frage gelöst werden, inwiefern man einem glatten separablen Gruppenschema über Spec($\mathcal{O}_K$) eine uniforme mächtige pro-p-Gruppe zugeordnen kann. Hierzu betrachtet man folgenden Situation:
Man setze $S :=$ Spec($\mathcal{O}_K$) und $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathfrak{M}_K$ als den Restklassenkörper des Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Sei nun $\mathbb{G}$ ein glattes separables S-Gruppenschema lokal von endlichem Typ. Sei $\mathbb{G}_\kappa$ die spezielle Faser dieses Gruppenschemas und man setze den Morphismus von Gruppenschemata

$$r_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}_\kappa,$$

der jedem abgeschlossenen Punkt $x \in \mathbb{G}$ das Bild $r_{\mathbb{G}}(x) := \{\bar{x}\} \cap \mathbb{G}_\kappa$ zuordnet als die Reduktionsabbildung von $\mathbb{G}$. Nun setzt man weiter

$$\mathbb{G}(\mathfrak{M}_K) := r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e})(K)$$

als die K-wertigen Punkte des Kernels der Reduktionsabbildung $r_{\mathbb{G}}$ bezüglich dem neutralen Element $\widetilde{e} \in \mathbb{G}_\kappa$ der speziellen Faser des Gruppenschemas $\mathbb{G}$.
Es geht nun darum, zu zeigen, dass die Menge der K-wertigen Punkte $\mathbb{G}(\mathfrak{M}_K)$ die Struktur einer uniformen mächtigen pro-p-Gruppe besitzt.

Proposition 5.4.1. *(Gruppenschema und p-saturierte Gruppe) Sei $\mathbb{G}$ ein glattes separables S-Gruppenschema lokal von endlichem Typ, dann sind die $\mathbb{Q}_p$-wertigen Punkte der Weil-Restriktion $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_p}(r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e}))$ eine uniforme mächtige pro-p-Gruppe.*

Beweis: Sei also $\mathbb{G}$ ein glattes separable S-Gruppenschema lokal von endlichem Typ.
Der Beweis der Aussage gliedert sich grob in drei Schritte.
1. Als erstes wird gezeigt, dass die Mengen

$$\mathbb{G}(\mathfrak{M}_K) \cong Morph_S(S, \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{G},\widetilde{e}})) \cong Morph_S(S, \mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{G},\widetilde{e}}}))$$

bijektiv sind.
Hat man die erste Bijektion gezeigt, so folgt die zweite Bijektion sofort aus der universellen Eigenschaft der Vervollständigung (vgl. Proposition 1.2.1). Der Beweis der ersten Bijektion wird genauestens in [Liu06] Proposition 10.1.40(a) ausgeführt.
2. Angenommen G ist glatt von relativer Dimension q bei $\widetilde{e}$, so gilt die Bijektion

$$\mathbb{G}(\mathfrak{M}_K) \cong \mathfrak{M}_K^q,$$

wobei $\mathfrak{M}_K^q$ das q-fache Produkt des maximalen Ideals des Ganzheitsringes $\mathcal{O}_K$ ist.
Um dies zu zeigen, geht man wie folgt vor:
Aufgrund der Glattheit von $\mathbb{G}$ bei $\widetilde{e}$ ist die Vervollständigung $\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{G},\widetilde{e}}}$ bezüglich des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathbb{G},\widetilde{e}}$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $q + 1$. Man findet folglich einen Homomorphismus von $\mathcal{O}_K$-Algebren

$$\phi : \mathcal{O}_K[[T_1, ..., T_q]] \to \widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{G},\widetilde{e}}}$$

Man setzt weiter das formale $\mathcal{O}_K$-Schema $\widehat{\mathbb{G}} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[[T_1, ..., T_q]])$ und nutzt die Tatsache von Punkt (1) aus, dass sich die Mengen

$$\mathbb{G}(\mathfrak{M}_K) \cong Morph_S(S, \mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{G},\widetilde{e}}})) \cong Morph_S(S, \widehat{\mathbb{G}})$$

identifizieren lassen. Erinnert man sich an die Kategorienäquivalenz von formalen S-Schemata und topologischen $\mathcal{O}_K$-Algebren zurück, so lässt sich die Bijektion als

$$Morph_S(S, \widehat{\mathbb{G}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K[[T_1, ..., T_q]]), \mathcal{O}_K)$$

lesen.
Im nächsten Schritt betrachtet man die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K[[T_1, ..., T_q]], \mathcal{O}_K) \to \mathfrak{M}^q, \phi \mapsto (\phi(T_1), ..., \phi(T_q))$$

der nach [Liu06] Lemma 10.1.41 bijektiv ist. Somit folgt in letzter Konsequenz, dass die Bijektion

$$\mathbb{G}(\mathfrak{M}_K) \cong \mathfrak{M}_K^q$$

gelten muss.
3. Die Weil-Restriktion $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_p}(r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e}))$ ist eine uniforme mächtige pro-p-Gruppe. Nach Theorem 3.4.1(1) und Punkt (3),(b) lässt sich $\mathbb{G}(\mathfrak{M}_K)$ mit der Struktur einer K-Liegruppe versehen. Wie ist es nun um deren weitere Struktur bestellt?
Dazu betrachtet man die Weil-Restriktion

$$\mathbb{G}' := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_p}(r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e}))$$

aus 3.3.1 des abgeschlossenen S-Unterschemas $r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e})$ des S-Gruppenschemas $\mathbb{G}$. Diese Weil-Restriktion existiert als Spec($\mathbb{Z}_p$)-Gruppenschema, da $\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_p$ endlich ist. Dies liegt letztlich darin begründet, dass die Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}_p$ als endlich vorausgesetzt wurde. Darüber hinaus übertragen sich die Eigenschaften Glattheit, Separabilität und die lokale Endlichkeit nach Proposition 3.3.1 auf die Weil-Restriktion $\mathbb{G}'$. Es ist also möglich, auch den $\mathbb{Q}_p$-wertigen Punkten von $\mathbb{G}'$ die Struktur ein p-adischen Liegruppe zu geben.
Aus der Konstruktion der Weil-Restriktion 3.3 ist ersichtlich, dass eine Bijektion (*)

$$\mathrm{Morph}_{Spec(\mathbb{Z}_p)}(Spec(\mathbb{Z}_p), \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_p}(r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e})) \longrightarrow \mathrm{Morph}_S(Spec(\mathcal{O}_K), r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e}))$$

besteht. Wie nun in in Punkt 1 und 2 des Beweises gezeigt wurde, gilt sowohl

$$\mathrm{Morph}_S(Spec(\mathcal{O}_K), r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e})) \cong \mathbb{G}(\mathfrak{M}_K) \cong \mathfrak{M}_K^q,$$

als auch

$$\mathrm{Morph}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)}(Spec(\mathbb{Z}_p), \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_p}(r_{\mathbb{G}}^{-1}(\widetilde{e})) \cong \mathbb{G}'(p\mathbb{Z}_p) \cong (p\mathbb{Z}_p)^q,$$

als Bijektionen von Mengen. Weiter wurde gezeigt dass diese Mengen die Struktur ein K-Liegruppe, beziehungsweise die Struktur einer p-adischen Liegruppe erhalten. Betrachtet man nun $\mathbb{G}'(p\mathbb{Z}_p)$ allein, so sieht man mit dem fundamentalen Beispiel aus [DDSMS03] Beispiel 8.23(i), dass diese p-adische Liegruppe eine Standardgruppe der Dimension q über $\mathbb{Q}_p$ ist. Als solche findet man durch die p-Potenzgruppen $(p^i\mathbb{Z}_p)^q$ für alle $i \geq 1$ eine geeignete Filtrierung, die nach [DDSMS03] Theorem 8.31 $\mathbb{G}'(p\mathbb{Z}_p)$ zu einer uniformen mächtigen pro-p-Gruppe der Dimension q macht. Nun weiß man, dass $\mathbb{G}'(p\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{G}(\mathfrak{M}_K) \subset \mathbb{G}(K)$ als Untergruppe der K-Liegruppe $\mathbb{G}(K)$ gilt. Somit hat man die gewünschte uniforme mächtige pro-p-Gruppe gefunden. □

