

# Übungsaufgaben zur Algebra II, Blatt 3

Abgabe 26.5.2003

## Aufgabe 1)

Sei  $R = R_1 \times R_2$  Produkt zweier Ringe  $R_1$  und  $R_2$ . Zeige:

$$\text{Spec}(R) = \text{Spec}(R_1) \dot{\cup} \text{Spec}(R_2).$$

## Aufgabe 2)

Sei  $f \in R$ . Zeige:

$$R_f \simeq R[X]/(X \cdot f - 1).$$

**Hinweis:** Benutze die universelle Eigenschaft der Lokalisierung.

## Aufgabe 3)

Zeige  $\text{Rad}(\text{Rad}(I)) = \text{Rad}(I)$  für alle Ideale  $I$  von  $R$ .

## Aufgabe 4)

Durch Restklassenbilden kann man die Elemente  $f \in R$  als Funktionen

$$f : \text{Spec}(R) \rightarrow \bigoplus_{P \text{ prim}} R/P$$

auffassen. Zeige, daß äquivalent sind:

- $f(P) \neq 0$  für alle  $P \in \text{Spec}(R)$
- $f \in R^*$ .

## Übungsaufgaben zur Algebra II, Blatt 2

Abgabe 19.5.2003

### Aufgabe 1)

Sei  $R$  ein Ring und  $I_1, I_2$  Ideale in  $R$ . Es bezeichne  $I_1 + I_2$  den ggT von  $I_1$  und  $I_2$ . Aus  $I_1 + I_2 = R$  folgt

$$I_1 \cap I_2 = I_1 \cdot I_2.$$

### Aufgabe 2)

Für die Menge  $V(I) = \{\mathfrak{p} \supseteq I \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$  eines Ideals  $I$  von  $R$  zeige:

$$V(I) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad I = R.$$

### Aufgabe 3)

Für Ideale  $I_\nu$  eines Ringes  $R$  gilt

$$\bigcap_{\nu} V(I_\nu) = V(\text{ggT}\{I_\nu\}).$$

### Aufgabe 4)

Zeige, daß das Spektrum  $\text{Spec}(R)$  eines Ringes  $R$  quasikompakt ist, d.h. jede offene Überdeckung von  $\text{Spec}(R)$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**Hinweis:** Durch Dualisieren kann man die die Definition von quasikompakt so umformulieren, daß nur abgeschlossene Mengen benutzt werden.

**Organisatorischer Hinweis:** Der Übungsbetrieb startet heute, 14:15Uhr in Hörsaal 5 (INF288).

# Übungsaufgaben zur Algebra II, Blatt 1

## Abgabe nach Vereinbarung

### Aufgabe 1)

Sei  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ , wobei  $D \in \mathbb{Z}$  quadratfrei ist. Der ganze Abschluß  $\mathcal{O}_L$  von  $\mathbb{Z}$  in  $L$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{D}}{2} \cdot \mathbb{Z} & \text{ für } D \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z} + \sqrt{D} \cdot \mathbb{Z} & \text{ für } D \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

Zeigen Sie zuerst: Ein Element ist ganz genau dann, wenn sein Minimalpolynom ganze Koeffizienten hat.

### Aufgabe 2)

Sei  $[L : \mathbb{Q}] < \infty$  und  $x \in L$ . Dann existiert ein  $m \in \mathbb{Z}$ , so daß  $m \cdot x$  im ganzen Abschluß  $\mathcal{O}_L$  von  $\mathbb{Z}$  in  $L$  liegt.

**Hinweis:** Betrachte ein Minimalpolynom von  $x$  über  $\mathbb{Q}$ . Allgemeiner betrachte den Fall  $[L : K] < \infty$  mit  $K = \text{Quot}(R)$  und  $R$  Integritätsbereich.

**Aufgabe 3)** Sei  $K/\mathbb{Q}$  eine galoische Erweiterung mit  $[K : \mathbb{Q}] = n < \infty$  und Galoisgruppe  $G = G(L/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ . Zeige, daß eine Basis  $\omega_1, \dots, \omega_n$  existiert mit

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \cdots & \sigma_1(\omega_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(\omega_1) & \cdots & \sigma_n(\omega_n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

**Hinweis:** Satz vom primitiven Element.

**Aufgabe 4)** Wähle eine Basis  $\omega_i$  wie in Aufgabe 3. Dann existiert ein  $m \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $x \in \mathcal{O}_K$  gilt: Alle Koeffizienten  $x_i$  aus der Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \omega_i$$

erfüllen

$$m \cdot x_i \in \mathbb{Z}.$$

**Aufgabe 5)** Folgere aus Aufgabe 4, daß  $\mathcal{O}_K$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul vom Rang  $n$  ist.

**Hinweis:** Benutze den Appendix zum Paragraphen 87 des LA-Skriptes, so daß im wesentlichen nur der Rang zu bestimmen bleibt.