Der Feynman Propagator

Orbiten und invariante Maße

Sei $n \geq 2$ und $V = \mathbb{R}^n$ der quadratische Raum mit der Form

$$q(v) = x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2$$

(Lorentz Metrik). Wir definieren $r \geq 0$ durch $r^2 = x_2^2 + ... + x_n^2$. Sei G die Zusammenhangskomponente der zu q gehörigen speziellen orthogonalen Gruppe $SO(V) =< G, \pm id >$. Sei dv resp. dv_{Raum} das Lebesque Maß auf V resp. V_{Raum}. Sei V_{Raum} die Menge der $v \in V$ mit $q(v) < 0$, dann ist der offene Lichtkonus $V \setminus \overline{V}_{Raum}$ die Vereinigung zweier Zusammenhangskomponenten V_+ und V_-. V_+ ist ein offener konvexer selbstdualer Kegel in V bzgl. der Bilinearform $(.,.)$ von q. Insbesondere gilt $(v_1, v_2) > 0$ für alle $v_1, v_2 \in V_+$ (eine unmittelbare Folgerung aus der Schwartz Ungleichung).

Für $m \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\mathcal{O}_m^{\pm} = \{v \in \overline{V}_{\pm} \mid q(v) = m^2, v \neq 0\} \ .$$

Lemma: *Die Abbildung*

$$q : V \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

ist <u>submersiv</u>, d.h surjektiv auf dem Tangentialraum.

Die Fasern der Abbildung q sind bereits fast die Orbiten von G auf V. Genauer: Die Faser $q^{-1}(x)$ über $x \in \mathbb{R}$ besteht aus einem G-Orbit falls $m^2 < 0$, beziehungsweise aus zwei G-Orbiten falls $m^2 \geq 0$. Die Spiegelung $v \mapsto -v$ vertauscht die beiden Orbiten $\mathcal{O}_m^{\pm}$ in den Fasern.

Die G-Orbiten als Mannigfaltigkeiten

Im Fall $m^2 \geq 0$ genügt eine Karte U_1. Man hat nämlich folgende glatte Parametrisierung

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n-1} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & \mathcal{O}_m^+ \arrow[d, hook] \\ & V \end{tikzcd} \quad , \quad (m^2 > 0)$$

via $\iota(x_2, ..., x_n) = (_+\sqrt{m^2 + r^2}, x_2, .., x_n)$. Für $m^2 = 0$ ist analog $U_1 = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Auf U_1 gilt $x_1 > 0$ und $\iota^*(dx_1) = \sqrt{m^2 + r^2}^{-1} \cdot \sum_{i=2}^n x_i dx_i = \sum_{i=2}^n x_1^{-1} x_i dx_i$.

Im Fall $m^2 < 0$ muß man den Orbit $\mathcal{O}_m$ durch mehrere Karten $U_j, j = 1, .., n$ überdecken, auf denen jeweils $x_j \neq 0$ gefordert wird. Da jeder Punkt $v \in \mathcal{O}_m$, $m^2 < 0$ durch ein $g \in G$ nach U_1 transferiert werden kann, erlaubt dies manchmal sich auf U_1 zu beschränken.

Invariante Maße: Sei ω eine glatte $n-1$-Form auf V mit der Eigenschaft

$$dq \wedge \omega = q(v) \cdot dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \ .$$

Diese Gleichung bestimmt die Form ω auf $V \setminus \{0\}$ bis auf Vielfache von dq. Der Pullback $\iota^*(\omega)$ von ω auf $\mathcal{O}_m$ ist daher eindeutig bestimmt und definiert eine Differentialform $res_q(dv)$ auf $\mathcal{O}_m$. Diese ist G-invariant, wegen der Invarianz von dv und q.

Wir wollen diese Form im Fall $m^2 > 0$ bestimmen:

Lemma 1: *Sei $x_1(r) = {}_+\sqrt{m^2 + r^2}$ und $m^2 > 0$. Dann definiert $d\mu = \iota^*(q^{-1} \cdot res_q(dv))$ ein positives invariantes Maß auf $\mathcal{O}_m^+$. Es gilt*

$$\iota : \ (\mathbb{R}^{n-1}, \frac{1}{2x_1(r)} \cdot dv_{Raum}) \cong (\mathcal{O}_m^+, d\mu) \ .$$

Die Formeln behalten ihren Sinn für $m^2 = 0$ auf $\mathcal{O}_0^+$.