Mit dieser Vorarbeit ist es nun möglich folgende interessante Version der Lazardisomorphie zu beschreiben. Dabei wird ausser Acht gelassen, was genau die lokal analytische Gruppenkohomologie $\mathrm{H}^*_{la}(-, K)$ ist. Eine ausschöpfende Diskussion würde den Rahmen dieser Arbeit deutlich sprengen. Nebenbei bemerkt reicht es aus, dass man im Fall, dass $\mathcal{G}$ eine p-bewertete Gruppe ist, die lokal analytische Gruppenkohomolgie mit der schon definierten stetige Gruppenkohomologie identifiziert. Für eine genauere Diskussion dieser Identifikation der Kohomologietheorien sei auf [Laz65]V.2.3 verwiesen.

Theorem 5.4.2. *(Isomorphismus für lokal analytische Gruppenkohomologie) Sei $\mathbb{G}$ ein glattes Gruppenschema über einem Dedekindschema* Spec R *mit zusammenhängender generischer Faser und $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{G}(R)$ einer offenen Untergruppe. Weiter sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von $\mathbb{G}$. Dann ist der Morphismus*

$$\mathrm{H}^*_{la}(\mathcal{G}, K) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, K)$$

aus [HKN06] Definition 4.2.1 ein Isomorphismus.

Beweis: Dieses Theorem wird in [HKN06] 4.3.1 bewiesen. $\square$

Falls $\mathcal{G}$ eine p-saturierte Gruppe ist und man $K = \mathbb{Q}_p$ setzt, so erhält man gerade Lazards rationalen Vergleichsisomorphismus.

Kapitel 6

Die Lazard-Lie-Algebra

6.1 Algebraische Konstruktion der Lie-Algebra

Definition 6.1.1. (bewertete Hopf-Algebra) Eine R-Hopfalgebra (A, Δ, ϵ) über einem bewerteten Ring R heißt *bewertet*, falls sie als R-Modul bewertet ist und die Morphismen Δ und ϵ filtriert sind.

Beispiel: Sei G eine p-bewertete Gruppe und $\mathbb{Z}_p[G]$ ihre Gruppenalgebra. Als Augmentation setzt man $\epsilon(x) = 1$ für alle $x \in G$. Weiter hat man eine Diagonalabbildung auf der Gruppe

$$\Delta : G \to G \times G$$
$$x \mapsto (x, x)$$

für alle $x \in G$, die sich unter der Identifikation von $\mathbb{Z}_p[G \times G] \cong \mathbb{Z}_p[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[G]$ zu einer Abbildung $\Delta_{\mathbb{Z}_p[G]} : \mathbb{Z}_p[G] \to \mathbb{Z}_p[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[G]$ auf der Gruppenalgebra erweitert. Folglich erhält man mit dem Tripel $(\mathbb{Z}_p[G], \epsilon, \Delta)$ eine $\mathbb{Z}_p$-Hopfalgebra. Betrachtet man nun $\mathbb{Z}_p[G]$ mit von G induzierter Filtrierung (vgl. [].III.2.3.3), dann ist der zugrundeliegende $\mathbb{Z}_p$-Modul bewertet. Interpretiert man dann $\mathbb{Z}_p[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[G]$ als bewertetes Tensorprodukt und ϵ und $\Delta_{\mathbb{Z}_p[G]}$ als filtrierte Morphismen, so ist $\mathbb{Z}_p[G]$ sicher eine bewertete $\mathbb{Z}_p$-Hopfalgebra. Betrachtet man weiter, das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_p[G] \arrow[r, "\Delta_{\mathbb{Z}_p[G]}"] \arrow[d] & \mathbb{Z}_p[G] \otimes \mathbb{Z}_p[G] \arrow[d] \\
\mathrm{Div}(\mathbb{Z}_p[G]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}(\mathbb{Z}_p[G] \otimes \mathbb{Z}_p[G]) \arrow[d] \\
\mathrm{Div}(\widehat{\mathbb{Z}_p[G]}) \arrow[r] & \mathrm{Div}(\widehat{\mathbb{Z}_p[G] \otimes \mathbb{Z}_p[G]})
\end{tikzcd}$$

Bleibt zu bemerken, dass die beiden vertikalen Abbildungen der ersten Zeile die kanonischen Isometrien der divisiblen Hülle sind. Hingegen sind die beiden vertikalen Abbildungen der zweiten Zeile die kanonischen Isometrien der Vervollständigung. Man sieht also, dass sich die Abbildung $\Delta_{\mathbb{Z}_p[G]}$ auf die divisible Hülle und die Saturierung nach deren universellen Eigenschaften erweitert. Insgesamt gilt, dass auch $\mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[G])$ bewertete $\mathbb{Z}_p$-Hopfalgebren sind.

Bevor es nun um die Vorbereitung einer Lie-Korrespondenz bestimmter analytischer pro-p-Gruppen gehen kann, müssen einige Formalia geklärt werden. Sei A eine saturierte R-Hopfalgebra über einem vollständigen diskreten Bewertungsring R. mit Bewertung ω. Man kann zeigen, dass eine Exponentialabbildung

$$exp(x) := \sum_i \frac{1}{n!}x^n \quad c \in A \quad \text{mit } \omega(x) > \frac{1}{p-1}$$

auf A existiert und konvergiert.(vgl. [Sch09]Lemma 13.1) Weiter existiert und konvergiert auf A eine dazu inverse Logarithmusabbildung

$$log(x) := \sum_i \frac{-1^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad x \in A \quad \text{mit } \omega(x-1) > \frac{1}{p-1}.$$

Mithilfe dieser Abbildungen beginnt Lazard zuerst damit, dass er bestimmte Teilmengen in einer bewerteten Hopfalgebra identifziert. Diese erhalten dann folgende natürliche algebraische Strukturen in Abhängikeit von Eigenschaften der zugrundeliegenden bewerteten Hopf-Algebra.

Proposition 6.1.1. *(Die Funktoren $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*$)*
Sei (A, Δ, ϵ) eine bewertete Hopfalgebra. Dann gilt für folgende Teilmengen:

1. *Die Teilmenge $\mathcal{G} := \{x \in A : \epsilon(x) = 1, \Delta(x) = x \otimes x\} \subset A$ multiplikativer Untermonoid von A;*

2. *Die Teilmenge*

$$\mathcal{L} := \{x \in A : \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\} \subset A$$

ist eine Unter-Lie-Algebra von A;

3. *Falls A vollständig ist, dann ist die Teilmenge*

$$\mathcal{G}^* := \{x \in \mathcal{G} : w(x-1) \geq \frac{1}{p-1}\} \subset \mathcal{G}$$

eine Gruppe.

