Cliffordalgebren

Sei k ein Körper der Charakteristik ungleich 2, und V ein quadratischer Raum, d.h. ein endlicher k-Vektorraum V der Dimension n mit einer quadratischen Form $q : V \to k$. Sei $O(V) \supset SO(V)$ die Gruppe der Isometrien in $Gl(V)$. Das Zentrum von $SO(V)$ und $O(V)$ besteht aus $\pm id_V$.

Die Cliffordalgebra von V ist ein Paar $(C(V), \phi)$, wobei $C(V)$ eine assoziative k-Algebra mit Einselement ist, und wobei $\phi : V \to C(V)$ eine k-lineare Abbildung ist, welche universell ist mit der Eigenschaft

$$\phi(v)^2 \;=\; q(v) \cdot 1_C \;.$$

D.h. für jedes Paar (A, ϕ_A) mit einer k-Algebra A und einer k-linearen Abbildung $\phi_A : V \to A$ mit der Eigenschaft $\phi_A(v)^2 \;=\; q(v) \cdot 1_A$ gibt es einen eindeutig bestimmten k-Algebrenhomomorphismus $\psi : C(V) \to A$ mit der Eigenschaft $\phi_A = \psi \circ \phi$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi_A"] & C(V) \arrow[dl, dotted, "\exists ! \psi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft bestimmt $(C(V), \phi)$ offensichtlich eindeutig bis auf Isomorphie. Mit $(C(V), \phi)$ hat auch $(C(V)^{opp}, \phi)$ mit $c_1 \cdot_{opp} c_2 := c_2 \cdot c_1$ die universelle Eigenschaft. Daraus folgt $C(V) \cong C(V)^{opp}$ und somit die Existenz einer Involution $c \mapsto c^*$ von $C(V)$, welche auf $\phi(V)$ die Identität ist $\phi(v)^* = \phi(v)$. Es gilt $(c_1 c_2)^* = c_2^* c_1^*$ und $(c_1 + c_2)^* = c_1^* + c_2^*$.

Aus der universellen Eigenschaft folgt, daß für k-lineare isometrische Abbildungen $f : V \to W$ ein eindeutiger k-Algebrenhomomorphismus $C(f)$ existiert (Fortsetzungseigenschaft), welcher das Diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "f"] & C(V) \arrow[d, dotted, "\exists ! \; C(f)"] \\ W \arrow[r, "\phi_W"] & C(W) \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Somit hängt $C(V)$ als $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte Algebra bis auf Isomorphie nur vom Isomorphietyp des Raums V ab.

Die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung ist dabei definiert wie folgt: Die Isometrie $-id_V$ induziert einen Isomorphismus F von $C(V)$ der Ordnung 2. Die Zerlegung

$$C(V) = C^+(V) \oplus C^-(V)$$

in Eigenräume bezüglich des Automorphismus F macht $C(V)$ zu einer $\mathbb{Z}/2$-graduierten Algebra. Für invertierbares d setzt man

$$Int^\varepsilon(d)c = (-1)^{|d||c|} \cdot dcd^{-1} \ .$$

Man definiert die Konjugation auf $C(V)$ durch

$$\overline{c} \ = \ F(c^*) \ = \ (-1)^{|c|} \cdot c^* \ .$$

Dies ist eine Involution, welche auf $\phi(V)$ Multiplikation mit -1 ist. (Warnung: Man verwechselt dies im Fall $k = \mathbb{C}$ leider leicht mit der komplexen Konjugation!)

Die Existenz der Cliffordalgebren zeigt man durch eine andere Konstruktion entweder als Quotient der Tensoralgebra, oder wie folgt: Ist $b_1, .., b_n$ eine Orthogonalbasis von V mit $a_i = q(b_i)$, dann ist nämlich $C^\varepsilon(V) = C^\varepsilon(a_1) \otimes_k^\varepsilon ... \otimes_k^\varepsilon C^\varepsilon(a_n)$ als $\mathbb{Z}/2$-graduiertes Tensorprodukt, d.h. $(a_1 \otimes_k^\varepsilon a_2)(a_1' \otimes_k^\varepsilon a_2') = (-1)^{|a_2||a_1'|} a_1 a_1' \otimes_k^\varepsilon a_2 a_2'$. Allgemeiner

$$C^\varepsilon(V \oplus W) \ = \ C^\varepsilon(V) \ \otimes_k^\varepsilon \ C^\varepsilon(W) \ .$$

Man zeigt dann, daß diese Algebra die universelle Eigenschaft der Cliffordalgebra erfüllt. Es folgt für das graduierte Zentrum $Z^\varepsilon(C^\varepsilon(V)) = k \cdot id$.

Beispiel 1: Ist $V = k \cdot e$ eindimensional mit $q(e) = a$, dann ist $C(V) = C(a) = k \cdot 1_C + k \cdot e$ mit $e^2 = a \cdot 1_C$ und $C^-(a) = k \cdot e$ sowie $C^+(a) = k \cdot 1_C$.

Beispiel 2: Ist $V = k \cdot e + k \cdot e^*$ eine hyperbolische Ebene mit $q(e) = q(e^*) = 0$ und $q(e + e^*) = 1$ sowie $q(e - e^*) = -1$, dann induziert

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e^* \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

einen graduierten Isomorphismus von $C^\varepsilon(V) \cong End^\varepsilon(k^{1|1})$ auf den graduierten Matrixring. Achtung: e^* hat a priori nichts zu tun mit der oben definierten Involution $*$. Siehe aber die Dualitätsformel am Ende des Abschnitts.

Der hyperbolische Fall: Allgemeiner sei V hyperbolisch, also eine m-fache Summe von hyperbolischen Ebenenen. Dann gilt

$$C(V) = \bigotimes^{\varepsilon} End^{\varepsilon}(k^{1|1}) = End^{\varepsilon}(k^{N|N})$$

für $N = 2^m$. Dies folgt aus $End^{\varepsilon}(A) \otimes_k^{\varepsilon} End^{\varepsilon}(B) = End^{\varepsilon}(A \otimes_k^{\varepsilon} B)$ für beliebige Superräume A und B vermöge $(N \otimes^{\varepsilon} M)(a \otimes^{\varepsilon} b) = (-1)^{|M||a|} N(a) \otimes^{\varepsilon} M(b)$.

Folgerung: *Sei $n = 2m$ gerade und q nicht ausgeartet, dann ist jeder Automorphismus ρ der k-Algebra $C(V)$ von der Form $\rho = Int(d)$, d.h. $\rho(c) = dcd^{-1}$. Das Element d ist eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar aus k^*. Das Zentrum von $C(V)$ ist $k \cdot 1_C$.*

Beweis: Wir suchen ein $d \in C^*(V)$ mit $\rho(c)d = dc$ für alle $c \in C(V)$. Dies ist ein k-lineares Gleichungssystem. Es genügt dieses Gleichungssystem über einem Erweiterungskörper $\overline{k}$ zu lösen. Man kann daher V über $\overline{k}$ als hyperbolisch annehmen. Man reduziert die Aussage damit auf den bekannten Fall des Matrixrings. QED.

Dualität: Im hyperbolischen Fall für $\mathcal{F} = (e_1 - e_1^*)...(e_m - e_m^*)$ gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^{\varepsilon}(V) & \xrightarrow{\cong} & End^{\varepsilon}(k^{N|N}) \\ {\scriptstyle (.)^* \circ Int^{\varepsilon}(\mathcal{F})} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (.)^T} \text{ (Transposition)} \\ C^{\varepsilon}(V) & \xrightarrow{\cong} & End^{\varepsilon}(k^{N|N}) \end{array}$$

Einen Beweis findet man im Anhang.

Chirale Elemente

Da ϕ injektiv ist, identifizieren wir in der Regel V mit $\phi(V)$. Sei von jetzt an q nicht ausgeartet und $n = 2m$ gerade. Wir schreiben auch C anstatt $C(V)$. Es gibt dann wegen der obigen Folgerung ein Element $\Gamma \in C(V)$ mit der Eigenschaft

$$F = C(-id_V) = Int(\Gamma) \ .$$

Γ ist eindeutig bis auf einen Skalar und wird als <u>chirales</u> Element bezeichnet. Für eine Orthogonalbasis gilt $k \cdot \Gamma = k \cdot b_1 ... \cdot b_n$. Es gilt $\Gamma^2 = D(q) \cdot 1_C$ und $N(\Gamma) = \overline{\Gamma}\Gamma = (-1)^m \Gamma^2$. Hierbei ist $D(q) = (-1)^m det(S)$ die Diskriminante der quadratischen Form q (und ist wohldefiniert bis auf Quadrate in $(k^*)^2$). Im hyperbolischen Fall ist die Diskriminante 1 und es gilt $\Gamma^2 = 1$ für

$$\Gamma = (e_1 + e_1^*)(e_1 - e_1^*) \quad ... \quad (e_{m-1} + e_{m-1}^*)(e_m - e_m^*) \ .$$

Auf $C(V)$ existiert eine aufsteigende Ringfiltration $Fil^0 = k \cdot 1_C$, $Fil^{\leq 1} = k \cdot 1_C + V$,... mit $Fil^{\leq i}/Fil^{<i} = \Lambda^i(V)$. Insbesondere wird im höchsten Grad $Fil^{\leq n}/Fil^{<n}$ von Γ erzeugt. Die <u>Berezin</u>-Projektion

$$Ber : C(V) \to Fil^{\leq n}/Fil^{<n} \cong k \cdot \Gamma \cong \Lambda^n(V)$$

definiert nach Wahl eines chiralen Elements Γ eine k-Linearform, welche auf Superkommutatoren verschwindet. Es folgt

$$Ber(Int^\varepsilon(d)(c)) \ = \ Ber(c)$$

für homogene Elemente $c, d \in C^\varepsilon(V)$ für die d invertierbar ist. Zur Erinnerung $Int^\varepsilon(d)c = (-1)^{|d||c|} dcd^{-1}$. Diese Linearform Ber definiert eine k-Bilinearform

$$C(V) \times C(V) \to k$$

mittels

$$< c_1, c_2 > = \ Ber(\overline{c}_1 \cdot c_2) \ .$$

Ist V hyperbolisch, dann ist Ber auf $C^\varepsilon(V) \cong End^\varepsilon(k^{N|N})$ bis auf eine Konstante die Superspur (denn beide Linearformen verschwinden auf Superkommutatoren). Weiterhin sei $[c_1, c_2] = Ber(\Gamma \overline{c}_1 c_2)$ die <u>Pfisterform</u>.