Beweis: Wegen $m^2 > 0$ folgt $x_1 \neq 0$ aus $r < |x_1|$. Die $n-1$-Form $\omega = \frac{1}{2} \sum_i x_i * dx_i$ bezüglich des euklidschen $*$-Operators, d.h. $dx_i \wedge *dx_i = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ erfüllt die obige Gleichung. Es folgt $\iota^*(\omega) = \frac{1}{2} x_1 dx_2 \wedge ...dx_n + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 2} x_i \cdot \iota^*(dx_i) \wedge *dx_i = q(v) \cdot \frac{1}{2x_1} dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$ wegen $\iota^*(dx_i) \wedge *dx_i = x_1^{-1} x_i \cdot (-dx_2 \wedge ...dx_n)$ für $i \geq 2$.

Koordinatenwechsel: Die Abbildung $f(v) = (q(v), pr_{Raum}(v))$

$$f : \quad V \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times V_{Raum}$$

definiert eine in $x_1 = 0$ verzweigte zweiblättrige Überlagerung mit

$$f^*\Big(dq \wedge (\frac{dx_2 \wedge ... \wedge dx_n}{2\sqrt{q + r^2}})\Big) \ = \ dv \ .$$

Die Polstelle liegt im Verzweigungsort $x_1 = \sqrt{q + r^2} = 0$. Die Abbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus auf V_+.

Konstruktion $SO(V)$-invarianter Distributionen

Für $\varphi \in C_c^\infty(V \setminus \{0\})$ mit $\varphi(v) = \varphi(-v)$ definiere $q_*(\varphi) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ durch

$$q_*(\varphi)(q) \;=\; \int_{q-Orbit} \varphi \cdot \omega \;.$$

Für eine Distribution T auf $\mathbb{R}$ definiert dann

$$(q^*T)(\varphi) = T(q_*(\varphi))$$

eine $SO(V)$-invariante Distribution auf $V \setminus \{0\}$.

Übungsaufgabe: $q_*(\varphi) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Hinweis: Reduziere auf den Fall $\varphi \in C_c^\infty(U_1)$ (mittels einer Partion der 1 und G-Translation). Benutze dann $q_*(\varphi) = 2 \cdot \int_{q+r^2 \geq 0} \varphi(q, x_2, .., x_n) \frac{dx_2..dx_n}{2\sqrt{q+r^2}}$.

Beispiel: $< \delta(q), \varphi >= \int \frac{\varphi(r, v_{Raum}) + \varphi(-r, v_{Raum})}{2r} \cdot dv_{Raum} = q^*(\delta_0)$.

Submersionsprinzip

Sei T eine Distribution auf $\mathbb{R}^N$ und $p : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ die lineare Projektion auf die letzten Koordinaten mit Kern $\mathbb{R}^K$, $K = M - N$ mit $M \geq N$. Integration definiert eine Surjektion $p_* : C_c^\infty(\mathbb{R}^M) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ sowie $\mathbb{R}^K$-invariante Distributionen $p^*(T)$ analog wie im letzten Abschnitt.

Lemma: *$\mathbb{R}^K$ translationsinvariante Distribution E auf $\mathbb{R}^M$ sind von der Gestalt $p^*(T)$.*

Beweis: Im Prinzip genügt $E(\varphi) = 0$ für $p_*(\varphi) = 0$. Aus $p_*(\varphi) = 0$ folgt $\varphi = \sum_{i=1}^K \partial_i \psi_i$ für $\psi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^M)$ (Stokes). Aus der $\mathbb{R}^K$-Invarianz folgt aber $E(\partial_i \psi) = 0$ für $i = 1, .., K$ und beliebiges ψ.

Analog zeigt man

Lemma: *Jede $SO(V)$-invariante Distribution E auf $V \setminus \{0\}$ ist von der Form $E = q^*(T)$ für eine Distribution T auf $\mathbb{R}$.*

Beweis: Wieder genügt zu zeigen $E(\varphi) = 0$, falls gilt $q_*(\varphi) = 0$. Aus $q_*(\varphi) = 0$ folgt $\frac{\varphi}{2x_1} = \sum_{i=2}^n \partial_i(\frac{\psi_i}{2})$ für $\psi_i \in C_c^\infty(V \setminus \{0\})$. Aus der G-Invarianz folgt

$E(\partial_i\psi) = 0$ für $i = 2,..,n$ und beliebiges ψ. Betrachte dazu den Boost $x_i = cosh(\alpha)x_i + sinh(\alpha)x_1$ mit $x_1 = (q+r^2)^{1/2}$, welcher $x_j, j \neq 1, i$ und q festhält. Dies definiert ein $g(\alpha) \in G$. Beachte

$$\frac{d}{d\alpha}g(\alpha)^*(\frac{\psi(q,x)dx_2 \wedge ..dx_n}{2(q+r^2)^{1/2}})|_{\alpha=0} \ = \ \frac{\partial_i(\psi)\cdot dx_2 \wedge ...dx_n}{2} \ .$$

