

Kompakte Riemannsche Flächen

Rainer Weissauer

Übersicht

Wir geben in diesem Skript eine knappe skizzenhafte Darstellung der Theorie kompakter zusammenhängender (kurz zshg.) Riemannscher Flächen. Es handelt sich um die redigierte Version des Skripts zu einer Vorlesung, die ich im Jahr 2001 in Heidelberg gehalten habe.

Im *ersten Abschnitt* wird der Garbenbegriff beschrieben und die Begriffe des Halms und der kurzen exakten Garbensequenz erläutert.

Im *zweiten Abschnitt* wird Čech-Kohomologie diskutiert; die Existenz der langen exakten Kohomologiesequenz wird beschrieben (zum Teil ohne Beweis). Der Zusammenhang zwischen erster Čech-Kohomologie und Verheftungskonstruktionen wird erläutert im Fall von \mathcal{O}_X -Modulgarben und im Fall von konstanten Garben, wobei hier der Zusammenhang zu Perioden-Integralen und zur de Rham Kohomologie hergestellt wird.

Im *dritten Abschnitt* beweisen wir den Endlichkeitssatz für kompakte Riemannsche Flächen. Dieser folgt letztlich aus dem Dolbeaut Lemma mit Hilfe von Hilbertraum-Methoden und dem Satz von der offenen Abbildung. Er wird durch iteriertes Einschränken und wieder Ausdehnen von 1-Kozyklen bewiesen. Der Endlichkeitssatz besagt, daß auf kompakten Riemannschen Flächen die Kohomologiegruppen von lokaltrivialen \mathcal{O}_X -Modulgarben endlich dimensionale \mathbb{C} -Vektorräume sind. Unmittelbare Folgerung davon ist der Satz von Riemann-Roch und damit insbesondere die Existenz von nicht konstanten meromorphen Funktionen f auf kompakten Riemannschen Flächen.

Vierter Abschnitt. Nicht konstante meromorphe Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche X definieren endliche verzweigte Überlagerungen

$$\pi : X \rightarrow P^1(\mathbb{C}) .$$

Durch das Studium von π bestimmt man den Körper $M(X)$ der meromorphen Funktionen auf X und mit Hilfe der relativen Dualität bestimmt man den Grad der lokalfreien \mathcal{O}_X -Modulgarbe Ω_X der holomorphen Differentialformen auf X als $2g-2$ und zeigt, daß das funktionentheoretische Geschlecht $g = \dim_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ und das topologische Geschlecht g_{top} übereinstimmen.

Dannach untersuchen wir im *fünften Abschnitt* das Cup-Produkt auf $H^1(X, \mathbb{C})$ und zeigen damit die Periodenrelationen und die Existenz der Hodge Zerlegung, sowie insbesondere die Aussage $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega(X)) = g$.

Im *sechsten Abschnitt* stellen wir einen Zusammenhang her zwischen $\Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X)$ (Differentialie dritter Gattung mit ganzzahligen Residuen), Divisoren auf X und der Kohomologie $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ und

$$Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) .$$

Die Gruppe $Pic(X)$ der Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X ist isomorph zur Klassengruppe $Cl(X)$ aller Divisoren auf X modulo der Hauptdivisoren (letzteres wird als Konsequenz des Endlichkeitssatzes bereits im dritten Abschnitt gezeigt). Durch einen Vergleich der Kohomologiegruppen $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ und $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ mit Hilfe der Exponentialabbildung $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_X^*$ wird damit zuerst $H^2(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}$ gezeigt sowie dann der bekannte Satz von Abel-Jacobi

$$Pic^0(X) \cong J(X) := H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X, \mathbb{Z}_X) .$$

Hierbei ist $Pic^0(X)$ die Untergruppe von $Pic(X)$ der Geradenbündel auf X vom Grad Null. Ein Vergleich mit der Albanese Varietät $Alb(X)$ von X zeigt

$$Alb(X) \cong J(X) .$$

Als Korollar liefert dies ganzzahlige Poincare Dualität sowie eine genauere Beschreibung der Perioden als Punkte des Siegelschen Halbraums. Dies zeigt, daß der Quotient $J(X) := H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension g ist. Es existiert eine holomorphe Einbettung

$$X \hookrightarrow J(X) ,$$

welche im Fall $g = 1$ eine biholomorphe Abbildung induziert.

Der *letzte Abschnitt* ist den Differentialen zweiter Gattung auf X gewidmet und damit der Theorie der Abelschen Integrale.

Garben

Die Garbenaxiome

Eine **Prägarbe** \mathcal{G} von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X ist eine Vorschrift, welche jeder offenen Menge U von X eine abelsche Gruppe $\mathcal{G}(U)$ zuordnet so, daß für jede Inklusion $V \subset U$ offener Mengen ein Gruppenhomomorphismus

$$r_U^V : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$$

existiert mit den Eigenschaften $r_V^V = id$ und $r_V^W \circ r_U^V = r_U^W$ ($W \subset V \subset U$). Eine Prägarbe \mathcal{G} auf X nennt man eine **Garbe** auf X , wenn weiterhin die folgenden beiden **Garbenaxiome** G1 und G2 (und G3) erfüllt sind. Diese lauten: Sei $U \subset X$ offen und $U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von U . Dann gilt

(G1) Für $f \in \mathcal{G}(U)$ impliziert $r_{U_i}^{U_i}(f) = 0$ für alle $i \in I$ das Verschwinden $f = 0$.

(G2) Gegeben seien $f_i \in \mathcal{G}(U_i)$ für alle $i \in I$ mit $r_{U_i \cap U_j}^{U_i \cap U_j}(f_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_i \cap U_j}(f_j)$. Dann existiert $f \in \mathcal{G}(U)$ mit $r_{U_i}^{U_i}(f) = f_i$ für alle $i \in I$.

Ist $I = \emptyset$, dann folgt $\mathcal{G}(\emptyset) = 0$. Wir nehmen dies der Klarheit halber im folgenden als zusätzliches Axiom (G3) an.

Wir schreiben für $r_U^V(f)$ manchmal auch nur $f|_V$ um anzudeuten, daß es sich um verallgemeinerte Restriktionen handeln soll.

1.Beispiel. Bezeichne $C_X(U)$ die abelsche Gruppe der *stetigen komplexwertigen Funktionen für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X* resp. $C_X^\infty(U)$ die *unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen* auf $U \subset X$, dann definiert dies Garben C_X resp. C_X^∞ auf X in offensichtlicher Weise.

2.Beispiel. Sei A eine abelsche Gruppe (versehen mit der diskreten Topologie). Sei $A_X(U)$ die Gruppe der lokal konstanten stetigen Abbildungen $f : U \rightarrow A$. Dies mit den offensichtlichen Restriktionssabbildungen r_U^V definiert eine Garbe, die **konstante Garbe** A_X auf X mit Werten in A .

3.Beispiel. Sei A eine abelsche Gruppe und $x \in X$ ein fester Punkt. Dann definiert die Vorschrift $\mathcal{G}(U) = A$ für $U \ni x$ resp. $\mathcal{G}(U) = 0$ sonst eine Garbe auf X , die **Wolkenkratzergarbe** im Punkt x mit Werten in A . Die Restriktion r_U^V ist Null im Fall $x \notin V$, und die Identität id_A im Fall $x \in V$.

Sei \mathcal{G} eine (Prä-)Garbe auf X . Sei $x \in X$ ein Punkt. Der **Halm** \mathcal{G}_x der (Prä-)Garbe \mathcal{G} im Punkt x ist eine abelsche Gruppe, definiert als der direkte Limes

$$\mathcal{G}_x = \varinjlim \mathcal{G}(U)$$

über das gerichtete System aller offenen Teilmengen U von X , welche den Punkt x enthalten (siehe Appendix).

Sei \mathcal{G} eine Prägarbe auf X und $U \subseteq X$ eine offenen Teilmenge. Für jeden Punkt $x \in U$ hat man einen natürlichen Homomorphismus $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}_x$. Man sieht leicht

Fakt. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X . Erfüllt \mathcal{F} die Garbeneigenschaft G1, dann ist die folgende natürliche Abbildung injektiv

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x .$$

Beispiel. Für die Strukturgarbe \mathcal{O}_X der holomorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X (siehe nächster Abschnitt) ist der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ enthalten im Potenzreihenring $\mathbb{C}[[t]]$ (Identitätssatz!) und $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ist injektiv (für zusammenhängendes $U \subset X$ mit $x \in U$).

Ein **Garbenhomomorphismus** $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ zwischen Garben (abelscher Gruppen) auf X , ist eine Kollektion von Gruppenhomomorphismen $\phi_U : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$, welche die alle folgenden Diagramme kommutativ machen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{H}(U) \\ r_U^V \downarrow & & \downarrow r_U^V \\ \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{H}(V) \end{array}$$

für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ von X . Sind alle Morphismen ϕ_U injektiv, nennt man ϕ eine **Garbeninjektion** und das Bild von \mathcal{G} definiert eine **Untergarbe** von \mathcal{H} . Ein Garbenhomomorphismus $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ induziert Gruppenhomomorphismen $\phi_x : \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ der Halme für alle $x \in X$.

Sei $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Garbenhomomorphismus. Dann definiert

$$\text{Kern}(\phi)(U) = \text{Kern}\left(\phi_U : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)\right)$$

eine Untergarbe von \mathcal{G} , den **Kern** von ϕ . Dies benutzt Garbenaxiom (G1) und (G2) für \mathcal{G} und Garbenaxiom (G1) für \mathcal{H} !

Definition. Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

heißt **exakt**, wenn alle induzierten Halmsequenzen

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x \rightarrow 0$$

für alle Punkte $x \in X$ exakt sind.

Bemerkung. Die Exaktheit aller Sequenzen $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Exaktheit.

Übungsaufgabe. Definieren die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger eine Garbe auf einem topologischen Raum?

Appendix (direkte Limiten)

Sei I eine Indexkategorie. D.h., wir nehmen an daß für je zwei Objekte $i, j \in I$ ein geeignetes Objekt $k \in I$ existiert mit Morphismen $i \rightarrow k$ und $j \rightarrow k$; weiterhin soll für je zwei Morphismen $u, v \in \text{Mor}(i, j)$ ein Morphismus $w : j \rightarrow k$ existieren mit $w \circ u = w \circ v$. Einen kovarianten Funktor $I \rightarrow \text{Ab}$ nennt man dann ein gerichtetes System $(A_i, \phi_{i \rightarrow j}, i, j \in I, i \rightarrow j \in \text{Mor}(i, j))$ abelscher Gruppen. Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt **kofinal**, falls $\forall i \in I$ ein Morphismus $i \rightarrow j$ existiert mit $j \in J$.

Sei $A_i, \phi_{i \rightarrow j}, i, j \in I$ ein derartiges gerichtetes System. $A_j \ni a_j \sim a_i \in A_i$, falls $\exists k, j \rightarrow k, i \rightarrow k$ mit $\phi_{i \rightarrow k}(a_i) = \phi_{j \rightarrow k}(a_j)$, definiert eine Äquivalenzrelation auf $\bigsqcup_{i \in I} A_i$. Weiterhin definiert

$$\lim_{\rightarrow} A_i = \lim_{i \in I} A_i = \bigsqcup_{i \in I} A_i / \sim$$

den **direkten Limes** des gerichteten Systems.

Bemerkung. Eine Unterkategorie J von I heißt **kofinal**, wenn für jedes $i \in I$ eine $j \in J$ existiert und ein Morphismus $i \rightarrow j$. Ist J eine kofinale Unterkategorie von I , dann gilt

$$\lim_{j \in J} A_j = \lim_{i \in I} A_i .$$

Wir bemerken weiterhin

- a) $\lim_i A_i$ ist eine abelsche Gruppe.
- b) Ist $\psi_i : A_i \rightarrow A'_i$ ein kompatibles System von Gruppenhomomorphismen (d.h. eine natürliche Transformation von Funktoren), dann induziert dies einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \lim_i A_i \rightarrow \lim_i A'_i$ der direkten Limiten.
- c) Sind alle A_i Ringe, dann ist $\lim_i A_i$ ein Ring. Sind ψ_i wie oben sogar Ringhomomorphismen, dann ist der Limes ψ ein Ringhomomorphismus.
- d) Der direkte Limes ist ein **exakter Funktor**. Das heißt: Sind $A'_i \rightarrow A_i \rightarrow A''_i$ kompatible Systeme von exakten Sequenzen abelscher Gruppen, dann induziert dies eine exakte Sequenz von direkten Limiten

$$\lim_i A'_i \rightarrow \lim_i A_i \rightarrow \lim_i A''_i .$$

Beweis der letzten Aussage d): Gegeben $a \in \lim_i A_i$ – repräsentiert durch ein $a_i \in A_i$ – im Kern. Das heißt, es existiert ein $j \in I$ mit $i \rightarrow j$ und $\text{Bild}(a_i) = 0$ in A''_j . Alle Objekte i , welche von j ausgehen (d.h. $j \rightarrow i$), definieren eine kofinale Teilkategorie J von I . Unter dem mittleren senkrechten Isomorphismus entspricht a der Äquivalenzklasse des Element $a_j := \phi_{i \rightarrow j}(a_i)$ in $\lim_{j \in J} A_j$. Das Bild von a_j in A''_j ist Null. Daher ist a_j das Bild eines Elementes $a'_j \in A'_j$. Die Äquivalenzklasse a' von a'_j – geliftet auf die obere Zeile – bildet auf a ab.

Die Exaktheit des Limes Funktors folgt daher unmittelbar aus dem folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & a_i / \sim & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \\
 \lim_{i \in I} A'_i & \longrightarrow & \lim_{i \in I} A_i & \longrightarrow & \lim_{i \in I} A''_i & & \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 \lim_{j \in J} A'_j & \longrightarrow & \lim_{j \in J} A_j & \longrightarrow & \lim_{j \in J} A''_j & & \\
 & & & & & & \\
 a'_j & \longrightarrow & a_j & \longrightarrow & 0 & &
 \end{array}$$

Riemannsche Flächen

Sei X ein zshg. separierter σ -kompakter topologischer Raum. X heißt **Riemannsche Fläche**, wenn eine **holomorphe Struktur** auf X gegeben ist. Eine holomorphe Struktur ist eine Äquivalenzklasse holomorpher Atlanten von X . Ein Atlas ist eine Überdeckung $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ durch eine offene Überdeckung von X , zusammen mit Homöomorphismen (Kartenabbildungen)

$$\phi_i : U_i \cong V_i \subset \mathbb{C} \quad , \quad i \in I$$

auf offene Teilmengen V_i von \mathbb{C} , für die alle Kartenwechsel

$$\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

holomorphe Abbildungen sind.

Es gilt automatisch

$$\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$$

und $\phi_{ii} = id_{V_i}$ für alle $i, j, k \in I$. Die Daten (X, U_i, ϕ_i, I) definieren einen holomorphen Atlas. Zwei Atlanten heißen äquivalent, wenn sie zu einem gemeinsamen holomorphen Atlas verfeinert werden können. Zum Begriff der Verfeinerung verweisen wir auf den Abschnitt über Čech-Kohomologie.

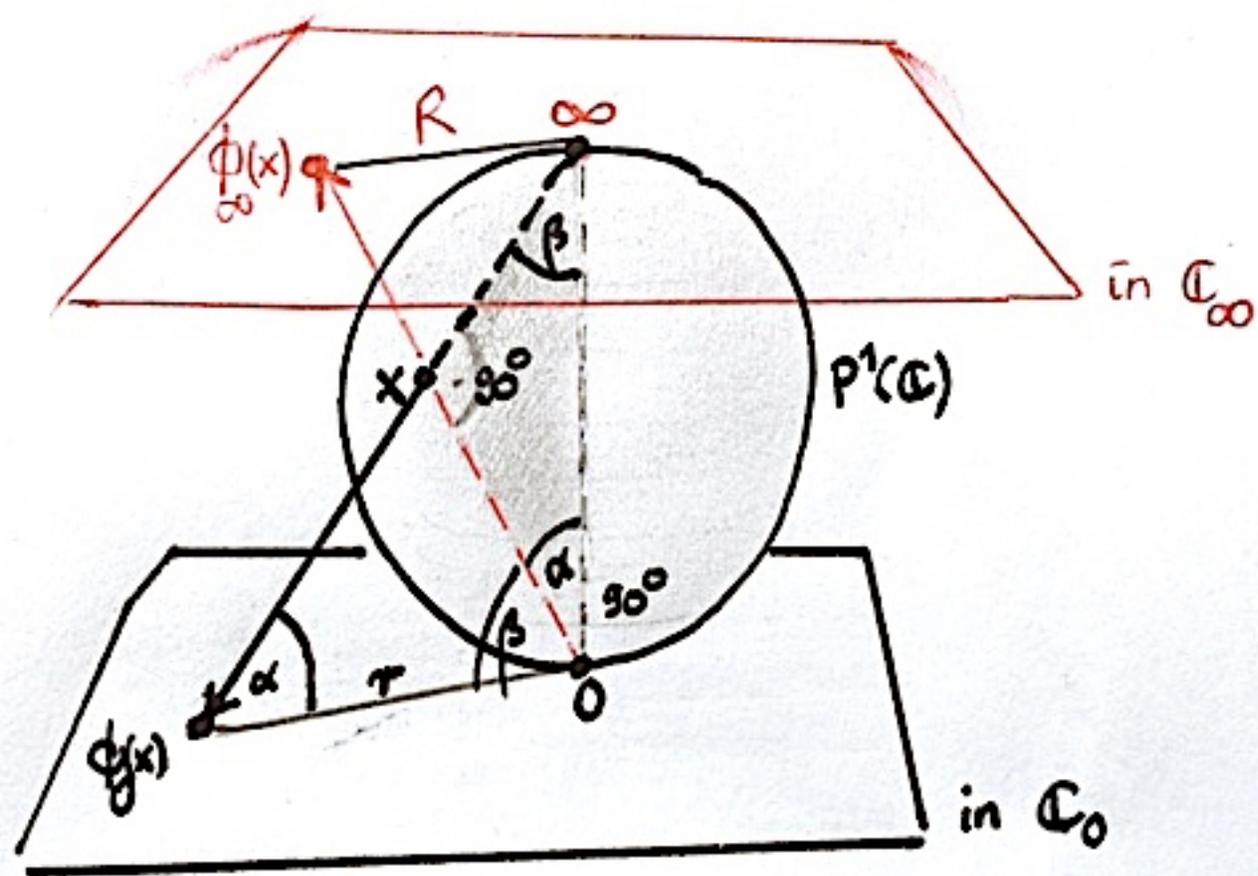
Bemerkung. Riemannsche Flächen sind orientierbar, d.h. die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechsel $\det(D\phi_{ji})$ ist immer > 0 [für holomorphe Funktionen gilt $\det(Df(z)) = |f'(z)|^2$; beachte $f'(z) \neq 0$ für biholomorphe Funktionen f].

Die Riemannsche Zahlenkugel $P^1(\mathbb{C})$ als Riemannsche Fläche:

$P^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup U_\infty$ ist eine offene Überdeckung; Die stereographische Projektion auf die \mathbb{C} von ∞ definiert eine Kartenabbildung $\phi_0 : U_0 \cong \mathbb{C}$. Die entsprechende Projektion auf \mathbb{C} (Tangentialebene bei ∞ von unten betrachtet!) definiert eine Kartenabbildung $\phi_\infty : U_\infty \cong \mathbb{C}$. Es gibt 4 Kartenwechsel. Zwei sind die Identität, die beiden anderen $\phi_{\infty 0}$ und $\phi_{0\infty}$ sind invers zueinander. Der Atlas ist holomorph wegen

Fakt. $\phi_{0\infty}(z) = z^{-1}$.

Beweis. Für $z = re^{i\phi}$ gilt $\phi_{0\infty}(r \cdot e^{i\phi}) = R \cdot e^{i\phi} - R \cdot e^{-i\phi} = z^{-1}$. Denn $R = r^{-1}$. Dies folgt aus dem Satz von Thales und der Orthogonalität der beiden Vektoren $(r, 1)$ und $(R, -1)$; somit $r \cdot R + 1 \cdot (-1) = 0$. QED



Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Funktion

$$f : X \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt **holomorph**, falls alle Abbildungen

$$f \circ \phi_i^{-1} : V_i \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph sind. Analog definiert man \mathcal{C}^∞ -Funktionen. Ist X eine Riemannsche Fläche, dann erbt jede (zusammenhängende) offene Teilmenge $U \subset X$ die Struktur einer Riemannschen Fläche. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn sie auf jeder Zusammenhangskomponente holomorph ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die \mathbb{C} -Algebra der holomorphen Funktionen auf U . Mit den Einschränkungen als Restriktionsabbildungen definiert dies offensichtlich eine Garbe von Ringen auf X , die **Strukturgarbe** der Riemannschen Fläche. Man hat die Garbeninklusionen

$$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{C}_X^\infty \subset \mathcal{C}_X .$$

Lemma. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist jede holomorphe Funktion auf X konstant: $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}_X(X) = \mathbb{C}$.

Beweis. Jede holomorphe Funktion f auf X ist stetig, nimmt daher ihr Maximum in einem Punkt $x_0 \in X$ an. Aus dem Maximumsprinzip (angewendet auf $f \circ \phi_i^{-1}$ in einer geeigneten Karte V_i) folgt, daß f in einer Umgebung von x_0 konstant ist. Dann ist f aber generell konstant, denn

Lemma. Sei X eine Riemannsche Fläche, und U eine nichtleere offene Teilmenge von X . Dann gilt $\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U)$.

Beweis. Sei f holomorph auf X . Dann folgt $f = 0$, wenn $f = 0$ gilt in einer Umgebung von U . X ist (automatisch wegweise) zusammenhängend. Wähle einen stetigen Weg von x zu $x_0 \in U$. Endliche viele Karten überdecken diesen Weg. Man beweist $f(x) = 0$ mittels des Identitätssatzes (in den endlich vielen relevanten Karten V_i). QED

Definition. Eine stetige Abbildung $g : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen heißt holomorph, wenn für alle offenen Teilmengen $V \subset Y$ und alle $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt $f \circ g \in \mathcal{O}_X(g^{-1}(V))$.