4. *Die Teilmenge $\mathcal{L}^* := \{x \in \mathcal{L} : w(x) \geq \frac{1}{p-1}\} \subset \mathcal{L}A$ ist eine Unter-Lie-Algebra von A. Falls A divisibel ist, dann gilt $\mathcal{L}A \cong \mathcal{L}^*A$;*

5. *Die Zuordnung $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*$ sind kovariante Funktoren.*

Beweis: Sei A ein bewertete Hopf-Algebra.
zu (1): Man vergleiche hierzu [Laz65]IV.1.1.6. Genau an dieser Stelle wird auch gezeigt, dass $\mathcal{G}$ ein kovarianter Funktor ist.
zu (2): Man vergleiche hierzu [Laz65]IV.1.1.7. Aich hier wird an gleicher Stelle bewiesen, dass es sich um einen kovarianten Funktor handelt.
zu (3): Sei A zusätzlich vollständig und seien $x, y \in \mathcal{G}^*(A)$...
zu (4): Die erste Aussage steht in [Laz65]IV.1.3.2.2. Falls A zusätzlich divisibel ist, so folgt sofort aus der Definition die zweite Behauptung.
zu (5): Diese Aussage folgt aus den vorhergehenden Punkten. □

Proposition 6.1.2. *([Laz65] IV 1.3.5)*
Sei A eine saturierte R-Hopfalgebra Dann gilt:

1. *$\mathcal{L}^*A$ und $\mathcal{G}^*A$ werden durch die Zuordnungen*
$$\begin{gathered}\mathcal{L}^*A \longrightarrow \mathcal{G}^*A\\ x \mapsto exp(x)\\ log(y) \leftarrow y\end{gathered}$$
homeomorph;

2. *Die Lie-Algebra $\mathcal{L}A$ ist saturiert. Die Lie-Algebra $\mathcal{L}^*A$ ist die Saturierung von $\mathcal{L}A$;*

3. *$\mathcal{G}^*A$ ist eine p-saturierte Gruppe für die von A induzierte Filtrierung;*

4. *Die assozierten Graduierungen $\operatorname{gr}\mathcal{L}^*A$ und $\operatorname{gr}\mathcal{G}^*A$ sind kanonisch isomorph;*

5. *$\mathcal{L}^*$ und $\mathcal{G}^*$ erzeugen die gleiche saturierte assoziative Unteralgebra von A.*

Für spätere Zwecke wird folgender Satz von äußerster Wichtigkeit sein:

Theorem 6.1.3. *(Isomorphie der Saturierungen, [Laz65].IV.3.2.5) Sei G eine p-saturierte Gruppe, dann erhält man eine Isomorphie zwischen den p-saturierten Gruppen*
$$G \cong \mathcal{G}^* \operatorname{Sat}\mathbb{Z}_p[G]$$
und eine Isomorphie
$$\operatorname{Sat}\mathbb{Z}_p[G] \cong \operatorname{Sat}\mathcal{U}(Log(G))$$
zwischen der Saturierung der Iwasawa-Algebra von G und der Saturierung der universell einhüllenden Algebra der $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra $Log(G)$.

Beweis: Sei G eine p-saturierte Gruppe. Man erhält sicher nach Konstruktion der Iwasawa-Algebra eine Isometrie von G in $\mathbb{Z}_p[[G]]$. Da die Saturierung Isometrien erhält,lässt sich diese Abbildung sicher auf $\operatorname{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$ erweitern.
Man setzt als nächstes die Menge $L := \{\operatorname{Log}(x) : x \in \operatorname{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])\}$ als den Logarithmus der Elemente von $\operatorname{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$. Wie gezeigt wurde, ist $\operatorname{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$ eine saturierte Hopf-Algebra und, wie eben gezeigt wurde, ist G eine p-saturierter Untergruppe der Gruppe $\mathcal{G}^*\operatorname{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$ bezüglich der induzierten Filtrierung. Nach Korollar [Laz65]IV.3.2.4 ist dann die Menge L eine Unter-$\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra von $\mathcal{L}^*\operatorname{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$ deren Elemente im bijektiven Verhältnis mit der Menge
$$L := \{x \in \operatorname{Sat}(L) : w_L(x) \geq 1/(p-1)\}$$
stehen.
Nach dem Theorem über die Saturierung [Laz65]IV.3.1.3 von bewerteten $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebren gilt
$$\mathcal{L}\operatorname{Sat}(\mathcal{U}L) \cong \operatorname{Sat}(L).$$
Da der Funktor $\mathcal{L}^*$ nach 6.1.1 nun gerade die Bewertung von $\operatorname{Sat}(\mathcal{U}L)$ auf Werte größer gleich $1/(p-1)$ einschränkt, lässt sich letztere Isomorphie auch als
$$\mathcal{L}^*\operatorname{Sat}(\mathcal{U}L) \cong L$$

lesen.
Als nächstes betrachtet man folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "1"] & \mathcal{U}L \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "3"] & \mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[G]) \\ & & \mathrm{Sat}\,\mathcal{U}L \arrow[u, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

Die Abbildung (1) ist nach der Konstruktion der Universelle Einhüllenden Algebra eine Isometrie.(vgl. Definition 1.6.1).
Um zu zeigen, dass die Abbildung (2) eine Isometrie ist, muss man etwas weiter ausholen. Hierzu kann man das Theorem [Laz65].IV 1.1.11 heranziehen, da $\mathbb{Q}_p$ Charakteristik 0 besitzt und die universell einhüllenden Algebra $\mathcal{U}L$ torsionsfrei als $\mathbb{Z}_p$-Modul ist, da G torsionsfrei ist. Folglich existiert nach letzterem Theorem ein Morphismus

$$\mathcal{U}L \to \mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]]),$$

der sich in letzter Konsequenz aus der universellen Abbildungseigenschaft der universell einhüllenden Algebra ableitet. Da nun $\mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$ eine bewertete Hopf-Algebra ist (vgl. Beispiel 6.1), ist dieser Morphismus nach [Laz65].IV.1.3.3 injektiv.
Bleibt als letztes die Abbildung (3) zu betrachten, die aber als kanonischer Morphismus der Saturierung eine Isometrie ist. Es bleibt letztlich zu bemerken, dass das Diagramm wegen der universellen Eigenschaft der Saturierung kommutiert.
Als nächstes betrachtet man

$$G' := \mathcal{G}^* \,\mathrm{Sat}\,\mathcal{U}L$$

als die Menge der $exp(x)$ mit $x \in \mathrm{Sat}\,\mathcal{U}L$ und $w_L(x) \geq 1/(p-1)$. Sicher gilt $\mathcal{G}^* \,\mathrm{Sat}(\mathcal{U}L) \subset \mathcal{G}^* \,\mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$, da die zugrundeliegenden Hopfalgebren ineinander eingebettet liegen. Folglich ist die Einschränkung von f auf G' eine Isometrie und G' folglich eine Untergruppe von G.
Im nächsten Schritt betrachet man die nach [Laz65]IV.1.3.3 filtriert exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\mathcal{G}^* \,\mathrm{Sat}\,\mathcal{U}L] \longrightarrow \mathrm{Sat}\,\mathcal{U}L$$

von $\mathbb{Z}_p$-Hopfalgebren. Das bedeutet, dass $\mathbb{Z}_p[G'] = \mathbb{Z}_p[\mathcal{G}^* \,\mathrm{Sat}\,\mathcal{U}L]$ eine $\mathbb{Z}_p$-Unteralgebra von $\mathrm{Sat}(\mathcal{U}L)$ ist, wobei die Filtrierung von $\mathbb{Z}_p[G']$ von der Filtrierung $\mathbb{Z}_p[G]$ induziert wird. Daraus folgt nun aber auch, dass die Einschränkung der Isometrie f auf $\mathbb{Z}_p[G']$ eine Isometrie ist. Nun weiß man aber, dass die Saturierung eindeutig bis auf Isomorphie ist und deswegen

$$\mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[G']) \cong \mathrm{Sat}(\mathcal{U}L)$$

gelten muss. Mit dem gleichen Argument muss dann aber wieder

$$\mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[G']) \cong \mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[G])$$

folgen. Damit gilt insgesamt

$$\mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[G]) \cong \mathrm{Sat}(\mathcal{U}L).$$