Also $E(\partial_i(\psi)) = lim_{\alpha\to 0}\frac{g(\alpha)E(\psi)-E(\psi)}{\alpha} = 0$. QED

Fundamental Lösungen

Sei $L = \sum_i a_i^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ für die Lorentzform $q = \sum a_i x_i^2$. Wir suchen Distributionen E auf $U \subset V$ mit der Eigenschaft

$$(L+m^2)\cdot E \ = \ c\cdot\delta_0 \quad , \quad (c \in \mathbb{C}) \ .$$

Eigentlich sind wir an reellen Lösungen interessiert, betrachten wegen der Fourier Transformation aber komplexe Lösungen. Wir können zu $\mathbb{C}$-wertigen Distributionen übergehen, da Realteil und Imaginärteil Lösungen vom selben Typ sind. Der Raum der $\mathbb{C}$-wertigen Lösungen sei $L(U)$ (mit $c \in \mathbb{C}$). Der folgende Ansatz (Hörmander II, 12.5) liefert eine Lösung $\Delta_A \in L(V)$:

$$\Delta_A(\varphi) \ = \ (2\pi)^{-n/2}\int \frac{(\mathcal{F}\varphi)(x-iy)}{-q(x-iy)+m^2}\,dx \ .$$

Hierbei sei $y \in V_+$ fest gewählt und für $z = x - iy \in V_{\mathbb{C}}$

$$(\mathcal{F}\varphi)(z) \ = \ (2\pi)^{-n/2}\int exp(-i(z,\xi))\varphi(\xi)d\xi \ .$$

Die Fourier Transformation $\mathcal{F}\varphi$ – gebildet zur Form $(.,.)$ von q – klingt stark ab in unendlich und ist holomorph auf ganz $V_{\mathbb{C}}$ (Paley-Wiener). $|q(x-iy)|^{-1}$ ist beschränkt wegen $q(x-iy) \neq 0$ für alle $x \in V$. Eine Nullstelle $x = \xi \in V$ würde $q(\xi) = q(y) > 0$ ($\xi \in V_+$) erfüllen sowie $(\xi, y) = 0$. Dies ist unmöglich, da der Kegel V_+ selbstdual ist. (Oder benutze eine Lorentz Transformation und reduziere auf $y = (1,0,0,..)$). Somit klingt der ganze Integrand als Funktion von x bei festem y stark ab. Wendet man den Differentialoperator $L+m^2$ auf E an, erhält man an der Stelle φ

$$(2\pi)^{-n/2}\int \mathcal{F}(\varphi)(x-iy)dx = (2\pi)^{-n/2}\int \mathcal{F}(exp(-(y,.))\varphi)(x)dx$$

$$= (exp(-(y,.))\varphi)(0) = \varphi(0) \ .$$

Δ_A ist also eine Fundamentallösung.

Lemma: *Δ_A ist reell, d.h. $\overline{\Delta_A(\varphi)} = \Delta_A(\varphi)$ für reelle φ. Weiterhin ist Δ_A invariant unter G und hat Träger in $\overline{V}_-$.*

Beweis: Bei Konjugation gilt $q(x-iy) \mapsto q(x+iy)$, und $\mathcal{F}\varphi(x-iy) \mapsto \mathcal{F}\varphi(-x-iy)$. Da q gerade ist, folgt die erste Aussage durch eine Variablentransformation $x \mapsto -x$.

Die Fourier Transformierte $\mathcal{F}(\varphi)$ der Funktion $\varphi \in C_c^\infty(V)$ klingt auf V stark ab. Durch Verschieben der Integrationskontur folgt aus dem Satz von Cauchy und der Holomorphie des Integranden (Paley-Wiener), daß E nicht von der Wahl von $y \in V_+$ abhängt. Daraus folgt die Invarianz von E unter der Gruppe G.

Betrachte den Limes $y \to ty, t \to \infty$. Falls $(y,\xi) > 0$ für alle ξ aus $supp(\varphi)$ gilt, ergibt dieser Limes Null. Beachte

$$(\mathcal{F}\varphi)(x+iy) \ = \mathcal{F}(exp(-(y,.))\varphi)(x) \ .$$

Variert man $y \in V_+$ folgt daraus $supp(\Delta_A) \subset \overline{V}_-$. Damit sind alle Aussagen des Lemmas bewiesen.