Offensichtlich ist Holomorphie von $g : X \rightarrow Y$ eine lokale Eigenschaft von g auf X . Für eine Überdeckung $X = \bigsqcup_i U_i$ gilt also: g ist holomorph \iff alle $g|_{U_i}$ sind holomorph. Außerdem genügt es in der Definition alle V aus einer offenen Überdeckung von X zu wählen.

Übungsaufgabe. Definiere analog die Garben \mathcal{O}_X^* , \mathcal{M}_X , \mathcal{M}_X^* und zeige

$$\mathcal{M}_{P^1(\mathbb{C})}(P^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(z)$$

für den Körper $\mathbb{C}(z)$ der gebrochen rationalen Funktionen in z sowie

$$\mathcal{M}_{P^1(\mathbb{C})}^*(S) = \mathbb{C}(z)^* .$$

Siehe [BF], Seite 152 ff.

Übungsaufgabe. Jede nichtkonstante meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}^*(X)$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X definiert eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ auf die Riemannsche Zahlenkugel¹. (Ist X kompakt und zshg., ist diese Abbildung $f : X \rightarrow S$ automatisch surjektiv nach Korollar 8).

¹Hinweis: Hat f einen Pol bei $x_0 \in X$ und keine wesentliche Singularität, dann ist $\frac{1}{f}$ holomorph in der Nähe von x_0 mit $\frac{1}{f}(x_0) = 0$. D.h. eine Kugel $K_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ wird unter f holomorph nach $V_0 = \mathbb{C}$ abgebildet. Setzt man $f(x_0) = \infty$, dann setzt sich $\phi_{\infty 0} \circ f = \frac{1}{f}$ von $K_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ zu einer holomorphen Abbildung $K_r(x_0) \rightarrow V_\infty$ fort für die Kartenmenge $V_\infty = \mathbb{C}$.

Exakte Garbensequenzen

Sei X eine Riemannsche Fläche. Sei \mathcal{O}_X die Strukturgarbe und \mathcal{O}_X^* die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen auf X . Die Exponentialabbildungen $f(z) \mapsto \exp(2\pi i \cdot f(z))$

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X^*(U)$$

definieren die **Exponentialabbildung** als Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$. Der Kern ist offensichtlich die konstante Garbe \mathbb{Z}_X .

Satz. Die zugehörige Garbensequenz

$$\boxed{0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0}$$

ist exakt.

Beweis. Dies folgt aus dem nächsten Lemma, denn für jede einfach zshg. und zshg. Teilmenge $U \subset X$ mit Kartenabbildung $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ ist

$$\exp(2\pi i (-)) : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X^*(U)$$

surjektiv. Siehe Busam-Freitag. QED

Analog liefert auf Riemannschen Flächen X die holomorphe Ableitung $\partial f(z) = f'(z) \cdot dz$ die exakte Garbensequenz auf X

$$\boxed{0 \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X \rightarrow 0}.$$

Hierbei ist $\Omega_X(U) = \{f(z)dz \mid f \in \mathcal{O}(U)\}$ für $U \subseteq \mathbb{C}$ die Garbe der holomorphen 1-Formen auf X . Die globale Verheftungsvorschrift unterscheidet sich jedoch von derjenigen der Garbe \mathcal{O}_X . [Ist U einfach zusammenhängend in einer lokalen Karte, dann besitzt jede Form $\omega \in \Omega(U)$ eine lokale Stammfunktion $g(z) = \int_{z_0}^z \omega \in \mathcal{O}(U)$ wegen des Cauchy Integralsatzes. Es gilt $\partial g = \omega$ auf U . Der Kern von ∂ besteht aus den lokalkonstanten \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf U].

Lemma. Eine Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ von Garbenhomomorphismen auf X ist exakt gdw gilt

- (i) $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ ist exakt für alle offenen $U \subset X$.
- (ii) $\forall U \forall h \in \mathcal{H}(U) \forall x \in U \exists V \subset U, x \in V$ mit $r_U^V(h) \in \text{Bild}(\mathcal{G}(V))$ (für U, V offen in X)

Beweis. Eine Richtung ist klar, da Halmbildung als direkter Limes ein exakter Funktor ist. (Insbesondere vertauscht Halmbildung mit Kernbildung, was wir weiter unten benutzen werden). Wir beschränken uns auf die Umkehrung, daß (i) und (ii) aus der Exaktheit der Halmsequenzen folgt. (ii) ist klar wegen der Surjektivität von $\mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ und der Halm-Definition. Nun zum Beweis von (i).

Die Injektivität $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ folgt aus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x & \hookrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \end{array}$$

Analog zeigt man, daß die Zusammensetzung $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ Null ist. Somit ist

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$$

eine Untergarbe des Kerns \mathcal{K} des Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. Da Halm- und Kernbildung vertauschen, induziert die obige Garbeninklusion Halmisomorphismen $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{K}_x$ für alle x . Exaktheit bei \mathcal{G} folgt daher aus dem nächsten

Lemma. Sei $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}$ eine Garbeninklusion mit $\psi_x : \mathcal{F}_x \cong \mathcal{K}_x$ für alle $x \in X$. Dann gilt $\mathcal{F} = \mathcal{K}$.

Beweis. Sei $k \in \mathcal{K}(U)$. Für alle $x \in U$ existiert $V = V_x$ mit $x \in V \subset U$ und $f_V \in \mathcal{F}(V)$ mit $f_V = r_U^V(k)$ wegen der Halmsurjektivität. Die V_x definieren eine Überdeckung von U . Die Elemente f_V sind durch k (und V) und

$$f_V = r_U^V(k)$$

eindeutig bestimmt. Daher Verkleben sich die f_V mittels Garbenaxiom G2 zu einem Schnitt f von $\mathcal{F}(U)$. Wegen Garbenaxiom G1 gilt dann sogar $f_V = k$ auf ganz U . Es folgt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{K}(U)$. QED

Verheftungskonstruktionen

Wir diskutieren in diesem Abschnitt einige der kohomologischen Grundlagen, die für die Theorie der Riemannschen Flächen und allgemeiner die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten relevant sind.

Čech-Kohomologie

Sei $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ des topologischen Raums X durch offene Teilmengen U_i . Für eine Garbe \mathcal{G} abelscher Gruppen auf X definiert man den **Čech-Komplex**

$$0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

durch

$$C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{\nu_0, \dots, \nu_i} \mathcal{G}(U_{\nu_0} \cap \dots \cap U_{\nu_i})$$

mit den Abbildungen $\partial_i : C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, wobei²

$$\partial_0(s)_{ij} = s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}$$

für $s = (s_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, und wobei für $s = (s_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$

$$\partial_1(s)_{ijk} = s_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} - s_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} + s_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$$

und so weiter.

Man nennt $Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \text{Kern}(\partial_i) \subset C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ die **i -Kozykel** und $B^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \text{Bild}(\partial_{i-1})$ die **i -Ränder**. Es gilt $B^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \subseteq Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und per Definition ist die Quotientengruppe dieser abelschen Gruppen

$$H_{\mathcal{U}}^i(X, \mathcal{G}) = Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})/B^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

die **i -te Čech-Kohomologie** $H_{\mathcal{U}}^i(X, \mathcal{G})$ von \mathcal{G} zur Überdeckung \mathcal{U} . Aus den Garbenaxiomen G1 und G2 folgt sofort

$$\boxed{H_{\mathcal{U}}^0(X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}(U)}.$$

²Üblicherweise wird $\partial_i(s)$ durch eine Summe $\nu = 0, \dots, i$ definiert: Der ν -te Index wird weggelassen und mit dem Vorzeichen $(-1)^\nu$ versehen. Dies stimmt mit unserer Wahl von ∂_0 nur bis auf ein Vorzeichen überein, liefert aber ∂_1 .

Kozykelrelationen. $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ wird beschrieben durch Kollektionen (s_{ij}) mit $s_{ij} \in \mathcal{G}(U_i \cap U_j)$ mit der Kozykel-Eigenschaft

$$s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$. Insbesondere folgt daraus $s_{ii} = 0$ für alle $i \in I$ und $s_{ij} = -s_{ji}$ auf $U_i \cap U_j$ für alle $i, j \in I$. Ein 1-Zykel ist ein 1-Rand, wenn auf $U_j \cap U_i$ für alle $i, j \in I$ und geeignete $b_i \in \mathcal{G}(U_i)$ gilt

$$s_{ji} = b_j - b_i .$$

Verfeinerungen. Offene Überdeckungen von X definieren eine Kategorie: Objekte sind offene Überdeckungen \mathcal{U} und Morphismen sind **Verfeinerungen** $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$. Für $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (Überdeckung \mathcal{U}) und $X = \bigcup_{i \in J} V_i$ (Überdeckung \mathcal{V}) ist eine Verfeinerung $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ eine Abbildung $\phi : J \rightarrow I$ in der umgekehrten Richtung mit der Eigenschaft $V_j \subseteq U_{\phi(j)}$ für alle $j \in J$. Der Morphismus φ induziert Abbildungen $\varphi_i : Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow Z^i(\mathcal{V}, \mathcal{G})$, welcher Ränder in Ränder überführt. Im Fall $i = 1$ vermöge

$$\varphi_1(s)_{ij} := s_{\phi(i)\phi(j)}|_{V_i \cap V_j} \in \mathcal{G}(V_i \cap V_j) ,$$

und analog für $i > 1$. Ist \mathcal{V} eine Verfeinerung von \mathcal{U} , hängt die induzierte Abbildung $H_{\mathcal{U}}^i(X, \mathcal{G}) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^i(X, \mathcal{G})$ nicht ab³ von der Wahl der Verfeinerungsabbildung $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$. Identifiziert man alle Verfeinerungsabbildungen, erhält man eine Indexkategorie. In der Tat: Für Verfeinerungen $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ und $\varphi' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}'$ ist

$$X = \bigcup_{(i,j) \in J \times J'} V_j \cap V'_j$$

eine gemeinsame Verfeinerung von \mathcal{V} und \mathcal{V}' durch die Projektionen $J \times J' \rightarrow J$ und $J \times J' \rightarrow J'$. Damit kann die i -te Kohomologie als der *direkte Limes* über alle Verfeinerungen definiert werden

$$H^i(X, \mathcal{G}) = \lim_{\mathcal{U}} H_{\mathcal{U}}^i(X, \mathcal{G}) .$$

³Verfeinerungen $\varphi, \varphi' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ definieren Homotopien $h_i : C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^{i-1}(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ durch $h_1(s)_i = s_{\phi(i), \phi'(i)}|_{V_i \cap V_i}$ bzw. $h_2(s)_{ij} = s_{\phi(i), \phi'(i), \phi'(j)}|_{V_i \cap V_i \cap V_j} - s_{\phi(i), \phi(j), \phi'(j)}|_{V_i \cap V_j \cap V_j}$ usw. Dann gilt $\partial_{i-1} \circ h_i + h_{i+1} \circ \partial_i = \varphi_i - \varphi'_i$, z.B. für $i = 1$ wegen $(s_{\phi(i)\phi'(i)} - s_{\phi(j), \phi'(j)}) + (s_{\phi'(j)\phi'(i)} - s_{\phi(j)\phi'(i)} + s_{\phi(j)\phi'(j)}) - (s_{\phi(i)\phi'(i)} - s_{\phi(j)\phi'(i)} + s_{\phi(j)\phi(i)}) = s_{\phi'(j), \phi'(i)} - s_{\phi(j), \phi(i)}$.

Ist X kompakt, dann besitzt jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ für endliches $J \subset I$. Die Inklusion $\phi : J \rightarrow I$ definiert eine Verfeinerung. Somit bilden die endlichen Überdeckungen eines kompakten Raumes X ein kofinales System. $H^i(X, \mathcal{G})$ kann daher im kompakten Fall als *Limes über alle endlichen Überdeckungen \mathcal{U} von X berechnet werden.*

Lemma 1. Für \mathbb{C}_X^∞ -Modulgarben \mathcal{G} gilt $H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathcal{G}) = 0$ und damit $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$.

Beweis. Sei X kompakt (oder parakompakt) und $\sum_k \varphi_k = 1$ eine Partition der Eins für \mathcal{U} , d.h. es gilt $\text{supp}(\varphi_k) \subset U_{\phi(k)}$ für eine Abbildung $\phi : \{k\} \rightarrow I$. Für 1-Kozykel s_{ji} setze

$$b_i = \sum_k \varphi_k s_{i\phi(k)} \in \mathcal{G}(U_i).$$

Beachte φ_k und damit $\varphi_k s_{i\phi(k)}$ kann auf U_i fortgesetzt (!) werden durch Null auf das Komplement $U_i \setminus U_{\phi(k)}$. Dann ist

$$b_j - b_i = \sum_k \varphi_k (s_{j\phi(k)} - s_{i\phi(k)}) = \left(\sum_k \varphi_k \right) \cdot s_{ji} = s_{ji}$$

auf $U_j \cap U_i$. Analog zeigt man $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$ für $i > 1$. QED

Proposition 1 (ohne Beweis; siehe [Go], [Gu]) *Eine kurze exakte Garbensequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

auf einem parakompakten Raum X liefert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{H}) \rightarrow \text{usw.} . \end{aligned}$$

Die Exaktheit $H^0(X, \mathcal{F})$ und $H^0(X, \mathcal{G})$ und im Prinzip auch bei $H^1(X, \mathcal{G})$ wurde bei der Diskussion des Begriffs der kurzen exakten Garbensequenzen bereits gezeigt. Da der erste Verbindungshomomorphismus $\delta : H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ für uns von besonderer Bedeutung ist, geben wir seine Definition an und beweisen im folgenden pars pro toto die Exaktheit der langen exakten Sequenz an den

Stellen $H^0(X, \mathcal{H})$ und $H^1(X, \mathcal{F})$ und damit die Exaktheit der langen Sequenz bis zur fünften Stelle.

Definition von δ . Sei $h \in \mathcal{H}(X)$. Dann existiert eine geeignete Überdeckung $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ so dass $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$, $i \in I$ existieren mit der Eigenschaft $h|_{U_i} = \phi(g_i)$. Die Existenz einer solchen Überdeckung \mathcal{U} folgt aus der Exaktheit der Garbensequenz. Dann definiert $f_{ij} = (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$ einen 1-Kozykel in $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, denn $(g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$ hat Werte in $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$! Wir definieren dann $\delta(h)$ als die Kohomologieklass des 1-Kozykels (f_{ij}) . Wie man leicht zeigt, ist diese Klasse in $H^1(X, \mathcal{F})$ unabhängig von der Wahl der g_i und der Überdeckung.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{H^1(\phi)} & H^1(X, \mathcal{G}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{Z^1(\mathcal{U}, \psi)} & Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \end{array}$$

$$h \xrightarrow{\delta} f_{ij} = (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j} \longmapsto (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j} \in dC^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

Um die *Exaktheit bei $\mathcal{H}(X)$* zu zeigen, sei $h = \phi(g)$ im Bild von ϕ . Dann ist oBdA $g_i = g|_{U_i}$ und damit $(g_i - g_j) = 0$ auf $U_i \cap U_j$, also $\delta(h) = 0$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{F}) \\ & & & & \uparrow \\ & & & & Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \end{array}$$

$$g \longmapsto h \longmapsto (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$$

Ist umgekehrt $\delta(h) = 0$ für $h \in \mathcal{H}(X)$, dann ist $(g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$ ein Korand in $dC^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (eventuell natürlich erst nach Übergang zu einer Verfeinerung von \mathcal{U} , was wir der Einfachheit halber hier ignorieren wollen). Damit ist $(g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$ von der Gestalt $(f_i - f_j)|_{U_i \cap U_j}$ für gewisse $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Es gilt

$$\phi(g_i - f_i) = h|_{U_i}.$$

Man kann daher oBdA die g_i durch die $\tilde{g}_i = g_i - f_i$ ersetzen. Aber die $\tilde{g}_i \in \mathcal{G}(U_i)$ erfüllen jetzt die Verheftungsbedingung G2 und verkleben sich daher zu einem globalen Schnitt $\tilde{g} \in \mathcal{G}(X)$. Offensichtlich gilt $\phi(\tilde{g}) = h$ nach Garbenaxiom G1, denn dies gilt in allen Karten U_i . Dies zeigt die Exaktheit bei $\mathcal{H}(X)$.

Exaktheit bei $H^1(X, \mathcal{F})$. Offensichtlich gilt $Z^1(\mathcal{U}, \psi) \circ \delta = 0 \text{ mod } dC^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und somit liegt die konstruierte Klasse $\delta(h)$ im Kern der Abbildung $H^1(\psi) : H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G})$. Umgekehrt gilt für einen 1-Kozykel im Kern von $H^1(\psi)$ – dieser sei repräsentiert durch $f_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ – dann $Z^1(\mathcal{U}, \psi)(f_{ij}) = (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$ für eine geeignete Verfeinerung (diese sei hier oBdA wieder \mathcal{U}) und geeignete $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$! Die Bilder $h_i = \phi(g_i) \in \mathcal{H}(U_i)$ erfüllen dann die Verheftungsbedingung auf $U_i \cap U_j$ wegen

$$h_i - h_j = \phi(g_i) - \phi(g_j) = \phi(g_i - g_j) = \phi(\psi(f_{ij})) = 0 .$$

Die $h_i \in \mathcal{H}(U_i)$ verkleben sich daher zu einem globalen Schnitt $h \in \mathcal{H}(X)$. Nach Definition von δ ist dann $\delta(h)$ gerade ein Repräsentant in der Klasse des Kozykels (f_{ij}) , denn $h|_{U_i} = \phi(g_i)$ mit $f_{ij} = g_i - g_j$ auf $U_i \cap U_j$. Damit ist auch die Exaktheit bei $H^1(X, \mathcal{F})$ gezeigt.

Lokalfreie \mathcal{O}_X -Garben

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und \mathcal{O}_X die Strukturgarbe der holomorphen Funktionen einer komplexen Mannigfaltigkeit X . Für \mathcal{O}_X -lineare Garbenhomomorphismen $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ist die Quotientengarbe⁴ $\text{Kokern}(\varphi)$ eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

Eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe nennt man eine **lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarbe** (oder auch ein Vektorbündel) vom Rang r auf X , wenn es eine offene Überdeckung \mathcal{U} von X gibt so daß die Einschränkungen von \mathcal{F} auf die Teilmengen $U_i \in \mathcal{U}$ der Überdeckung als \mathcal{O}_X -Modulgarben isomorph sind zur direkten Summe $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_{U_i}$. Für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{E} hat man \mathcal{O}_{U_i} -Isomorphismen

$$\psi_i^\mathcal{E} : \mathcal{E}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^r .$$

Dies liefert $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ -lineare **Übergangsisomorphismen** $a_{ji}^\mathcal{E} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^r \cong \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^r$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow[\sim]{\psi_i^\mathcal{E}|_{U_i \cap U_j}} & \mathcal{O}_X^r(U_i \cap U_j) \\ \parallel & & \downarrow a_{ji}^\mathcal{E} \\ \mathcal{E}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow[\sim]{\psi_j^\mathcal{E}|_{U_i \cap U_j}} & \mathcal{O}_X^r(U_i \cap U_j) \end{array}$$

auf $U_i \cap U_j$ durch $a_{ji}^\mathcal{E} = \psi_j^\mathcal{E}|_{U_i \cap U_j} \circ \psi_i^\mathcal{E}|_{U_i \cap U_j}^{-1} \in \text{Gl}(r, \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$. Offensichtlich gilt

$$\boxed{a_{ji}^\mathcal{E} \circ a_{ik}^\mathcal{E} = a_{jk}^\mathcal{E}}$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ sowie $a_{ii}^\mathcal{E} = \text{id}$ auf U_i . Gelten diese Bedingungen, sagt man die $a_{ji}^\mathcal{E}$ definieren einen 1-Kozykel

$$a_{ji}^\mathcal{E} \in Z^1(\mathcal{U}, \text{Gl}(r, \mathcal{O}_X)) .$$

Wähle man andere \mathcal{O} -lineare Isomorphismen anstatt $\psi^\mathcal{E}$, so sind diese von der Gestalt $b_i \circ \psi_i^\mathcal{E}$ für gewisse $b_i \in \text{Gl}(r, \mathcal{O}(U_i))$. Dies ändert die $a_{ji}^\mathcal{E}$ ab in $\tilde{a}_{ji}^\mathcal{E} = b_j|_{U_i \cap U_j} \circ a_{ji}^\mathcal{E} \circ b_i|_{U_i \cap U_j}^{-1}$. Für jede solche Wahl von b_i und jedes $a_{ji} \in Z^1(\mathcal{U}, \text{Gl}(r, \mathcal{O}))$

⁴Man definiert $\text{Kokern}(\varphi)(U)$ als die Garbe aller Funktionen $f : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x / \varphi_x(\mathcal{G}_x)$ mit der folgenden lokalen Eigenschaft: Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung V (abhängig von f) so dass die Komponente f_y im Produkt für alle $y \in V$ als Restklasse eines globalen Schnitts von $\mathcal{F}(V)$ im Halmquotient $\mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{F}_y / \varphi_y(\mathcal{G}_y)$ representiert wird.

ist $\tilde{a}_{ji} = b_j|_{U_i \cap U_j} \circ a_{ji} \circ b_i|_{U_i \cap U_j}^{-1}$ wieder ein 1-Kozykel und man nennt die Kozykel \tilde{a}_{ji} und a_{ji} äquivalent. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit

$$H_U^1(X, Gl(r, \mathcal{O}_X)) .$$

Die \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{E} kann man (bis auf Isomorphie) rekonstruieren aus den 1-Kozyklen $a_{ji}^\mathcal{E} \in Gl(n, \mathcal{O}(U_j \cap U_i))$. Setzt man

$$\tilde{\mathcal{E}}(U) = \{ \tilde{s}_i \in \mathcal{O}(U_i)^r \mid \tilde{s}_j = a_{ji}^\mathcal{E}(\tilde{s}_i) \} ,$$

definiert⁵ dies eine zu \mathcal{E} isomorphe \mathcal{O}_X -Modulgarbe $\tilde{\mathcal{E}}$. Der Isomorphismus $\mathcal{E} \cong \tilde{\mathcal{E}}$ wird gegeben durch die Abbildung, die $\mathcal{E}(U) \ni s = (s_i), s_i \in \mathcal{E}(U \cap U_i)$ auf $\tilde{\mathcal{E}}(U) \ni \tilde{s} = (\tilde{s}_i) \in \mathcal{O}(U \cap U_i)$ abbildet vermöge $\tilde{s}_i = \psi_i(s_i)$. Analog zeigt man, daß für \mathcal{O}_X -isomorphe lokalfreie Garben \mathcal{E} und \mathcal{F} vom Rang r gilt $a_{ji}^\mathcal{E} = b_j|_{U_i \cap U_j} \circ a_{ji}^\mathcal{F} \circ b_i|_{U_i \cap U_j}^{-1}$ für gewisse $b_i \in Gl(r, \mathcal{O}(U_i)), i \in I$ zu einer genügend feinen offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dies zeigt

Lemma. Die Isomorphieklassen von lokalfreien \mathcal{O}_X -Modulgarben vom Rang r auf X entsprechen 1-1 den Elementen der Menge

$$H^1(X, Gl(r, \mathcal{O}_X)) = \lim_U H_U^1(X, Gl(r, \mathcal{O}_X)) .$$

Für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{E}, \mathcal{F} vom Rang n resp m definiert man die lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarbe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ vom Rang $n \cdot m$ durch die Übergangsmatrizen $a_{ji}^\mathcal{E} \otimes a_{ji}^\mathcal{F}$ (Kronecker-Produkt der Matrizen). Hierzu muss man gegebenenfalls vorher zu einer Verfeinerung der Überdeckung übergehen, die \mathcal{E} und \mathcal{F} trivialisiert. Analog definiert man $\det(\mathcal{E})$ und \mathcal{E}^\vee als die lokalfreien \mathcal{O}_X -Modulgarben vom Rang 1 resp. n , die durch die Übergangsmatrizen $\det(a_{ji}^\mathcal{E})$ resp $(a_{ji}^\mathcal{E})^{-t}$ gegeben sind. Hat \mathcal{E} den Rang 1, ist $(a_{ji}^\mathcal{E})^{-t} = (a_{ji}^\mathcal{E})^{-1}$ und es gilt $a_{ji}^\mathcal{E} \otimes (a_{ji}^\mathcal{E})^{-1} = id$. Für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{L} vom Rang 1 folgt daher $\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$. Die Menge der Isomorphieklassen lokalfreier \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{L} vom Rang 1 auf X (**Geradenbündel**)

$$Pic(X) = H^1(X, Gl(1, \mathcal{O}_X)) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

erhält somit durch das Tensorprodukt $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ eine Gruppenstruktur⁶.