Spinorgruppen

Es sei C^* die Gruppe der Einheiten der Algebra $C(V)$. Wir betrachten dann die Gruppe aller Automorphismen von $C(V)$, welche den Unterraum $V \cong \phi(V)$ in sich überführen. Nach obiger Folgerung sind alle Automorphismen von $C(V)$ innere Automorphismen. Man erhält also die Gruppe

$$GPin(V) \ = \ \{d \in C^* \mid d\phi(V)d^{-1} = \phi(V)\} \ .$$

Wegen $q(dvd^{-1}) \cdot 1_C = (dvd^{-1})^2 = dv^2d^{-1} = q(v) \cdot 1_C$ induziert $Int(d)$ für $d \in GPin(V)$ eine bijektive Isometrie f von V. Wie bereits gesehen, wird umgekehrt jede Isometrie $f : V \to V$ von einem Automorphismus $C(f)$ von (C,V) induziert. Beispielsweise wird $k^* \cdot \Gamma$ auf $Int(\Gamma) = (-1)^n Int^\varepsilon(\Gamma) = -id_V$ abgebildet. Weiterhin liegen alle Elemente $v \in V$ mit $q(v) \neq 0$ bezüglich der Einbettung ϕ in $GPin(V)$. Genauer: $Int(v)$ induziert auf V das negative der Spiegelung σ_v an der zu v-orthogonalen Hyperebene wegen $vv'v^{-1} = q(v)^{-1}vv'v = q(v)^{-1}(-v^2v' + 2(v,v')v) = -\sigma_v(v')$. Man erhält durch $d \mapsto Int(d)|V$ eine exakte Sequenz

$$0 \to k^* \to GPin(V) \to O(V) \to 0$$

mit der zentralen Untergruppe k^*.

<u>Beispiel 3</u>: Im Fall $n = 2$ identifizieren wir $Gl(2,k)$ mit C^* wie in Beispiel 2. Dann ist $diag(\alpha,\delta)$ in $GPin(V)$ und induziert die orthogonale Abbildung $f(e) = \frac{\alpha}{\delta}e$, $f(e^*) = \frac{\delta}{\alpha}e^*$.

<u>Variante</u>: Natürlicher als die Einschränkung von $Int(d)$ auf V ist eigentlich die getwistete Einschränkung $Int^\varepsilon(d)|V : GPin(V) \to O(V)$. Auch dies definiert einen surjektiven Homomorphismus wegen $Int^\varepsilon(d) = Int(d_0^{|d|}d)$ für ein $d_0 \in GPin(V)$ welches $-id_V$ induziert. Manche Formel sieht dann so aus, als würde q durch $-q$ ersetzt. Insbesondere induziert $Int^\varepsilon(v)$ die Spiegelung σ_v am Vektor v (falls $q(v) \neq 0$).

<u>Die Norm N</u>: Für $d \in GPin(V)$ und $v \in V$ gilt $dvd^{-1} = v' \in V \subset C^-$ und daher wegen $\overline{v} = -v, \overline{v}' = -v'$ also $\overline{d}^{-1}v\overline{d} = dvd^{-1}$. Setze $N(d) = \overline{d}d$. Es folgt $N(d)v = vN(d)$ für alle $v \in V$. Da V die Algebra $C(V)$ erzeugt, liegt also $N(d)$ im Zentrum von $C(V)$. Es folgt $N(d) \in k \cdot 1_C$ für alle

$d \in GPin(V)$. Für $v \in V$ mit $q(v) \neq 0$ gilt beispielsweise $v \in GPin(V)$ mit $N(v) = -v^2 = -q(v)$. Die Norm N definiert einen Homomorphismus

$$N : GPin(V) \to k^* \ .$$

Der Kern der Norm N ist die Gruppe $Pin(V)$. Das Urbild der Gruppe $SO(V) \subset O(V)$ in $Pin(V)$ nennt man die Spinorgruppe $Spin(V)$. Beachte $Pin(V) \cap k^* = \{\pm 1_C\}$. Man erhält daher eine exakte Sequenz

$$0 \to \{\pm 1\} \to Pin(V) \to O(V) \to k^*/(k^*)^2 \ .$$

Die rechte Abbildung ist die Spinornorm $SN : O(V) \to k^*/(k^*)^2$ und diese ist im allgemeinen nicht surjektiv. Die Spinornorm ist wie folgt definiert: Für $f \in O(V)$ und $C(f) = Int(d)$ ist d bis auf einen Skalar $\lambda \in k^*$ eindeutig bestimmt. Setze $SN(f) = N(d) \mod (k^*)^2$. Dann kann f genau dann zu einem Element in $Pin(V)$ geliftet werden, wenn gilt $SN(f) = 1$. Der Lift ist eindeutig bis auf einen Skalar λ in $\{\pm 1\}$.

Beispiel 4: Die Matrix $diag(\alpha, \delta) \in Gl(2, k)$ von Beispiel 3 wird durch $d = \alpha \cdot ee^* + \delta e^* e \in C^*$ repräsentiert. Wegen $\overline{d} = \alpha \cdot e^* e + \delta \cdot ee^*$ ist $N(d) = \alpha\delta$. Somit ist

$$SN(\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\delta} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\alpha} \end{pmatrix}) = \alpha\delta \cdot (k^*)^2 = \frac{\alpha}{\delta} \cdot (k^*)^2 \ .$$

Beispiel 5: Sei $k = \mathbb{R}$: Die Spinornorm $SN : SO(V) \to \mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2 \cong \{\pm 1\}$ ist im hyperbolischen Fall surjektiv. Der Kern ist eine Untergruppe vom Index 2 in $O(V)$ und $SO(V)$, falls $k = \mathbb{R}$. Im definiten Fall ist SN dagegen nicht surjektiv.

Wir bemerken, daß die Gruppe $Spin(V)$ ebenso wie die Gruppen $SO(V)$ und $O(V)$ nur von der Ähnlichkeitenklasse von q abhängen. D.h. eine Reskalierung $q \mapsto \lambda \cdot q$ liefert isomorphe Gruppen. Dies folgt aus der Tatsache, daß $Spin(V)$ in $C^+(V)$ liegt

$$Spin(V) \subset C^+(V) \ .$$

Das Zentrum

Der Fall $2|m$: Für <u>gerades</u> m sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent:

- $D(q) \in (k^*)^2$
- Es existiert ein Element in $Pin(V)$, welches auf das zentrale Element $-id_V \in O(V)$ abgebildet wird.
- Zentrum$(Spin(V)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = <\Gamma> \times <-\Gamma>$.

Es ist klar, daß $k^* \cdot \Gamma \in GPin(V)$ auf $-id_V$ abgebildet wird. Die Norm von Γ, also die Spinornorm von $-id_V$, ist aber gerade die Diskriminante. Ist die Diskriminante ein Quadrat, dann kann Γ so normiert werden daß gilt $\Gamma^2 = N(\Gamma) = 1$. Dies zeigt die erste Äquivalenz. Das in $O(V)$ zentrale Element $-id_V \in SO(V)$ liftet zu Γ. Γ ist aber nicht mehr zentral in $Pin(V)$, denn das Zentrum von $Pin(V)$ ist $\pm 1_C$ (siehe die Irreduzibiltät von $Pin(V)$, nächster Abschnitt). Da die Elemente in $Spin(V)$ aber alle in $C^+(V)$ liegen, vertauschen sie mit $\pm\Gamma$. Somit ist das <u>Zentrum</u> von $Spin(V)$ gleich

$$1_C, \Gamma, -\Gamma, -1_C \ .$$

Da die Umkehrung trivial ist, folgt daraus die zweite Äquivalenz. QED.

Nun zum Fall, wo die Diskrimante $D(q)$ trivial ist und <u>m ungerade</u> ist: In diesem Fall ist das Zentrum von $Pin(V)$ gleich $\mu_4(k)$. Wegen $N(\Gamma) = (-1)^m D(q) = (-1)^m$ liftet $-id_V$ genau dann zu $Pin(V)$, wenn $i = \sqrt{-1} \in k$. Dann sind $\pm i\Gamma$ die zwei möglichen Liftungen und es gilt $(i\Gamma)^2 = -1_C$. Somit ist das Zentrum zyklisch von der Ordnung 4.

<u>Adjungierte Operation</u>: Die Gruppe $GPin(V)$ operiert durch Konjugation auf $C(V)$ und respektiert die Filtration Fil. Die Konjugationsdarstellung von $GPin(V)$ zerfällt in die direkte Summe $\bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i(V)$. Hierbei operiert $GPin(V)$ über den Quotienten $O(V)$. Die Darstellungen $\Lambda^i(V)$ von $O(V)$ sind irreduzibel (für $i \neq m$ sogar unter $SO(V)$) und es gilt bezüglich der Paarung $< .,. >$

$$\Lambda^{n-i}(V) \cong \Gamma \otimes \Lambda^i(V)^{dual} \ .$$

Hierbei operiert $O(V)$ auf dem eindimensionalen Raum $k \cdot \Gamma$ <u>axial</u>, d.h. mit dem Determinanten Charakter der orthogonalen Gruppe $O(V)$.

Die Pin-Darstellung

Sei nun V hyperbolisch. Dann existiert eine ausgezeichnete Darstellung von $GPin(V)$, nämlich die Pin-Darstellung auf dem Pin-Modul $P = P(V) = k^N, N = 2^m$ bezüglich des Homomorphismus $GPin(V) \hookrightarrow C^* \cong Gl(N,k)$. Diese Darstellung ist eine irreduzible Darstellung von $GPin(V)$ sowie von $Pin(V)$, und faktorisiert nicht über $O(V)$. Zur Irreduzibilität: Wegen des Schur Lemmas genügt es den Zentralisator von $Pin(V)$ in $C(V) = End_k(P)$ zu berechnen. $Pin(V)$ enthält ein Erzeugendensystem von V aus nicht isotropen Vektoren. Daher ist der Zentralisator von $Pin(V)$ gleich dem Zentralisator von ganz $C(V)$, also eindimensional und gleich $k \cdot 1_C$. Beachte $C(V)$ wird von V als Algebra erzeugt, und ist andererseits isomorph zu einer Matrixalgebra.