$\square$

Wie man im Kapitel über die kompakten p-adische Liegruppen sah, besitzt jede Gruppe dieser Art eine offene normale p-saturierte Untergruppe. Dadurch, dass man diese p-saturierten Untergruppen betrachtet, ergeben sich eine ganze Reihe an tiefen Aussagen. Die erste wichtige Tatsache, die dabei ins Auge fällt, ist die Übereinstimmung des der p-saturierten Gruppe zugrundeliegenden topologischen Raumes mit einer $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra. Diese Aussage folgt im Grunde genommen schon aus vorhergehender Proposition, wird aber an dieser Stelle noch einmal explizit ausgeführt.

Proposition 6.1.4. *(Lie-Korrespondenz)*
Man erhält folgende Äquivalenz von Kategorien:

$$\left\{\begin{matrix} p\text{-saturierte} \\ \text{Gruppen} \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{saturierte} \\ \mathbb{Z}_p\text{-Lie-Algebren} \end{matrix}\right\}$$

Beweis: Man betrachte die saturierte $\mathbb{Z}_p$-Algebra

$$A := \operatorname{Sat} \mathbb{Z}_p[G]$$

einer p-saturierten Gruppe G. Durch die Multiplikation der Gruppe G ist A sicher eine saturierte $\mathbb{Z}_p$-Hopfalgebra.(vgl. Beispiel 6.1) Verwendet man nun die vorhergehende Proposition 6.1.3, dann gilt

$$G \cong \mathcal{G}^* \operatorname{Sat} \mathbb{Z}_p[G]$$

und mit Proposition 6.1.1 sind die Räume

$$\mathcal{G}^* \operatorname{Sat} \mathbb{Z}_p[G] \cong \mathcal{L}^* \operatorname{Sat} \mathbb{Z}_p[G]$$

homeomorph. Es bleibt zu klären, wie die Struktur der Gruppe beziehungsweise der $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra übertragen wird. Hierzu benutzt man die Hausdorff-Reihe und es folgt mit [Sch09] Proposition 14.6 die Behauptung. □

Es stellt sich die Frage, inwiefern diese Lie-Korrespondenz auf die Kategorie der p-bewerteten Gruppen erweiterbar ist. Auf diese Frage liefert die Arbeit [Pin93] von Richard Pink erste Antworten:
Sei hierzu A ein semilokaler Ring, beispielsweise eine flache Algebra über $\mathbb{Z}_p$ und man betrachte die pro-p-Untergruppen Γ von $\mathrm{SL}_2(A)$. Sei $\mathfrak{sl}_2(A)$ die $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra der speziellen linearen Gruppe. Pink beweist folgende Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{\begin{matrix} \text{Untergruppen} \\ \Gamma \subset \mathrm{SL}_2(A) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} A\text{-Lie-Unter-Algebren} \\ L \subset \mathfrak{sl}_2(A) \end{matrix}\right\} \qquad \text{([Pin93]Theorem 3.4)}$$

Diese Äquivalenz von Kategorien funktioniert abseits der Frage, ob die zugrundeliegende Gruppe saturiert sein muss. Es ist aber nicht klar, inwieweit sich diese Argumentation auf alle p-bewerteten Liegruppen erweitern lässt.
Abgesehen von dieser möglichen Verallgemeinerung, erlaubt einem die Lazardsche Kategorienäquivalenz für p-saturierte Gruppe die Lie-Algebra einer kompakten p-adischen Liegruppe einzuführen. Wie schon gezeigt und diskutiert wurde, besitzt eine

topologische Gruppe G, die eine kompakte p-adische Liegruppe ist, notwendigerweise eine offene p-saturierte Untergruppe H. Um nun G eine Lie-Algebra zuzuordnen geht man folgendermaßen vor:
Durch die Existenz der p-saturierten Gruppe $H \subseteq G$ wird die Existenz einer Umgebungsbasis des neutralen Elements e in G aus p-saturierten Unterguppen $\{H_i\}_{i\in I}$ garantiert, welche alle die gleiche Dimension wie G besitzen. Setze als die Dimension $dim(G) = r$.
Nach 6.1.4 korrespondiert H_i zu einer $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra $L_{H_i} := Log(H_i)$.Wird man mit einer Injektion $H_i \to H_j$ von Untergruppen konfrontiert, so sind die korrespondierenden $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebren L_{H_i} und L_{H_j} frei vom gleichen Rang r. Folglich gilt

$$L_{H_i} \cong L_{H_j}$$

und es bietet sich folgende Definition der $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra von G an:

Definition 6.1.2. (Lie-Algebra)
Sei G eine kompakte p-adische Liegruppe. Dann setzt man

$$\mathfrak{L}(G) := \varprojlim L_{H_i}$$

den projektiven Limes über die offenen p-saturierten Untergruppen $\{H_i\}_{i\in I} \subset G$, welche durch Inklusion geordnet sind, als die *integrale $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra* der Gruppe G.

Im Fall, dass G nicht nur eine p-bewertete Gruppe, sondern auch eine p-saturierte Gruppe ist, liest sich die Isomorphie der Saturierungen aus Proposition 6.1.3 nun als

$$\mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[G]) \cong \mathrm{Sat}(\mathcal{U}\mathfrak{L}(G)).$$

Gerade in dieser Situation lassen sich auch weitere interessante Aussagen über die assozierte Graduierung dieser beiden Algebren machen.
In Theorem 5.1.6 wurde gezeigt, dass die assozierten Graduierungen

$$\mathrm{gr}(\Lambda(G)) \cong \mathrm{gr}(\mathcal{O}) \otimes_{\mathrm{gr}(\mathbb{Z}_p)} \mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G)(*)$$

der Iwasawa-Algebra einer p-bewerteten Gruppe G zu der universell einhüllenden Algebra der graduierten $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$-Lie-Algebra $\mathrm{gr}(G)$ isomorph ist. Es ist durchaus eine interessante Frage inwieweit sich diese Isomorphie auf die Saturierungen der beiden $\mathrm{gr}(\mathcal{O})$-Algebren ausweiten lässt.
Falls die Gruppe G integral bewertet ist, so kommt man recht schnell zu einer ähnlichen Isomorphie für die Saturierungen. Leider ist eine p-bewertete Gruppe meistens nur dann integral bewertete, wenn man zu einer geeigneten offenen Untergruppe $G' \subseteq G$ übergeht.
Trotzdem kann man mit einem technischen Trick eine ähnliche Vergleichsisomorphie der Saturierungen erhalten. Dies liegt darin begründet, dass man mit Argumenten aus Lazard zeigen kann, dass man eine geeignete Bewertung ω' auf G finden kann derart, dass $\omega'(G) \subset \mathbb{Q}$ ein diskrete Teilmenge der rationalen Zahlen ist. Folglich erhält man, dass die assozierte Graduierung der $\mathbb{F}_p[\pi]$-Lie-Algebra $\mathrm{gr}_{\omega'} G$ Indizees in $1/e\mathbb{Z}$ hat. Es sei erwähnt, dass e der gemeinsame Nenner der rationalen Zahlen ist, welche die Bewertungselemente $\omega'(G)$ der diskreten Teilmenge von $\mathbb{Q}$ bilden. (vgl.