⁵Die wie $\tilde{\mathcal{E}}$ für einen beliebigen Kozykel $a_{ji} \in Z^1(U, Gl(n, \mathcal{O}_X))$ (anstelle von $a_{ji}^\mathcal{E}$) definierte Garbe ist eine lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

⁶Für $r = 1$ ist $Gl(r, \mathcal{O}_X)$ eine Garbe abelscher Gruppen und es gilt $H^1(X, Gl(1, \mathcal{O}_X^*)) = H^1(X, Gl(1, \mathcal{O}_X))$. Wie man leicht sieht ist die Gruppenstruktur auf $H^1(X, Gl(1, \mathcal{O}_X^*))$ die durch das Tensorprodukt gegebene Struktur auf $H^1(X, Gl(1, \mathcal{O}_X))$.

Divisoren: Ein Divisor $D = \sum n_P P$ auf X ist eine endliche Summe von Punkten P aus X mit Vielfachheiten $n_P \in \mathbb{Z}$. Für einen Divisor D auf X definiert man eine Garbe $\mathcal{O}_X(D)$. Hierbei besteht $\mathcal{O}_X(D)(U)$ aus den meromorphen Funktionen f auf U mit

$$\text{ord}_P(f) \geq -n_P$$

für alle $P \in U$ (hierbei ist $n_P = 0$ für fast alle P). Ist U holomorph äquivalent $\phi : U \cong V$ zu einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$, dann haben die $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ die Gestalt

$$f(x) = h(\phi(x)) \cdot \prod_{P \in U} (\phi(x) - \phi(P))^{-n_P}$$

für eine holomorphe Funktion $h : V \rightarrow \mathbb{C}$. Damit definiert $\psi(f) = h \circ \phi$ einen \mathcal{O}_X -linearen Isomorphismus $\psi^{\mathcal{O}(D)} : \mathcal{O}_X(D)(U) \cong \mathcal{O}_X(U)$. Für eine Überdeckung durch Kartenmengen U_i erhält man damit Trivialisierungen

$$\psi_i^{\mathcal{O}(D)} : \mathcal{O}_X(D)(U_i) \cong \mathcal{O}_X(U_i).$$

Aus der obigen Konstruktion der lokalen Isomorphismen $\psi_i^{\mathcal{O}(D)}$, sieht man sofort für Kozykel die Gleichung $a_{ji}^{\mathcal{O}(D_1)} \otimes a_{ji}^{\mathcal{O}(D_2)} = a_{ji}^{\mathcal{O}(D_1+D_2)}$. Dies definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{Div}(X) = \bigoplus_{P \in X} \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Pic}(X),$$

welcher den Divisor D auf die Isomorphieklasse der lokal freien \mathcal{O}_X -Modulgarbe $\mathcal{O}_X(D)$ schickt. Angenommen es gilt $\psi : \mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ (\mathcal{O}_X -linear) auf X für $D = \sum_P n_P P$. Dann definiert $f = \psi^{-1}(1)$ eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{O}_X(D)(X)$ mit der Eigenschaft $\text{ord}_P(f) = n_P$ für alle $P \in X$. Die Umkehrung gilt auch: Ist $f \in \mathcal{M}_X^*(X)$ eine nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion auf X (und X zshg), dann gilt für den Pol/Nullstellen-Divisor $D = (f)$ von f die Isomorphie $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ auf X im obigen Sinn; die Abbildung schickt f auf 1. Die Pol/Nullstellen-Divisoren (f) für $f \in \mathcal{M}_X^*(X)$ nennt man *Hauptdivisoren* und die Quotientengruppe $\text{Div}(X)/(\mathcal{M}_X^*(X))$ die Klassengruppe $\text{Cl}(X)$. Es folgt

$$\text{Cl}(X) = \text{Div}(X)/(\mathcal{M}_X^*(X)) \hookrightarrow \text{Pic}(X).$$

Beispiel 1. Im Spezialfall $X = P^1(\mathbb{C})$ und $\phi_0 : U_0 \cong \mathbb{C}$ und $\phi_\infty : U_\infty \cong \mathbb{C}$ mit Kartenwechsel $z_0 = z_\infty^{-1}$ betrachte den Divisor $n \cdot P_0$ für der Nullpunkt $P_0 \in U_0$. Dann entsprechen Schnitte in $H^0(X, \mathcal{O}_X(n \cdot P_0))$ holomorphen Funktionen $h_0(z_0)$ auf \mathbb{C} , derart daß $h_\infty(z_\infty) = z_0^{-n} h_0(z_0) = z_\infty^n h_0(\frac{1}{z_\infty})$ holomorph ist für alle $z_\infty \in \mathbb{C}$.

Holomorphe Differentialformen: Die Garbe Ω_X der holomorphen Differentialformen auf X ist eine lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarbe vom Rang 1 auf X . Ist $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung von X durch Kartenmengen mit $\phi_i : U_i \cong V_i \subseteq \mathbb{C}$. Für offenes $U \subseteq X$ ist $\omega \in \Omega_X(U)$ gegeben durch $\omega = f_i(z_i)dz_i$ für $f_i \in \mathcal{O}(V_i)$ derart, daß die Verheftungsbedingungen

$$\phi_{ji}^*(\omega_j|_{\phi_j(U_i \cap U_j)}) = \omega_i|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$$

für alle $i, j \in I$ gelten. Also konkret $f_j(\phi_{ji}(z_i))d\phi_{ji}(z_i) = f_i(z_i)dz_i$. Wegen $\phi_{ji}(z_i) = z_j$ und $\phi_i(x) = z_i$ resp. $\phi_j(x) = z_j$ bedeutet dies

$$(f_j \circ \phi_j)(x) = \left(\frac{d\phi_{ji}(z_j)}{dz_i} (\phi_i(x)) \right)^{-t} \cdot (f_i \circ \phi_i)(x).$$

Offensichtlich ist Ω_X eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe und lokalfrei. In der Tat gilt

$$\psi_i^\Omega : \Omega_X|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X(U_i)$$

vermöge $\omega_i = f_i(z_i)dz_i \mapsto f_i \circ \phi_i$. Beachte $a_{ji}^\Omega = \psi_j^\Omega|_{U_i \cap U_j} \circ (\psi_i^\Omega|_{U_i \cap U_j})^{-1}$ sendet $f_i \circ \phi_i(x)$ auf $a_{ji}^\Omega(x) \cdot (f_j \circ \phi_j(x))$ für $x \in U_i \cap U_j$. Dies zeigt

$$a_{ji}^\Omega(x) = \phi'_{ji}(\phi_i(x))^{-t} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$$

für die Kartenwechsel $\phi_{ij} : \phi_j(U_j \cap U_i) \cong \phi_i(U_j \cap U_i)$. Hierbei bezeichne wie üblich ϕ'_{ji} die holomorphe Ableitung. Insbesondere ist die Kozykelrelation in diesem Fall letztlich die Kettenregel angewendet auf $\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$. Die Garbe Ω_X ist dual zu der holomorphen Tangentialgarbe T_X der holomorphen Vektorfelder mit dem Kozykel $a_{ji}^{T_X} = \phi'_{ji}(\phi_i(x))$.

Beispiel 2. Betrachtet man den Spezialfall $X = P^1(\mathbb{C})$ mit den Karten $\phi_0 : U_0 \cong \mathbb{C}$ und $\phi_\infty : U_\infty \cong \mathbb{C}$ und dem Kartenwechsel $\phi_{0\infty} = \phi_{\infty 0} : \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}^*$ gegeben durch $z \mapsto 1/z$, erhält man wegen $((1/z)')^{-t} = (-1/z^2)^{-t} = -z^2$ für den Kozykel $a_{\infty 0}^\Omega(x) = -\phi_0(x)^2 = -z_0^2$ und dieser ist äquivalent zu $a_{\infty 0}^{\mathcal{O}_X(-2 \cdot P_0)} = z_0^2$ [setze z.B. $b_0 = 1$ und $b_\infty = -1$] wegen Beispiel 1. Es folgt

$$\Omega_{P^1(\mathbb{C})} \cong \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(-2 \cdot P_0).$$

DeRham Kohomologie

Für eine reelle C^∞ -Mannigfaltigkeit X sei A_X^i die Garbe der \mathbb{C} -wertigen alternierenden i -Formen auf X . D.h. lokal auf Karten ist $A_X^i(U)$ gegeben durch Formen $\sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I$ mit $I \subseteq \{1, \dots, \dim(X)\}$ und $\#I = i$ sowie $\omega_I(x) \in C^\infty(U)$.

Proposition 2. Für Riemannsche Flächen gilt $H_{dR}^i(X) \cong H^i(X, \mathbb{C}_X)$.

Beweis. Für Riemannsche Flächen ist $\dim(X) = 2$. Daher gilt $A_X^i = 0$ für $i > 2$. Das **Poincare Lemma** liefert exakte Garbensequenzen auf X

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow A_X^0 \rightarrow Z_X^1 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \rightarrow Z_X^1 \rightarrow A_X^1 \rightarrow A_X^2 \rightarrow 0$$

für $Z_X^1 = \text{Kern}(d : A_X^1 \rightarrow A_X^2)$ definiert durch die Cartan Ableitung d . Sei

$$H_{dR}^i(X) := \frac{\text{Kern}(d : A_X^i(X) \rightarrow A_X^{i+1}(X))}{\text{Bild}(d : A_X^{i-1}(X) \rightarrow A_X^i(X))}.$$

Ist X parakompakt (z.B. kompakt) gilt für alle C_X^∞ -Modulgarben auf X , somit insbesondere für die Garben A_X^i nach Lemma 1 (bzw. einer Verallgemeinerung [Go], [Gu])

$$(*) \quad H^j(X, A_X^i) = 0 \quad , \quad \forall j \geq 1.$$

OBdA sei X zusammenhängend. Dann sieht man 1) durch direkte Inspektion $H^0(X, \mathbb{C}_X) = \mathbb{C} = H_{dR}^0(X)$. 2) Wegen $\mathbb{C} \hookrightarrow C^\infty(X, \mathbb{C}) \rightarrow Z_X^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X)$ und $H^1(X, A_X^0) = 0$ induziert der $\delta : Z_X^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X)$ einen Isomorphismus

$$\bar{\delta} : H_{dR}^1(X) = \frac{\text{Kern}(d : A_X^1(X) \rightarrow A_X^2(X))}{\text{Bild}(d : A_X^0(X) \rightarrow A_X^1(X))} = Z_X^1(X)/dC^\infty(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X).$$

3) Lemma 1 in der scharfen Form (*) zeigt analog $H^i(X, \mathbb{C}_X) \cong 0$ für $i \geq 3$ und

$$H_{dR}^2(X) = H^1(X, Z_X^1) \cong A_X^2(X)/\text{Bild}(d : A_X^1(X) \rightarrow A_X^2(X)) \cong H^2(X, \mathbb{C}_X).$$

Bemerkung. Analog zeigt man $H_{dR}^i(X) \cong H^i(X, \mathbb{C}_X)$ ganz allgemein für (para)kompakte C^∞ -Mannigfaltigkeiten X für alle i . Die Vergleichsisomorphismen sind funktoriell bezüglich C^∞ -Abbildungen $f : X \rightarrow Y$.

Ist X kompakt und orientierbar, liefert Integration über X eine surjektive Abbildung

$$\int_X : A^{\dim(X)}(X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Diese verschwindet nach Stokes auf den Formen in $dA^{\dim(X)-1}(X)$, induziert also eine surjektive \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\int_X : H_{dR}^{\dim(X)}(X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Beispiel. Sei X der Kreisring $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$. Dann gilt $H_{dR}^1(S^1) \cong \mathbb{C}$ und dieser Isomorphismus wird induziert von

$$\int_{S^1} : H_{dR}^1(S^1) \cong \mathbb{C}.$$

[Parametrisiert man S^1 durch $[0, 1]/0 \sim 1 \ni t \mapsto \exp(2\pi it)$, entspricht $\omega \in A^1(S^1)$ einer Form $g(t)dt$ mit $g(t) = g(t+1)$. Sei $G(t)$ eine Stammfunktion; diese erfüllt $G(t) = G(t+1)$ genau dann wenn gilt $\int_{S^1} \omega = 0$].

Die Čech-Kohomologie $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1})$ berechnet man wie folgt. Überdecke S^1 durch überlappende Sektoren U_i der Winkelbreite $4\pi/n$ um die n -ten Einheitswurzeln ζ^i . Für wachsendes n liefert dies ein kofinales System von Überdeckungen \mathcal{U}_n von S^1 . Es gilt $U_i \cap U_j = \emptyset \Leftrightarrow \zeta^i / \zeta^j \neq \zeta, 1, \zeta^{-1}$. Jeder Čech 1-Kozykel (f_{ij}) entspricht daher einem Tupel von n Zahlen $f_{12}, \dots, f_{n1} \in \mathbb{Z}$. Zwei solche Tupel unterscheiden sich um einen Rand genau dann wenn die Summe $f_{12} + \dots + f_{n1} \in \mathbb{Z}$ übereinstimmt. Diese Summenabbildungen definieren einen Isomorphismus $H_{\mathcal{U}}^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \cong \mathbb{Z}$ und diese sind kompatibel für alle n . Es folgt $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \cong \mathbb{Z}$. Dasselbe gilt analog für $H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1})$, also $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \subset H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1})$.

Vergleich: Der Pullback $\omega \in A^1(S^1)$ der geschlossenen Form $\frac{dz}{2\pi iz} \in A^1(\mathbb{C}^*)$ auf S^1 entspricht der Form dt auf $[0, 1]/0 \sim 1$. Es gilt daher $\int_{S^1} \omega = 1$. Der 1-Kozykel $\delta(\omega)$ in $Z^1(\mathcal{U}_n, \mathbb{C})$ wird gegeben durch die Differenzen von Stammfunktionen auf den $U_i, i = 1, \dots, n$. Wählt man t als Stammfunktion von dt auf allen n Karten, ist diese Differenz $0, \dots, 0, 1$. Es folgt

Folgerung 1. Für $[\omega] \in H_{dR}^1(S^1)$ ist das Bild $\bar{\delta}([\omega]) \in H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1})$ genau dann in $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1})$, wenn $\int_{S^1} \omega \in \mathbb{Z}$ gilt.

Die Kohomologiegruppe $H^1(Y, C_Y)$

Sei C eine abelsche Gruppe (aufgefasst als diskreter topologischer Raum). Eine Mannigfaltigkeit X mit einer glatten Operation $C \times X \rightarrow X$ heisst **C -Raum**⁷, wenn C **eigentlich diskontinuierlich**⁸ auf X operiert, geschrieben als $(c, x) \mapsto c \cdot x$. Sei $p : X \rightarrow Y$ die Projektion auf den Quotient $Y = X/C$.

Ein C -Morphismus $f : X \rightarrow X'$ zwischen C -Räumen ist eine glatte äquivariante Abbildung $f : X \rightarrow X'$, d.h. es gilt $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$. Diese induziert eine glatte Abbildung $X/C \rightarrow X'/C$ der Quotienten.

Ein C -Raum heisst **trivial**, wenn er als C -Raum isomorph ist zu $X' = C \times Y$ mit Operation $c \cdot (c', y) = (c + c', y)$. Die Gruppe der C -Isomorphismen des trivialen C -Raums X' , welche auf dem Quotient Y die Identität induzieren, werden beschrieben durch die Abbildungen $f_c(c', y) = c(y) \cdot (c', y)$ für lokalkonstante Funktionen $c : Y \rightarrow C$. Ist Y zshd., ist diese Gruppe isomorph zu C .

Sei X ein C -Raum. Wegen der freien Operation von C gibt es eine Überdeckung von $Y = X/C$ durch zusammenhängende offene Mengen U_i , für die $C \times U_i$ als C -Raum trivial ist. D.h. es gibt C -Isomorphismen $\psi_i : p^{-1}(U_i) \cong C \times U_i$. Für jeden Durchschnitt $U_j \cap U_i$ sei $\psi_{ji} = A \times (U_j \cap U_i) \rightarrow C \times (U_j \cap U_i)$ definiert durch $\psi_{ji} = \psi_j^{-1} \circ \psi_i$ für die Einschränkungen von ψ_j, ψ_i auf den Durchschnitt. Dann gilt notwendiger Weise $\psi_{ji}(c', x) = (c_{ji} + c', x)$ für gewisse $c_{ji} \in C$. Aus der Definition der ψ_{ji} folgt sofort die Kozykelrelationen

$$\boxed{c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}} .$$

Die (c_{ij}) definieren daher einen Čech-Kozykel in $Z^1(\mathcal{U}, C_Y)$ für die Garbe C_Y der lokalkonstanten Funktionen auf Y mit Werten in C . Eine andere Wahl der Isomorphismen ψ verändert diesen Kozykel um einen Korand. Die Klasse in $H_{\mathcal{U}}^1(Y, C_Y)$ hängt daher nur vom C -Raum X ab, und dieser kann umgekehrt bis auf C -Raumisomorphie aus dem 1-Kozykel (bzw. dessen Kohomologiekategorie) rekonstruiert werden⁹. *Die Isomorphieklassen von C -Räumen mit Quotient Y ent-*

⁷Beispiel: $X = \mathbb{C}, C = \mathbb{Z}$ mit $(c, z) \mapsto z + c$ und $p(z) = \exp(2\pi iz)$ mit $Y = X/C \cong \mathbb{C}^*$.

⁸Für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung U_x von x mit $\gamma(U_x) \cap U_x \neq \emptyset \implies \gamma = 1$. Ist $x' \in X$ nicht von der Gestalt $\gamma \cdot x, \gamma \in C$, dann gibt es offene Umgebungen $U_x, U_{x'}$ von x und x' mit $\gamma U_x \cap \gamma' U_{x'} = \emptyset$ für alle $\gamma, \gamma' \in C$.

⁹ $Y = (\bigsqcup U_i) / \sim$ mit der Äquivalenzrelation $u_i \sim u_j$ gdw u_i und u_j denselben Punkt in U_{ij} definieren. Analog $X = (\bigsqcup C \times U_i) / \sim$ mit $(c, u_i) \sim (c', u_j)$ genau dann wenn u_i und u_j denselben Punkt $u \in U_{ij}$ definieren und wenn gilt $c' = c + c_{ij}(u)$. Die Kozykelrelationen zeigen, daß dies eine Äquivalenzrelation definiert.

sprechen daher den Elementen der Kohomologiegruppe $H^1(Y, C_Y)$, und die Klasse des trivialen C -Raums entspricht dem Nullelement.

Wir fassen zusammen: Jede Klasse ξ in $H^1(Y, C_X)$ definiert also einen C -Raum X und dies definiert eine **unverzweigte** Quotientenabbildung $p : X \rightarrow Y$. D.h. für jeden Punkt $y \in Y$ existiert eine offene Umgebung V_y von y so daß $p^{-1}(U_x)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen $U_x, x \in p^{-1}(y)$ für die $p|_{U_x} : U_x \rightarrow V_y$ ein Homöomorphismus ist.

Ist Y zshg., so folgt aus dem bekannten Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und universeller Überlagerung, daß ein C -Raum X mit Quotient $p : X \rightarrow Y$ trivial ist genau dann, wenn jeder (glatte) geschlossene Weg $\gamma : S^1 \rightarrow Y$ sich zu einem geschlossenen Weg in X liften lässt¹⁰. Wie man leicht sieht, ist dies genau dann der Fall, wenn $\gamma^*(\xi) \in H^1(S^1, C_{S^1})$ trivial ist.