Für feinere Betrachtungen nun eine etwas modifizierte Beschreibung des Pin-Moduls P. Sei V hyperbolisch und $V = \mathcal{L}^* \oplus \mathcal{L}$ eine Zerlegung in maximal isotrope Teilräume. Sei $e_1^*, .., e_m^*$ eine Basis von $\mathcal{L}^*$ und $e_1, .., e_m$ eine duale Basis von $\mathcal{L}$. Setze $|0\rangle_{\mathcal{L}} = e_1^* \cdot ... \cdot e_m^*$ in $C(V)$. Dann ist

$$P_{\mathcal{L}} \ = \ C(V) \cdot |0\rangle_{\mathcal{L}} \ \cong \ \Lambda^{\bullet}(\mathcal{L}) \cdot |0\rangle_{\mathcal{L}}$$

ein $C(V)$-Linksideal in $C(V)$. Man sieht dann leicht, daß die Abbildung $C(V) \to End_k(P_{\mathcal{L}})$ ein Isomorphismus ist. Die Einschränkung auf $GPin(V) \subset C^*$ definiert die $Pin(V)$-Darstellung auf dem Pin-Modul $P_{\mathcal{L}}$. Da $O(V)$ transitiv auf den Lagrange Zerlegungen $V = \mathcal{L}^* \oplus \mathcal{L}$ operiert, sind alle so definierten Darstellungen von $GPin(V)$ isomorph zueinander. Die Paarung $< c_1, c_2 >= Ber(\overline{c}_1 \cdot c_2)$ eingeschränkt auf $P_{\mathcal{L}^*}$ und $P_{\mathcal{L}}$

$$< .,. >: \ P_{\mathcal{L}^*} \times P_{\mathcal{L}} \to k$$

ist $Pin(V)$-equivariant und wegen $< |0\rangle_{\mathcal{L}^*}, |0\rangle_{\mathcal{L}} > \neq 0$ nichtausgeartet (da es irreduzible Moduln sind) und $(-1)^m$-symmetrisch. $P_{\mathcal{L}^*}$ ist isomorph zu $P_{\mathcal{L}}$ als Modul unter $Pin(V)$. Denn $P_{\mathcal{L}^*} = dP_{\mathcal{L}}d^{-1}$ für $d \in GPin(V)$ mit Bild $f \in O(V)$ und $SN(f) = 1$ sowie

$$f(\mathcal{L}^*) = \mathcal{L} \ .$$

Zur Existenz von d: ObdA sei dazu $n = 2$. Dann ist $f \in O(V)$ die Spiegelung am Element $v = e - e^*$ mit $N(v) = -q(v) = 1$.

Somit ist die Pin-Darstellung $P_{\mathcal{L}}$ von $Pin(V)$ selbstdual. Dies ist nicht mehr richtig für die Darstellung der größeren Gruppe $GPin(V)$ auf $P_{\mathcal{L}}$. Hier gilt

$$P_{\mathcal{L}} \otimes_k P_{\mathcal{L}} \ \cong\ P_{\mathcal{L}^*} \otimes_k P_{\mathcal{L}} \ \to\ N \otimes_k k\ ,$$

wegen $< d \cdot s^*, d \cdot s > = \ N(d) \cdot < s^*, s >$ für $d \in GPin(V)$ und $s^* \in P_{\mathcal{L}^*}$ resp. $s \in P_{\mathcal{L}}$. Also als $GPin(V)$-Modul gilt

$$(P_{\mathcal{L}})^{dual} \ \cong\ N^{-1} \otimes_k P_{\mathcal{L}}\ .$$

Zur Erinnerung $\rho(g)^{dual} := (\rho(g)')^{-1}$. Die adjungierte Darstellung von $GPin(V)$ auf $End_k(P_{\mathcal{L}}, P_{\mathcal{L}}) = C(V)$ ist aber isomorph zu $(P_{\mathcal{L}})^{dual} \otimes_k P_{\mathcal{L}}$. Es folgt

$$P_{\mathcal{L}} \otimes_k P_{\mathcal{L}} \ \cong\ N \otimes_k \bigoplus_{i=0}^{n} \Lambda^i(V)\ .$$

Variante: Betrachtet man nur die Operation der Untergruppe $Spin(V)$, kann man auch so argumentieren: Der $Spin(V)$-Modul (C, Ad) mit der Operation $c \mapsto d^{-1}cd$ entspricht $P_{\mathcal{L}}^{dual} \otimes_k P_{\mathcal{L}} \cong End_k(P_{\mathcal{L}})$. Das Tensorprodukt $P_{\mathcal{L}} \otimes_k P_{\mathcal{L}}$ entspricht dem $Spin(V)$-Modul $(C, \otimes^2)$ mit der Operation $c \mapsto (d^T)cd$. Einen $Spin(V)$-äquivarianten Isomorphismus $(C, Ad) \to (C, \otimes^2)$ liefert die Abbildung $c \mapsto \mathcal{F} \cdot c$. Beachte

$$d^T(\mathcal{F}c)d \ =\ \mathcal{F}(d^{-1}cd)$$

wegen $d^T = \mathcal{F}d^{-1}\mathcal{F}$ für alle $d \in Spin(V)$. Die Transposition $(.)^T$ ist ein $Spin(V)$-äquivarianter Automorphismus von $(C, \otimes^2)$. Wegen $|d| = 0$ gilt

$$\begin{tikzcd}
(C, Ad) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}(.)^*"'] & (C, \otimes^2) \arrow[d, "(.)^T"] \\
(C, Ad) \arrow[r, "\simeq"] & (C, \otimes^2)
\end{tikzcd}$$

Wegen $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}c)^* = \mathcal{F}c^*(\mathcal{F}^{-1})^* = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\mathcal{F}c^*\mathcal{F}^{-1} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}c^T$ kommutiert das Diagramm.

Spindarstellungen

Sei V hyperbolisch. Schränkt man die Pin-Darstellung $P_{\mathcal{L}}$ auf die Spinorgruppe $Spin(V)$ ein, wird die Darstellung $P_{\mathcal{L}}$ reduzibel. Sie zerfällt in zwei irreduzible $Spin(V)$-Moduln $S_{\mathcal{L}}^{\pm}$

$$P_{\mathcal{L}} \ = \ S_{\mathcal{L}}^{+} \oplus S_{\mathcal{L}}^{-} \ .$$

Bezüglich der Identifikation $P_{\mathcal{L}} \ \cong \Lambda^{\bullet}(\mathcal{L})$ gilt dabei

$$S_{\mathcal{L}}^{\pm} \ = \ \Lambda^{\pm}(\mathcal{L}) \ .$$

Wegen Mackey's Lemma kann $P_{\mathcal{L}}$ höchstens in zwei irreduzible Darstellungen der Spinorgruppe zerfallen. Somit sind die Spinormoduln $S_{\mathcal{L}}^{+}$ und $S_{\mathcal{L}}^{-}$ irreduzible $Spin(V)$-Moduln. Alternativ, der Kommutator von $Spin(V)$ in $C(V)$ ist $k \cdot 1_C + k \cdot \Gamma$.

Zur Konstruktion: In der Tat kommutiert die Gruppe $Spin(V) \subset C^{+}(V)$ mit dem Element $\Gamma \in GPin(V)$. Andererseits gilt

$$\Gamma|0\rangle_{\mathcal{L}} \ = \ |0\rangle_{\mathcal{L}} \ .$$

Beachte $(e_1+e_1^*)(e_1-e_1^*) = (1-2e_1e_1^*)$ sowie $(e_1+e_1^*)(e_1-e_1^*)...|0>_{\mathcal{L}} = |0>_{\mathcal{L}}$. Es folgt $\Gamma \cdot c|0\rangle_{\mathcal{L}} = \Gamma c \Gamma^{-1}|0\rangle_{\mathcal{L}}$.

Somit operiert Γ auf $P_{\mathcal{L}} \cong \Lambda^{\bullet}(\mathcal{L})$ durch die Konjugation $F = int(\Gamma)$, welche die $\mathbb{Z}/2$-Graduierung auf $C(V)$ und damit auf $\Lambda^{\bullet}(\mathcal{L})$ induziert. Somit operiert $Spin(V)$ auf den $\pm$-Eigenräumen von $int(\Gamma)$ separat. $P_{\mathcal{L}}$ zerfällt also in die beiden Darstellungen auf $\Lambda^{\pm}(\mathcal{L})$. Wir haben dabei Γ so normiert, daß $-\Gamma$ im Kern der Darstellung $S_{\mathcal{L}}^{+}$ liegt und Γ im Kern der Darstellung $S_{\mathcal{L}}^{-}$.

Da Γ zentral in $Spin(V)$, aber nicht zentral in $GPin(V)$ ist, gilt $\sigma\Gamma\sigma^{-1} = -\Gamma$ und somit

$$S_{\mathcal{L}}^{\pm} \circ \sigma \ \cong \ S_{\mathcal{L}}^{\mp}$$

für jedes $\sigma \in Pin(V) \setminus Spin(V)$. σ induziert einen äußeren Automorphismus von $Spin(V)$ wegen $Pin(V)/Spin(V) \cong O(V)/SO(V) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, da V hyperbolisch ist. Resume: Γ und $-\Gamma$ operieren mit $-1, 1$ auf $S_{\mathcal{L}}^{+}$ und mit $1, -1$ auf $S_{\mathcal{L}}^{-}$. Dies beschreibt die Operation des Zentrums von $Spin(V)$, welches von $\pm\Gamma$ (m gerade) resp. $\pm i\Gamma$ (m ungerade) erzeugt wird. Es folgt für $S = S_{\mathcal{L}}^{\pm}$

$$Hom_{Spin(V)}(S \otimes S, S) \ = \ 0 \ .$$

Im Vergleich dazu ist die Operation auf $\Lambda^i(V)$ gegeben durch $(-1)^i, (-1)^i$ und es gilt

$$\Lambda^i(V) \circ \sigma \;\cong\; \Lambda^i(V) \ .$$

Schließlich sei bemerkt

$$(S^{\pm}_{\mathcal{L}})^{dual} \;\cong\; S^{\pm\varepsilon}_{\mathcal{L}} \quad , \quad \varepsilon = (-1)^m \ .$$

Beweis: Das Element

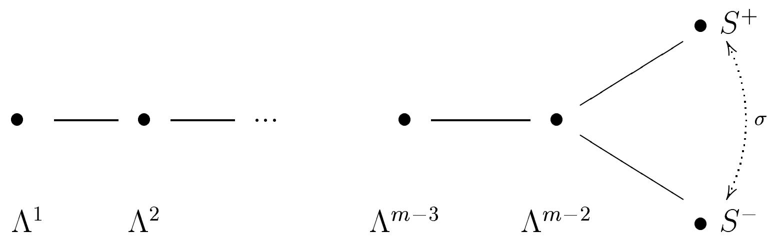
$$\mathcal{F} = (e_1 - e_1^*)...(e_m - e_m^*)$$

liegt in $Pin(V)$ mit $\mathcal{F}^2 = (-1)^{m(m+1)/2}$, und induziert die Abbildung

$$f = (-1)^m \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

aus $O(V)$. Daher gilt $f(\mathcal{L}^*) = \mathcal{L}$ und somit $int(\mathcal{F}) : P_{\mathcal{L}^*} \to P_{\mathcal{L}}$. Genauer $P_{\mathcal{L}^*}(d) \cong P_{\mathcal{L}}(\mathcal{F} d \mathcal{F}^{-1})$. Diese Abbildung ist äquivariant und twistet die Darstellung $S^{\pm}_{\mathcal{L}^*} = (S^{\pm}_{\mathcal{L}})^{dual}$ in Abhängigkeit von der Restklasse $det(f) = (-1)^m$ von f in $O(V)/SO(V)$, identifiziert mit ± 1.