[CSS03] Lemma 6.4)
Sei nun $K/\mathbb{Q}_p$ eine endliche algebraische Erweiterung mit Restklassenkörper $\mathbb{F}_p$ derart, dass das maximale Ideal des Ganzheitsringes $\mathcal{O}_K$ von der Uniformisierenden π_K mit Bewertung $v(\pi_K) = 1/e$ erzeugt wird. Dann ist die assozierte Graduierung des vollständigen diskreten Bewertungsringes $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_K) \cong \mathbb{F}_p[\pi_K]$ ein Polynomring über $\mathbb{F}_p$ in einer Variablen und es gilt sicher $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{gr}(\mathcal{O}_K)$. Nun soll der Ring $\mathcal{O}_K$ gerade die Rolle des Ringes $\mathcal{O}$ in der Isomorphie (*) übernehmen. Diese künstliche Skalarerweiterung der Iwasawa-Algebra $\mathbb{Z}_p[[G]]$ auf $\mathcal{O}_K[[G]]$ 'korrigiert' die Graduierung von $\mathrm{gr}(G)$ nun in dem Sinne, als dass man unter Berücksichtung des Tensorierens mit $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_K)$ die integrale Vergleichsisomorphie

$$\mathrm{gr}(\mathbb{Z}_p[[G]]) \cong \mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G)$$

im saturierten Setting benutzen kann. Ganz genau ergibt sich folgende Proposition:

Proposition 6.1.5. *(Isomorphie der Graduierungen, [HKN06] Lemma 3.4.1) Sei G eine p-saturierte Gruppe, $\Lambda(G)$ ihre Iwasawa-Algebra und $\mathfrak{L}(G)$ ihre integrale Lie-ALgebra. Dann folgt:*

1. *Angenommen die Bewertung von G ist nicht ganzzahlig, dann sind die korrigierten Graduierungen*

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{Sat}\,\mathcal{O}_K[[G]] \cong \mathrm{gr}(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Sat}\,\mathcal{U}\mathfrak{L}(G))$$

   isomorph;

2. *Für die Vervollständigung der universell einhüllenden Algebra gilt*

$$\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{L}(G)\otimes_{\mathbb{Z}_p}}\mathcal{O}_K) \cong \widehat{\mathcal{U}(\mathfrak{L}(G))} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K.$$

Beweis: zu (1):
Sei G eine p-bewertete Gruppe und $\mathfrak{L}(G)$ ihre integrale Lazard-Lie-Algebra. Wenn der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ von der geforderten Art ist, dann gilt:

$$\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[G]] \cong \mathcal{O}_K[[G]].$$

Weiter erhält man folgende Kette von Isomorphien:

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{Sat}\,\Lambda(G) \cong \mathrm{gr}\,\mathcal{O} \otimes_{\mathrm{gr}\,\mathbb{Z}_p} \mathrm{gr}\,\mathrm{Sat}\,\Lambda(G),$$

da die Ringe $\mathcal{O}_K$ und $\mathbb{Z}_p$ saturiert sind und nach dem graduierten Tensorprodukt Proposition 1.4.4. Nun erhält man folgende Kette von Isomorphie als graduierte $\mathbb{F}_p[\pi_K]$-Algebren:

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}\,\mathcal{O}_K \otimes_{\mathrm{gr}\,\mathbb{Z}_p} \mathrm{gr}\,\mathrm{Sat}\,\Lambda(G) &\cong \mathbb{F}_p[\pi_K] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} (\mathbb{F}_p[\pi_K, \pi_K^{-1}] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} \mathrm{gr}\,\Lambda(G))_{Grad\geq 0} \\ &\cong \mathbb{F}_p[\pi_K] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} (\mathbb{F}_p[\pi_K, \pi_K^{-1}] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} \mathcal{U}\,\mathrm{gr}\,\Lambda(G))_{Grad\geq 0}\end{aligned}$$

Die erste Zeile folgt aus der Tatsache, dass man die Graduierung der Saturierung durch Einschränkung auf die Grade größer gleich 0 erreicht. Man erinnere sich für den genauen Beweis an das Lemma 1.5.4(2). Die zweite Zeile folgt aus dem Theorem 5.1.6(2) über den Vergleich der assozierten Graduierung. Nun gilt weiter:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_p[\pi_K] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} (\mathbb{F}_p[\pi_K, \pi_K^{-1}] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} \mathcal{U}\,\mathrm{gr}\,\Lambda(G))_{Grad\geq 0} &\cong \mathbb{F}_p[\pi_K] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} \mathrm{Sat}(\mathcal{U}\,\mathrm{gr}(G)) \\ &\cong \mathbb{F}_p[\pi_K] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} \mathrm{Sat}(\mathcal{U}\,\mathrm{gr}(\mathfrak{L}(G))) \\ &\cong \mathbb{F}_p[\pi_K] \otimes_{\mathbb{F}_p[\pi]} \mathrm{gr}(\mathrm{Sat}(\mathcal{U}\mathfrak{L}(G))) \\ &\cong \mathrm{gr}(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Sat}(\mathcal{U}\,\mathrm{gr}(\mathfrak{L})(G)))\end{aligned}$$

Die erste Zeile folgt wiederum aus der Graduierung der Saturierung 1.5.4(2). Weiter weiß man, da G p-saturiert ist, dass nach Proposition 6.1.3 gilt $G \cong \mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$. Zudem gilt nach Proposition 6.1.1, dass die assozierte Graduierung der saturierten $\mathbb{Z}_p$-Hopfalgebren $\mathrm{gr}(\mathcal{L}^* \mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])) \cong \mathrm{gr}(\mathcal{G}^* \mathrm{Sat}\,\mathbb{Z}_p[[G]])$ isomorph ist. Nun wurde durch $\mathcal{L}^* \mathrm{Sat}(\mathbb{Z}_p[[G]])$ gerade die integrale $\mathbb{Z}_p$-Lie-Algebra der Gruppe G definiert. Also folgt die zweite Zeile.
Die dritte Zeile folgt nach [Laz65].IV.2.3.6.1 und die vierte Zeile folgt nun widerum aus den Eigenschaften des bewerteten Tensorprodukts 1.4.4.
zu (2): Man weiß, dass der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ endlich und frei als $\mathbb{Z}_p$-Modul ist, da die Körpererweiterung $\mathcal{O}_K/\mathbb{Q}_p$ als endlich algebraisch vorausgesetzt wurde. Damit folgt sofort

$$\mathcal{U}(\mathfrak{L}(\widehat{G) \otimes_{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_K) \cong \widehat{\mathcal{U}\mathfrak{L}(G)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K,$$

wobei mit $\widehat{\mathcal{U}\mathfrak{L}(G)}$ die Vervollständigung bezüglich der kanonischen Filtrierung der universell einhüllenden Algebra gemeint ist. □

Abschließend ist wichtig noch einmal genau zu pointieren, dass gerade die Propositionen 6.1.5 und 6.1.3 die fundamentalen Zutaten für eine integrale Lazardisomorphie darstellen.