Folgerung 2. *Es gilt $\xi = 0$ genau dann wenn gilt $\gamma^*(\xi) = 0$ für alle $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$.*

Jede kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

abelscher Gruppen definiert eine exakte Garbensequenz

$$0 \rightarrow A_X \rightarrow B_X \rightarrow C_X \rightarrow 0.$$

Da $B = B_X(X) \rightarrow C = C_X(X)$ surjektiv ist, folgt die Exaktheit von

$$0 \rightarrow H^1(X, A_X) \rightarrow H^1(X, B_X) \rightarrow H^1(X, C_X).$$

Dies liefert eine Inklusion $H^1(X, A_X) \hookrightarrow H^1(X, B_X)$. Eine Klasse von $H^1(X, B_X)$ liegt in diesem Sinne in $H^1(X, A_X)$ genau dann wenn ihr Bild in $H^1(X, C_X)$ verschwindet.

Es folgt: $\xi \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$ liegt in $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ genau dann wenn

$$\gamma^*(\xi) \in H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1})$$

gilt für alle geschlossenen glatten Wege γ in X . Wegen Folgerung 1 ergibt dies

Folgerung 3. *Für $[\omega] \in H^1_{dR}(X)$ liegt $\bar{\delta}([\omega]) \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$ genau dann in $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, wenn $\int_{S^1} \gamma^*(\omega) \in \mathbb{Z}$ für jeden glatten geschlossenen Weg $\gamma : S^1 \rightarrow X$ gilt.*

¹⁰Es folgt sogar $H^1(Y, C_Y) = \text{Hom}(\pi_1(Y, y_0), C)$ für zshg. Mannigfaltigkeiten, was wir aber nicht benötigen werden.

Der Endlichkeitssatz

Wir zeigen wie in [Fo], daß für eine lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} auf einer kompakten Riemannschen Fläche X die erste Čech-Kohomologie $H^1(X, \mathcal{F})$ ein endlich dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum ist. Ist $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe, folgt aus diesem Endlichkeitssatz die Existenz nichttrivialer meromorpher Funktionen auf X und allgemeiner der Satz von Riemann-Roch.

Hilberträume holomorpher Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Für holomorphe Funktionen f auf D definiert man $\|f\|_{L^2(D, \mathcal{O})}$ als Wert in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch

$$\|f\|_{L^2(D, \mathcal{O})}^2 = \int_D |f(z)|^2 dx dy .$$

f heisst **quadratintegrierbar** im Fall $\|f\|_{L^2(D, \mathcal{O})} < \infty$. Der Raum $L^2(D, \mathcal{O})$ aller quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen auf D ist ein \mathbb{C} -Vektorraum mit einem hermiteschen positiv definiten Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z) \overline{g(z)} dx dy .$$

Dieses ist wohldefiniert wegen $|fg| \leq (|f|^2 + |g|^2)/2$, und es gilt $\langle f, g \rangle \leq \|f\| \|g\|$ wie man leicht zeigt. Ist D beschränkt, dann ist $\text{vol}(D) = \int_D dx dy$ endlich. Ist $\text{vol}(D)$ endlich, gilt $\|f\|_{L^2(D, \mathcal{O})}^2 \leq \text{vol}(D) \cdot \sup_{z \in D} |f(z)|^2$.

Lemma 2. $L^2(D, \mathcal{O})$ ist Cauchy-vollständig, d.h. $L^2(D, \mathcal{O})$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. Sei $B = B_r(z_0)$ eine offene Kugel vom Radius r in D . Man zeigt für $f_n(z) = (z - z_0)^n$ die Orthogonalität $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ für $n \neq m$ sowie $\|f_n\|_{L^2(B)} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \cdot r^{n+1}$ (Polarkoordinaten). Für Taylorreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gilt

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 = \pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \cdot r^{2n+2} .$$

Insbesondere gilt daher wegen $a_0 = f(z_0)$

$$\pi r^2 \cdot |f(z_0)|^2 \leq \|f\|_{L^2(B)}^2 \leq \|f\|_{L^2(D)}^2 .$$

Somit ist jede Cauchyfolge f_ν in $L^2(D, \mathcal{O})$ lokal gleichmässig konvergent auf D , und damit konvergieren die Funktionen $f_\nu(z)$ lokal gleichmässig (auf der abgeschlossenen Kugel um z_0 vom Radius $r/2$) gegen eine holomorphe Grenzfunktion $f(z)$ auf D . QED

Eine offene Teilmenge $D' \subset D$ heisst **Schrumpfung** (Notation: $D' \ll D$), wenn $D' \subset K \subset D$ gilt für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$.

Lokales Schrumpfunglemma. Sei $D' \ll D$ eine Schrumpfung und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein abgeschlossener \mathbb{C} -Unterraum $A \subseteq L^2(D, \mathcal{O})$ endlicher Kodimension mit der Eigenschaft: Für alle $f \in A$ gilt

$$\|f\|_{L^2(D', \mathcal{O})} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D, \mathcal{O})}.$$

Beweis. Es gibt offensichtlich ein $r > 0$ so daß D' sich überdecken lässt durch endlich viele offene Kugeln $B_{r/2}(z_\nu)$ für die alle vergrösserten Kugeln $B_r(z_\nu)$ noch in D liegen. Der Unterraum A aller $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ mit der Eigenschaft

$$f(z_\nu) = \dots = f^{(n-1)}(z_\nu) = 0 \quad \forall \nu$$

hat endliche Kodimension, nämlich $\leq n \cdot \#\{z_\nu\}$. Aus

$$\|f\|_{L^2(B_{r/2}(z_\nu), \mathcal{O})}^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\pi |a_j|^2}{j+1} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{2j+2} \leq 2^{-2n} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\pi |a_j|^2}{j+1} \cdot r^{2j+2} \leq 2^{-2n} \|f\|_{L^2(B_r(z_\nu), \mathcal{O})}^2$$

folgt $\|f\|_{L^2(B_{r/2}(z_\nu), \mathcal{O})} \leq 2^{-n} \|f\|_{L^2(B_r(z_\nu), \mathcal{O})}$ und damit die Behauptung

$$\|f\|_{L^2(D', \mathcal{O})} \leq \sum_{\nu} \|f\|_{L^2(B_{r/2}(z_\nu), \mathcal{O})} \leq \#\{z_\nu\} 2^{-n} \cdot \max_{\nu} \|f\|_{L^2(B_r(z_\nu), \mathcal{O})} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D, \mathcal{O})}$$

falls n so gross gewählt wird, so daß $\#\{z_\nu\} \cdot 2^{-n} < \varepsilon$. QED

Schrumpfen von Überdeckungen

Sei \mathcal{U} eine *endliche* Überdeckung einer Riemannschen Fläche X durch offene Kartenmengen U_1, \dots, U_n mit in \mathbb{C} *beschränkten* Bildmengen $V_i \subset \mathbb{C}$ bezüglich der Kartenabbildungen $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$. Wir nennen solche Überdeckungen

gute Überdeckungen. Für eine gute Überdeckung und $f = (f_i) \in C_{\mathcal{U}}^0(X, \mathcal{O})$ definiert man

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(U_i, \mathcal{O})}^2.$$

Hierbei sei $\|f_i\|_{L^2(U_i, \mathcal{O})}^2 := \|f_i \circ \phi_i^{-1}\|_{L^2(V_i, \mathcal{O})}^2$. Analog für $\eta = (f_{ij}) \in C_{\mathcal{U}}^1(X, \mathcal{O})$

$$\|\eta\|^2 = \sum_{i=1}^n \|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j, \mathcal{O})}^2.$$

Die so definierten Normen $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{U}}$ resp. $\|\eta\| = \|\eta\|_{\mathcal{U}}$ definieren wie im lokalen Fall Hilberträume $C_{(2)}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Die Unterräume der quadratintegrierbaren Kozykel $Z_{(2)}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ sind abgeschlossen, und damit selbst Hilberträume. Wir fixieren ein für alle mal eine solche Überdeckung \mathcal{U} und nennen sie \mathcal{U}_0 , wobei wir hier *zusätzlich annehmen, die offenen Mengen der Überdeckung \mathcal{U}_0 seien alle biholomorph äquivalent zum Einheitskreis!*

Definition. Seien \mathcal{U} und \mathcal{V} gute Überdeckungen von X mit den oben geforderten Eigenschaften. Man nennt \mathcal{V} eine **Schrumpfung** von \mathcal{U} , wenn $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ eine Verfeinerung von \mathcal{U} ist mit der Eigenschaft $V_j \ll U_{\phi(j)}$ für alle j . Wir schreiben dann $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$. Das lokale Schrumpfungslemma gibt sofort

Schrumpfungslemma. *Für eine Schrumpfung $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$ guter Überdeckungen und eine Konstante $\varepsilon > 0$ existiert ein abgeschlossener Unterraum $A \subset Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ endlicher Kodimension mit $\|f\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon \cdot \|f\|_{\mathcal{U}}$ für alle $f \in A$.*

Komplizierter ist der Beweis des folgenden Resultates (sei \mathcal{U}_0 fixiert wie oben).

Schlüssellemma. *Gegeben seien Schrumpfungen $\mathcal{W} \ll \mathcal{V} \ll \mathcal{U} \ll \mathcal{U}_0$ von guten Überdeckungen $\mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{U}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ so dass gilt: Für $\xi \in Z_{(2)}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ existieren $\zeta \in Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ und $\eta \in C_{(2)}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ mit*

- **Ausdehnungsaussage:** *Es gilt $\zeta = \xi + \delta(\eta)$ nach Einschränken auf \mathcal{W} .*
- **Normenkontrolle:** *$\max(\|\zeta\|_{\mathcal{U}}, \|\eta\|_{\mathcal{W}}) \leq C \cdot \|\xi\|_{\mathcal{V}}$*
- **Endlichkeitsaussage:** *Es existiert ein endlich dimensionaler Unterraum $S \subset Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, so daß jedes $\zeta \in Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ sich nach nach Einschränken auf \mathcal{W} schreibt in der Form*

$$\sigma = \zeta + \delta(\eta') \quad , \quad \sigma \in S$$

für ein geeignetes $\eta' \in C_{(2)}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$.

Wir betrachten jetzt Schrumpfung $\mathcal{U} \ll \mathcal{U}_0$ unserer festen Überdeckung \mathcal{U}_0 . Dadurch wird der Zusatz des Schlüssellemmas anwendbar und zeigt, daß die Abbildung

$$H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^1(X, \mathcal{O})$$

ein Bild der Dimension $\leq \dim_{\mathbb{C}}(S)$ besitzt, falls \mathcal{W} fein genug gewählt wurde, d.h wenn \mathcal{U} und \mathcal{W} die Voraussetzungen des letzten Lemmas erfüllen. (Dies ist aber im Limes über alle Verfeinerungen keine echte Einschränkung). Aus dem ersten Teil des Schlüssellemmas folgt andererseits, daß die Verfeinerungsabbildung

$$H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^1(X, \mathcal{O}_X)$$

unter den dort gemachten Voraussetzungen surjektiv ist. Hält man \mathcal{U} (mit den im Schlüssellemma gemachten Voraussetzung fest) folgt daher im Limes über alle \mathcal{V} (für \mathcal{V} wie im Schlüssellemma; diese definieren ein cofinales System von Überdeckungen von X)

$$\boxed{H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)}.$$

Zusammen mit der obigen Aussage folgt

Korollar. $g_X := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) \leq \dim_{\mathbb{C}} S < \infty$ (Geschlecht von X).

Aus dem Beweis des Schlüssellemmas ergibt sich, daß ausser der Kompaktheit von X bis auf eine leicht zu modifizierende Stelle im Beweis (Schritt 2) nur lokale Eigenschaften eine Rolle spielen. Daher zeigt dasselbe Argument die folgende Verallgemeinerung des Endlichkeitssatzes

Endlichkeitssatz. Für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{F} auf einer kompakten Riemannschen Fläche X gilt $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{F}) < \infty$.

Korollar 1. Für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{F} auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Rang r gibt es einen Divisor mit $H^0(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$.

Wendet man dies auf die ‘Residuensequenz’ (mit einer Wolkenkratzergerbe δ_D)

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(D) \rightarrow \delta_D \rightarrow 0$$

an für $D = P_1 + \cdots + P_k$, folgt $\dim \mathcal{F}(D)(X) > 0$ aus

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(D)(X) \rightarrow \mathbb{C}^{r \cdot k} \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

für genügend grosses r mit $rk > h^1(X, \mathcal{F})$. Man erhält

Korollar 2. Für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{F} vom Rang r auf einer kompakten Riemannschen Fläche gibt es einen Divisor D und eine exakte Sequenz lokalfreier \mathcal{O}_X -Garben auf X

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

mit einer lokalfreien \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{E} auf X vom Rang $r - 1$.

Beweis. Sei $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}(D) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ definiert durch einen nicht-trivialen Schnitt s in $H^0(X, \mathcal{F}(D))$ durch $\varphi(f) = f \cdot s$ (Korollar 2). φ ist automatisch injektiv! Lokal bei $P \in X$ sei $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_U^r$. In $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_U$ sei lokal bei P das Bild von s gleich $(s_1(x), \dots, s_r(x))$ (oBdA in einer Karte) und $m_P = \min\{\text{ord}_P(s_i) \mid i = 1, \dots, r\}$. Für $\tilde{D} = \sum_{P \in X} m_P \cdot P$ erweitert sich φ zu einer Injektion $\psi : \mathcal{O}_X(D - \tilde{D}) \rightarrow \mathcal{F}$, deren Quotient lokalfrei vom Rang $r - 1$ ist. [Ist $m_P = \text{ord}_P(s_i)$, dann gilt $\mathcal{F}|_U \cong \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_U = \text{Bild}(\mathcal{O}_U(D - \tilde{D})) \oplus \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{O}_U$. Die Aussagen sind lokaler Natur. Benutze, daß die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ Hauptidealringe sind!].

Korollar 4. Für eine kompakte Riemannschen Fläche X und jede lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{L} vom Rang 1 auf X gibt es einen Divisor D auf X mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ als \mathcal{O}_X -Modulgarbe.

Für kompakte Riemannsche Flächen folgt

$$\boxed{Cl(X) \cong Pic(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)}.$$

$Pic(X)$ ist die Gruppe der Isomorphieklassen lokalfreier \mathcal{O}_X -Garben \mathcal{L} (mit dem Tensorprodukt $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ als Multiplikation). Also gilt $Pic(X) = H^1(X, Gl(1, \mathcal{O}_X)) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Jedes solche \mathcal{L} ist nach Korollar 4 isomorph zu einem $\mathcal{O}_X(D)$ als \mathcal{O}_X -Modulgarbe, und es gilt $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(\tilde{D})$ als \mathcal{O}_X -Modulgarbe gdw $\varphi : \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(D - \tilde{D})$ gilt als \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Der Schnitt $f = \varphi(1)$ ist dann eine meromorphe Funktion auf X mit Hauptdivisor $(f) = \tilde{D} - D$. Somit ist $Pic(X)$

isomorph zur Gruppe $Cl(X)$ aller Divisoren auf X modulo der Untergruppe aller Hauptdivisoren (Divisoren von meromorphen Funktionen) auf X

$$Cl(X) = Div(X)/(\mathcal{M}_X(X)^*).$$

Der Grad. Sei $D = \sum_P n_P P$ ein Divisor auf der kompakten Riemannschen Fläche X . Man definiert dann den Grad der lokalfreien Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ als Grad $deg(D) = \sum_P n_P$. Wir werden mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch sehen, daß der Grad nur von Isomorphieklasse der lokalfreien Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ in $Pic(X)$ abhängt. Damit haben Hauptdivisoren den Grad Null haben, und der Grad $deg(\mathcal{L})$ einer lokalfreien \mathcal{O}_X -Garbe \mathcal{L} vom Rang 1 auf X ist damit wohldefiniert als Grad $deg(D)$ eines beliebigen Divisors D auf X mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$.

Lemma.. Für kompakte zshg. Riemannsche Flächen folgt aus $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$ notwendig $deg(D) \geq 0$.

Beweis: In der Tat, ein Schnitt $f \neq 0$ definiert per Definition eine meromorphe Funktion f auf X mit der Eigenschaft: $(f) = D + \sum_{P \in X} n_P \cdot P$ erfüllt $n_P \leq 0$ für alle $P \in X$. Wegen $deg((f)) = 0$ folgt $deg(D) = -\sum_P n_P \geq 0$. QED

Für eine lokalfreie Garbe \mathcal{E} vom Rang r auf X [gegeben durch Cech-Kozykel $(a_{ji}^{\mathcal{E}})$ in $Z^1(\mathcal{U}, Gl(r, \mathcal{O}))$, d.h. mit $a_{ji}^{\mathcal{E}}$ in $Gl(r, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$] definiert man die lokalfreie Garbe $\det \mathcal{E}$ vom Rang 1 auf X durch die Cech-Kozykel $(\det(a_{ji}^{\mathcal{E}}))$ in $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ und man setzt

$$deg(\mathcal{E}) := deg(\det \mathcal{E}).$$

Beachte, $\det(\mathcal{E}) \cong \det \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \det \mathcal{E}_2$ im Fall einer exakten \mathcal{O}_X -linearen Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$ von lokalfreien \mathcal{O}_X -Garben. Es folgt in diesem Fall

$$deg(\mathcal{E}) = deg(\mathcal{E}_1) + deg(\mathcal{E}_2).$$

Satz von Riemann-Roch. Für eine lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{E} auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Rang r gilt $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ für $i \neq 0, 1$ sowie

$$\chi(X, \mathcal{E}) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{E}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{E}) = r \cdot (1 - g_X) + deg(\mathcal{E}).$$

Wir bemerken hier, da für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben aus Lemma 1 und dem später in Korollar 7 bewiesenen Dolbeaut Lemma $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ folgt für alle $i \geq 2$.

Außerdem hängt die linke Seite nur von der Isomorphieklasse von \mathcal{E} ab. Dies gilt auch für den Rang, und damit für $\text{deg}(\mathcal{E})$. Da wir den Satz von Riemann-Roch zuerst für Garben vom Typ $\mathcal{O}_X(D)$ beweist dies, daß Hauptdivisoren Grad Null besitzen.

Beweis. Für kurze exakte Garbensequenzen lokalfreier \mathcal{O}_X -Modulgarben

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$$

wurde $\text{rang}(\mathcal{E}) = \text{rang}(\mathcal{E}_1) + \text{rang}(\mathcal{E}_2)$ und $\text{deg}(\mathcal{E}) = \text{deg}(\mathcal{E}_1) + \text{deg}(\mathcal{E}_2)$ gezeigt. Mit Hilfe von Korollar 3 führt man damit den Beweis zurück auf den Fall $r = 1$ indem man zeigt $\chi(X, \mathcal{E}) = \chi(X, \mathcal{E}_1) + \chi(X, \mathcal{E}_2)$. Im Fall $r = 1$ gilt $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X(D)$ für einen Divisor $D = \sum_{i=1}^k P_i - \sum_{j=1}^{\ell} Q_j$ für Punkte P_i, Q_j in X nach Korollar 4. Nun führt man den Beweis durch Induktion¹¹ nach $k + \ell$ mit Hilfe von exakten Sequenzen vom Typ

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_X(D + P) \rightarrow \delta_P \rightarrow 0.$$

Der Fall $P^1(\mathbb{C})$

Man zeigt leicht

$$\text{Cl}(P^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}.$$

In der Tat, besitzt ein Divisor D den Grad Null, dann ist eine Summe von Divisoren der Gestalt $P - Q$ für Punkte $P, Q \in X$. Im Fall $X = P^1(\mathbb{C})$ ist $P - Q = \left(\frac{z-Q}{z-P}\right)$ und damit jeder Divisor vom Grad Null ein Hauptdivisor. Also ist jedes $\mathcal{L} \in \text{Pic}(P^1(\mathbb{C}))$ isomorph ist zu $\mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)$ für $k = \text{deg}(\mathcal{L})$. Offensichtlich gilt aber

$$H^0(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cdot z \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \cdot z^k$$

für $k \geq 0$ und $H^0(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty))$ ist Null sonst. Nach dem Satz von Riemann-Roch ist daher $h^1(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)) = -k - 1$ für $k < 0$ und $h^1(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty))$ ist Null für $k \geq 0$. Insbesondere ist $g = 0$.

Lokalfreie Garben auf $P^1(\mathbb{C})$. Für jedes Vektorbündel \mathcal{F} auf $X = P^1(\mathbb{C})$ vom Rang 2 existieren Linienbündel $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ und eine exakte Sequenz (Korollar 3)

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{L}_1 \longrightarrow 0$$

¹¹In der Tat ist $H^0(X, \delta_P) = \mathbb{C}$ für die Wolkenkratzergerbe δ_P mit Werten in \mathbb{C} im Punkt P . Beachte $H^1(X, \delta_P) = 0$ wegen Lemma 1. Daraus folgt $\chi(X, \mathcal{O}_X(D + P)) = \chi(X, \mathcal{O}_X(D)) + 1$.

Wir behaupten¹² dann: $\mathcal{F} \cong \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$.

Zum Beweis sei oBdA $\deg(\mathcal{L}_0) \geq \deg(\mathcal{L}_1)$ [anderenfalls ersetzen wir \mathcal{F} durch \mathcal{F}^\vee und \mathcal{L}_i durch \mathcal{L}_{1-i}^\vee]. Ausserdem kann oBdA angenommen werden $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{L}_0 \cong \mathcal{O}_X(k \cdot \infty)$ mit $k \geq \deg(\mathcal{L}_1) = 0$ (Tensorieren mit \mathcal{L}_1^\vee). Damit gilt $H^1(X, \mathcal{L}_0) = 0$ und die lange Kohomologiesequenz liefert

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0(X) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{p} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Es gibt daher ein $s \in \mathcal{F}(X)$ mit $p(s) = 1$. Durch $j(g) = g \cdot s$ definiert dieser Schnitt eine \mathcal{O}_X -lineare Garbenabbildung $j: \mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ mit $p \circ j = id$, von der man leicht zeigt: $\mathcal{F} = i(\mathcal{L}_0) \oplus j(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{O}_X$. QED

Korollar 5. Jedes Vektorbündel \mathcal{F} auf $P^1(\mathbb{C})$ vom Rang r ist isomorph¹³ zu einer direkten Summe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{L}_i$ von Geradenbündeln \mathcal{L}_i .