Dynkin Diagram D_m von $SO(V)$:



Die Moduln $\Lambda^2(S)$ und $Symm^2(S)$

Sei V hyperbolisch, also $n = 2m$ gerade. Wir nehmen außerdem aus Bequemlichkeit $2|m$ an, da sonst einige Formeln in der Formulierung Fallunterscheidungen benötigen, weil z.B. $m/2$ nicht definiert ist.

Wir erinnern an die Existenz von $Spin(V)$-Isomorphismen zwischen den Darstellungen $(C(V), \otimes^2)$ und $(C(V), Ad)$. Mit anderen Worten $P_{\mathcal{L}} \otimes_k P_{\mathcal{L}} \cong P_{\mathcal{L}}^{dual} \otimes_k P_{\mathcal{L}} = \bigoplus_{i=0}^n \lambda_V^i$. Wir erinnern daran, daß bezüglich der adjungierten Operation gilt $(C^i(V), Ad) = \lambda_V^i$. Die Zerlegung in die Teilräume $C^{\pm}(V)$ wird wegen $2|m$ auch von der Tensordarstellung repektiert. Für die $Spin(V)$-Moduln $S^{\pm} = S_{\mathcal{L}}^{\pm}$ gilt

$$(C^+(V), \otimes^2) \ \cong \ (S^+ \otimes_k S^+) \oplus (S^- \otimes_k S^-) \ \cong \ \bigoplus_{i=0}^{m} \lambda_V^{2i}$$

sowie

$$(C^-(V), \otimes^2) \ \cong \ (S^+ \otimes_k S^-) \oplus (S^- \otimes_k S^+) \ \cong \ \bigoplus_{i=0}^{m-1} \lambda_V^{2i+1} \ .$$

Dies folgt aus $P_{\mathcal{L}} \otimes_k P_{\mathcal{L}} \cong \bigoplus_{i=0}^n \lambda_V^i$ durch Vergleich der Operation des Zentrums.

Konjugation mit einem $\sigma \in O(V) \setminus SO(V)$ vertauscht die beiden Spindarstellungen $S^{\pm}$. Es folgt

$$(S^{\pm} \otimes_k S^{\pm}) \ \cong \ (\lambda_V^m)^{\pm} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m/2-1} \lambda_V^{2i} \ .$$

Dies ist nur ein Isomorphismus! Die zu λ_V^{2i} isomorphe Komponente ist nämlich ein Teilraum von $C^{2i}(V) \oplus C^{n-2i}(V)$. Die beiden Summanden sind nicht isomorph als $O(V)$-Modul, sind aber isomorph als $SO(V)$-Moduln.

Aus dem letzen Isomorphismus folgt $dim_k \ Hom_{Spin(V)}(End(S^{\pm}), \lambda_V^2) = 1$ für alle $m > 2$. Genauer gilt dann sogar $S \otimes_k S \cong S^{dual} \otimes_k S \cong End(S)$ für die beiden Spinmoduln $S = S^{\pm}$. Genauer gilt sogar (beachte $2|m$)

$$dim_k\ Hom_{Spin(V)}(\Lambda^2(S), \lambda_V^2) = 1 \quad , \quad (4\,|m)\ .$$
$$dim_k\ Hom_{Spin(V)}(Symm^2(S), \lambda_V^2) = 1 \quad , \quad (4\not|m)\ .$$

Dazu folgendes: Der $Spin(V)$-Modul $(C^+(V), \otimes^2)$ zerfällt in die Untermoduln der symmetrischen und antisymmetrischen Tensordarstellung, d.h. in die beiden T-Eigenräume. Der im vorletzten Abschnitt studierte Isomorphismus $(C^\pm(V), \otimes) \cong (C^\pm(V), Ad)$ erhält die Graduierung (wegen $2|m$) und bildet die $(.)^T$-Eigenräume ab auf die $(-1)^{m(m-1)/2}(.)^*$-Eigenräume. Wegen

$$C^+(V)_{*=1} \cong \bigoplus_{i\ gerade} C^{2i}(V) \quad , \quad C^+(V)_{*=-1} \cong \bigoplus_{i\ ungerade} C^{2i}(V)$$

folgt im Fall $4|m$

$$C^+(V) \cap \Lambda^2(P_{\mathcal{L}}) \cong \bigoplus_{i\ ungerade} \lambda_V^{2i}$$
$$C^+(V) \cap Symm^2(P_{\mathcal{L}}) \cong \bigoplus_{i\ gerade} \lambda_V^{2i}\ .$$

Im Fall $2|m$ und $4\not|m$ dagen vertauschen sich gerade die beiden Fälle.

Liealgebren und Spinoren

Sei V hyperbolisch mit $4|n$. Sei $\mathfrak{g}$ eine k-Liealgebra, welche die Liealgebra $so(V)$ als Unteralgebra enthält. Dann gilt $\mathfrak{g} = so(V) \oplus S$. Hierbei ist S ein $so(V)$-Modul. Es gilt

- Der Kommutator $[,]$ auf $so(V)$ ist der Kommutator von $so(V)$.
- Der Kommutator $[,]$ auf $so(V) \times S$ ist die Lie Algebra Aktion $[X, s] = X \cdot s$ für $X \in so(V), s \in S$.

Ist S isomorph zu einem der beiden Spinmoduln $S = S^{\pm}_{\mathcal{L}}$, dann gilt

- Der Kommutator $[,]$ auf $S \times S$ ist wegen der Jacobi Identität eine $so(V)$-äquivariante k-bilineare Abbildung von $S \times S$ nach $so(V)$. Wegen der Äquivarianz und Antisymmetrie faktorisiert diese in der Form

  $$S \otimes S \to \Lambda^2(S) \to so(V) \subset so(V) \oplus S = \mathfrak{g}$$

  wegen $Hom_{Spin(V)}(S \otimes S, S) = 0$. Also gilt für den Kommutator auf S

  $$[,]_{S \times S} : \ \Lambda^2(S) \to so(V) \ .$$

  Diese $Spin(V)$-äquivariante Abbildung ist wegen der Irreduzibilität von

  $$(so(V), Ad) \cong \lambda^2_V$$

  eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar.

Umgekehrt definieren Daten dieser Art eine <u>einfache</u> (!) Liealgebra $\mathfrak{g}$, falls $[,]$ antisymmetrisch fortgesetzt die Jakobi-Identität erfüllt. Dazu genügt (!), daß die (de fakto) kanonische äquivariante Abbildung

$$T : \quad S \otimes_k S \otimes_k S \to \Lambda^2(S) \otimes_k S \to so(V) \otimes_k S \to S,$$

d.h. also $T(s_1, s_2, s_3) = [s_1, s_2] \cdot s_3$, die Gleichung $(*)$

$$T(s_1, s_2, s_3) + T(s_2, s_3, s_1) + T(s_3, s_1, s_2) = 0$$

erfüllt. Wegen der Antisymmetrie von T in den ersten beiden Variablen ist dazu äquivalent $T(\Lambda^3(S)) = 0$ für $\Lambda^3(S) \subset S \otimes_k S \otimes_k S$, falls $char(k) \neq 2, 3$.

Ein Ansatz: Sei $(.,.)$ eine symmetrische $Spin(V)$-invariante k-Bilinearform auf S. Eine solche Form $(.,.)$ ist eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar und existiert genau dann, wenn $8|n$ (siehe das Kapitel über das fermionische Modell). Setze

$$T(s_1, s_2, s_3) = s_1(s_2, s_3) - s_2(s_1, s_3) \ .$$

T ist antisymmetrisch in s_1, s_2 und erfüllt Gleichung $(*)$ wegen der Symmetrie von $(.,.)$

$$s_1(s_2, s_3) - s_2(s_1, s_3) + s_2(s_3, s_1) - s_3(s_2, s_1) + s_3(s_1, s_2) - s_1(s_3, s_2) = 0 \ .$$

Es bleibt dann nur zu prüfen, ob die Projektion von T auf $so(V)$, d.h. die von T induzierte äquivariante Abbildung

$$\Lambda^2(S) \ \hookrightarrow \ S \otimes S \cong End(S) \ \hookrightarrow \ End(P_{\mathcal{L}}) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \lambda_V^i \ \twoheadrightarrow \ \lambda_V^2 \oplus \lambda_V^{n-2},$$

nichttrivial ist! Dies genügt es etwa auf dem Höchstgewichtvektor v zu überprüfen. Hierzu benutzen wir in den folgenden beiden Beispiele das im nächsten Abschnitt erklärte fermionische Modell. Zur Erinnerung $\lambda_V^2 \cong \lambda_V^{n-2} \cong so(V)$ als $Spin(V)$-Moduln:.

Der Fall $n = 8$: Sei $S = S^+ = \Lambda^{2\bullet}(k^4)$. Dann ist der Höchstgewichtvektor v in $\Lambda^2(S)$ gleich

$$v \ = \ (\theta_1\theta_2) \wedge (\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4) \ .$$

Man sieht, daß die obige Abbildung v nicht auf Null abbildet. Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ existiert also. Sie ist isomorph zu $so(9)$, also vom Typ B_4.

Der Fall $n = 16$: Sei $S = S^+ = \Lambda^{2\bullet}(k^8)$. Der gesuchte Höchstgewichtvektor v in $\Lambda^2(S)$ ist

$$v \ = \ (\theta_1\theta_2) \wedge (\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8) \ - \sum_{1 \leq i < j \leq 8} (\theta_1\theta_2\theta_i\theta_j) \wedge *(\theta_i\theta_j) \ .$$

Man sieht wieder sofort, daß die obige Abbildung v nicht auf Null abbildet. Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ existiert also, und ist die Ausnahmeliealgebra E_8.