Kapitel 7

Lazards Isomorphismus

In diesem Kapitel wird nun ein Isomorphismus zwischen der stetigen Gruppenkohomologie $\mathrm{H}_{cts}(G,-)$ und der Lie-Algebren-Kohomologie $\mathrm{H}_{Lie}(\mathfrak{g},-)$ konstruiert. Der Knackpunkt an diesem Beweis ist, dass die saturierte Iwasawa Algebra $\operatorname{Sat}\Lambda(G)$ isomorph zu der Saturierung der integralen Lazard-Lie-Algebra $\operatorname{Sat}\mathcal{U}(\mathcal{L}^*\widehat{(G)\otimes_{\mathbb{Z}_p}}\mathcal{O}_K)$ ist. Der Beweis wird nun so laufen, dass man einerseits einen geeigneten Komplex X_* für die Gruppe G und andererseits einen geeigneten Komplex Y_* für die Lazard-Lie-Algebra $\mathfrak{L}(G)$ findet. Darauf folgend benutzt man die eben erwähnte Tatsache über die Saturierungen, um einen Isomorphismus zwischen $\operatorname{Sat}X_*$ und $\operatorname{Sat}Y_*$ zu bilden. Dieser Isomorphismus ermöglicht dann schlussendlich den Isomorphismus zwischen der stetigen Gruppenkohomologie und der Lie-Algebra-Kohomologie.

Proposition 7.0.6. *(Isomorphismus der Saturierungen)*
Sei G eine gleich-p-bewertete Gruppe vom Rang r, M ein kompakter G-Modul und $\mathfrak{L}(G)$ die integrale Lazard-Lie-Algebra. Man setze $UnLie := \mathcal{U}\mathfrak{L}\widehat{(G)\otimes_{\mathbb{Z}_p}}\mathcal{O}_K$
Sei X_* die quasiminimale $\Lambda(G)$-Auflösung des trivialen $\Lambda(G)$-Moduls $\mathcal{O}_K$ und sei Y_* die Standardauflösung des trivialen $\mathfrak{L}(G)$-Moduls $\mathcal{O}_K$. Dann gilt für folgendes Diagramm von Komplexen:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Sat}\Lambda(G)\otimes_{\Lambda(G)} X_* \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[d, "\psi_*"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{D}"] & \operatorname{Sat}X_* \arrow[d, "\phi_*"', "\cong"] \\ \operatorname{Sat}(UnLie)\otimes_{UnLie} Y_* \arrow[r, hook, "i'_*"] & \operatorname{Sat}Y_* \end{tikzcd}$$

Es existiert ein bis auf Homotopie eindeutiger Isomorphismus $\phi_* : \operatorname{Sat}X_* \to \operatorname{Sat}Y_*$ zwischen den saturierten Kettenkomplexen derart, dass seine Einschränkung $\psi_* := \phi|_{\operatorname{Sat}\Lambda(G)\otimes_{\Lambda(G)}X_*}$ Isomorphismus von Kettenkomplexen ist.

Beweis: Sei $\Lambda(G)$ die Iwasawa-Algebra der Gruppe G. Man setze als X_* den quasiminimalen Komplex aus Definition 4.4.2, welcher eine endliche filtriert-freie $\Lambda(G)$-Auflösung X_* des trivialen $\Lambda(G)$-Moduls $\mathcal{O}_K$ mit Basis $(\mathcal{B}_k)_{0\leq k\leq r}$ ist. Weiter findet man ohne Probleme mit dem Chevalley-Eilenberg-Komplex aus 4.2.2 des trivialen $\mathfrak{L}(G)$-Moduls $\mathcal{O}_K$ eine endliche filtriert-freie $\mathfrak{L}(G)$-Auflösung mit Basis $(\mathcal{B}'_k)_{0\leq k\leq r}$.
Da in erster Linie Lazards Lemma angewendet werden soll, zeigt man zuerst, dass die assozierten Graduierungen $\operatorname{gr}\operatorname{Sat}X_* \cong \operatorname{gr}\operatorname{Sat}Y_*$ übereinstimmen.
Hierfür betrachtet man folgende Schlusskette:

Da $\mathcal{O}_K$ ein Ganzeheitsring ist, ist er saturiert. Das heißt $\operatorname{Sat}\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$ und natürlich gilt, dass die Graduierungen identisch sind.
Sei $i \geq 0$ und den filtriert-freie $\Lambda(G)$-Modul X_i. Dann gilt:

$$\operatorname{gr}\operatorname{Sat} X_i \cong \operatorname{gr}\operatorname{Div} X_i \cong \operatorname{gr}(\operatorname{Div}\Lambda(G) \otimes_{\Lambda(G)} X_i).$$

Nach Eigenschaften des Funktor $\operatorname{gr}(-)$ gilt

$$\operatorname{gr}(\operatorname{Div}\Lambda(G) \otimes_{\Lambda(G)} X_i) \cong \operatorname{gr}\operatorname{Div}\Lambda(G) \otimes_{\operatorname{gr}\Lambda(G)} \operatorname{gr} X_i,$$

da X_i filtriert-frei. Hier gilt aber

$$\operatorname{gr}\operatorname{Div}\Lambda(G) \otimes_{\operatorname{gr}\Lambda(G)} \operatorname{gr} X_i \cong \operatorname{gr}\operatorname{Div}\Lambda(G) \otimes_{\mathcal{U}\operatorname{gr} G} \operatorname{gr} X_i$$

und weiter

$$\operatorname{gr}\operatorname{Div}\Lambda(G) \otimes_{\mathcal{U}\operatorname{gr} G} \operatorname{gr} X_i \cong \operatorname{gr}\operatorname{Div}(UnLie) \otimes_{UnLie} \operatorname{gr} Y_i,$$

wobei die Isomorphie $\operatorname{gr}\operatorname{Div}\Lambda(G) \cong \operatorname{gr}\operatorname{Div}(UnLie)$ aus den Vorüberlegungen der Proposition 6.1.5 folgt. Die Isomorphie $\operatorname{gr} X_i \cong \operatorname{gr} Y_i$ folgt aus der Konstruktion der Auflösungen und der Tatsache, dass $\operatorname{gr} G \cong gr\mathfrak{L}(G)$, da G als p-saturiert angenommen wurde (vgl. Proposition 6.1.3).
Insgesamt erhält man folglich eine Isomorphie

$$\operatorname{gr}(\operatorname{Div}\Lambda(G) \otimes_{\Lambda(G)} X_i) \cong \operatorname{gr}(\operatorname{Div}(UnLie) \otimes_{UnLie} Y_i) \cong \operatorname{gr}\operatorname{Sat} Y_i. \tag{1}$$

Offensichtlich sind die Voraussetzungen an Lazards Lemma Proposition 4.3.2 erfüllt, dass heißt, man findet einen Morphismus $\phi_* : \operatorname{Sat} X_* \to \operatorname{Sat} Y_*$ von Kettenkomplexen. Nach dem Korollar 4.3.3 ist dieser Morphismus ϕ_* ein bis auf Homotopie eindeutiger Isomorphismus. Mit Propositon 1.5.7 und der Tatsache, dass $\operatorname{Sat}\Lambda(G) \cong \operatorname{Sat}(UnLie)$, ergibt sich das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Sat}\Lambda(G) \otimes_{\Lambda(G)} X_j \arrow[r, hook, "i_j"] \arrow[d, "\psi_j"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{D}"] & \operatorname{Sat} X_j \arrow[d, "\phi_j"', "\cong"] \\
\operatorname{Sat}(UnLie) \otimes_{UnLie} Y_j \arrow[r, hook, "i'_j"] & \operatorname{Sat} Y_j
\end{tikzcd}$$