Beweis. Nach Korollar 3 existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

mit $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{\nu > 0} \mathcal{L}_\nu$ für gewisse Geradenbündel \mathcal{L}_ν (letzteres durch Induktion nach r). Für $\tilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{L}_1)$ und $\mathcal{E} = p^{-1}(\bigoplus_{\nu > 1} \mathcal{L}_\nu)$ gilt

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{q} \mathcal{L}_1 \longrightarrow 0$$

mit $q = pr_1 \circ p$. Wie oben gezeigt ist dann $\tilde{\mathcal{F}} = i(\mathcal{L}_0) \oplus j(\mathcal{L}_1)$ und man zeigt leicht $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus j(\mathcal{L}_1) \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{L}_1$. Da der Rang von \mathcal{E} kleiner als r ist, folgt dann die Behauptung durch Induktion. QED

Korollar 6. Für Vektorbündel \mathcal{F} auf $X = P^1(\mathbb{C})$ sei $D(\mathcal{F}) = \Omega_X \otimes \mathcal{F}^\vee$ für ein Geradenbündel Ω_X vom Rang -2 . Dann gilt

$$\boxed{H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{1-i}(X, D(\mathcal{F}))^*}.$$

¹²Tatsächlich kann der Isomorphismus so gewählt werden, dass i der Inklusion von \mathcal{L}_0 auf den ersten Summanden entspricht und p der Projektion auf den zweiten Summand (Übungsaufgabe).

¹³Die analoge Aussage ist für Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g \geq 1$ falsch.

Beweis. OBdA ist $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(n \cdot \infty)$. Wegen $\Omega_{P^1(\mathbb{C})} \cong \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(-2 \cdot P_0) \cong \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(-2 \cdot \infty)$ bleibt zu zeigen

$$H^i(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(n \cdot \infty)) \cong H^{1-i}(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(-2 - n \cdot \infty))^* .$$

Die Aussage folgt jetzt sofort durch Inspektion der Dimensionen rechts und links, die wir zu Beginn berechnet haben. QED

Wir lassen es als Übungsaufgabe, auf dem Niveau der Čech-Kozyklen ein kompatibles System von Paarungen zu definieren

$$H_{\mathcal{U}}^0(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{F}) \times H_{\mathcal{U}}^1(P^1(\mathbb{C}), \Omega_{P^1(\mathbb{C})} \otimes_{\mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}} \mathcal{F}^\vee) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(P^1(\mathbb{C}), \Omega_{P^1(\mathbb{C})}) \cong \mathbb{C} ,$$

die nicht ausgeartet sind. Im Limes über \mathcal{U} definiert dies einen natürlichen Isomorphismus. Hinweis: Benutze $H^1(P^1(\mathbb{C}), \Omega_{P^1(\mathbb{C})}) \cong \mathbb{C}$ und bestimme diesen Isomorphismus auf der Überdeckung mit den Karten U_0, U_∞ .

Beweis des Schlüssellmmas

Gegeben sei ein quadratintegrierbarer holomorpher 1-Kozykel für \mathcal{V}

$$\xi = (f_{ij}) \in Z_{(2)}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}) .$$

1) Wegen $H_{\mathcal{V}}^1(X, \mathcal{C}_X^\infty) = 0$ gibt es C^∞ -Funktionen $g_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_{ij} = g_i - g_j$ auf $V_i \cap V_j$ (**Lemma 1**).

2) Die Holomorphie $\bar{\partial}f_{ij} = 0$ der f_{ij} zeigt $\bar{\partial}g_i = \bar{\partial}g_j$ auf $V_i \cap V_j$. Daher existiert eine **globale** C^∞ -Differentialform $\omega \in A^{0,1}(X)$ mit $\omega|_{V_i} = \bar{\partial}g_i \cdot d\bar{z}$ (Verheftungseigenschaft von Garbenaxiom G2).

3) Da die $U_{0,i} \in \mathcal{U}_0$ biholomorph äquivalent zum Einheitskreis in \mathbb{C} sind, liefert das **Dolbeaut Lemma** Funktionen $h_i \in C^\infty(U_{0,i})$ mit $\bar{\partial}h_i|_{U_i} = \omega$ auf $U_i \subset U_{0,i}$. Da jedes U_i Schrumpfung in einer Karte von \mathcal{U}_0 ist, sind die h_i damit obdA beschränkt auf U_i .

4) Wegen $\bar{\partial}h_i = \bar{\partial}h_j$ auf $U_i \cap U_j$ sind die holomorphen Funktionen $F_{ij} = h_i - h_j$ beschränkt auf $U_i \cap U_j$, und erfüllen tautologisch die Kozykelrelationen. Wir setzen

$$\zeta := (F_{ij}) \in Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) .$$

5) Auf V_i gilt per Konstruktion $\bar{\partial}h_i = \bar{\partial}g_i$, und damit $h_i - g_i \in \mathcal{O}(V_i)$.

6) h_i ist beschränkt auf V_i , aber nicht notwendig $h_i - g_i$. Schrumpft man auf \mathcal{W} , dann wird $h_i - g_i$ beschränkt und damit folgt

$$-\eta := (h_i - g_i) \in C_{(2)}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O}) .$$

7) Schränkt man ξ und ζ auf \mathcal{W} ein, erhält man auf \mathcal{W} wegen $F_{ij} = h_i - h_j$ und $f_{ij} = g_i - g_j$ die Identität

$$\zeta - \xi = (F_{ij} - f_{ij}) = (h_i - g_i) - (h_j - g_j) = \delta(\eta) .$$

8) Der \mathbb{C} -Vektorraum

$$L = \{(\zeta, \xi, \eta) \mid \zeta = \xi + \delta(\eta) \text{ auf } \mathcal{W}\}$$

ist ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes

$$H = Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \oplus Z_{(2)}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \oplus C_{(2)}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O}) .$$

Daher ist L selbst auch Cauchy-vollständig und damit ein Hilbertraum mit der eingeschränkten Metrik. Die Einbettung $L \subset H$ und die Projektion auf den zweiten Summanden sind stetige lineare Abbildungen. Also ist

$$pr_2 : L \rightarrow Z_{(2)}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$$

eine stetige, lineare und wegen 7) auch surjektive Abbildung.

9) Der Satz von der offenen Abbildung (**Satz von Banach**) zeigt daher: Es existiert eine Konstante $C > 0$ so dass gilt

$$\forall \xi \in Z_{(2)}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \quad \exists (\zeta, \xi, \eta) \in L \quad \|(\zeta, \xi, \eta)\|_H \leq C \cdot \|\xi\| .$$

Dies beweist den ersten Teil des Schlüssellemmas. QED

Beweis des Zusatzes. 10) Setze $\varepsilon = \frac{1}{2C}$. Dann gibt es nach dem Schrumpfungslemma einen Unterraum endlicher Kodimension $A \subset Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ mit $\|\zeta|_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|_{\mathcal{U}}$. Setze $S = A^\perp$. Dann ist S endlich dimensional mit

$$A \oplus S = Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) .$$

11) Für $\zeta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ ist die Schrumpfung $\xi_0 = \zeta|_{\mathcal{V}}$ auf \mathcal{V} beschränkt und damit gilt $\xi_0 \in Z_{(2)}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$. Nach Schritt 9) existieren daher $\zeta_0 \in Z_{(2)}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ und $\eta_0 \in C_{(2)}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ mit

$$\zeta_0 = \xi_0 + \delta(\eta_0)$$

auf \mathcal{W} und $\|\zeta_0\|_{\mathcal{U}} \leq C \cdot \|\xi_0\|_{\mathcal{V}}$ sowie $\|\eta_0\|_{\mathcal{W}} \leq C \cdot \|\xi_0\|_{\mathcal{V}}$.

12) Schritt 10) liefert eine orthogonale Zerlegung von ζ_0 in $\alpha_0 \in A$ und $\sigma_0 \in S$

$$\zeta_0 = \alpha_0 + \sigma_0 .$$

13) Wegen 10), 12) und 9) erfüllt die Einschränkung $\xi_1 = \alpha_0|_{\mathcal{V}} \in Z_{(2)}^1(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ von $\alpha_0 \in A$ dann

$$\|\xi_1\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon \|\alpha_0\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon \|\zeta_0\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon C \|\xi_0\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{2} \|\xi_0\|_{\mathcal{V}} .$$

14) Iteriert man jetzt die Schritte 11-13, erhält man sukzessive $\zeta_\nu, \xi_\nu, \eta_\nu, \alpha_\nu, \sigma_\nu$ mit $\xi_{\nu+1} = \alpha_\nu|_{\mathcal{V}}$. Auf \mathcal{W} gilt

$$\zeta_\nu = \xi_\nu + \delta(\eta_\nu) \quad , \quad \zeta_\nu = \xi_{\nu+1} + \sigma_\nu$$

mit $\|\xi_\nu\|_{\mathcal{V}} \leq 2^{-\nu}\|\xi_0\|_{\mathcal{V}}$ und $\|\eta_\nu\|_{\mathcal{W}} \leq C\|\xi_\nu\|_{\mathcal{V}}$ und $\|\sigma_\nu\|_{\mathcal{U}} \leq \|\zeta_\nu\|_{\mathcal{U}} \leq C\|\xi_\nu\|_{\mathcal{V}}$.

15) Auf \mathcal{W} gilt durch Aufsummieren von $\xi_{\nu+1} + \sigma_\nu = \xi_\nu + \delta(\eta_\nu)$

$$\xi_{k+1} + \sum_{\nu=0}^k \sigma_\nu = \xi_0 + \delta\left(\sum_{\nu=0}^k \eta_\nu\right).$$

Aus $\|\xi_{k+1}\| \rightarrow 0$ folgt $\xi_{k+1} \rightarrow 0$. Die Limiten $\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu$ und $\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu$ existieren nach dem Cauchy Kriterium in den Hilberträumen S bzw. $C_{(2)}^0(\mathcal{W}, \mathcal{O})$; die geometrische Reihe $C\|\xi_0\|_{\mathcal{V}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (1/2)^\nu$ liefert Majoranten. Daraus folgt auf \mathcal{W} im Limes $\sigma = \xi + \delta(\eta)$. QED

Der Fall lokalfreier Garben

Um den Beweis von \mathcal{O}_X auf den Fall lokalfreier Garben \mathcal{F} zu übertragen, nimmt man zusätzlich oBdA an, dass die Überdeckung \mathcal{U}_0 die Garbe \mathcal{F} trivialisiert, d.h. $\mathcal{F}|_{U_{0,i}} \cong \mathcal{O}_{U_{0,i}}^r$ für alle i . Die Kartenwechsel zwischen den Trivialisierungen werden definiert durch holomorphe Matrixfunktionen, deren Einträge auf \mathcal{U} beschränkte Funktionen sind falls $\mathcal{U} \ll \mathcal{U}_0$. Mit dieser Bemerkung definiert man die Hilberträume $C_{(2)}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit Hilfe der Trivialisierungen. Dies benutzt keine Kartenwechsel. Da die Kartenwechsel beschränkt sind, sind die Unterräume $Z_{(2)}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ abgeschlossen, und damit auch Hilberträume.

Das Dolbaut Lemma überträgt sich wegen $H^1(U_i, \mathcal{F}) \cong H^1(U_i, \mathcal{O}_{U_i}^r) = 0$. Das einzige globale Argument ist in Schritt 2. Hier benötigt man die verallgemeinerte globale antiholomorphe Ableitung

$$\bar{\partial} : C_X^\infty(\mathcal{F}) = A_X^0(\mathcal{F}) \rightarrow A_X^{0,1}(\mathcal{F}).$$

Diese ist global definiert wegen $\bar{\partial}(\tilde{s}_j) = \bar{\partial}(a_{ji}^{\mathcal{F}} \circ \tilde{s}_i) = a_{ji}^{\mathcal{F}} \circ \bar{\partial}(\tilde{s}_i)$ auf $U_j \cap U_i$, da die Matrixeinträge von $a_{ji}^{\mathcal{F}}$ holomorph sind. Damit überträgt sich der Beweis von Schritt 2.

Der Satz von der offenen Abbildung

Intervallschachtelung. Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $B_{r_i}(x_i) = \{y | d(x_i, y) \leq r_i\}$ eine absteigende Kette von Kugeln mit $r_i > 0$ und $\lim_i r_i = 0$. Dann ist x_i eine Cauchy-Folge mit Limes x und es gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i) = \{x\}$.

Satz von Baire. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und A_i abgeschlossen in X . Ist eine nichtleere offene Kugel $U_{r_1}(x_1)$ in $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dann existiert ein i so dass bereits A_i eine nichtleere offene Kugel enthält.

[Falls nicht, wäre der Schnitt von $U_{r_1}(x_1)$ mit $X - A_1$ offen und nicht leer und enthält damit eine Kugel $U_{r_2}(x_2)$ oBdA mit $0 < r_2 < r_1/2$. Wiederhole den Vorgang für $X - A_2$ und $U_{r_2}(x_2)$. Dann ist $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_{r_i}(x_i) \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ nach Konstruktion. Wegen $x \in U_{r_1}(x_1)$ ein Widerspruch zur Annahme.]

Satz von Banach. Jede surjektive stetige lineare Abbildung $f : A \rightarrow B$ zwischen Banachräumen ist offen.

Beweis des Satzes. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ und damit $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f(nU)}$ für $0 \in U$ offen. Nach Baire enthält somit einer der Abschlüsse $\overline{f(nU)}$ eine nichtleere offene Kugel V . Durch Reskalieren ist obdA $n = 1$. Also $V - V \subset \overline{f(U)} - \overline{f(U)} \subset \overline{f(U - U)}$. Ersetzt man U durch $U - U$ und V durch $V - V$, kann $0 \in V$ angenommen werden. Also für geeignetes $C > 0$

$$\boxed{V_{C \cdot \varepsilon}(0) \subset \overline{f(U_{\varepsilon}(0))}}.$$

Wähle eine Nullfolge $\varepsilon_i > 0$ mit $\sum_i \varepsilon_i < \infty$. Dann gilt

$$y \in V_{C \cdot \varepsilon_1}(0) \implies y \in \overline{f(U_{\varepsilon_1}(0))} \implies \exists x_1 \in U_{\varepsilon_1}(0) \quad \text{mit} \quad \|y - f(x_1)\| < C \cdot \varepsilon_2.$$

In der Tat kann $\|y - f(x_1)\|$ beliebig klein gewählt werden!

Angewendet auf $y - f(x_1) \in V_{C \cdot \varepsilon_2}(0)$ erhält man analog ein $x_2 \in U_{\varepsilon_2}(0)$ mit $y - f(x_1) - f(x_2) \in V_{C \cdot \varepsilon_3}(0)$ usw. Dies definiert eine Folge von $x_n \in U_{\varepsilon_n}(0)$ mit

$$\|y - \sum_{i=1}^n f(x_i)\| < C \cdot \varepsilon_{n+1},$$

somit $y = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$. Andererseits gibt es ein $x \in A$ mit $x = \lim_n \sum_{i=1}^n x_i$ wegen $\|x_i\| < \varepsilon_i$ und der Majorante $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i =: C'$ (Cauchy Kriterium für Reihen). Insbesondere $\|x\| < C'$. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$y = f(x).$$

Dies zeigt: Für alle $y \in V_{C \cdot \varepsilon_1}(0)$ existiert ein $x \in U_{C'}(0)$ mit $f(x) = y$ wegen $V_{C \cdot \varepsilon_1} \subseteq f(U_{C'}(0))$. QED

Dolbeaut Lemma

Dolbeaut Lemma. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $V \ll U$ und $g \in C_c^\infty(U)$. Dann existiert eine beschränkte Funktion $f \in C^\infty(V)$ mit $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = g|_V$.

Beweis. Es genügt für $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ die Existenz von $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ zu zeigen mit $\partial f / \partial \bar{z} = g$. Man macht folgenden Ansatz (Faltung mit dem Cauchy Kern):

$$f(w) := \frac{1}{2\pi i} \int \int_{\mathbb{C}} g(z+w) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

ist wegen $dz d\bar{z}/z = \text{const.} \exp(-i\theta) dr d\theta$ (Polarkoordinaten) wohldefiniert. Da g kompakten Träger besitzt, kann Integration und Differentiation vertauscht werden:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} f = \frac{1}{2\pi i} \int \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} g(z+w) \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

und wegen der Kettenregel sowie $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0$ ist dies

$$\frac{1}{2\pi i} \int \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{g(z+w)}{z} \cdot dz \wedge d\bar{z}.$$

Mit Hilfe des Satzes von Stokes schreibt sich dies als $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon} \frac{g(z+w)}{z} \cdot (-dz)$. Das Integral läuft im Uhrzeigersinn (!) um einen Kreisweg vom Radius ε um den Nullpunkt. Im Limes ε erhält man den gewünschten Wert $g(w)$. QED

Korollar 7. Für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{E} auf kompakten (parakompakten) Riemannschen Flächen X gilt $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ für $i \geq 2$.

Beweis. Das Dolbeaut Lemma kann als lokale Aussage über die Garbe \mathcal{O}_X auf X gesehen werden und zeigt die Exaktheit der Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow A_X^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} A_X^{0,1} \longrightarrow 0$$

für die \mathbb{C}_X^∞ -Modulgarben A_X^0 der C^∞ -Nullformen und der C^∞ -(0,1)Formen $A_X^{0,1}$, d.h. der Formen in A_X^1 der Gestalt $g(z)d\bar{z}$. Die Behauptung des Korollars folgt daher aus Lemma 1 und der langen exakten Kohomologiesequenz. Da $\bar{\partial} : A^0(X) \rightarrow A_X^{0,1}$ eine \mathcal{O}_X -lineare Abbildung ist, erhält man durch Tensorieren mit $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X}$ allgemeiner für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{E} Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow A_X^0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{\partial}} A_X^{0,1}(\mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

für \mathbb{C}_X^∞ -Modulgarben $A_X^0(\mathcal{E})$ und $A_X^{0,1}(\mathcal{E})$. QED

Holomorphe Abbildungen

Sei

$$f : X \rightarrow Y$$

eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen X und Y . Ist X zshg. und f nicht konstant, dann ist f auch auf keiner nicht leeren offenen Teilmenge konstant (benutze analytische Fortsetzung und den Identitätssatz).

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heisst **offen**, wenn $f(V)$ offen ist für alle offene Mengen $V \subset X$.

Lemma 3. *Eine nichtkonstante holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen (X zshg.) ist eine offene Abbildung.*

Beweis. Wähle eine Kartenüberdeckungen $X = \bigcup_i U_i$ und $Y = \bigcup U'_j$ so dass $f(U_i) \subset U'_j$ für geeignete j abhängig von i . Wegen $f(V) = \bigcup_i f(V \cap U_i)$ ist $f(V)$ offen wenn jedes $f(V \cap U_i)$ offen in U'_j ist.

Die Kartenabbildungen $\psi : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbf{C}$ resp. $\psi' : U'_j \rightarrow V'_j \subset \mathbf{C}$ definieren eine holomorphe Funktion

$$g = \psi'_j \circ f|_U \circ \psi_i^{-1} : V_i \rightarrow V'_j \subset \mathbf{C}.$$

Da für V offen $\psi_i(V \cap U_i) \subset \mathbf{C}$ ein komplexes Gebiet ist und g auch dort in keiner Umgebung eines Punktes konstant ist, ist

$$f(V \cap U_i) = g(\psi_i(V \cap U_i)) \subset U'_j \cong V'_j \subset \mathbf{C}$$

offen (Satz von der Gebietstreue für g). QED

Korollar 8. *Eine nichtkonstante holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen ist surjektiv, wenn X kompakt ist und X und Y beide zusammenhängend sind. Alle Fasern $F = f^{-1}(y)$ sind dann endlich.*

Beweis. $f(X)$ ist kompakt und damit abgeschlossen. Andererseits ist $f(X)$ offen, also $f(X) = Y$ (Y ist zshg.). F ist abgeschlossen, und da X kompakt ist auch kompakt. Andererseits ist F diskret, denn anderenfalls hätte F einen Häufungspunkt und f wäre konstant y nach dem Identitätssatz. Kompakte diskrete Mengen sind endlich.

Unverzweigte Abbildungen

Seien die Bezeichnungen wie im letzten Abschnitt, d.h. X und Y seien zusammenhängende Riemannsche Flächen. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Für jeden Punkt $x \in X$ kann man Karten U um x resp. U' um $y = f(x)$ wählen. Die Kartenabbildungen $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ resp. $\psi' : U' \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$ definieren eine holomorphe Funktion $g : V \rightarrow V' \subseteq \mathbb{C}$

$$g = \psi' \circ f|_U \circ \psi^{-1}$$

auf $V \subseteq \mathbb{C}$. Sei $\xi = \psi(x)$. Man nennt x **unverzweigt**, wenn gilt

$$\boxed{g'(\xi) \neq 0}.$$

Anderenfalls nennt man x , beziehungsweise auch seinen Bildpunkt $y = f(x)$, einen **Verzweigungspunkt** von f . [Wegen der Kettenregel hängen diese Definitionen nicht von der Wahl der Karten ab, denn Kartenwechsel sind biholomorph, denn die Ableitungen von biholomorphen Funktionen sind nirgendwo Null.]