Im allgemeinen würde die Konstruktion eine einfache Liealgebra vom Rang m und von der Dimension $(2m^2 - m) + 2^{m-1}$ liefern. Eine solche kann für $n > 16$ nicht existieren.

Das fermionische Modell

Wir betrachten einen hyperbolischen quadratischen Raum $V = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^*$ mit einer festen Lagrange Zerlegung. Die Matrizen

$$g(A) = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad , \quad g(U) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & (U')^{-1} \end{pmatrix}$$

erzeugen den Stabilisator $SO_{\mathcal{L}}(V)$ in $SO(V)$ des Raumes $\mathcal{L} \subset V$. Sei nun m gerade. Jedes Element in $SO(V)$ schreibt sich dann in der Form $g(U) \cdot h$, wobei h ein Produkt von Matrizen vom Typ f und $g(A)$ ist. Aber $SN(g(A)) = 1$ und $SN(f) = 1$. Die Matrizen $U \in Gl(\mathcal{L})$ mit $SN(g(U)) = 1$ definieren eine Untergruppe $Gl(\mathcal{L})^+$ von $Gl(\mathcal{L})$. Der Spinorkern in $O(V)$ wird daher von den Elementen $g(A)$, f und $g(U)$ mit $U \in Gl(\mathcal{L})^+$ erzeugt. Ist m ungerade, dann ist jedes Element in $O(V)$ von der Form $g(U) \cdot h$, wobei h ein Produkt von Matrizen vom Typ f und $g(A)$. Wieder gilt $SN(g(A)) = 1$ und $SN(f) = 1$. Der Spinorkern von ganz $O(V)$ wird jetzt von den Elementen $g(A)$, f und $g(U)$ mit $U \in Gl(\mathcal{L})^+$ erzeugt.

Aus Beispiel 4 schließt man leicht, daß die Spinornorm auf $Gl(\mathcal{L})$ durch die Determinante gegeben wird

$$SN(g(U)) \ = \ det(U) \cdot (k^*)^2 \ .$$

Daraus ist $Gl(\mathcal{L})^+$ die Untergruppe von $Gl(\mathcal{L})$ aller Matrizen, deren Determinante ein Quadrat in k^* ist.

Sei $GPin_{\mathcal{L}}(V)$ das Urbild in der Gruppe $GPin(V)$ des Stabilisators von $\mathcal{L}$ in der Gruppe $O(V)$. Dann erzeugt $\mathcal{F}$ und $GPin_{\mathcal{L}}(V)$ die Gruppe $GPin(V)$. Für $d \in GPin(V)$ und $|0\rangle_{\mathcal{L}^*} = e_1 ... e_m$ gilt

$$d|0\rangle_{\mathcal{L}^*} \ = \ \chi(d)|0\rangle_{\mathcal{L}^*}$$

für einen gewissen Charakter χ von $GPin(V)$, sowie

$$d \cdot c \cdot |0\rangle_{\mathcal{L}^*} = dcd^{-1} \cdot d \cdot |0\rangle_{\mathcal{L}^*} = \chi(d) dcd^{-1} \cdot |0\rangle_{\mathcal{L}^*} \ .$$

Der Charakter χ ist trivial auf Γ.

Den Pinmodul $P_{\mathcal{L}}$ kann man dann beschreiben wie folgt:

Der <u>fermionische Fockraum</u> sei der k-Vektorraum aller superkommutativen Polynom-Funktionen auf $\mathcal{L}$. Dessen Elemente sind gerade und ungerade k-wertige Funktionen $h(\theta) \in \Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*)$. Das Berezin Integral $\int_{\mathcal{L}} f(\theta,\eta)d\eta$ einer supersymmetrischen Funktion $f(\theta,\eta) = \sum_I f_I(\theta)\eta_I$ von antikommutierenden Variablen $\eta_1, ..., \eta_m$ auf $\mathcal{L}^*$ mit Werten in einer superkommutativen k-Algebra A ist hierbei definiert durch die Projektion auf den Term $f_{\{12...m\}}(\theta)$. Hierbei seien die $f_I(\theta)$ aus A die Taylor-Koefizienten $f(\theta,\eta) \in A \otimes_k^\varepsilon \Lambda^\bullet(\mathcal{L})$.

Satz: Auf dem fermionischen Fockraum operiert $\mathcal{F}$ mit der Fouriertransformation (bezüglich des <u>Berezin-Integrals</u>)

$$\mathcal{F}(h)(\theta) = \int_{\mathcal{L}} exp(-\sum_{i=1}^m \theta_i\eta_i) \cdot h(\eta)d\eta \ .$$

Es gilt $\mathcal{F}^2 = (-1)^{m(m+1)/2} \cdot id$. Weiterhin, $g(U)$ mit $U \in Gl(\mathcal{L})^+$ operiert durch Pullback

$$h(\theta) \mapsto det(U)^{-1/2} \cdot h(U'\theta) \ .$$

(θ wurde hierbei als Spaltenvektor aufgefaßt.) $g(A)$ operiert durch

$$h(\theta) \mapsto exp(-\sum_{i<j} A_{ij}\theta_i\theta_j) \cdot h(\theta) \ .$$

Die von diesen Substitutionen erzeugte Gruppe G ist $Spin(V)$ (m gerade) oder $Pin(V)$ (m ungerade) und die zugehörige Darstellung ist isomorph zur Darstellung auf $Pin_{\mathcal{L}}$ mit einem natürlichen Isomorphismus $Fock: \ P_{\mathcal{L}} \cong \Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*)$. Die k-bilineare Paarung

$$(h_1, h_2) \ = \ \int_{\mathcal{L}} \overline{h_1(\eta)} \cdot h_2(\eta)d\eta$$

auf dem Fockraum ist G-invariant, als solche eindeutig bestimmt bis auf einen Skalar, und erfüllt $(h_2, h_1) = (-1)^{m(m+1)/2} \cdot (h_1, h_2)$.

<u>Bemerkung</u>: Wie man sich leicht überlegt ist $exp(-\sum_{i<j} A_{ij}\theta_i\theta_j)$ auch in positiver Charakteristik wohldefiniert!

<u>Bemerkung</u>: Bei der Operation der $g(U)$ muß durch Wahl einer Wurzel eine Wahl getroffen werden. Die Überlagerungsgruppe $\tilde{Gl}(\mathcal{L})$ von $Gl(\mathcal{L})^+$ aller Paare (U, α) mit $U \in Gl(\mathcal{L})$ und $\alpha^2 = det(U)$ operiert kanonisch.

Wellenpackete: Zum Abschluß sei bemerkt, daß im Fall $2|m$ die Funktionen

$$f_A(\theta) \ = \ exp(-\sum_{i<j} A_{ij}\theta_i\theta_j)$$

ein Erzeugendensystem von $S^+_{\mathcal{L}}$ bilden. Dazu genügt die Stabilität des erzeugten Unterraums unter $Spin(V)$ wegen der Irreduzibilität von $S^+_{\mathcal{L}}$. Daß die Substitutionen $g(U)$ unf $g(A)$ den Raum erhalten ist klar. Für die Fourier Transformation gilt

$$\mathcal{F}(f_A) = Pf(-A)\cdot f_{A^{-1}} \ ,$$

falls A invertierbar ist. Der Fall mit $det(A)=0$ verbleibt als Übungsaufgabe. Wie im Fall $det(A)\neq 0$ reduziert man auf den zweidimensionalen Fall und benutzt für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

die quadratische Ergänzung

$$-a\eta_1\eta_2 + \eta_1\theta_1 + \eta_2\theta_2 = -a(\eta_1 + a^{-1}\theta_2)(\eta_2 - a^{-1}\theta_1) + a^{-1}\theta_1\theta_2 \ .$$

Der quadratische ergänzte Term gibt nach der Substitution $\tilde{\eta}_1 = (\eta_1 + a^{-1}\theta_2)$ und $\tilde{\eta}_2 = (\eta_2 - a^{-1}\theta_1)$ das Integral

$$Pf(-A) = det(-A)^{1/2} \qquad \text{(Pfaffsches Aggregat)} \ .$$

Beweis

Wir beweisen die Aussagen des Satzes im letzen Abschnitt.

1)Für alternierende $m \times m$-Matrizen A setzen wir $\frac{1}{2}A\{e\} = \sum_{i<j} A_{ij}e_ie_j$. Für beliebiges X setzen wir $\xi_X = \sum_{i,j} X_{ij}e_ie_j^*$. Dann gilt für alle $v \in V$

$$[\frac{1}{2}A\{e\}, v] = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v \quad , \quad [\xi_X, v] = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X' \end{pmatrix} v \ .$$

Es gilt

$$Spin(V) \ni exp(\frac{1}{2}tA\{e\}) \mapsto g(A) = \begin{pmatrix} E & tA \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

und

$$GPin(V) \ni exp(t\xi_X) \mapsto g(U) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & (U')^{-1} \end{pmatrix}$$

für $U = exp(tX)$. Der Charakter χ ist trivial auf den Elementen $g(A)$. Allerdings ist $exp(t\xi_X)$ nicht in $Spin(V)$. Es gilt $N(exp(t\xi_X)) = exp(tSpur(X)) = det(U)$, da $\overline{e_ie_j*} = \delta_{ij} - e_ie_j^*$. Andererseits ist $\chi(exp(t\xi_X)) = exp(tSpur(X))$ wegen $e_ie_j^*(e_1...e_m) = \delta_{ij}(e_1..e_m)$. Somit liegt $det(U)^{-1/2}exp(t\xi_X)$ in $Spin(V)$ und operiert mit $det(U)^{1/2}$.