Die Abbildungen i_j und i'_j sind nach Proposition 1.5.7 für alle $j \geq 0$ injektiv. Man setze nun $\psi_j := \phi_j|_{\operatorname{Sat}\Lambda(G)\otimes_{\Lambda(G)} X_j}$. Damit die Einschränkung ψ_* selbst ein Isomorphismus von Kettenkomplexen ist, muss für alle $0 \leq j \leq r$ die Bedingung

$$\phi_j(\operatorname{Sat}(\Lambda(G)) \otimes_{\Lambda(G)} X_k) \subseteq \operatorname{Sat}(\Lambda(G) \otimes_{UnLie} Y_k)(*)$$

als $\operatorname{Sat}(\Lambda(G))$-Moduln erfüllt sein. Ist dies der Fall, so würde mit Proposition 1.3.2(3) über die Liftungseigenschaften die Isomorphie von ψ folgen.
Um (*) zu zeigen, fixiert man Erzeuger $e_I \in \operatorname{Sat}\Lambda(G) \otimes_{\Lambda(G)} X_j, e'_I \in \operatorname{Sat}(X_k), f_I \in \operatorname{Sat}\Lambda(G) \otimes_{UnLie} Y_j, f'_I \in \operatorname{Sat}(Y_k)$, die jeweils der Bedingung

$$i_j(e_I) = \pi^{e|I|} e'_I$$

$$i'_j(f_I) = \pi^{e|I|} f'_I$$

genügen. (vgl. Proposition 1.5.4)
Da man weiß, dass ϕ_j ein Isomorphismus von Sat($\Lambda(G)$)-Moduln ist, lässt sich das Bild

$$\phi_k(e'_I) = \sum_{J \in \mathcal{I}_j} c_{I,J} f'_J$$

als Linearkombination der Basiselemente $f'_J \in \mathcal{B}'_j$ mit passenden Skalaren $c_{I,J} \in$ Sat($\Lambda(G)$) und Indexmenge $I_j = \{(i_1, ..., i_j) : 1 \leq i_1 < ... < i_j \leq j\}$ darstellen.
Sei $w_{\mathrm{Sat}(\Lambda(G)}$ die Bewertung auf Sat($\Lambda(G)$). Die Bedingung (*) ist nun dazu äquivalent, dass

$$w_{\mathrm{Sat}(\Lambda(G))}(c_{I,J}) \geq |J| - |I| \geq 0$$

für alle $I, J \in \mathcal{I}_j$ gelten muss. Da G gleich-p-bewertet ist, ist die $|J| - |I|$ trivialerweise null und somit folgt die Behauptung.

□

Theorem 7.0.7. *(Integraler Lazard-Morphismus)*
Sei G eine gleich-p-bewertete Gruppe und M, M', M'' kompakte $\mathbb{Z}_p$-Moduln aus der Kategorie der erweiterbaren Moduln $\mathbf{mod}^{Sat}_{\Lambda(G)}$ (vgl. Proposition 5.2.2), dann gilt:

1. *Es existiert eine Isomorphie*

$$\phi_G(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K : H^*_{cts}(G, M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \cong H^*(\mathfrak{L}(G), M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$$

   zwischen der stetigen Gruppenkohomologie von G und der Lie-Algebrakohomologie von $\mathfrak{L}(G)$;

2. *Sei H eine weitere Gruppe, welche die Bedingungen des Theorems erfüllt und sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist der Isomorphismus natürlich bezüglich f;*

3. *Die Isomorphien (1),(2) und (3) sind mit cup-Produkten verträglich, dass heißt für $\alpha : M \otimes_{\mathbb{Z}_p} M' \to M''$ kommutiert folgendes Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{H}^*_{cts}(G, M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^*_{cts}(G, M')) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathrm{H}^*_{cts}(G, M'') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_G(M) \otimes \phi_G(M')} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_G(M'')} \\ (\mathrm{H}^*(\mathfrak{L}(G), M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^*(\mathfrak{L}(G), M')) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathrm{H}^*(\mathfrak{L}(G), M'') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \end{array}$$

Beweis: zu (1): Erinnert man sich an die Definition einer gleich-p-bewerteten Gruppe zurück, so ist klar, dass hier die Isomorphie

$$\mathrm{Sat}\,\Lambda(G) \cong \mathrm{Sat}\,\mathcal{U}\mathfrak{L}(G) \qquad \text{(vgl. Proposition 6.1.3)}$$

folgt, da G notwendigerweise p-saturiert ist. Folglich gelten die Proposition 6.1.5 über die Isomorphie der Graduierungen und natürlich die Proposition 7.0.6 uneingeschränkt.
Setze $B := \mathcal{U}(\mathfrak{L}(\widehat{G) \otimes_{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_K)$ und $N := M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$, seien X_* respektive Y_* die

filtriert-freie $\Lambda(G)$-Auflösung respektive filtriert-freie $\mathfrak{L}(G)$-Auflösung von $\mathcal{O}_K$ aus Proposition 7.0.6.
Da $\mathcal{O}_K$ flach über $\mathbb{Z}_p$ ist, folgt mit Proposition 4.3.4

$$H^*_{cts}(G, M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \cong H^*_{cts}(G, N).$$

Nach der Definition der stetigen Gruppenkohomologie (vgl. Proposition 4.4.2)gilt

$$Ext^*_{\Lambda(G)}(\mathcal{O}_K, N) \cong H^* \operatorname{Hom}_{\Lambda(G)}(X_*, N).$$

Nach Voraussetzung ist ein N Objekt in der Kategorie der erweiterbaren Moduln $\mathbf{mod}^{Sat}_{\Lambda(G)}$. Das heißt, dass sich die $\Lambda(G)$-Modulstruktur auf die $\operatorname{Sat}\Lambda(G)$-Modulstruktur erweitern lässt (vgl. Proposition 5.2.2). Zusätzlich verwendet man Proposition 4.3.5 und erhält die Isomorphie

$$\mathrm{H}^* \operatorname{Hom}_{\Lambda(G)}(X_*, N) \cong \mathrm{H}^* \operatorname{Hom}_{Sat\Lambda(G)}(\operatorname{Sat}(X_*), N),$$

welche sich durch die Anwendung der Proposition 4.3.6 auf

$$\mathrm{H}^* \operatorname{Hom}_{Sat\Lambda(G)}(\operatorname{Sat}(X_*), N) \cong \mathrm{H}^* \operatorname{Hom}_{Sat\Lambda(G)}(Sat\Lambda(G) \otimes_{Sat\Lambda(G)} X_*, N)$$

einschränken lässt. Nun ist man in der Lage, die aus Proposition 7.0.6 konstruierte Isomorphie

$$H^* \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sat}\Lambda(G)}(\operatorname{Sat}\Lambda(G) \otimes_{\operatorname{Sat}\Lambda(G)} X_*, N) \cong H^* \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sat}\Lambda(G)}(\operatorname{Sat}\Lambda(G) \otimes_B Y_*, N)$$

anzuwenden. Wie gezeigt wurde, ist diese Isomorphie eindeutig bis auf Homotopie. Wieder mit Proposition 4.3.6 und Proposition 4.3.5 folgt

$$\mathrm{H}^* \operatorname{Hom}_{Sat\Lambda(G)}(\operatorname{Sat}\Lambda(G) \otimes_B Y_*, N) \cong \mathrm{H}^* \operatorname{Hom}_{Sat\Lambda(G)}(\operatorname{Sat}(Y_*), N) H^* \operatorname{Hom}_B(Y_*, N).$$