Man nennt Δ_A avanciert. Der Propagator $\Delta_R = (-id)^*(\Delta_A)$ dagegen ist retardiert mit Träger in $\overline{V}_+$. Die Summe

$$E_+ = \frac{1}{2}(\Delta_A + (-id)^*(\Delta_A))$$

ist eine reelle $SO(V)$-invariante Fundamentallösung mit Träger in $V \setminus V_{Raum}$. Die Differenz ist eine antisymmetrische Lösung der homogenen Wellengleichung mit Träger in $V \setminus V_{Raum}$.

Lösungsräume

Wir betrachten jetzt temperierte Distributionen T auf V. Für diese ist die Fourier Transformierte durch $(\mathcal{F}T)(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi)$ erklärt, und definiert wieder eine temperierte Distribution. Für höchstens polynomial wachsende Funktionen $\lambda \in C^\infty(V)$ ist $T_\lambda(\varphi) = \int_V \lambda(v)\varphi(v)dv$ eine temperierte Distribution und es gilt $T_{\mathcal{F}\lambda} = \mathcal{F}T_\lambda$ (Plancherel Formel).

Eine Distribution mit Träger in Null ist eine endliche Linearkombination von Ableitungen der Dirac-Distribution δ_0. Die Einschränkungsabbildung $L(V) \to L(V \setminus \{0\})$ ist daher injektiv. Dies folgt aus der offensichtlichen Tatsache, daß kein Polynom in den Ableitungen von δ_0 in $L(V)$ enthalten sein kann. Sei $L^G(U)$ der Raum der G-invarianten Distributionen auf einer G-invarianten offenen Teilmenge. Es folgt

$$L_G(V) \subset L_G(V \setminus \{0\}) \ .$$

Die Spiegelung $v \mapsto -v$ operiert auf beiden Räumen. Seien $L_{G,\pm}(U)$ die beiden Eigenräume, falls U symmetrisch ist. Da δ_0 spiegelungsinvariant ist, gibt es keine antiinvariante Fundamentallösung auf V. Jede $< G, -id >$-invariante Fundamentallösung schreibt sich in der Gestalt

$$E_+ + \alpha \cdot \Delta_+ \ ,$$

wobei Δ_+ eine nichttriviale spiegelungsinvariante Lösung der <u>homogenen</u> Wellengleichung auf V ist.

Lemma 2: *Sei $m^2 > 0$. Dann ist der Raum $L^t_{G,+}(V) \subset L_{G,+}(V)$ der temperierten Distributionen $L^t_{G,+}(V) = \mathbb{C}E_+ + \mathbb{C}\Delta_+$ zweidimensional, und der analoge Raum $L^t_{G,-}(V) = \mathbb{C}\Delta_-$ ist eindimensional.*

<u>Bemerkung</u>: Die Eindimensionalität im homogenen Fall zeigt, daß die Basiselemente $\Delta_\pm$ obdA reellwertige Distributionen sind. Da Δ_A, E_+ reell sind, gilt die Aussage von Lemma 2 daher analog für $\mathbb{R}$-wertige Distribution.

<u>Beweis</u>: Die Temperiertheit von E_+ oder E folgt aus der expliziten Konstruktion von E. Daher genügt es die temperierten G-invarianten Lösungen der homogenen Wellengleichung zu bestimmen. Durch Übergang zur Fourier Transformierten kann man deren Lösungen auf V leicht konstruieren. Suche dazu Distributionen F mit $(-q + m^2)F = 0$. Für $m^2 > 0$ ist der Träger in $V \setminus \{0\}$. Wegen des Submersionsprinzips (betrachte Eingeschränkungen auf V_+), reduziert dies auf die Lösung der Gleichung $(-x - m^2)T(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$. Dieser Raum ist eindimensional und von der Dirac Distribution aufgespannt! Betrachte die linear unabhängigen G-invarianten $\mathbb{C}$-wertigen Lösungen $D_\pm = D_\pm(m^2)$ (für $m^2 \geq 0$)

$$D_\pm(m^2) = \mathcal{F}(\delta(\mathcal{O}^\pm_m)) \quad , \quad \delta(\mathcal{O}^\pm_m)) = \iota_*(1) \ .$$

Also ist die Dimension mindestens zwei, d.h. genau zwei. Insbesondere ist

$$\Delta_+(m^2) \ = \frac{1}{2}(D_+(m^2) \ + \ D_-(m^2)) = Re(D_+(m^2))$$

die symmetrische homogene Lösung und

$$\Delta_-(m^2) \ = \frac{1}{2i}(D_+(m^2) \ - \ D_-(m^2)) = Im(D_+(m^2))$$

die antisymmetrische homogene Lösung. Diese Lösungen sind temperiert (siehe Constantinescu, Satz 11.1). Nach Definition sind $\Delta_\pm(m^2)$ reell. QED.