2)Wir betrachten nun den Modul $P_{\mathcal{L}^*}$. Das Element $g(U)$ für $U \in Gl(\mathcal{L})^+$ operiert durch Pullback

$$e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*} \mapsto det(U)^{1/2} \cdot ((U^{-1})^*e_I^*)|0\rangle_{\mathcal{L}^*}$$

für $U \in Gl(\mathcal{L})$. $g(A)$ operiert wie

$$e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*} \mapsto exp(\sum_{i<j} A_{ij}e_ie_j) \cdot e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*} \ .$$

3)Wir beschreiben nun die Operation von $\mathcal{F}$ auf $e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*}$ mit $e_I^* = e_{i_1}...e_{i_r}$ (absteigend sortiert!). Sei κ_I das Vorzeichen der Permutation, welche $1,..,n$ in I^c, I umordnet (I^c absteigend, I aufsteigend). Dann ordnen wir $\mathcal{F}$ mit dieser Permuation um und erhalten $\mathcal{F}e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*} = \kappa_I(-1)^{|I^c|}e_{I^c}^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*}$. Sei $\eta_I = \eta_{i_r}...\eta_{i_1}$ (aufsteigend sortiert). Dann gilt $\int(1-\theta_1\eta_1)...(1-\theta_m\eta_m)\eta_I = \int\prod_{\nu\in I^c}(1-\theta_\nu\eta_\nu)\eta_I = (-1)^{|I^c|}\theta_{I^c}\int(\eta_{I^c})^*\eta_I = (-1)^{|I^c|}\theta_{I^c}\kappa_I$. Hier ist θ_{I^c} aufsteigend sortiert und $(\eta_{I^c})^*$ entsteht aus η_{I^c} durch Umordnen in eine absteigende Reihenfolge. Beachte $\prod_J \theta_j\eta_j = \theta_J(\eta_J)^*$ mit θ_J aufsteigend sortiert.

Somit liefert die Zuordnung $\sum_I \lambda_I e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*} \mapsto h(\eta) = \sum_I \lambda_I \eta_I$ den Übergang von der Operation von $\mathcal{F}$ auf dem Pinmodul zur Fourier Transformation

$$\mathcal{F}(h) = \overline{*h}$$

für $h \in \Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*)$ aus dem fermionischen Fockraum. Hierbei definiert $(*\eta_I)\eta_I = \eta_{\{1,..,m\}}$ den Hodge $*$-Operator $*\eta_I = \pm\eta_{I^c}$ der Graßmannalgebra $\Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*)$, und $\overline{\eta_I} = (-1)^{m(m+1)/2}\eta_I$ ist die Involution auf der Graßmannalgebra $\Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*)$, welche auf $\mathcal{L}^*$ die Identität ist.

Beachte $P_{\mathcal{L}} = int(\mathcal{F})P_{\mathcal{L}^*}$. Da $P_{\mathcal{L}^*}$ ein $C(V)$-Modul ist folgt

$$P_{\mathcal{L}} = P_{\mathcal{L}^*} \cdot \mathcal{F}^{-1}$$

in $C(V)$. Die Linksoperation auf dem rechtem Modul ist isomorph zur Pin-Darstellung $P_{\mathcal{L}^*}$ und wird durch die obigen Formeln beschrieben. Außerdem gilt $P_{\mathcal{L}^*}(d) \cong P_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}d\mathcal{F}^{-1})$ für $d \in Pin(V)$. Um daher die Aktion auf $P_{\mathcal{L}}$ zu beschrieben, muß man erst mit $\mathcal{F}$ konjugieren und (Linksmultiplikation mit $\mathcal{F}$)

$$e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*}\mathcal{F}^{-1} \ \mapsto \ \mathcal{F} \cdot e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*}\mathcal{F}^{-1} = (-1)^{|I^c|}\kappa_I e_{I^c}^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*}\mathcal{F}^{-1}$$

Konjugation mit $\mathcal{F}$ erhält $\mathcal{F}$, ersetzt $g(U)$ durch $g((U')^{-1})$ und transformiert $g(A)$ in die entsprechende untere Dreiecksmatrix. Ersetzt man daher die obigen Formeln in diesem Sinn, und betrachtet die Zuordnung $Fock$: $e_I^*|0\rangle_{\mathcal{L}^*}\mathcal{F}^{-1} \mapsto \eta_I$

$$Fock: \ P_{\mathcal{L}} = P_{\mathcal{L}^*}\mathcal{F}^{-1} \ \to \ \Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*) \ ,$$

so erhält man die behaupteten Formeln. Das Minuszeichen vor A kommt durch den Übergang von der aufsteigenden Basis e_I^* zur absteigenden Basis η_I. Es gilt

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathcal{L}} \arrow[r, "Fock"] \arrow[d, "\mathcal{F}"] & \Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\overline{(.)} \circ *"] & \text{Fockraum} \arrow[d, "Fourier"'] \\
P_{\mathcal{L}} \arrow[r, "Fock"] & \Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*) \arrow[r, equal] & \text{Fockraum}
\end{tikzcd}$$

In der Mitte steht die Zusammensetzung aus der eindeutig bestimmten Involution $\overline{(.)}$ von $\Lambda^\bullet(\mathcal{L}^*)$, welche auf $\mathcal{L}^*$ die Identität ist, mit dem Hodge Operator $*$.

4)Die Paarung: Die Eigenschaft $(h_2, h_1) = (-1)^{m(m+1)/2}(h_1, h_2)$ der Paarung folgt aus

$$\int_{\mathcal{L}} \overline{h(\eta)} d\eta = (-1)^{m(m+1)/2} \int_{\mathcal{L}} h(\eta) d\eta$$

wegen $\overline{\eta_1 ... \eta_m} = (-1)^{m(m+1)/2} \eta_1 ... \eta_m$. Die Invarianz der Paarung ist klar für $g(U)$ (Berezin Substitutionsregel). Für $g(A)$ folgt sie aus $\overline{\sum A_{ij} \eta_i \eta_j} = -\sum A_{ij} \eta_i \eta_j$. Es bleibt die Substitution $\mathcal{F}$. Die Elemente $\mathcal{F}(e_I) = \overline{*e_I}$ sind eine duale Basis der Elemente e_I bezüglich der Paarung wegen $*e_I e_I = e_1..e_m$. Das heißt $(\mathcal{F}e_I, e_J) = \delta_{IJ}$. Somit ist die $\mathcal{F}$-Invarianz gleichbedeutend mit $(\mathcal{F}^2 e_I, \mathcal{F}e_J) = \delta_{I,J}$. Letzteres folgt aber aus $\mathcal{F}^2 = (-1)^{m(m+1)/2}$ und $(h_2, h_1) = (-1)^{m(m+1)/2}(h_1, h_2)$.

Reelle Strukturen

Sei V ein reeller Vektorraum, und $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die Komplexifizierung. Die zugehörige Abbildung $\theta(v \otimes z) = v \otimes \overline{z}$ ist $\mathbb{C}$-antilinear. Das heißt

$$\theta(\lambda v + \mu w) = \overline{\lambda}\theta(v) + \overline{\mu}\theta(w)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und alle $v, w \in V_{\mathbb{C}}$. Die antilineare Abbildung $\theta = \theta_V$ erfüllt $\theta^2 = id_{V_{\mathbb{C}}}$ und bestimmt den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = (V_{\mathbb{C}})^{\theta}$ (als Fixpunktmenge).

Ist umgekehrt θ eine Bijektion eines komplexen $\mathbb{C}$-Vektorraums W mit den Eigenschaften

- θ ist $\mathbb{C}$-antilinear
- $\theta^2 = id_W$,

dann ist $V = W^{\theta}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und es gilt $\theta = \theta_V$ und $W = V_{\mathbb{C}}$. Antilineare Abbildungen mit dieser Eigenschaft definieren daher eine <u>reelle</u> Struktur auf W. Zum Beispiel gilt $\theta \circ M \circ \theta^{-1} = \overline{M}$ für eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung M von W, geschrieben als Matrix bezüglich einer $\mathbb{R}$-Basis von V.

<u>Bemerkung</u>: Ist θ $\mathbb{C}$-antilinear mit der Eigenschaft $\theta^2 \in \mathbb{C}^* \cdot id_W$, dann kann θ so normiert werden, daß entweder $\theta^2 = id_W$ oder $\theta^2 = -id_W$ gilt. Nur im ersten Fall definiert θ eine reelle Struktur. Im zweiten Fall

$$\theta^2 = -id_W$$

definiert θ eine <u>quaternionale</u> Struktur auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum W.

Der reelle Fall

Sei nun k der Körper der reellen Zahlen. Ein nicht ausgearteter quadratischer Raum V ist bis auf Isomorphie durch den Sylvester Typ (p,q) bestimmt. Das heißt die zugrunde liegende quadratische Form ist durch eine symmetrische Matrix in der Diagonalform $diag(1,...,1,-1,..,-1)$ mit p Einsern und q - Einsern gegeben und $p+q=n$. Für uns ist der Lorentz Fall $p=1$ von besonderem Interesse.

Für V wie oben definieren wir die reelle Clifford Algebra $C(V)$ und die Gruppe $GPin(V)$ etc.. Wir wollen aber ganz allgemein eine Pin-Darstellung dieser Gruppe definieren. Diese Darstellung wird im allgemeinen "$\mathbb{C}$-wertig" sein. Aus diesem Grund betrachten wir die Komplexifizierung $W=V_{\mathbb{C}}$ des quadratischen Raums. Die quadratische Form q kann auf W fortgesetzt werden und macht W zu einem quadratischen Raum über dem Körper $k=\mathbb{C}$. Wir schreiben $(V,q)=(W,q)^{\theta}$.

Da zwei nicht ausgeartete quadratische Formen auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum äquivalent sind, gibt es eine komplexe Basiswechselmatrix A von W, welche q in Standardform transformiert. Zum Beispiel im Lorentz Fall mit gerader Dimension n (was im folgenden stillschweigend angenommen werden soll) wähle $A=diag(1,i,..,i,1,1,...,1)$ mit $(q-1)/2$ mal dem Eintrag i. Diese Matrix transformiert die Form q zur Form $S=diag(1,-1,..,-1,-1,..,-1)$ in die Splitform q_{split} zur symmetrischen Matrix $S_{split}=diag(1,...,1,-1,...,-1)$. Bis auf eine Reskalierung ist q_{split} hyperbolisch, denn bezüglich der Basis $e_1+e_1^*,...,e_m+e_m^*,e_1-e_1^*,..,e_m-e*_m$ wird die hyperbolische Form durch obige Diagonalmatrix S_{split} (bis auf den Skalar 2) repreäsentiert.

