Übungsaufgaben zur Algebra II, Blatt 3

Abgabe 26.5.2003

Aufgabe 1)
Sei $R = R_1 \times R_2$ Produkt zweier Ringe R_1 und R_2. Zeige:

$$Spec(R) = Spec(R_1) \dot{\cup} Spec(R_2).$$

Aufgabe 2)
Sei $f \in R$. Zeige:

$$R_f \simeq R[X]/(X \cdot f - 1).$$

Hinweis: Benutze die universelle Eigenschaft der Lokalisierung.

Aufgabe 3)
Zeige $Rad(Rad(I)) = Rad(I)$ für alle Ideale I von R.

Aufgabe 4)
Durch Restklassenbilden kann man die Elemente $f \in R$ als Funktionen

$$f : Spec(R) \to \bigoplus_{P \text{ prim}} R/P$$

auffassen. Zeige, daß äquivalent sind:

- $f(P) \neq 0$ für alle $P \in Spec(R)$
- $f \in R^*$.

Übungsaufgaben zur Algebra II, Blatt 2

Abgabe 19.5.2003

Aufgabe 1)
Sei R ein Ring und I_1, I_2 Ideale in R. Es bezeichne $I_1 + I_2$ den ggT von I_1 und I_2. Aus $I_1 + I_2 = R$ folgt

$$I_1 \cap I_2 = I_1 \cdot I_2.$$

Aufgabe 2)
Für die Menge $V(I) = \{\mathfrak{p} \supseteq I \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ eines Ideals I von R zeige:

$$V(I) = \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad I = R.$$

Aufgabe 3)
Für Ideale I_ν eines Ringes R gilt

$$\bigcap_\nu V(I_\nu) = V(\mathrm{ggT}\{I_\nu\}).$$

Aufgabe 4)
Zeige, daß das Spektrum $\mathrm{Spec}(R)$ eines Ringes R quasikompakt ist, d.h. jede offene Überdeckung von $\mathrm{Spec}(R)$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Hinweis: Durch Dualisieren kann man die die Definition von quasikompakt so umformulieren, daß nur abgeschlossene Mengen benutzt werden.

Organisatorischer Hinweis: Der Übungsbetrieb startet heute, 14:15Uhr in Hörsaal 5 (INF288).

Übungsaufgaben zur Algebra II, Blatt 1

Abgabe nach Vereinbarung

Aufgabe 1)
Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, wobei $D \in \mathbb{Z}$ quadratfrei ist. Der ganze Abschluß $\mathcal{O}_L$ von $\mathbb{Z}$ in L ist

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{D}}{2} \cdot \mathbb{Z} & \text{für } D \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ \mathbb{Z} + \sqrt{D} \cdot \mathbb{Z} & \text{für } D \equiv 2, 3 (\text{mod } 4) \end{array}$$

Zeigen Sie zuerst: Ein Element ist ganz genau dann, wenn sein Minimalpolynom ganze Koeffizienten hat.

Aufgabe 2)
Sei $[L : \mathbb{Q}] < \infty$ und $x \in L$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so daß $m \cdot x$ im ganzen Abschluß $\mathcal{O}_L$ von $\mathbb{Z}$ in L liegt.

Hinweis: Betrachte ein Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$. Allgemeiner betrachte den Fall $[L : K] < \infty$ mit $K = Quot(R)$ und R Integritätsbereich.

Aufgabe 3) Sei $K/\mathbb{Q}$ eine galoische Erweiterung mit $[K : \mathbb{Q}] = n < \infty$ und Galoisgruppe $G = G(L/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$. Zeige, daß eine Basis ω_1, ..., ω_n existiert mit

$$det \begin{pmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \cdots & \sigma_1(\omega_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(\omega_1) & \cdots & \sigma_n(\omega_n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Hinweis: Satz vom primitiven Element.

Aufgabe 4) Wähle eine Basis ω_i wie in Aufgabe 3. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß für alle $x \in \mathcal{O}_K$ gilt: Alle Koeffizienten x_i aus der Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i$$

erfüllen

$$m \cdot x_i \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 5) Folgere aus Aufgabe 4, daß $\mathcal{O}_K$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$–Modul vom Rang n ist.

Hinweis: Benutze den Appendix zum Paragraphen 87 des LA–Skriptes, so daß im wesentlichen nur der Rang zu bestimmen bleibt.