Im Fall $m^2 = 0$ schließt man analog, außer daß eine weitere gerade Lösung der homogen Gleichung hinzu kommt, nämlich die konstanten Funktionen. In der Tat existiert der Limes

$$\lim_{m \to 0} D_\pm(m^2) = D_\pm(0)$$

auf Distributionen Niveau (Constantinescu, Satz 11.2 und Abschnitt 11.5). Für $m^2 = 0$ sind die gesuchten Distribution homogen und daher leicht zu bestimmen: Zum Beispiel für $n = 4$ gilt dann $\Delta_-(0) = \varepsilon(x_1)\delta(q)$ und allgemein (Constantinescu 11.31) $D_\pm(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{2^{n-2}}{n-2} \pi^{n/2-1} \Gamma(n/2)[-q]^{-n/2+1}$ für $n \geq 3$, also

$$D_\pm(0) \ = \ \frac{\Gamma(\nu)}{4\pi}(-q/2)^{-\nu} \quad , \quad \sqrt{q} \in V \pm i0V_-$$

für $\nu = \frac{n}{2} - 1$ (Limes aus $x \pm iV_-$). Insbesondere ist der Träger von $\Delta_+(0)$ nicht im Lichtkonus enthalten! Dies gilt dann natürlich auch für $\Delta_+(m^2)$ und $m^2 > 0$ durch Limesbildung (wegen Reskalierung sind alle $m^2 > 0$ diesbezüglich nicht zu unterscheiden). Es gilt somit für alle $m^2 \geq 0$

Korollar 1: *Der Träger von $\Delta_+(m^2)$ ist nicht im Lichtkonus enthalten.*

Korollar 2: *Es gibt eine reelle Konstante const. $\neq 0$ mit*

$$E_- = \frac{1}{2}(E - (-id)^* E) = const. \cdot \Delta_-(m^2)$$

und $\Delta_-(m^2)$ hat Träger im abgeschlossenen Lichtkonus. Insbesondere gilt $\Delta_A|\overline{V}_- = 2 \cdot const. \cdot \Delta_-(m^2)|\overline{V}_-$ sowie dann $E_+|\overline{V}_- = 2 \cdot const. \cdot \Delta_-(m^2)|\overline{V}_-$.

Also ist die Fundamentallösung Δ_A bzw. E_+ (auf $V \setminus \{0\}$ und damit auf V) vollkommen durch $\Delta_-(m^2)$ festgelegt, und es gilt

$$\begin{aligned} \Delta_-(m^2)|_{V\setminus\{0\}} &= q^*(T_-) \quad , \quad supp(T_-) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \ . \\ \Delta_+(m^2)|_{V\setminus\{0\}} &= q^*(T_+) \quad , \quad supp(T_+) \not\subset \mathbb{R}_{\geq 0} \ . \end{aligned}$$

Es bleibt also $T_\pm$ zu bestimmen.

Jede antiinvariante, nicht notwendig temperierte Lösung in $L_{G,-}(V)$ hat ihren Träger im Lichtkonus, ist also bestimmt durch ein T_- mit Träger in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (beachte $-v \in G(v)$ für $q(v) < 0$)! Wir zeigen in den nächsten Abschnitten, daß T_- in $R_{\geq 0}$ für $q \to \infty$ beschränkt bleibt. Durch einen Dimensionsschluß zeigt dies wohl, daß jede antiinvariante Lösung aus $L_{G,-}(V)$ temperiert ist.

Für $m^2 > 0$ legt aber die Wellengleichung und die Temperiertheitsbedingung die obige (reelle) Distribution T_+ auf $\mathbb{R}_{<0}$ bis auf eine reelle Konstante fest. Dies folgt aus den nachfolgenden Überlegungen zur Wellengleichung.

Die Wellengleichung

Der Wellenoperator $L = \sum_i a_i^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ für $q(v) = \sum_i a_i x_i^2$ erfüllt

$$L(q^*T) = q^*(L_x T) \ ,$$

wobei

$$L_x = 4q \cdot \frac{\partial^2}{\partial q^2} + 2n \cdot \frac{\partial}{\partial q} \ .$$

Es genügt die Aussage für glatte Funktionen $T = T(q)$ zu zeigen. Sie folgt in diesem Fall aus $L(T(q)) = \sum_i a_i^{-1}(d/dx_i)(\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial q}T) = (4qd^2/dq^2 + L(q)d/dq)T$ wegen $\sum_{i=1}^n a_i^{-1}(d/dx_i\ q)^2 = 4q$ und $L(q) = 2n$.