Der hyperbolische reelle Raum (V,q_{split}) definiert einen $\mathbb{C}$-antilinearen Automorphismus θ von $V_{\mathbb{C}}$, so daß q_{split} reell ist bezüglich θ. Dasselbe gilt für $C(V,q_{split})$ und die Pindarstellung. Dies definiert kompatible antilineare Automorphismen von $V_{\mathbb{C}}$, $C(V_{\mathbb{C}})$ und $P_{\mathcal{L}}$ (falls $\mathcal{L}$ wie oben reell gewählt wird), welche wir alle mit θ bezeichnen wollen. Der ursprüngliche betrachtete Raum (V,q) definiert auch eine reelle Struktur auf $(V_{\mathbb{C}},q_{split})$, welche wir mit $\theta_{p,q}$ oder θ_V bezeichnen wollen. Es gilt $\theta_{p,q}=diag(1,-1,..,-1,1,1,..,1)\circ\theta$. Mit Hilfe der Abbildungen $\theta=\theta_{p,p}$ und $\theta_{p,q}$ kann man sich dann vollkommen auf den komplexen Fall zurückziehen. Zum Beispiel ist $GPin(V,q)$ die Gruppe aller Matrizen in $GPin(V_{\mathbb{C}},q_{split})$, welche mit $\theta_{p,q}$ vertauschen. Die

Einschränkung der Pin-Darstellung von $GPin(V_{\mathbb{C}}, q_{split})$ auf diese Untergruppe $GPin(V,q)$ ist dann per Definition die Pin-Darstellung von $GPin(V,q)$ auf dem komplexen Vektorraum $P_{\mathcal{L}}$. Man sagt dann, daß diese Darstellung über $\mathbb{R}$ definiert ist, wenn es eine antilineare Abbildung $\tilde{\theta}, \tilde{\theta}^2 = id$ auf $P_{\mathcal{L}}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\tilde{\theta} \circ Pin_{\mathcal{L}}(g) \circ \tilde{\theta}^{-1} = Pin_{\mathcal{L}}(\theta_{p,q} \circ g \circ \theta_{p,q}^{-1})$$

für alle $g \in GPin(V_{\mathbb{C}}, q_{split})$. Beispielsweise definiert $\tilde{\theta} = \theta$ eine solche reelle Struktur im hyperbolischen Fall $p = q$.

<u>Bemerkung</u>: Da die Pindarstellung irreduzibel ist, ist $\tilde{\theta}$ eindeutig bestimmt, wenn sie existiert. Eine reelle Struktur existiert offensichtlich genau dann, wenn $C(V,q)$ isomorph ist zur reellen Matrix Algebra $M_{N,N}(\mathbb{R})$. Dies ist nicht immer der Fall. Beispielsweise im Fall $(p,q) = (1,3)$ gerade nicht! Man kann zeigen $C(V,q) \cong M_{N,N}(\mathbb{R})$ gilt genau dann, wenn $p - q \equiv 0, -2$ modulo 8.

Wir erhalten folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V,q) \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook, "\theta_{p,q}"] & (V,q_{split}) \arrow[d, hook, "\theta"] & \\
(V_{\mathbb{C}},q) \arrow[r, "\sim", "A"'] \arrow[d, hook] & (V_{\mathbb{C}},q_{split}) \arrow[d, hook] & \\
C(V_{\mathbb{C}},q) \arrow[r, "\sim", "C(A)"'] & C(V_{\mathbb{C}},q_{split}) \arrow[r, "\sim"] & End_{\mathbb{C}}(P_{\mathcal{L}}) \\
GPin(V_{\mathbb{C}},q) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & GPin(V_{\mathbb{C}},q_{split}) \arrow[u, hook] & \\
GPin(V,q) \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook, "\theta_{p,q}"'] & GPin(V,q_{split}) \arrow[u, hook, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Der Dirac Operator

Sei V ein reeller quadratischer Raum. Wir wählen eine Basis $e_1, .., e_n$ von V und einen $\mathbb{C}$-Isomorphismus A von $V_{\mathbb{C}}$ wie im letzten Abschnitt. Sei S die symmetrische Matrix, welche bezüglich dieser Basis die quadratische Form beschreibt. Setze $b_i = A(e_i)$ und $\gamma_i = \phi(b_i)$ bezüglich der Einbettung $\phi : V_{\mathbb{C}} \hookrightarrow C(V_{\mathbb{C}}, q_{split})$. Der Dirac Operator

$$D_V : \ C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) \ \to \ C^\infty(V, P_{\mathcal{L}})$$

ist dann definiert durch

$$D_V \ = \ i \cdot (\sum_{\nu,\mu=1}^{n} \gamma_\nu S_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}) \ - \ m \ .$$

D_V hängt nur von V und nicht von der Wahl der Basis ab.

Bemerkung: Der Faktor i macht D selbstadjungiert!

Äquivarianz: Für $g \in GPin(V_{\mathbb{C}}, q_{split})$ sei $\hat{g} \in O(V)$ die induzierte Isometrie. Wir setzen

$$\mathcal{C}_g(\psi)(x) = g(\psi(\hat{g}^{-1}(x))) \ .$$

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) & \xrightarrow{D_V} & C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) \\ {\scriptstyle \mathcal{C}_g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}_g} \\ C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) & \xrightarrow{D_V} & C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) \end{array}$$

Dies folgt aus $g^{-1} < \gamma, \partial > g\psi(\hat{g}^{-1}x) =< g^{-1}\gamma g, \hat{g}^{-1}(\partial) > \psi(x)|_{x \to \hat{g}^{-1}(x)} =< \gamma, \partial > \psi(x)|_{x \to \hat{g}^{-1}(x)}$. Insbesondere operiert $GPin(V_{\mathbb{C}}, q_{split})$ – und damit auch die Untergruppe $GPin(V) \subset GPin(V_{\mathbb{C}}, q_{split})$ – auf $Kern(D_V)$.

Die Matrix C: Das konjugiert komplexe $\overline{\psi}(x) := \theta(\psi(x))$ einer Lösung $\psi(x)$ der Dirac Gleichung ist im allgemeinen keine Lösung der Dirac Gleichung (wegen $i \mapsto -i$ und $\overline{\gamma}_\nu := \theta\gamma_\nu\theta^{-1} \neq \gamma_\nu$). Es gibt eine Matrix C in $End_{\mathbb{C}}(P_{\mathcal{L}}) = M_{N,N}(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad C \ v \ C^{-1} = \ -\theta(v) \quad , \quad \forall v \in \sum_\nu \mathbb{R} \cdot \gamma_\nu \ .$$

Mit anderen Worten: Konjugation mit C macht die Matrizen γ_ν alle rein imaginär. C existiert, da die γ_ν und die $-\theta(\gamma_\nu)$ dieselben Clifford Relationen erfüllen und ist eindeutig bis auf eine Konstante.

Konsequenzen der Gleichung $(*)$: C^2 vertauscht mit allen γ_ν und ist somit in $\mathbb{C}^* \cdot id$. Wir normieren C so daß gilt

$$C^2 = id \ .$$

Dann ist C und damit der Operator $\mathcal{C}_V$ bis auf ein Vorzeichen allein durch V bestimmt. Da C durch die Gleichung $(*)$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist, folgt außerdem $C = c \cdot \theta(C)^{-1}$. Wegen $C^2 = id$ gilt dann $c^2 = 1$ und $c = \pm 1$. Also

$$C \cdot \theta(C) \ = \ \kappa_V \cdot id \quad , \quad \kappa_V = \pm 1 \ .$$

Ladungsoperator $\mathcal{C}_V$: Mit obiger Normierung $C^2 = id$ setzt man

$$\psi^C(x) = C \cdot \theta(\psi(x)) =: C \cdot \overline{\psi}(x)$$

und erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) & \xrightarrow{D_V} & C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) \\ {\scriptstyle \mathcal{C}_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}_V} \\ C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) & \xrightarrow{D_V} & C^\infty(V, P_{\mathcal{L}}) \end{array}$$

für den Operator

$$\mathcal{C}_V : \psi(x) \mapsto \psi^C(x) \ .$$

Der Ladungsoperator $\mathcal{C}_V$ ist $\mathbb{C}$-antilinear und eindeutig bis auf ein Vorzeichen. Wegen $(*)$ gilt

$$\mathcal{C}_V \circ \mathcal{C}_g = \mathcal{C}_g \circ \mathcal{C}_V \quad , \quad \forall g \in Spin(V) \ .$$

Reelle Strukturen: $\mathcal{C}_V$ definiert eine reelle Struktur genau dann wenn $\mathcal{C}_V^2 = id$. Äquivalent dazu ist $C\theta(C) = id$. In diesem Fall definiert $C \circ \theta : P_{\mathcal{L}} \to P_{\mathcal{L}}$ eine reelle Struktur von $P_{\mathcal{L}}$. Es gilt $C\theta v (C\theta)^{-1} = C\theta(v)C^{-1} = C^{-1}\theta(v)C = -v$ gilt für alle $v \in \sum \mathbb{R} \cdot \gamma_\nu$. Die Umkehrung gilt auch. Die Gleichung $(*)$ besitzt eine Lösung $\Longleftrightarrow \exists C$ mit $C(i \cdot v)C^{-1} = \theta(i \cdot v)$ für alle v wie in $(*)$

mit $C\theta(C) = id$ und $C^2 = id \Longleftrightarrow C(V, -q) \cong M_{N,N}(\mathbb{R})$, da V die Clifford Algebra erzeugt. (Der Übergang von v nach $i \cdot v$ entspricht dem Übergang von der quadratischen Form $q(v)$ nach $-q(v)$).

<u>Folgerung</u>: Der <u>Ladungsoperator</u> $\mathcal{C}_V$ definiert eine <u>reelle</u> Struktur

$$\mathcal{C}_V^2 = id$$

genau dann, wenn gilt $q - p \equiv 0, 2$ modulo 8. (Im Lorentz Fall also $n \equiv 2, 4$ modulo 8). Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt $C(V, -q) \cong M_{N,N}(\mathbb{R})$.

<u>Der Operator Θ_V</u>: Leider kommutiert der Ladungsoperator nicht richtig mit der Operation von $GSpin(V)$. Sei Γ_{hyp} das chirale Element der hyperbolischen Struktur. Γ_{hyp} ist durch die Normierung $\Gamma_{hyp}^2 = 1$ bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Wir setzen

$$\Theta_V = \mathcal{C}_{\Gamma_{hyp}} \circ \mathcal{C}_V \ ,$$

also $\Theta_V(\psi)(x) = \psi^{\Theta_V}(x) = \pm\mathcal{C}_{\Gamma_{hyp}}(\psi^C)(x) = \Gamma_{hyp} \cdot \psi^C(-x)$. Dann gilt

- Θ_V vertauscht mit dem Dirac Operator D_V
- $\Theta_V^2 = (-1)^{(p-q)/2}\kappa_V \cdot id$ und Θ_V ist $\mathbb{C}$-antilinear auf $C^\infty(V, P_{\mathcal{L}})$
- $\Theta_V \circ \mathcal{C}_g \circ \Theta_V^{-1} = \mathcal{C}_g$ für alle $g \in GPin(V, q)$ und alle Translationen".

für gerades $n = 2m$.