Weiter gilt

$$Ext^*_{\operatorname{Sat}\Lambda(G)}(\mathcal{U}(\mathfrak{L}(\widehat{G) \otimes_{\mathbb{Z}_p}} \mathcal{O}_K), N) \cong Ext^*_{Sat\Lambda(G)}(\mathcal{U}(\mathfrak{L}(G)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K, N)$$

nach dem Lemma 6.1.5(3)und dem Lemma über die schwache Konvergenz 4.2.2(2).
Weiter folgt

$$Ext^*_{Sat\Lambda(G)}(\mathcal{U}(\mathcal{L}^*(G)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K, N) \cong H^*(\mathfrak{L}(G), M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$$

aus der Definition der Lie-Algebra-Kohomologie.
zu (2): Sei also $f : G \to H$ ein filtrierter Gruppenhomomorphismus. Der Funktor $\operatorname{gr}(-)$ induziert folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{gr}(G) \arrow[r, "\operatorname{gr}(f)"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{gr}(H) \arrow[d, "\cong"] \\
\operatorname{gr}(\mathfrak{L}(G)) \arrow[r] & \operatorname{gr}(\mathfrak{L}(H))
\end{tikzcd}$$

Um es nocheinmal zu pointieren: Dieses Diagramm folgt aus der Proposition 6.1.2 und diese Strukturtheorie darf widerum angewendet werden, da G gerade als gleich-p-bewertet vorausgesetzt wurde.

Wenn man nun die gleiche Vorgehensweise wie in der Proposition 7.0.6 über die saturierten Komplexe anwendet, erhält man folgendes geliftete Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Sat} X_*(G) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Sat} Y_*(H) \arrow[d, "\cong"] \\
\operatorname{Sat} Y_*(G) \arrow[r] & \operatorname{Sat} Y_*(H),
\end{tikzcd}$$

welches nach der eben zitierten Proposition kommutativ und eindeutig bis auf Homotopie ist. In gleicher Manier ergibt sich schlussendlich folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Sat} \Lambda(G) \otimes X_*(G) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Sat} \Lambda(H) \otimes Y_*(H) \arrow[d, "\cong"] \\
\operatorname{Sat} UnLie(G) \otimes Y_*(G) \arrow[r] & \operatorname{Sat} UnLie(H) \otimes Y_*(H)
\end{tikzcd}$$

zu (3): Die Kompatibilität mit dem Cup-Produkt folgt aus Proposition 4.4.4. □

Bemerkung: (Diskussion der Ergebnisse)

1. Der integrale Lazardisomorphismus funktioniert nur, wenn G eine torsionsfreie p-adische Liegruppe ist. Angenommen G wäre nicht torsionsfrei, dann wäre die die kohomologische Dimension $cd(G) = \infty$ (vgl. [Bro82] Korollar 2.5). Da $\mathfrak{L}(G)$ eine endliche Lie-Algebra ist, gilt hier aber $cd\mathfrak{L}(G) < \infty$. Folglich muss G torsionfrei sein.

2. Wie in dem Kapitel 3.4 und besonders im Theorem 3.4.1 gezeigt wurde, ist diese Art der Analytifizierung erst einmal hinreichend. Es wäre sicherlich interessant den Weg über rigid analytische Varietäten zu nehmen. Dies hätte vor allem zur Folge, dass man eine größere Zahl an Beispielen für Liegruppenschemata 5.4 erhalten würde. Um diesen allgemeinen Rahmen auszuloten müsste diese Art der Analytifizierung über Tate-Algebren und rigide analytische Varietäten laufen. Diese Vorgehensweise wurde auch schon in dem Artikel von [HK06] angedeutet. Eine sehr genaue Skizze dieses Vorhabens findet sich beispielsweise in [BLR95] wieder.
   Abschließend kann man sagen, dass eine solche Analytifizierung eine Beschreibung der Lazardisomorphie zwischen der lokal analytischen Gruppenkohomologie und Lie-Algebra-Kohomologie mit Koeffizienten in K ergibt(vgl. Proposition 5.4.2). Leider ist nicht klar, inwiefern alle Lazardisomorphien aus einer solchen Herangehensweise folgen könnten.

Literaturverzeichnis

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. Néron models, volume 21 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)[Results in Mathematics and Related Areas (3)], 1990.

[BLR95] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. Formal and rigid geometry. *Inventiones Mathematicae*, 119(1):361–398, 1995.

[Bro82] K.S. Brown. *Cohomology of groups.* Springer, 1982.

[CSS03] J. Coates, P. Schneider, and R. Sujatha. Modules over Iwasawa algebras. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 2(01):73–108, 2003.

[DDSMS03] J.D. Dixon, MPF Du Sautoy, A. Mann, and D. Segal. *Analytic pro-p groups.* Cambridge Univ Pr, 2003.

[dL92] C.T.F. de Lacroix. *p-adische Distributionen.* Math. Inst., 1992.

[dLG99] C.T.F. de Lacroix and G. Gotzmann. *Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p-adischen Körper.* Math. Inst., 1999.

[Eis95] D. Eisenbud. Commutative algebra. *Graduate texts in mathematics*, 150, 1995.

[GDdhés71] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, and Institut des hautes études scientifiques. *Eléments de géométrie algébrique.* Springer, 1971.

[GR71] A. Grothendieck and M. Raynaud. *Revêtements etales et groupe fondamental: Séminaire de geometrie algebrique du Bois Marie 1960-61 SGA 1.* Springer, 1971.

[GS07] J. González-Sánchez. On p-saturable groups. *Journal of Algebra*, 315(2):809–823, 2007.

[GSK09] J. González-Sánchez and B. Klopsch. Analytic pro-p groups of small dimensions. *Journal of Group Theory*, 12(5):711–734, 2009.

[HK06] A. Huber and G. Kings. A p-adic analogue of the Borel regulator and the Bloch–Kato exponential map. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, pages 1–42, 2006.

[HKN06] A. Huber, G. Kings, and N. Naumann. Some complements to the Lazard isomorphism. *Compositio Mathematica*, pages 1–28, 2006.

[Klo05] B. Klopsch. On the Lie theory of p-adic analytic groups. *Mathematische Zeitschrift*, 249(4):713–730, 2005.

[Laz65] M. Lazard. *Groupes analytiques p-adiques.* S.-et-O., 1965.

[Liu06] Q. Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Oxford University Press, USA, 2006.

[LVO96] H. Li and F. Van Oystaeyen. *Zariskian filtrations.* Kluwer Academic Pub, 1996.

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg. *Cohomology of number fields.* Springer Verlag, 2008.

[Pin93] R. Pink. Classification of pro-p subgroups of SL2 over a p-adic ring, where p is an odd prime. *Compositio Mathematica*, 88(3):251–264, 1993.

[Sch08] Peter Schneider. p-Adic Analysis and Lie Groups. *Course in Münster*, 2007/2008.

[Sch09] Peter Schneider. The Algebraic Theory of p-Adic Lie Groups. *Course at the Newton Institute, Cambridge*, 2009.

[SW00] P. Symonds and T. Weigel. Cohomology of p-adic Analytic Groups. *New horizons in pro-p groups*, page 349, 2000.

[Tot99] B. Totaro. Euler characteristics for p-adic Lie groups. *Publications Mathématiques de L'IHÉS*, 90(1):169–225, 1999.

[Ven03] O. Venjakob. Characteristic elements in noncommutative Iwasawa theory. *J. Reine Angew. Math*, 2003.

[VO11] Schneider P. Venjakob O. SK_1 and Lie-algebras. *tba*, 2011.

[Wei95] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge Univ Pr, 1995.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Jens Jürgens, Heidelberg, Juli 2011