Die Differentialgleichung $(4q(d/dq)^2 + 2n(d/dq) + m^2)T = 0$ auf $\mathbb{R}$ ist elliptisch auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jede Distributionenlösung T der Differentialgleichung ist daher glatt vom Typ C^∞ auf $\mathbb{R}_{>0}$ oder $\mathbb{R}_{<0}$ (Regularitätssatz für elliptische Operatoren).

Wir bestimmen diese glatte Lösung T auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch Übergang zur Variablen z mit $q = z^2$. Wir multiplizieren mit q und setzen

$$T(q) = \varphi(z) \ .$$

Dies liefert die Gleichung

$$z^2\varphi''(z) + (n-1)z\varphi'(z) + m^2z^2\varphi(z) = 0 \ .$$

Benutze dazu $x^2(d/dx)^2 = (xd/dx)^2 - (xd/dx)$. Mit dem Ansatz $\varphi(z) = (mz/2)^{-\nu} \cdot g(z)$ und $g(z) = h(mz)$ sowie

$$\nu = \frac{n}{2} - 1$$

ist daher $h(z)$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$[z^2(d/dz^2) + z(d/dz) + z^2 - (\frac{n}{2} - 1)^2]h(z) = 0$$

mit $q = z^2$ und

$$T(q) = (mz/2)^{-\nu} \cdot h(m \cdot z) \ .$$

Ist $m = 0$ folgt $\varphi(z) = \alpha_1 z^{2-n} + \alpha_2$. Sei daher $m > 0$. Dann folgt $h(z) = \alpha_1 H_\nu^{(1)}(z) + \alpha_2 H_\nu^{(2)}(z)$ für die Hankelschen Besselfunktionen $H_\nu^{(j)}(z), j = 1, 2$. Die Hankelschen Besselfunktionen schreiben sich auch in der Form

$$H_\nu^{(j)}(z) = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z) \ .$$

Wir setzen jetzt der Einfachheit halber $m = 1$.

Die Singularität in Null

Sei nun $n \geq 2$ gerade. Dann ist $\nu = \frac{n}{2} - 1$ eine ganze nichtnegative Zahl. Uns interessiert das Verhalten der Lösung in den beiden Spezialfällen $h(z) = J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$. Setze dazu $x = (z/2)^2 = \frac{1}{4}q$ und fasse $T(q)$ als Funktion von x auf. Dann ist für $h(z) = J_\nu(z)$ die gesuchte Lösungsfunktion

$$T_1(q) = (\nu!)^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r!(\nu + r)!} \quad , \quad (x = q/4)$$

glatt fortsetzbar bei $x = 0$ (siehe Sneddon (30.5)). Im Fall $h(z) = \pi \cdot Y_\nu(z)$ ist die dadurch definierte Funktion $T(q) = T_2(q)$ die Summe aus der glatten Funktion

$$-\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r!(\nu + r)!}(\phi(r + \nu) + \phi(r)) \quad , \quad \phi(r) = \sum_{j=1}^{r} j^{-1}$$

und der Funktion

$$[2\gamma + log(x)] \cdot T_1(q) - \sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-r-1)!}{r!} x^{r-\nu} \ .$$

Siehe Sneddon (30.17). Somit ist $T(q)$ für $h(z) = i\pi \cdot H_\nu^{(2)}(z) = i\pi J_\nu + \pi Y_\nu$ asymptotisch bei $x = 0$ vom Typ

$$[i\pi + log(x)] \cdot T_1(q) - \sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-r-1)!}{r!} (4/x)^{\nu-r}$$

bis auf eine komplexwertige C^∞-Funktion.

Die Asymptotik bei ∞

In der Tat ist $H_\nu^{(j)}(z)$ auch in die komplexe z-Ebene fortsetzbar mit einem Verzweigungsschnitt in $z = 0$. Beachte $x > 0$ entspricht $z \in \mathbb{R}$ und $x < 0$ entspricht $z \in i\mathbb{R}$. Die Vorzeichenwahl von z spielt dabei eine Rolle wegen des logarithmischen Verzweigungsschnitts in $z = 0$. Im Bereich

$$-2\pi < arg(z) < \pi$$

hat man für großes $|z|$ die asymptotische Entwicklung von $(z/2)^{-\nu} H_\nu^{(2)}(z)$ durch

$$\pi^{-1}(z/2i)^{-\nu}(z/2\pi i)^{-1/2} \cdot exp(-iz) \cdot [1 + o(z^{-1})]$$

(siehe Copson, S.336). Das heißt für $z \in i\mathbb{R}_{<0}$ und $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ liefert $x = (z/2)^2 \in \mathbb{R}$ (für $m > 0$) eine Asymptotik, welche stark abklingt für $x < 0$ und beschränkt ist für $x > 0$. Daher liefert diese Lösung eine temperierte Distribution T, welche glatt außerhalb von $x = 0$ ist. Der exponentielle Term bleibt nämlich beschränkt für $x \to +\infty$ und klingt stark ab für $x \to -\infty$. Will man starkes Abklingverhalten für negative x, so legt dies T bis auf eine Konstante in $\mathbb{R}_{<0}$ fest.