Θ_V definiert eine reelle Struktur für $n = 2m$ genau dann wenn gilt $q - p \equiv 0, 6$ modulo 8.

<u>Beweis</u>: Die erste und die dritte Behauptung folgt aus $(*)$. Offensichtlich ist Θ_V antilinear. Beachte $\Gamma_{hyp} = \pm i^{(q-p)/2}\Gamma_V$. Zur Berechnung von Θ_V^2 kann man daher Γ_{hyp} durch $\Gamma_V = \gamma_1 ... \gamma_{2m}$ ersetzen. Es folgt $\Theta_V^2 = \Gamma_V C\theta(\Gamma_V C) id$. Wegen $(*)$ gilt $\theta(\Gamma_V) = (-1)^{2m} C\Gamma_V C^{-1}$. Also gilt $\Theta_V^2 = \Gamma_V^2 \kappa_V \cdot id$ wegen $C^2 = id$. Beachte $\Gamma_V^2 = (-1)^{(q-p)/2}$. Dies zeigt die Behauptungen.

<u>Beispiel</u>: Im <u>hyperbolischen</u> Fall reduziert sich Gleichung $(*)$ auf $(*)_{hyp}$: $CvC^{-1} = -v$. Somit ist $C = \Gamma_{hyp}$ in diesem Fall, also

$$\Theta_{hyp}(\psi)(x) = \theta(\psi(-x)) \ .$$

Somit definiert Θ_{hyp} bis auf $x \mapsto -x$ die reelle Standardstruktur auf $C^\infty(V, P_{\mathcal{L}})$. Beachte $\Gamma_{hyp}^2 = 1$ und Γ_{hyp} ist reell.

Beispiel: Im Lorentz Fall $(p,q) = (1, n-1)$ für gerades $n = 2m$ ist $\mathcal{C}_V^2 = 1$ genau dann, wenn $n - 2 \equiv 0, 2$ modulo 8. Das heißt also $n \equiv 2, 4$ modulo 8 beziehungsweise $m - 1 \equiv 0, 1$ modulo 4. Für $n \equiv 4$ modulo 8 (oder $m - 1 \equiv 1$ modulo 4) ist die gesuchte Matrix C

$$C_{Lorentz} = \gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_m \ .$$

Beachte $C\gamma_\nu = -\gamma_\nu C$ für $\nu = 1, \nu > m$ und $\theta(\gamma_\nu) = \gamma_\nu$. Für $2 \leq \nu \leq m$ gilt dagegen $C\gamma_\nu = \gamma_\nu C$ und $\theta(\gamma_\nu) = -\gamma_\nu$. Für $n \equiv 2$ modulo 8 (oder $m - 1 \equiv 0$ modulo 4) ist analog

$$C_{Lorentz} = \Gamma \cdot \gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_m \ .$$

Wir wollen nun noch $\mathcal{C}_V^2$ bestimmen. Dazu beachten wir $\theta C \theta^{-1} = (-1)^{m-1} C$ in beiden Fällen. Weiterhin gilt $C^2 = (-1)^{m-1}(-1)^{(m-1)(m-2)/2}$ im ersten Fall und $C^2 = (-1)^m(-1)^{(m+1)m/2}$ im zweiten Fall. Dies beweist $\mathcal{C}^2 = +id$ sowohl für $n \equiv 0$ modulo 8 als auch für $n \equiv 2$ modulo 8.

Relativistische Quantenmechanik

Beispiel: Im Lorentz Fall sei $P \in O(V)$ die Raumspiegelung und $T \in O(V)$ die Zeitspiegelung. Das heißt $P(t, x_2, ...x_n) = (t, -x_2, .., -x_n)$ und $T(t, x_2, .., x_n) = (-t, x_2, .., x_n)$. P und T werden induziert von dem sogenannten Paritätsoperator

$$P = \pm\gamma_1 \quad , \quad P^2 = id \ , \ \theta(P) = P$$

aus $GSpin(V_{Lorentz})$ respektive von

$$T = \pm\Gamma_{hyp} \circ \gamma_1 \quad , \quad T^2 = -id, \theta(T) = T$$

in $GSpin(V_{Lorentz})(\mathbb{C})$. Beachte $\theta_{1,n-1}(\Gamma_{hyp}) = (-1)^{m-1}$ und $\Gamma_{1,n-1} = (i^{m-1})\Gamma_{hyp}$, wobei in der Physik Literatur $\gamma_5 = \Gamma_{hyp}$. Die induzierten Operatoren $\mathcal{C}_P, \mathcal{C}_T$ auf $C^\infty(V, P_{\mathcal{L}})$ nennen wir $\mathbf{P}$ und $\mathbf{T}$.

PCT: In der physikalischen Literatur heißt der $\mathbb{C}$-antilineare Operator

$$\mathcal{T} \ = \ \mathbf{T} \circ \mathcal{C}_V$$

Zeitumkehroperator. Siehe [BD1], S.84 und [SW],(1.45). Es gilt

$$(\mathbf{P} \circ \mathcal{C}_V \circ \mathcal{T}\psi)(x) = \pm\Gamma_{hyp}\psi(-x) \ .$$

Beim Übergang von der relativistischen Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie (siehe [BD2]) ersetzt man den Operator $\mathcal{C}_V = C \circ \theta$ durch den $\mathbb{C}$-linearen Operator C und erhält den bereits definierten hyperbolischen Ladungskonjugations Operator, den antilinearen PCT-Operator

$$\mathbf{P} \circ C \circ \mathcal{T} = \pm\Theta$$

$$(\Theta\psi)(x) = \pm\Gamma_{hyp}\overline{\psi}(-x) \ .$$

Der Operator Θ vertauscht mit Translationen.

Wir bemerken zum Abschluß: $\mathcal{T}(\psi) = c \cdot \Gamma_{hyp}\gamma_1[\Gamma^\varepsilon_{hyp}(\gamma_2....\gamma_m) \cdot \theta)(\psi) = c' \cdot \Gamma^\varepsilon_{hyp}\mathcal{F}\theta(\psi)$ mit $\varepsilon = 0$ im Fall $4|n$ und $\varepsilon = 1$ für $4 \not| n$ bis auf Normierungskonstanten c, c'. Es gilt $\mathcal{T}^2 = (\Gamma^\varepsilon_{hyp}\mathcal{F})^2 = (-1)^{m\varepsilon}\mathcal{F}^2 = (-1)^{m\varepsilon}(-1)^{m(m+1)/2} \cdot id$. Wegen $m \equiv 1, 2 \bmod 4$ ist also $\mathcal{T}$ quaternional

$$\mathcal{T}^2 \ = \ -id \ .$$

Appendix

Wir skizzieren den Beweis für die Dualitätsformel, welche am Ende des ersten Abschnitts formuliert wurde.

Sei $V = V_1 \oplus V_2$ und sei V_1 bzw. V_2 eine direkte Summe von r bzw. s hyperbolischen Ebenen. Dann gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes^\varepsilon \mathcal{F}_2$ sowie $\mathcal{F}^{-1} = (-1)^{rs}\mathcal{F}_1^{-1} \otimes^\varepsilon \mathcal{F}_2^{-1}$. Somit $\mathcal{F}(a_1 \otimes^\varepsilon a_2)\mathcal{F}^{-1} = (-1)^{rs}(-1)^{rs+s|a_1|+r|a_2|}\mathcal{F}_1 a_1 \mathcal{F}_1^{-1} \otimes^\varepsilon \mathcal{F}_2 a_2 \mathcal{F}_2^{-1}$. Es folgt

$$int^\varepsilon(\mathcal{F})(a_1 \otimes^\varepsilon a_2) = int^\varepsilon(\mathcal{F}_1)a_1 \otimes^\varepsilon int^\varepsilon(\mathcal{F}_2)a_2 \ .$$

Somit reduziert man wegen $(b_1 \otimes^\varepsilon b_2)^* = (-1)^{|b_1||b_2|} b_1^* \otimes^\varepsilon b_2^*$ den Beweis der Dualitätsformel mittels

$$(M \otimes^\varepsilon N)' \ = \ (-1)^{|M||N|} \cdot M' \otimes^\varepsilon N'$$

auf den Fall einer zweidimensionalen hyperbolischen Ebene. Die letzte Formel ergibt sich aus

$$M_1 \otimes^\varepsilon M_2 = \begin{pmatrix} \alpha a & -\beta b & \alpha b & \beta a \\ \gamma c & \delta d & \gamma d & -\delta c \\ \alpha c & \beta d & \alpha d & -\beta c \\ \gamma a & -\delta b & \gamma b & \delta a \end{pmatrix}$$

für

$$M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in der Basisdarstellung bezüglich $(V_1^+ \otimes V_2^+) \oplus (V_1^- \otimes V_2^-) \oplus (V_1^+ \otimes V_2^-) \oplus (V_1^- \otimes V_2^+)$. Für die zweidimensionale hyperbolische Ebene gilt $\mathcal{F} = e - e^*$ und $\mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F}$. Also $int^\varepsilon(\mathcal{F})(e) = e^*$ und $int^\varepsilon(\mathcal{F})(e^*) = e$ und $int^\varepsilon(\mathcal{F})(ee^*) = e^*e$. Dies zeigt die Behauptung im zweidimensionalen Fall. Damit ist gezeigt

$$c^T \ = \ int^\varepsilon(\mathcal{F})(c^*) \ = \ int^\varepsilon(\mathcal{F})(c)^*$$

für $c \in C(V)$. Beachte $\mathcal{F}^* = (-1)^m\overline{\mathcal{F}} = (-1)^m\mathcal{F}^{-1} = (-1)^{m(m-1)/2}\mathcal{F}$. Offensichtlich gilt $(c^T)^T = c$. Für $d \in Spin(V)$ gilt $d^T = \mathcal{F}d^*\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}d^{-1}\mathcal{F}^{-1}$. Somit kommutiert das Diagram

$$\begin{tikzcd} Spin(V) \arrow[r] \arrow[d, "(.)^T"'] & SO(V) \arrow[d, "(.)'"] \\ Spin(V) \arrow[r] & SO(V) \end{tikzcd}$$

Beachte $g' = fg^{-1}f^{-1}$ gilt für alle $g \in O(V)$.