Die Menge $\Sigma \subset X$ der Verzweigungspunkte von f ist abgeschlossen [$g'(\xi) \neq 0$ ist eine offene Bedingung] und diskret [andererseits gäbe es einen Häufungspunkt x von Σ , und g' wäre identisch Null in einer Umgebung V eines Häufungspunktes und somit g konstant in einer Umgebung von ξ . Also wäre f konstant in einer Umgebung von x , und dann konstant (Identitätssatz). Widerspruch!]. Es folgt

Lemma 4. *Sei X kompakt und zshg. und $f : X \rightarrow Y$ holomorph und nicht konstant. Ist Y zshg., dann ist Y kompakt und die Menge $\Sigma_f \subset X$ der Verzweigungspunkte von f ist endlich.*

Sei die Situation wie im letzten Lemma. Dann ist $f(\Sigma_f)$ eine endliche Teilmenge S von Y . Für $y \notin S$ sei $F = f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ die Menge der Urbildpunkte. Da f unverzweigt in allen Punkten $x_i \in F$ ist, folgt aus dem Satz von der Umkehrfunktion die Existenz von Umgebungen U_i von x_i , welche unter f biholomorph auf ihr Bild $f(U_i) \subset Y$ abgebildet werden

$$f : U_i \cong f(U_i).$$

Durch Verkleinern der U_i gilt ausserdem obdA

$$U_i \cap U_j = \emptyset.$$

Sei $V := \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$. Ersetzt man U_i durch $U_i \cap f^{-1}(V)$, kann zusätzlich noch angenommen werden

$$f(U_i) = f(U_j) = V .$$

Wir zeigen schliesslich

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^n U_i \quad (\text{disjunkte Vereinigung}) ,$$

oBdA durch Verkleinern von V . Wir nennen dann V eine **gute** Umgebung von y . [Das Komplement K von $U_1 \cup \dots \cup U_n$ in X ist kompakt, also auch das Bild $f(K)$ in Y . Wegen $y \notin f(K)$ gibt es daher eine offene Teilmenge $V' \subset V$ um y mit $V' \cap f(K) = \emptyset$. Ersetzt man V durch V' und U_i durch $U'_i = U_i \cap f^{-1}(V')$, impliziert $f(x') \in V'$ dann $x_i \in U_i$ für ein $i = 1, \dots, n$. Da $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ biholomorph ist, folgt dann aus $x' \in U_i$ und $f(x') \in V'$ sofort $x' \in U'_i$. Also $f^{-1}(V') = U'_1 \cup \dots \cup U'_n$.]

Satz. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen zshg. Riemannschen Flächen. Sei X kompakt und $S \subset Y$ das Bild der endlich vielen Verzweigungspunkte von f . Dann existiert eine Zahl n so dass die Einschränkung von f auf $f^{-1}(Y \setminus S)$ eine **n -blättrige unverzweigte holomorphe Überlagerung** von $Y \setminus S$ ist. Man nennt n den **Grad** von f .

Beweis. Sei S das Bild der endlich vielen Verzweigungspunkte von f in X . Für $Y' = Y \setminus S$ und $X' = f^{-1}(Y \setminus S)$ ist die Einschränkung von

$$f : X' \rightarrow Y'$$

eine holomorphe Überlagerung: D.h. für jeden Punkt $y \in Y'$ gibt es (beliebig kleine) offene Umgebungen $V \subset Y'$ von y mit der Eigenschaft

- $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^n U_i$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Mengen U_i in X'
- f eingeschränkt auf jedes U_i ist biholomorph $f : U_i \cong V$.

Je zwei Punkte in $Y \setminus S$ kann man durch einen Weg verbinden. Für jeden Wegpunkt y existiert eine gute Umgebung V im obigen Sinn und oBdA einfach zshg. Endlich viele davon überdecken den Weg. Man schliesst dann sofort, dass die Kardinalität $n = \#f^{-1}(y)$ auf dem Verbindungsweg nicht von y abhängt. QED

Verzweigungspunkte

Lemma. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Für jedes $x \in X$ existiert dann eine Kartenumgebung U von x mit Kartenabbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 X \supset U & \xrightarrow[\sim]{\psi} & V \xrightarrow[\sim]{h} h(V) \\
 \downarrow f & & \downarrow \pi \\
 Y \supset U' & \xrightarrow[\sim]{\psi'} & V'
 \end{array}$$

mit einer biholomorphen Abbildung h und der Abbildung

$$\pi(z) = z^e .$$

Definition: Man nennt $e = e_x$ den **Verzweigungsindex** der Abbildung $f : X \rightarrow Y$ im Punkt $x \in X$. Der Verzweigungsindex $e_x = 1$ genau dann, wenn f in x unverzweigt ist.

Beweis: Lokal ist oBdA $x = 0$ in \mathbb{C} und $f(z) = \sum_i a_i z^i$ eine konvergente Potenzreihe in der Nähe von $x = 0$ mit $f(0) = 0$. Sei $e = \min_i \{a_i \neq 0\} \geq 1$. Dann gilt $f(z) = z^e \cdot g(z)$ und $g(0) = a_e \neq 0$. Daher ist $g_0(z) = \exp(\frac{\log(g(z))}{e})$ holomorph nahe bei $z = 0$ mit $g(z) = g_0(z)^e$. Es folgt $f(z) = h(z)^e$ für $h(z) = z \cdot g_0(z)$ und $h'(0) = g_0(0) \neq 0$. Nach dem Satz von der Umkehrfunktion ist daher h lokal eine biholomorphe Abbildung. QED

Mit anderen Worten. Ersetzt man die Kartenabbildung ψ durch die Kartenabbildung $h \circ \psi$, so ist f lokal in einer Umgebung U von x in den Karten gegeben durch die Abbildung $\pi(z) = z^e$. Dabei kann man durch Verkleinern von U und geeignete Koordinatenwahl annehmen

$$V = \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

sowie dann durch Verkleinern von V' auch $V' = \pi(V) = \mathbb{E}$, also

$$\begin{array}{ccc} X \supset U & \xrightarrow[\sim]{\psi} & \mathbb{E} \\ \downarrow f & & \downarrow z \mapsto z^e \\ Y \supset U' & \xrightarrow[\sim]{\psi'} & \mathbb{E} \end{array}$$

Eigenschaften von π . Die Abbildung $\pi(z) = z^e$

$$\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$$

ist holomorph und surjektiv. Wegen $\pi'(z) = e \cdot z^{e-1}$ ist π unverzweigt ausserhalb von $z = 0$, und

$$\pi : \mathbb{E}^* \rightarrow \mathbb{E}^* \quad , \quad \mathbb{E}^* = \mathbb{E} \setminus 0$$

ist eine e -blättrige unverzweigte holomorphe Überlagerung. Jeder Punkt in $r \cdot e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{E}^*$ hat dann genau e Urbilder

$$\boxed{\pi^{-1}(\{r \cdot e^{2\pi i\theta}\}) = \{r^{1/e} \cdot e^{2\pi i \frac{\nu\theta}{e}} \mid \nu = 0, 1, \dots, e-1\}} .$$

Folgerung: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen und $y \in Y$ und $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_r\}$. Dann gilt: 1) Für gegebene Umgebungen U_ν der x_ν in X existiert eine Umgebung V von y in Y mit

$$f^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{\nu} U_\nu .$$

2) Wird V klein genug gewählt, dann besitzt jedes $y' \neq y \in V$ dieselbe Anzahl

$$n = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e_x$$

von Urbildpunkten in X .

Gradformel. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion vom Grad n zwischen zshg. kompakten Riemannschen Flächen. Für jedes $y \in Y$ gilt dann

$$\boxed{\text{grad}(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e_x} .$$

Beweis. Für $y \in Y$ wähle eine Umgebung V mit $V \cap S = \{y\}$ oder \emptyset . Dann ist

$$f : f^{-1}(V^*) \rightarrow V^* \quad , \quad V^* = V \setminus \{y\}$$

eine n -blättrige unverzweigte holomorphe Überlagerung. Für jede offene Umgebung $V' \subset V$ von y bleibt die Einschränkung von f (auf $f^{-1}(V'^*)$) eine n -blättrige Überlagerung.

Andererseits: Um jeden Punkt $x \in F = f^{-1}(y)$ gibt es eine Umgebung $U = U_x$ (homöomorph zu E), derart daß

$$f|_{U_x} : U_x^* \rightarrow f(U_x) \setminus y \quad , \quad U_x^* = U_x \setminus x$$

eine e_x -blättrige Überlagerung ist. Dies bleibt richtig für Einschränkungen.

Durch Verkleinern gilt obdA $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ für $x \neq x'$ in F sowie $f(U_x) \subset V$ (Stetigkeit von f). Wähle eine Umgebung V' von y in der offenen Menge $\bigcap_{x \in F} f(U_x)$ (f ist offen) und im Komplement der kompakten Menge $f(X \setminus \bigcup_{x \in F} U_x)$. Dann gilt $f^{-1}(V') = \bigsqcup_{x \in F} f^{-1}(V') \cap U_x$ und somit

$$f^{-1}(V'^*) = \bigsqcup_{x \in F} f^{-1}(V'^*) \cap U_x^* .$$

$f : f^{-1}(V'^*) \cap U_x^* \rightarrow V'^*$ ist eine e_x -blättrige Überlagerung. Also $n = \sum_{x \in F} e_x$ und

$$\#f^{-1}(\{y\}) = n - \sum_{\pi(x)=y} (e_x - 1) .$$

QED

Korollar 9. Ist $f : X \rightarrow P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung und damit meromorphe Funktion auf X , dann nimmt f jeden Wert $y \in P^1(\mathbb{C})$ gezählt mit Multiplizität gleich oft, nämlich $n = \text{grad}(f)$ mal, an.

Korollar 10. Ist $f : X \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, dann ist der Grad des Hauptdivisors (f) gleich Null.

Dies ist klar, da der Grad die Zahl der Nullstellen minus die Zahl der Polstellen von f ist (jeweils mit Vielfachheiten gezählt).

Meromorphe Funktionen

Sei X eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche und $M(X)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf X . Aus dem Endlichkeitssatz folgt unmittelbar der folgende Existenzsatz

Lemma 5. *Für paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_r \in X$ und komplexe Zahlen a_1, \dots, a_r gibt es ein $f \in M(X)$ mit $f(x_i) = a_i$ für $i = 1, \dots, r$.*

Beweis. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(n \cdot x - y)(X) \rightarrow \mathbb{C}^n \rightarrow H^1(X, \mathcal{L})$$

für $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-y)$. Für $n > 1 + \dim H^1(X, \mathcal{L})$ existiert $0 \neq s \in \mathcal{O}_X(n \cdot x - y)(X)$ mit einer Polstelle bei x und einer Nullstelle bei y und holomorph sonst. Wendet man das für $x = x_i$ und jedes $y = x_j$ für $j \neq i$, liefert dies Funktionen s_j , so daß $g = 1 + \sum_{j \neq i} s_j$ einen Pol in allen $x_j \neq x_i$ besitzt und $g(x_i) = 1$ erfüllt. Setze $f_i = \frac{1}{g}$. Dann gilt $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq r$. Setze dann $f = \sum_i a_i f_i$. QED

Seien f, g nichtkonstante meromorphe Funktionen auf X und sei $n = \text{grad}(f)$ und $S \in P^1(\mathbb{C})$ die Bildmenge der Verzweigungspunkte von f . Dann ist für $z \in P^1(\mathbb{C}) \notin S$ und $f^{-1}(z) = \{x_1, \dots, x_n\}$ das Polynom

$$P(t, z) = \prod_{i=1}^n (t - g(x_i)) = t^n + a_1(z)t^{n-1} + \dots + a_n(z)$$

wohldefiniert, es sei denn g hat einen Pol in einem der Punkte x_1, \dots, x_n im Urbild $z = z_0$. Da g nur endliche viele Polstellen auf X besitzt, sei N die höchste der n Polordnungen und S' deren Bildmenge in $P^1(\mathbb{C})$. Die Koeffizienten $a_i(z)$ sind holomorphe Funktionen auf $P^1(\mathbb{C}) \setminus (S \cup S')$. Die $a_i(z)$ lassen sich zu meromorphen Funktionen auf ganz $P^1(\mathbb{C})$ fortsetzen¹⁴. Setzt man $t = g(x)$ und beachtet $z = f(x)$ für $x \in X$, folgt $P(g(x), f(x)) = 0$.

¹⁴Für $z_0 \in S \cup S'$ sei oBdA g holomorph in den Punkten von $f^{-1}(z_0)$; falls nicht, ersetze $g(x)$ durch $g(x) \cdot (f(x) - z_0)^N$. Dies reskaliert die $a_i(z)$ um den Faktor $(f(x) - z_0)^{iN}$. Dann sind die reskalierten $a_i(z)$ beschränkt in einer Umgebung von z_0 , da das reskalierte $g(x) \cdot (f(x) - z_0)^N$ holomorph ist in einer Umgebung der Punkte in $x \in f^{-1}(z_0)$. Liegt $z \neq z_0$ in einer genügend kleinen Umgebung von z_0 von $P^1(\mathbb{C})$, dann liegen alle Urbilder in $f^{-1}(z)$ in vorgegebenen kleinen Umgebungen von den Urbildern x_0, \dots, x_r von z_0 [Wurzel ziehen ist nicht notwendig stetig, ist aber beschränkt. Siehe Folgerung 1], auf denen die reskalierte Funktion $g(x) \cdot (f(x) - z_0)^N$ holomorph und damit oBdA beschränkt ist. Damit sind die reskalierten $a_i(z)$ beschränkt in einer Umgebung von z_0 . Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, lassen sich die $a_i(z)$ daher holomorph auf z_0 fortsetzen.

Grad-Lemma. Für jede nichtkonstante meromorphe Funktion $f \in M(X)$ ist $M(X)$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{C}(f)$ vom Grad $n = \deg(f)$.

Beweis. Wie bereits gezeigt gibt es für jedes $g \in M(X)$ ein Polynom $P(t)$ vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}(f)$, das g als Nullstelle besitzt. Aus dem Satz vom primitiven Element folgt daraus

$$M(X) = \mathbb{C}(f)[g],$$

und weiterhin

$$[M(X) : \mathbb{C}(f)] = m \leq n = \deg(f).$$

Wäre $m < n$, würden die Funktionen $h \in M(X)$, die holomorph sind in den Punkten $x \in f^{-1}(z_0) = \{x_1, \dots, x_n\}$ für $z_0 \notin S$, nicht die Punkte trennen können im Widerspruch zu Lemma 5. Beachte nämlich, jedes $h \in M(X)$ lässt sich algebraisch durch f und g ausdrücken, aber $f(x) = z_0$ ist fixiert und $g(x)$ hat höchstens m verschiedene Werte (Nullstellen eines Polynoms vom Grad m mit Koeffizienten $b_i(z_0)$ in \mathbb{C}). QED

Geschlecht $g = 0$. Für eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht Null liefert die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(P) \rightarrow \delta_P \rightarrow 0$ die exakte Kohomologiesequenz $\mathbb{C} \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(P)) \rightarrow \mathbb{C}$ und damit für jeden Punkt $P \in X$ eine nicht konstante meromorphe Funktion f mit einem einzigen Pol der Ordnung 1 bei P . Die zugehörige Abbildung $X \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ hat daher den Grad $n = 1$ und definiert damit eine biholomorphe Abbildung (wegen $e_x \leq n = 1$). Also ist X zu $P^1(\mathbb{C})$ biholomorph genau dann, wenn X Geschlecht Null hat.

Direkte Bilder

Sei \mathcal{G} eine Garbe auf X und $\pi : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten (Riemannschen Flächen). Dann definiert die Vorschrift

$$\pi_*\mathcal{G}(U) := \mathcal{G}(\pi^{-1}(U))$$

eine Garbe $\pi_*\mathcal{G}$ auf Y , das **direkte Bild** von \mathcal{G} . Die Garbenaxiome G1 und G2 übertragen sich unmittelbar von \mathcal{G} auf $\pi_*\mathcal{G}$.

Ist \mathcal{G} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe auf X , dann ist $\pi_*(\mathcal{G})$ ein \mathcal{O}_Y -Modulgarbe auf Y vermöge der Skalarmultiplikation. Diese ist für $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $s \in \pi_*\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(\pi^{-1}(U))$ definiert durch

$$f \star s := \pi^*(f) \cdot s$$

in $\mathcal{G}(\pi^{-1}(U)) = \pi_*\mathcal{G}(U)$ für $\pi^*(f) = f(\pi(x)) \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$.

Lemma 6. Sei $\pi : X \rightarrow Y$ eine endliche verzweigte Überlagerung von Riemannschen Flächen vom Grad n . Ist \mathcal{G} eine lokalfreie Garbe vom Rang r auf X , dann ist $\pi_*\mathcal{G}$ lokalfrei auf Y vom Rang $n \cdot r$.

Beweis. Die Aussage ist lokal auf Y , daher ist oBdA $r = 1$ und $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$. Beachte dann für z in einer genügend kleinen Umgebung U von z in Y gilt $\pi_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\bigsqcup_{i=1}^k U_i) = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_X(U_i)$ und $\pi : U_i \rightarrow U$ ist bis auf biholomorphe Kartenabbildungen oBdA gegeben durch $z = \pi(w) = w^{e_i}$ mit $U_i = U$ als Einheitskreis. Wegen

$$\mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{O}_Y(U) \oplus \mathcal{O}_Y(U) \cdot w \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y(U) \cdot w^{e_i-1}$$

als \mathcal{O}_Y -Modulgarbe (Taylorentwicklung !) folgt $\pi_*\mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{O}_Y(U)^n$ aus der Gradformel $\sum_{i=1}^k e_i = n$. Dieser offensichtliche Isomorphismus ist $\mathcal{O}_Y(U)$ -linear. QED

Lemma 7. Sei $\pi : X \rightarrow Y$ eine endliche verzweigte Überlagerung von Riemannschen Flächen vom Grad n . Ist \mathcal{G} eine Garbe auf X , dann gilt

$$H^i(X, \mathcal{G}) \cong H^i(Y, \pi_*\mathcal{G}) \quad , \quad (i = 0, 1) .$$

Beweis. Dies ist klar für $i = 0$. Für $i = 1$ betrachte geeignete Überdeckungen \mathcal{U} von Y durch kleine offene Mengen mit $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{r \in F} V_r$ derart dass $\pi : V_i \rightarrow U$ bis auf biholomorphe Abbildungen durch $w \mapsto z = w^{e_i}$ gegeben ist und \mathcal{G} trivial ist auf U_i . Sei \mathcal{V} die zugehörige Überdeckung von X durch die V_r für variierendes $U \in \mathcal{U}$. Beachte $\pi_*\mathcal{G}(U_i \cap U_j) = \mathcal{G}(\pi^{-1}(U_i \cap U_j))$ ist gleich $\mathcal{G}(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \prod_{r,s \in F} \mathcal{G}((V_r)_i \cap (V_s)_j)$. Daher gilt

$$C^1(\mathcal{U}, \pi_*\mathcal{G}) = C^1(\mathcal{V}, \mathcal{G}) .$$

Man sieht sofort, dass diese Identifikation sich überträgt auf 1-Zykel und 1-Ränder: $Z^1(\mathcal{U}, \pi_*\mathcal{G}) = Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ und $\partial C^0(\mathcal{U}, \pi_*\mathcal{G}) = \partial C^0(\mathcal{V}, \mathcal{G})$. Es folgt

$$H_{\mathcal{V}}^i(X, \mathcal{G}) \cong H_{\mathcal{U}}^i(Y, \pi_*\mathcal{G}) .$$

Da \mathcal{U} resp. \mathcal{V} cofinale Überdeckungen sind, folgt die Behauptung. QED

Relative Dualität

Für eine n -blättrige verzweigte Überlagerung $\pi : X \rightarrow Y$ von Riemannschen Flächen sei $S \subset Y$ die Bildmenge der diskreten Menge der Verzweigungspunkte von π . Wir konstruieren dazu einen \mathcal{O}_Y -linearen Garbenhomomorphismus auf Y

$$\pi_*\Omega_X \longrightarrow \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee .$$

Lemma 8. *Dieser definiert einen Isomorphismus lokalfreier \mathcal{O}_Y -Garben auf Y*

$$\boxed{\pi_*\Omega_X \cong \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee} .$$

Verallgemeinerung. Allgemeiner gibt es für lokalfreie \mathcal{O}_X -Garben \mathcal{E} auf X einen kanonischen \mathcal{O}_Y -linearen Garbenisomorphismus¹⁵

$$\boxed{\pi_*(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee) \cong \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\pi_*\mathcal{E})^\vee} ,$$

auch zu deuten als eine nichtausgeartete \mathcal{O}_Y -lineare Paarung lokalfreier Garben

$$\pi_*(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*(\mathcal{E}) \longrightarrow \Omega_Y$$

definiert durch die Auswertung $\pi_*(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*(\mathcal{E}) \longrightarrow \pi_*\Omega_X$ und die **Spurabbildung**

$$Tr : \pi_*\Omega_X \rightarrow \Omega_Y .$$

Die \mathbb{C} -lineare Abbildung $Spur\ Tr : \Omega_X(\pi^{-1}(U)) \rightarrow \Omega_Y(U)$ ist wie folgt charakterisiert: Für holomorphe Differentialformen η auf $\pi^{-1}(U)$ ist $Tr(\eta)$ die eindeutig bestimmte holomorphe Differentialform auf U mit

$$(*) \quad \boxed{\int_\gamma Tr(\eta) = \int_{\pi^{-1}(\gamma)} \eta} ,$$

für alle stückweise glatten Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus (U \cap S)$. Beachte, lokal besteht $\pi^{-1}(\gamma)$ per Definition aus genau $n = deg(\pi)$ Wegen, vorausgesetzt U wurde

¹⁵Setzt man $D_X(\mathcal{E}) := \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee$ und $D_Y(\mathcal{F}) := \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}^\vee$, schreibt sich die relative Dualität als $\pi_*(D_X(\mathcal{E})) \cong D_Y(\pi_*(\mathcal{E}))$. Aus Lemma 7 folgt daraus **Serre Dualität** durch eine Reduktion auf Korollar 6: Für Vektorbündel \mathcal{F} auf X gilt die Aussage $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{1-i}(X, D_X(\mathcal{F}))^*$. Benutzt man das \cap -Produkt und die kanonischen Abbildungen $H^1(X, \Omega_X) \cong H^2(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}$ der Hodge Zerlegung, kann man den Isomorphismus genau angeben (Übungsaufgabe).

genügend klein gewählt so dass $\pi^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von n zu U biholomorph äquivalenten Gebieten ist.