$$T(x) \ = \ c \cdot H_\nu^{(2)}(x) \quad (x < 0) \ .$$

Dagegen wachsen beide Fundamentallösungen auf der positiven Halbachse $\mathbb{R}_{>0}$ in temperierter Weise. Will man aber die Wellenfront, welche durch die Singularität im Punkt $x = 0$ hervorgerufen, auf einen Halbraum konzentrieren, so ist T bis auf eine Normierungkonstante dadurch festgelegt. Dies liefert dann den sogenannten Feynman-Propagator

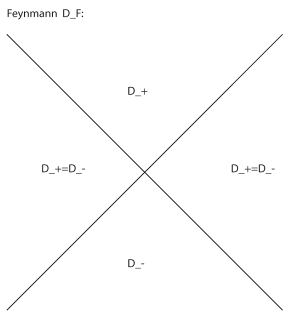
$$D_F = q^*(T) \ .$$

Ersetze dazu x durch $x - i0$. Beachte: Die Funktion $T(x)$ in $\mathbb{R}_{<0}$ legt die Fortsetzung auf $\mathbb{R}_{>0}$ fest. Natürlich gilt

$$D_F \ = \ E_+ + \alpha \cdot \Delta_+ \ .$$

für eine geeignete Konstante α, da der Feynman Propagator eine symmetrische und G-invariant Fundamentallösung ist Das nächste Lemma zeigt, daß $\alpha \neq 0$ rein imaginär ist. Insbesondere gilt $\overline{D}_F = E_+ - \alpha\Delta_+ \neq D_F$.

Zusammenfassung: *Sei $m^2 > 0$. Dann 1) Für $q > 0$ sind $T_1, T_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ reellwertig und beschränkt für $q \to +\infty$. T_1 ist dadurch ausgezeichnet, daß es sich glatt auf $q \to 0$ fortsetzen läßt. 2) $K(q) = T_1 + iT_2$ ist reell und in $C_c^\infty(\mathbb{R}_{<0})$, und durch exponentielles Abklingverhalten für $q \to -\infty$ ausgezeichnet. Die anderen Lösungen wachsen dagegen für $q \to -\infty$ exponentiell.*



Lemma 3: *Bei geeigneter Normierung ist der Feynman Propagator $-2\pi i \cdot D_F$ gleich $D_\pm$ auf $\overline{V}_\pm$ und gleich $D_+ = D_-$ auf V_{Raum}.*

Beweis: Es genügt die Gleichheit auf offenen Teilmengen jeweils von $V_\pm$ und V_{Raum} zu zeigen. Wegen der Symmetrie $v \mapsto -v$ genügt es sich auf V_+ und V_{Raum} zu beschränken. Betrachte also $D_+ = D_-$ auf V_{Raum}. D_+ besitzt dann eine analytische Fortsetzung auf $U \subset V_+ - iV_+$ um die Singularität $q = 0$ herum, so daß $U \cap V_+$ offen und nichtleer ist. Ebenso kann man den Feynman Propagator analytisch auf $U' \subset V_+ - iV_+$ fortsetzen, obdA so daß

$U \cap U' \neq \emptyset$. Beide Propagatoren stimmen auf V_{Raum} überein. Daraus folgt die Behauptung.

Beachte $q(x-iy) = q(x) - q(y) - 2i(x,y)$. Falls $x \in V_+$ und falls $y \in V_+$ klein genug ist, folgt $q(x) - q(y) \in V_+$ und $(x,y) > 0$, d.h. q ist in der unteren Halbebene.

Die Wellenfront

Sei X offen in $\mathbb{R}^n$, Γ ein konvexer offener Kegel in $\mathbb{R}^n$ und $Z \subset \mathbb{C}^n$ die Menge aller z mit $\Re(z) \in X$, $\Im(z) \in \Gamma$ und $|\Im(z)| < \gamma$ (für ein festes $\gamma > 0$). Eine holomorphe Funktion $f(z)$ auf Z besitzt dann eine 'Limesdistribution'

$$f(x+i0)$$

auf X, falls $|f(z)| \leq C|\Im(z)|^{-N}$ auf Z gilt für geeignete C, N (Hörmander I, Thm.3.1.15).