Eindeutigkeit. $Tr(\eta)$ ist durch (*) eindeutig bestimmt, denn $Tr(\eta)(z)$ ist für $z \in U \setminus (U \cap S)$ die z -Ableitung von $\int_{z_0}^z Tr(\eta)$ für irgend einen Weg γ in $U \setminus (U \cap S)$ von z_0 nach z [die Ableitung ist unabhängig vom Weg oder dem gewählten Basispunkt $z_0 \in U \setminus (U \cap S)$]. Es bleibt also nur die Existenz von $Tr(\eta) \in \Omega(U)$ zu zeigen.

Existenz. Die Existenz von $Tr(\eta)$ kann man lokal auf Y zeigen, denn $Tr(\eta)$ verheftet sich automatisch wegen der koordinatenfreien Charakterisierung (*). Sei daher oBdA U so klein, dass $\pi^{-1}(U)$ in k einfach zusammenhängende Komponenten U_1, \dots, U_k zerfällt und so dass die $U_j, j = 1, \dots, k$ und U biholomorph äquivalent sind zu \mathbb{E} mit den Koordinaten $w = w_j$ und $w^e = z$ für $e = e_j$. Sei oBdA η Null auf allen Komponenten ausser einer einzigen Komponente U_j . Sei $\eta = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu dw$ (lokal auf U_j). Ersetzt man oBdA π durch $\pi|_{U_j}$, so ist

$$\int_{\pi^{-1}(\gamma)} \eta = \int_{\pi^{-1}(\gamma)} \sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu dw = \sum_{\nu \geq 0} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{a_\nu w^{\nu+1}}{\nu+1} \Big|_{x_i}^{y_i}.$$

Beachte $x_i = x_0 \zeta^i$ und $y_i = y_0 \zeta^i$ für eine primitive e -te Einheitswurzel ζ . Somit ist die innere Summe auf der rechten Seite Null für alle Summanden ν ausser für $e | (\nu + 1)$, wo sich als Wert

$$e \cdot \frac{a_\nu w^{\nu+1}}{\nu+1} \Big|_{x_0}^{y_0}$$

für den Summand ergibt. Wir setzen

$$Tr\left(\sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu dw\right) := \sum_{\nu \geq 0, e | \nu + 1} a_\nu z^{(\nu+1)/e} \frac{dz}{z},$$

denn für $e | (\nu + 1)$ gilt

$$\int_\gamma Tr(\eta) = \sum_{\nu \geq 0, e | \nu + 1} \int_{x_0^e}^{y_0^e} a_\nu z^{(\nu+1)/e} \frac{dz}{z} = \sum_{\nu \geq 0} e a_\nu \frac{z^{(\nu+1)/e}}{\nu+1} \Big|_{x_0^e}^{y_0^e} = e \sum_{\nu \geq 0} \frac{a_\nu w^{\nu+1}}{\nu+1} \Big|_{x_0}^{y_0}.$$

Summation über $\nu \geq 0$ und über $j = 1, \dots, k$ liefert wie gewünscht (*). Wegen $(\nu + 1)/e \geq 1$ gilt

$$Tr\left(\sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu dw\right) \in \Omega(U).$$

\mathcal{O}_Y -Linearität. Aus der Definition folgt $Tr(g(\pi(w))w^\nu dw) = g(z)Tr(w^\nu dw)$ [oBdA für $g(z) = z^k$ mit $g(\pi(w)) = w^{ek}$ für $k \in \mathbb{N}$]. Somit ist Tr ein \mathcal{O}_Y -lineare Abbildung. Lokal auf U_j gilt

$$\mathcal{O}(U_j) = \bigoplus_{\mu=0}^{e-1} \pi^*(\mathcal{O}(U)) \cdot w^\mu \quad , \quad \Omega_X(U_j) = \bigoplus_{\nu=0}^{e-1} \pi^*(\mathcal{O}(U)) \cdot w^\nu dw .$$

Aus $Tr(w^\mu w^\nu dw) = \delta_{\mu, e-1-\nu} dz$ für $0 \leq \mu, \nu \leq e-1$ folgt die *Nichtausgeartetheit der Paarung*. Dies zeigt Lemma 8 (sowie seine Verallgemeinerung). QED

Topologisches versus analytisches Geschlecht

Meromorphe Differentialformen. Sei X eine kp. zshg. Riemannsche Fläche und sei $\pi : X \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ definiert durch eine nicht konstante meromorphe Funktion f . Dies liefert eine nicht verschwindende meromorphe Differentialform auf X

$$\omega = \frac{df}{f} = d \log(f) = \partial \log(f) .$$

Jede meromorphe Differentialform ω ist in lokalen Koordinaten von der Form $g(z)dz$ für eine meromorphe Funktion g . Man definiert $div(\omega)$ durch den lokal durch g definierten Divisor (hängt nicht von den Kartenabbildungen ab, da in den Kartenwechselbereichen die Jacobi-Matrix invertierbar ist!). Für jede meromorphe Differentialform η ist $h = \eta/\omega$ eine meromorphe Funktion auf X . Somit gilt $div(\eta) = div(\omega) + (h)$. Wegen $deg(h) = 0$ hängt daher der Grad $deg(div(\eta))$ nicht ab von der (nichtverschwindenden) meromorphen Differential η auf X und ist daher eine Invariante von X . In der Tat gilt $\Omega_X \cong \mathcal{O}_X(D)$ für $D = div(\eta)$ und insbesondere daher

$$deg(\Omega_X) = deg(div(\eta)) .$$

Beispiel. $\eta = \frac{dz}{z}$ ist eine meromorphe Differentialform auf $X = P^1(\mathbb{C})$ mit $div(\eta) = -0 - \infty$. Beachte $dz/z = -d\zeta/\zeta$ für $\zeta = 1/z$ (die Karte bei ∞).

Hurwitz Formel. Für $\pi : X \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ wie oben ist $\frac{df}{f} = \pi^*\left(\frac{dz}{z}\right)$ eine meromorphe Differentialform auf X . Lokal für $z = w^e$ ist $\pi^*(dz) = d(w^e) = ew^{e-1}dw$. Es folgt $div\left(\frac{df}{f}\right) = \pi^*\left(\frac{dz}{z}\right) + \sum_{x \in X} (e_x - 1) \cdot x$ und für $n := deg(\pi)$

$$deg\left(div\left(\frac{df}{f}\right)\right) = n \cdot deg\left(div\left(\frac{dz}{z}\right)\right) + \sum_{x \in X} (e_x - 1) = -2n + \sum_{x \in X} (e_x - 1) .$$

Allgemeiner folgt für verzweigte Überlagerungen die **Hurwitz Formel**

$$\boxed{\deg(\Omega_X) = \deg(\pi) \cdot \deg(\Omega_Y) + \sum_{x \in X} (e_x - 1)}.$$

Triangulierungen. Urbilder in X von Triangulierungen von $Y = P^1(\mathbb{C})$, für die jeder Verzweigungspunkt ein Eckpunkt ist, definieren Triangulierungen von X . Ihre Euler Charakteristik

$$\chi_{top}(X) = 2 - 2g_{top} := E_X - K_X + F_X$$

(E_X, K_X, F_X ist die Zahl der Ecken, Kanten, Flächen) ist gleich

$$n(E_Y - K_Y + F_Y) - \sum_x (e_x - 1),$$

denn $F_X = nF_Y$, $K_X = nK_Y$ und $E_X = nE_Y - \sum_{x \in X} (e_x - 1)$.

Wegen $\chi_{top}(Y) = (E_Y - K_Y + F_Y) = 2$ [benutze 5 Ecken, nämlich Nord- und Südpol und drei auf dem Äquator, dazu 9 Kanten und 6 Flächen] für $Y = P^1(\mathbb{C})$ ergibt sich $\chi_{top}(X) = 2n - \sum_{x \in X} (e_x - 1)$. Die Hurwitz Formel zeigt

$$\boxed{\deg(\Omega_X) = \deg(\text{div}(\omega)) = 2g_{top} - 2}.$$

Lemma 9. Es gilt $\boxed{g_{top} = g}$.

Beweis. Wähle eine endliche verzweigte Überlagerung $\pi : X \rightarrow Y = P^1(\mathbb{C})$. Sei n der Grad von π .

1) Der Vergleich der Gradformel für df/f mit einer Triangulierung ergab

$$\deg(\Omega_X) = 2g_{top} - 2.$$

2) Aus $h^i(X, \mathcal{L}) = h^i(Y, \pi_*(\mathcal{L}))$ für $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ folgt wegen *Riemann-Roch* auf Y

$$1 - g_X = \chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi(Y, \pi_*\mathcal{O}_X) = \deg(\det(\pi_*\mathcal{O}_X)) + n \cdot (1 - g_Y)$$

für $n = \deg(\pi)$ und $g_Y = 0$. Für $\mathcal{L} = \Omega_X$ folgt analog

$$\deg(\Omega_X) + (1 - g_X) = \chi(X, \Omega_X) = \chi(Y, \pi_*\Omega_X) = \deg(\det(\pi_*\Omega_X)) + n \cdot (1 - g_Y).$$

3) *Relative Dualität* liefert $\pi_*(\Omega_X) \cong \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\pi_*\mathcal{O}_X)^\vee$ (lokalfrei vom Rang n). Für die Determinanten gibt dies $\det(\pi_*\Omega_X) \cong (\Omega_Y)^n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \det(\pi_*\mathcal{O}_X)^{-1}$ und damit

$$\deg(\det(\pi_*\mathcal{O}_X)) + \deg(\det(\pi_*\Omega_X)) = n \cdot \deg(\Omega_Y).$$

Addiert man die beiden Formeln in 2) und benutzt rechts Formel 3), ergibt sich

$$\deg(\Omega_X) + 2(1 - g_X) = n \cdot \deg(\Omega_Y) + 2n(1 - g_Y).$$

Mit 1) links und $g_Y = 0$ sowie $\deg(\Omega_Y) = -2$ rechts folgt $g_X = g_{top}$. QED

Korollar 12. Für kompakte zshg. Riemannsche Flächen X vom Geschlecht g gilt

$$\boxed{\deg(\Omega_X) = 2g - 2}.$$

Cup-Produkt

Für *kompakte orientierte* C^∞ -Mannigfaltigkeiten X der Dimension n definiert man das **Cup-Produkt**

$$H_{dR}^i(X) \times H_{dR}^{n-i}(X) \rightarrow H_{dR}^n(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

durch das \wedge -Produkt von Differentialformen und anschließende Integration

$$\boxed{[\omega] \cap [\eta] := \int_X \omega \wedge \eta}$$

für *Representanten* ω, η mit $d\omega = 0, d\eta = 0$. [Beachte $\int_X (\omega + d\rho) \wedge \eta = \int_X \omega \wedge \eta$ wegen $\int_X d\rho \wedge \eta = \int_X d(\rho \wedge \eta) = \int_{\partial X} \rho \wedge \eta = 0$ und $\partial X = \emptyset$]. Es gilt

$$[\omega] \cap [\eta] = (-1)^{i(n-i)} \cdot [\eta] \cap [\omega] .$$

Für *kompakte zshg. Riemannsche Flächen* X ist der *einzigste interessante Fall* die *alternierende Cup-Produkt Paarung*

$$H_{dR}^1(X) \times H_{dR}^1(X) \longrightarrow \mathbb{C} .$$

Für *geschlossene (exakte) komplexwertige 1-Formen* ω ist auch die *konjugiert komplexe Form* $\bar{\omega}$ *geschlossen (exakt)*. Somit ist $[\omega] \mapsto [\bar{\omega}]$ für $[\bar{\omega}] := \overline{[\omega]}$ ein \mathbb{C} -antilinearer Automorphismus von $H_{dR}^1(X)$. Wie man leicht sieht entspricht die *Konjugation* auf $H_{dR}^1(X)$ unter dem *Vergleichsisomorphismus* $H_{dR}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)$ der *komplexen Konjugation* auf dem *Koeffizientensystem* \mathbb{C}_X .

Periodenrelationen

Sei $\Omega(X) = H^0(X, \Omega_X)$ der \mathbb{C} -Vektorraum der *holomorphen 1-Formen* auf X . Jede Form $\omega \in \Omega(X)$ ist eine *geschlossene Form* in $A^1(X)$. [Beachte $d\omega = d(f(z)dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0$ wegen der *Holomorphie* von f (in *lokalen Karten*; *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*).] Jedes $\omega \in \Omega(X)$ definiert also eine *Klasse* $[\omega]$ in $H_{dR}^1(X)$. Dies gibt eine *natürliche Abbildung* $\Omega(X) \rightarrow H_{dR}^1(X)$. Verschwindet die *Kohomologiekategorie* $[\omega]$, dann verschwindet auch ω wegen

$$i[\omega] \cap [\bar{\omega}] = i \int_X \omega \wedge \bar{\omega} \geq 0$$

mit $= 0$ genau dann wenn $\omega = 0$. [Beachte $if(z)dz \wedge \overline{f(z)dz} = 2|f|^2 dx \wedge dy$ in den *lokalen Koordinaten der Karten*.] Es folgt $\Omega(X) \hookrightarrow H_{dR}^1(X)$. Ditto für *antiholomorphe Formen* in $\overline{\Omega(X)}$.

Bezüglich des Cup-Produkts gilt $f(z)dz \wedge g(z)dz = 0$ wegen $dz \wedge dz = 0$, also

$$\Omega(X) \cap \Omega(X) = 0 .$$

Die Abbildung $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \rightarrow H_{dR}^1(X)$, die $(\omega, \bar{\eta})$ auf $[\omega] + [\bar{\eta}]$ schickt für $\omega, \eta \in \Omega(X)$, ist injektiv und \mathbb{R} -linear. Ist nämlich $[\omega] + [\bar{\eta}] = 0$, folgt $i \int_X \omega \wedge \bar{\omega} = i[\omega] \cap [\bar{\omega}] = -i[\omega] \cap [\eta] \in \Omega(X) \cap \Omega(X) = \{0\}$ und damit $\omega = 0$ und $\eta = 0$.

Periodenrelationen. *Bezüglich der alternierenden Cup-Produkt \mathbb{C} -Bilinearform auf $H_{dR}^1(X)$ ist das Bild von $\Omega(X)$ isotrop, kurz:*

$$\Omega(X) \cap \Omega(X) = 0 .$$

Die hermitesche Paarung

$$\langle \omega, \eta \rangle = i \int_X \omega \wedge \bar{\eta} = i \cdot [\omega] \wedge [\bar{\eta}]$$

ist *positiv definit* auf $\Omega(X)$ und es gilt $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \hookrightarrow H_{dR}^1(X)$.

Hodge Zerlegung

1) Aus $\deg(\Omega_X) = 2g - 2$ (Korollar 12) und *Riemann-Roch* folgt

$$\dim \Omega(X) = g + (h^1(X, \Omega_X) - 1) .$$

Aus dem Endlichkeitssatz folgt $h^1(X, \Omega_X) < \infty$.

2) Die exakte Garbensequenz $0 \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X \rightarrow 0$ und $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (*Dolbeaut*) liefern auf einer kompakten zshg. Riemannschen Fläche X daher eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega(X) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \Omega_X) \twoheadrightarrow H^2(X, \mathbb{C}_X) \rightarrow 0$$

mit $H^2(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}^r$. Es gilt¹⁶ $r \geq 1$ und damit $h^1(X, \Omega_X) \geq r \geq 1$. Aus 1) folgt daher

$$\dim \Omega(X) \geq g .$$

¹⁶wegen $H^2(X, \mathbb{C}_X) \cong H_{dR}^2(X)$ und $H_{dR}^2(X) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch \int_X .

3) Sei $B = \text{Bild}(H^1(X, \mathbb{C}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X))$. Wegen $B \cong \overline{H^1(X, \mathbb{C}_X)/\Omega(X)} \cong H^1_{dR}(X)/\Omega(X)$ folgt aus den *Periodenrelationen* $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \hookrightarrow H^1_{dR}(X)$ dann $\dim B = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} B \geq \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \overline{\Omega(X)} = \dim \Omega(X)$. Also

$$\dim B = \dim \Omega(X) \geq g .$$

4) Andererseits gilt $B \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$, also $\dim(B) \leq \dim(H^1(X, \mathcal{O}_X)) = g$. Beide Ungleichung zusammen ergeben $\dim B = g$. Aus Dimensionsgründen folgt $B = H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Die exakte Sequenz vereinfacht sich mit dieser Information zu der kurzen exakten Periodensequenz mit der **Periodenabbildung** δ

$$\boxed{0 \longrightarrow \Omega(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0}$$

und der zusätzlichen Aussage $H^1(X, \Omega_X) \cong H^2(X, \mathbb{C}_X)$.

5) Aus $\dim \Omega(X) = \dim B = g$ in Schritt 3) und 4) folgt

$$\dim \Omega(X) = g ,$$

also¹⁷

$$\boxed{h^1(X, \mathbb{C}_X) = 2g} .$$

Aus $\dim \Omega(X) = g$ und Schritt 1) folgt schließlich $h^1(X, \Omega) = 1$.

Zusammengefaßt ergibt dies die

Hodge Zerlegung. Für kompakte Riemannsche Flächen X gilt

$$\boxed{H^1_{dR}(X) = \Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \cong H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}^{2g}} .$$

$\Omega(X)$ ist *maximal isotrop* bezüglich des alternierenden Cup-Produkts und es gilt

$$\boxed{\dim \Omega(X) = g} .$$

Weiterhin gilt

$$\boxed{H^1(X, \Omega_X) \cong H^2(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}} .$$

¹⁷Dies zeigt auch $\chi(X, \mathbb{C}_X) := \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \dim_{\mathbb{C}}(H^{\nu}(X, \mathbb{C}_X)) = 1 - 2g + 1 = \chi_{top}(X)$.

Differenziale dritter Gattung

Eine meromorphe Differentialform heisst *Differential dritter Gattung*, wenn sie nur einfache Polstellen besitzt. Sei $\Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ der Raum der Differenziale dritter Gattung auf X , deren Residuen ganzzahlig sind. Man hat eine exakte (!) Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow \Omega_{3rd,\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

von Garben, wobei die rechte Abbildung durch die holomorphe logarithmische Ableitung $\partial \log$ definiert wird. Für $f \in \mathcal{M}^*(X)$ ist

$$\partial \log(f) = \frac{\partial f}{f}$$

in $\Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ und die Residuen sind die Pol/Nullstellen-Vielfachheiten von f . Eine Funktion $G \in M(X)$ nennt man eine **logarithmische Stammfunktion** von ω , wenn $\partial \log(G) = \omega$ gilt, d.h. lokal in Karten für $\omega = g(z)dz$ also

$$\partial \log(G) := \frac{G'(z)}{G(z)} dz = g(z) dz = \omega .$$

Lokal existiert eine logarithmische Stammfunktion dann und nur dann, wenn die Residuen von ω ganzzahlig sind [Setze $G(z) = \exp(\int_{z_0}^z \omega)$ und reduziere auf $\omega = n \cdot \frac{dz}{z-z_1}$ für $n \in \mathbb{Z}$ mit $\int_{z_0}^z \omega = n \log(z-z_1/z_0-z_1)$ und $G(z) = \text{const} \cdot (z-z_1)^n$].

Lemma 10. Sei X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche. Die Obstruktion $\delta(\omega)$ für die Existenz einer meromorphen logarithmischen Stammfunktion G zu einer gegebenen Differentialform $\omega \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}^1(X)$ liegt in der abelschen Gruppe $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^*(X) \xrightarrow{\partial \log} \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}^1(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \longrightarrow 0$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \Omega_X & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_X^* & \longrightarrow & \mathcal{M}_X^* & \xrightarrow{\partial \log} & \Omega_{3rd,\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i & & \parallel & & \downarrow \text{res} \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^* & \longrightarrow & \mathcal{M}_X^* & \xrightarrow{(\cdot)} & Div_X \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Hierbei ist $res(\omega) = \sum_{x \in X} res_x(\omega) \cdot [x]$. Beachte $res(\partial \log f) = (f)$ in $Div(X)$. Für eine abelsche Gruppe A ist $Div_{X,A}$ der Divisoren auf X mit Werten in A gegeben durch $Div_{X,A}(U)$ der Funktionen $D : U \rightarrow A$, deren Träger keinen Häufungspunkt in U besitzt. Im Fall $A = \mathbb{Z}$ schreiben wir nur Div_X . Beachte, auch die rechte vertikale Garbensequenz des letzten Diagramms ist exakt ebenso wie die beiden horizontalen Garbensequenzen.

Wir zeigen $H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0$. Wir betrachten dazu die Kohomologie in der unteren horizontalen langen exakten (!) Garbensequenz. Es gilt¹⁸ $H^1(X, Div_X) = 0$ sowie¹⁹ $Cl(X) = Div(X)/(\mathcal{M}_X^*(X)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ induziert von δ . Damit folgt aus

$$H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0$$

in der unteren langen exakten Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}_X^*(X)/\mathbb{C}^* & \xrightarrow{\partial \log} & \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \\ \parallel & & \downarrow res & & \downarrow H^1(i) & & \parallel \\ \mathcal{M}_X^*(X)/\mathbb{C}^* & \longrightarrow & Div(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \longrightarrow H^1(X, Div_X) \\ & & \downarrow \ell & & & & \\ & & H^1(X, \Omega_X) \cong \mathbb{C} & & & & \end{array}$$

die Aussage des Lemmas aus der oberen horizontalen exakten Sequenz. QED

Die lange exakte Sequenz zu $0 \rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_{3rd} \rightarrow Div_{X, \mathbb{C}} \rightarrow 0$ zeigt die Exaktheit der \mathbb{C} -linearen Sequenz $\Omega_{3rd}(X) \xrightarrow{res} Div_{X, \mathbb{C}} \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C})$. Der Residuensatz zeigt

$$\boxed{\sum_x res_x(\omega) = 0}$$

¹⁸Es gilt $Div_X \hookrightarrow Div_{X, \mathbb{C}} \twoheadrightarrow Div_{X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}}$. Da $Div_{X, \mathbb{C}}(X) \rightarrow Div_{X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}}(X)$ surjektiv ist, folgt $H^1(X, Div_X) \hookrightarrow H^1(X, Div_{X, \mathbb{C}})$. Da $Div_{X, \mathbb{C}}$ eine C^∞ -Modulgarbe ist, verschwinden somit beide Gruppen nach Lemma 1.