Für Funktionen f dieser Art ist die Wellenfront der Distribution $f(x+i0)$ in $X \times (\Gamma^0 \setminus 0)$ enthalten, wobei Γ^0 der zu Γ duale Kegel ist (Hörmander I.8.1.6).

Beispiel: $f(z) = z^\nu$ auf $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{R}_{<0}$ nennt man die so erhalte Distribution

$$(x - i0)^\mu \ .$$

Für $\Gamma = \mathbb{R}_{>0}$ dagegen $(x+i0)^\mu$. Wir wollen nun direkt ohne Anwendung von Hörmander I.3.1.15 diese Distributionen konstruieren:

Im Fall $\Re(\nu) > -1$ ist $f(x) \in L^1_{loc}$ und damit die Existenz klar. Für die anderen $\nu \neq -1, -2, ..$ folgt die Existenz von $(x-i0)^\nu$ dann durch sukzessives Ableiten. In den verbleibenden Fällen erhält man die Limesdistribution durch Ableiten der Distribution $log(x-i0) \in L^1_{loc}$ (Hauptteil). Also $log(x-i0) = log(|x|) - \pi \cdot i$ für $x < 0$. Beachte

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\frac{x_+^\nu}{\Gamma(\nu+1)}) &= -i(2\pi)^{-1/2} exp(-i\nu\pi/2)(\xi - i0)^{-1-\nu} \\
\mathcal{F}(\frac{x_-^\nu}{\Gamma(\nu+1)}) &= i(2\pi)^{-1/2} exp(i\nu\pi/2)(\xi + i0)^{-1-\nu}
\end{aligned}$$

für $\nu \neq -1, -2, \ldots$ Dies deutet bereits an, daß die Wellenfront von $(x-i0)^\nu$ in $\mathbb{R}_{<0}$ enthalten ist, ersetzt aber nicht das Argument von Hörmander I.3.1.15.

Für uns ist das Beispiel $X = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ und $\Gamma = \mathbb{R}_{<0}$ von Bedeutung. Seien $g(x), h(x)$ Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R})$ und analytisch in einer Umgebung von Null. Dann ist $f(z) = g(z) + log(z)h(z)$ analytisch für $Im(z) \leq 0$ und $|Re(z)| < \varepsilon$. Die Wellenfront im Punkt Null ist dann also in $\mathbb{R}_{<0}$ enthalten. Hierbei darf $g(z)$ auch meromorph bei $z = 0$ sein.

Folgerung: *Die Wellenfront des Feynman Propagators D_F ist in der Vereinigung von $\{0\} \times V$ und $\{(v, \mathbb{R}_{<0}v) \mid q(v) = 0, v \neq 0\}$ enthalten.*

Beweis: Dies folgt aus Guillemin-Sternberg, Geometric Asymptotics, Prop. VI.3.9. Der Feynman Propagator ist von der Form $D_F = q^*(T)$ für eine Distribution T auf $\mathbb{R}$ mit Wellenfront $WF(T) = \{0\} \times \mathbb{R}_{<0}$. Da q submersiv ist gilt $WF(q^*(T)) \subset q^*(WF(T))$. Also ist über $v \neq 0$ die Wellenfront im homogenisierten Graph $(v, \mathbb{R}_{<0} \cdot dq)$ von q enthalten. Identifiziert man den Kotangentialraum V^* mittels der Lorentzform mit V, gilt $dq(v) = 2 \cdot v$. Daraus folgt die Behauptung.

Der Dirac Operator

Setzt man

$$S_F = (-i\partial\gamma + m)D_F$$

erhält man eine $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$-wertige Fundamentallösung des Dirac Operators

$$(i\partial\gamma + m)S_F = id_{\mathbb{R}^4} \cdot \delta_0 \ .$$

Offensichtlich gilt $WF(S_F) \subset WF(\Delta_F)$, da sich die Wellenfront beim Ableiten höchstens verkleinert.

Der Operator D_F ist symmetrisch (aber nicht hermitesch symmetrisch!) Beachte: $D_F(v) = D_F(-v)$ ist äquivalent dazu, daß der $\mathbb{C}$-wertige Distributionskern $K(x,y) = D_F(x-y)$ symmetrisch ist. Degegen ist S_F weder symmetrisch noch antisymmetrisch.

Man geht daher über zu folgendem $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^8)$-wertigen antisymmetrischen oder (supersymmetrischen) Operator

$$\begin{pmatrix} 0 & S_F \\ -S_F^{ad} & 0 \end{pmatrix} (v) \ .$$