¹⁹Die Abbildung $Div(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, welche D auf die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}(-D)$ abbildet, ist die Randabbildung $\delta : Div(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ der langen Kohomologiesequenz gebildet zur kurzen exakten Garbensequenz $0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow Div_X \rightarrow 0$ [Für $f, g \in M(X)^*$ gilt: $(f) = (g) \Leftrightarrow f/g \in \mathbb{C}^*$]. Der Verbindungsmorphismus induziert daher einen Isomorphismus

$$\boxed{Cl(X) \xrightarrow[\sim]{\delta} Pic(X)}$$

welcher die Klasse von $D \in Div(X)$ auf die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}_X(-D)$ in $Pic(X)$ abbildet. Siehe auch Korollar 4.

für jede meromorphe Differentialform ω auf einer kompakten Riemannschen Fläche X [zum Beweis benutze eine geeignete Triangulierung von X]. Wegen $H^1(X, \Omega_X) \cong \mathbb{C}$ (siehe den Abschnitt über Hodge Zerlegung) $Bild(res) = Kern(Div_{X, \mathbb{C}} \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}))$ folgt aus dem Residuensatz daher

$$\boxed{res(\Omega_{3rd}) = Div_X^0 \otimes \mathbb{C}}$$

für die Divisorgruppe $Div(X)$ aller Divisoren vom Grad Null. Für jeden Divisor D vom Grad $deg(D) = 0$ gibt es also eine Form $\omega \in \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X)$ mit $res(\omega) = D$. Insbesondere existiert für $P, Q \in X$ ein Differential ω_{PQ} dritter Gattung mit Residuum $-P + Q$ (d.h. -1 bei P und $+1$ bei Q), das eindeutig ist bis auf eine Form in $\Omega(X)$:

$$\boxed{\exists \omega \in \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X) \quad , \quad res(\omega_{PQ}) = P - Q} .$$

Korollar 13. Für kompakte zshg. Riemannsche Flächen hat man exakte Sequenzen

$$\boxed{0 \rightarrow \Omega(X) \rightarrow \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X) \rightarrow Div(X)^0 \rightarrow 0} .$$

Korollar 14. Für kompakte zshg. Riemannsche Flächen X induziert die Inklusion $i : \mathbb{C}_X^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X^*$ eine exakte Sequenz

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \xrightarrow{H^1(i)} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0} .$$

Beweis. Die Abbildung ℓ im letzten Diagramm ist die Einschränkung ist die Gradabbildung $deg : Div_{X, \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ und $Bild(res : \Omega_{3rd, \mathbb{Z}} \rightarrow Div(X)) = Div(X)^0$ nach Korollar 13. Damit ist das Bild von $\delta \circ res$ in $Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ gleich

$$Pic^0(X) := Kern(deg : Pic(X) \rightarrow \mathbb{Z}) .$$

Die obere Abbildung $\delta : \Omega_{3rd, \mathbb{Z}} \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ im letzten Diagramm surjektiv ist wegen $H^1(X, \mathcal{M}^*_X) = 0$, folgt aus

$$\delta \circ res = H^1(i) \circ \delta$$

daher die Behauptung. QED

Additive versus Multiplikative Theorie

Im letzten Abschnitt wurden Differentiale $\omega_{PQ} \in \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X)$ konstruiert, deren Pole in zwei vorgegebenen Punkten P, Q von X liegen. Wir nehmen jetzt an²⁰, P liege nahe genug bei Q . Unter Berücksichtigung der Fußnote und der dort definierten Überdeckung \mathcal{U} von X ist dann ω_{PQ} holomorph auf den einfach zshg. Karten U_j für $j \neq 1$. Nach dem Satz von Cauchy existieren in diesem Fall *holomorphe* Stammfunktionen $g_j \in \mathcal{O}(U_j)$ definiert durch

$$g_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P_j}^z \omega_{PQ} \in \mathcal{O}(U_j) \quad , \quad j \neq 1 .$$

Für $j = 1$ gilt $\omega_{PQ} = \frac{dz}{z} - \frac{dz}{z-z_0}$, d.h. oBdA $P = 0$ und $Q = z_0 \in \mathbb{R}_{<0}$ plus ein holomorphes Differential auf der Kartenmenge \mathbb{E} von U_1 . Daher ist

$$g_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P_1}^z \omega_{PQ}$$

holomorph auf dem halbierten Einheitskreis $\mathbb{E} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Nach dem Residuensatz ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, z_0\}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (g_1(x + i\varepsilon) - g_1(x - i\varepsilon))$$

gleich 1 oder 0 je nachdem ob $x \in (z_0, 0)$ oder $x \notin [z_0, 0]$. Es folgt

$$g_1 \in \mathcal{O}(U_1 - \overline{PQ}) .$$

Wir definieren nun $\eta_{PQ}|_{U_j} = \omega_{PQ}|_{U_j}$ für $j \geq 2$ und

$$\eta_{PQ}|_{U_1} = 2\pi i \cdot d((1 - \phi) \cdot g_1)$$

für ein $0 \leq \phi \in C^\infty(\mathbb{E})$ mit Träger in $\frac{1}{2}\mathbb{E}$. Wir können dabei annehmen, dass ϕ identisch 1 ist auf der Verbindungsgerade zwischen Null und z_0 . Ausserhalb des Trägers von ϕ ist $\eta_{PQ}|_{U_1} = dg_1 = (\partial + \bar{\partial})g_1 = \partial g_1 = \omega_{PQ}|_{U_1}$. Da ϕ Null ist auf allen Durchschnitten $U_j \cap U_{j'}$ für $j \neq j'$ ist, verheften sich die lokalen Vorgaben zu

²⁰Damit meinen wir, es gebe eine lokale Karte U_1 biholomorph zum Einheitskreis \mathbb{E} so, dass die Bilder von P, Q und damit deren Verbindungsgerade \overline{PQ} im Kreis $\frac{1}{2}\mathbb{E}$ vom Radius $< 1/2$ liegen. OBdA $P = 0$ und $Q = z_0 \in \mathbb{R}_{<0}$. Wir überdecken dann die kompakte Riemannsche Fläche X durch U_1 und endlich viele weitere *einfach zusammenhängende* Karten $U_j, j = 2, 3, \dots$. Für $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ nehmen wir an, alle U_j für $j \geq 2$ seien disjunkt zum Bild von $\frac{1}{2}\mathbb{E}$ in U_1 . Wir wählen Stützpunkte $P_j \in U_j$ mit $P_1 \notin \overline{QP}$.

einer globalen C^∞ -Differentialform $\eta_{PQ} \in A^1(X)$. Aus den lokalen Definitionen folgt unmittelbar $d\eta_{PQ} = 0$ und η_{PQ} und ω_{PQ} stimmen überein ausserhalb von U_1 sowie auf allen Durchschnitten $U_j \cap U_{j'}$ für $j \neq j'$. [Per Definition gilt $d\eta_{PQ} = 0$, weil dies in allen Karten gilt].

Insbesondere ist $G_j(x) = \exp(2\pi i \cdot g_j(x))$ wegen $\partial(2\pi i \cdot g_j) = \omega_{PQ}$ eine logarithmische Stammfunktion von ω_{PQ} auf $U_j - \overline{PQ}$, deren Einschränkung auf $U_j \cap U_{j'}$ holomorph ist für alle $j' \neq j$.

Folgerung. Für die Verbindungsabbildung $\delta : \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ der exakten Sequenz $\mathbb{C}_X^* \hookrightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}$ ist $\delta(\omega_{PQ}) \in H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ nach Definition repräsentiert durch den 1-Kozykel

$$\delta(\omega_{PQ})(U_j \cap U_{j'})_{jj'} = \frac{G_j|_{U_j \cap U_{j'}}}{G_{j'}|_{U_j \cap U_{j'}} \in \mathbb{C}_X^*(U_j \cap U_{j'}).$$

Für die Verbindungsabbildung $\delta : A_{closed}^1 \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathbb{C}_X)$ der exakten Sequenz $\mathbb{C}_X \hookrightarrow A_X^0 \rightarrow A_{X,closed}^1$ wird der 1-Kozykel $\delta(\eta_{PQ}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_X)$ repräsentiert durch (siehe Abschnitt deRham Kohomologie)

$$\delta(\eta_{PQ})(U_j \cap U_{j'})_{jj'} = g_j|_{U_j \cap U_{j'}} - g_{j'}|_{U_j \cap U_{j'}} \in \mathbb{C}_X(U_j \cap U_{j'}),$$

denn $dg_j = (\partial + \bar{\partial})g_j = \partial g_j = \omega_{PQ} = \eta_{PQ}$ gilt auf allen Durchschnitten $U_j \cap U_{j'}$ für $j \neq j'$. Aus $G_j = \exp(2\pi i g_j)$ folgt daher sofort

Proposition 3. Für Punkte Q nahe genug bei P in einer kompakten Riemannschen Fläche X existiert eine geschlossene 1-Form $\eta_{PQ} \in A^1(X)$, deren Bild $\bar{\delta}([\eta_{PQ}])$ unter²¹ der Abbildung $\bar{\delta} : H_{dR}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)$ durch die 'Exponentialabbildung' $H^1(\exp(2\pi i -))$ abgebildet wird auf das Bild²² $\delta(\omega_{PQ}) \in H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ einer meromorphen Differentialform $\omega_{PQ} \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ mit $\text{res}(\omega_{PQ}) = P - Q$.

$$\begin{array}{ccc} [\eta_{PQ}] \in H_{dR}^1(X) = \frac{\text{Kern}(d:A^1(X) \rightarrow A^2(X))}{dA^0(X)} & \xrightarrow[\sim]{\bar{\delta}} & H^1(X, \mathbb{C}_X) \\ & & \downarrow H^1(\exp(2\pi i -)) \\ \omega_{PQ} \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \end{array}$$

²¹siehe Seite 23.

²²unter $\delta : \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ wie im Beweis von Lemma 10.

Für die Abbildungen $\bar{\delta}, \delta$ des Diagramms verweisen wir auf Seite 23 und 59.

Wir vermerken hier, daß die Bilder der ω_{PQ} in $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ für Punkte P, Q nahe genug Erzeugende der Gruppe $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ sind. Dies folgt aus Lemma 10.

Schlüssellemma 11. Sei X zshg. kompakte Riemannsche Fläche und $\omega \in \Omega(X)$. Für Punkte P, Q und $\eta_{PQ} \in A^1(X)$ wie in der letzten Proposition 3 gilt für das Cup-Produkt

$$\boxed{[\eta_{PQ}] \cap [\omega] = \int_X \eta_{PQ} \wedge \omega = \int_P^Q \omega .}$$

Beweis. Beachte $\eta_{PQ} = \omega_{PQ}$ im Komplement von $\text{supp}(\phi) \subset U_1$ und $\omega_{PQ} \wedge \omega = 0$ wegen $dz \wedge dz = 0$. Es folgt

$$[\eta_{PQ}] \cap [\omega] = \int_{U_1} \eta_{PQ} \wedge \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_1 \setminus U_\varepsilon} -d(\phi g_1) \wedge \omega$$

für ein System geeigneter immer kleiner werdender offener Umgebungen U_ε der Schlitzgerade \overline{PQ} in U_1 . Wegen $d\omega = 0$ ist $d(-\phi g_1 \cdot \omega) = d(-\phi g_1) \wedge \omega$ [Beachte $d(1 \cdot g_1) \wedge \omega = 0$ wegen $dz \wedge dz = 0$, da g_1 holomorph ist und damit $dg_1 = \partial g_1$]. Aus dem Satz von Stokes folgt daher $[\eta_{PQ}] \cap [\omega] = - \oint_{\partial U_\varepsilon} \phi g_1 \cdot \omega$. Die Integration erfolgt über den ∂U_ε von U_ε im Uhrzeigersinn! Ist ε klein genug, ist $\phi = 1$ auf der Kontur ∂U_ε . Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ strebt das Konturintegral daher gegen

$$- \int_P^Q \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (g_1(z - i\varepsilon) - g_1(z + i\varepsilon)) \cdot \omega(z) = \int_P^Q \omega .$$

QED

Chernklasse versus Grad

Die exakte Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i -)} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

definiert die erste **Chernklasse**, d.h. den Homomorphismus

$$c_1 : \text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_X) .$$

Korollar 15. Es gilt $\text{Bild}(c_1) = H^2(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}$ und $\text{Kern}(c_1) = \text{Pic}^0(X)$.

Beweis. Betrachte das folgende Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X & \longrightarrow & \mathbb{C}_X & \xrightarrow{\exp(2\pi i-)} & \mathbb{C}_X^* \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow i \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\exp(2\pi i-)} & \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0
\end{array}$$

und das daraus folgende Kohomologie-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(X, \mathbb{C}_X) & \xrightarrow[\text{Fußnote}]{\exp(2\pi i-)} & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}_X) & & \\
\downarrow & & \downarrow H^1(i) & & \parallel & & \\
H^1(X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\exp(2\pi i-)} & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}_X) & \longrightarrow & 0 = H^2(X, \mathcal{O}_X)
\end{array}$$

Die Abbildung $H^1(\exp(2\pi i-)) : H^1(X, \mathbb{C}_X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ ist surjektiv²³, wie man mit Proposition 3 zeigen kann. Die linke vertikale Abbildung ist surjektiv (Periodensequenz auf Seite 57). Aus der Exaktheit der unteren Sequenz folgt daher

$$\text{Kern}(c_1) = \text{Bild}(H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*)) = \text{Bild}(H^1(i)).$$

Nach Korollar 14 ist $\text{Bild}(H^1(i)) = \text{Pic}^0(X)$ die Gruppe der Klassen vom Grad Null in $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Wegen $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (Dolbeaut) ist c_1 surjektiv. Die Abbildung c_1 induziert daher einen Isomorphismus $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z}_X)$. Aus $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X) = \mathbb{Z}$ folgt

$$\boxed{H^2(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}},$$

und c_1 kann mit der Gradabbildung identifiziert werden. QED

Lemma 12. Für eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche gilt

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}}.$$

Beweis. Mit der exakten Garbensequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \rightarrow 0$ zeigt man die Injektivität von $p \cdot \text{id} : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_X)$. Also ist $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$

²³Punkte $P, Q \in X$, die nahe beieinander liegen, erzeugen die Divisoren $\text{Div}^0(X)$ vom Grad Null. Daher erzeugen die Differentiale $\omega_{P,Q}$ den Raum $\Omega_{3rd, \mathbb{Z}}^1(X)/\Omega^1(X)$. Die Randabbildung $\delta : \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ ist surjektiv (Lemma 10). Die Klassen $\delta(\omega_{P,Q})$ erzeugen daher $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$. Nach Proposition 3 gilt $\exp(2\pi i \bar{\delta}([\eta_{PQ}])) = \delta(\omega_{PQ})$ für $\bar{\delta}([\eta_{PQ}]) \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$ gilt. Daher ist wie behauptet $H^1(X, \mathbb{C}_X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ surjektiv.

eine torsionsfreie abelsche Gruppe. [Alternativ benutze $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathbb{C}_X$ und damit $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \hookrightarrow H^1(C, \mathbb{C}_X) = \mathbb{C}^{2g}$ nach Seite 26]. Aus den Isomorphismen²⁴ $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \otimes \mathbb{C} \cong H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}^{2g}$ folgt daher die Behauptung.

²⁴Der Funktor $\otimes \mathbb{C}$ von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen ist ein exakter Funktor. Dies zeigt $H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathbb{Z}_X) \otimes \mathbb{C} = H_{\mathcal{U}}^1(X, \mathbb{C}_X)$ für das kofinale System von endlichen Überdeckungen \mathcal{U} für die alle $U_i \cap U_j$ nur endlich viele Zshg.komponenten besitzen [zur Erinnerung, X ist kompakt].

Die Jacobische Varietät $J(X)$

Sei X eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche. Die Inklusion $j : \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ induziert $H^1(j) : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ und der Kokern

$$\boxed{J(X) = H^1(X, \mathbb{Z}_X) \setminus H^1(X, \mathcal{O}_X)}$$

definiert die **Jacobische Varietät** $J(X)$ von X . Die Exponentialsequenz und die Aussage $Pic^0(X) = Kern(c_1 : Pic(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_X))$ von Lemma 11 definieren einen Gruppenisomorphismus

$$\boxed{Pic^0(X) \cong J(X)}.$$

Die Zuordnung $X \mapsto J(X)$ definiert einen **kontravarianten Funktor**, d.h. jede holomorphe Abbildung $\pi : X \rightarrow Y$ zwischen kompakten zshg. Riemannschen Flächen induziert insbesondere einen Homomorphismus

$$\boxed{J(\pi) : J(Y) \rightarrow J(X)}.$$

Alternative Beschreibung. Die Struktur des Quotienten von $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}^g$ nach der Untergruppe, die durch das Bild von $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ unter $H^1(j)$ gegeben wird, wird erst später klar. (Siegel'scher Halbraum). Deshalb benutzen wir eine andere Beschreibung der Jacobischen Varietät $J(X)$, z.B. in Form des *isomorphen Quotienten*²⁵

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) \setminus H^1(X, \mathbb{C}_X) / \Omega(X).$$

Die Abbildung α : Wir fixieren eine \mathbb{C} -Basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ von $\Omega(X)$ und betrachten die vom Cup-Produkt induzierte Abbildung, welche die Klasse $[\eta] \in H_{dR}^1(X)$ auf den Vektor

$$\alpha([\eta]) = ([\eta] \cap [\omega_1], \dots, [\eta] \cap [\omega_g]) \in \mathbb{C}^g$$

²⁵Wir benutzen den Isomorphismus $H^1(X, \mathbb{C}_X) / \delta(\Omega(X)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (siehe Schritt 1) im Abschnitt Hodge Zerlegung). Für die Einbettung $j : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ erlaubt dieser die Abbildung $H^1(j) : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ durch die Abbildung $H^1(j') : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X)$ zu beschreiben, welche induziert ist von der Inklusion $j' : \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{C}_X$. Allerdings erfordert dies die Beschreibung der Periodenabbildung $\delta : \Omega(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X)$. Um dies zu vermeiden (und deshalb unterdrücken wir auch die Erwähnung der Abbildung δ) benutzen wir das Cup-Produkt und die Isotropie von $\Omega(X)$.

in \mathbb{C}^g abbildet, sowie die induzierte \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\alpha : H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong H_{dR}^1(X) \rightarrow \mathbb{C}^g ,$$

Nach Lemma 11 gilt dann für P nahe bei Q

$$\alpha([\eta_{PQ}]) = \left(\int_P^Q \omega_1, \dots, \int_P^Q \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g .$$

Der Kern von α ist isomorph zu dem maximal isotropen Unterraum von $H_{dR}^1(X)$ der von $\Omega(X)$ erzeugten Klassen unter dem Isomorphismus $\bar{\delta} : H_{dR}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(X) & \longrightarrow & \Omega(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathbb{C}_X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & A_X^0(X) & \xrightarrow{d} & A_{X, \text{closed}}^1(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathbb{C}_X) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

und α induziert daher einen Isomorphismus $H^1(X, \mathbb{C}_X)/\Omega(X) \cong \mathbb{C}^g$. Das Gitter $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ in $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ wird unter α auf eine isomorphe Untergruppe $\Gamma := \alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X))$ von \mathbb{C}^g abgebildet²⁶. Man erhält damit

$$\bar{\alpha} : J(X) = H^1(X, \mathbb{Z}_X) \backslash H^1(X, \mathbb{C}_X) / \Omega(X) \cong \mathbb{C}^g / \Gamma .$$

Klassengruppe und Picardgruppe. Die Komposition der Isomorphismen $Pic^0(X) \cong J(X) \cong \mathbb{C}^g / \Gamma$ definiert daher einen *Gruppenisomorphismus*

$$Pic^0(X) \cong \mathbb{C}^g / \Gamma .$$

Andererseits existiert ein Isomorphismus $\delta : Cl(X) \cong Pic(X)$ (siehe Korollar 4). Dies induziert einen Isomorphismus $\delta : Cl^0(X) \cong Pic^0(X)$ und damit durch Komposition mit $Pic^0(X) \cong \mathbb{C}^g / \Gamma$ den Isomorphismus β im folgenden kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Pic^0(X) & \longrightarrow & Pic(X) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}_X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \sim \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbb{C}^g / \Gamma & & \sim \delta & & \sim & & \\ & & \sim \uparrow \beta & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Cl^0(X) & \longrightarrow & Cl(X) & \xrightarrow{deg} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

²⁶ α ist injektiv auf $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, denn $H^1(X, \mathbb{R}_X) \cap \Omega(X) \subseteq \bar{\Omega}(X) \cap \Omega(X) = \{0\}$.

Satz von Abel-Jacobi: Für eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht g und einen beliebigen Punkt Q auf X gilt:

- (i) Jede Divisorklasse in $Cl^0(X)$ besitzt einen Repräsentant von der Form $(P_1 - Q) + \dots + (P_g - Q)$ für geeignete g Punkte P_1, \dots, P_g aus X .
D.h. die Abbildung

$$cl : X^g \rightarrow Cl^0(X),$$

die (P_1, \dots, P_g) auf die Divisorklasse von $(P_1 - Q) + \dots + (P_g - Q)$ schickt, ist surjektiv.

- (ii) Der Isomorphismus $\beta : Cl^0(X) \rightarrow \mathbb{C}^g/\Gamma$ wird konkret beschrieben durch

$$\beta(P - Q) = \left(\int_Q^P \omega_1, \dots, \int_Q^P \omega_g \right) \text{ mod } \Gamma.$$

Modulo $\Gamma = \alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X))$ hängen die Integrale nicht von der Wahl des Integrationsweges von P nach Q auf X ab (siehe Fußnote 23).

$$\begin{array}{ccc} X^g = X \times \dots \times X & & \\ \downarrow cl & & \\ Cl^0(X) & \xrightarrow{\sim \beta} & \mathbb{C}^g/\Gamma \end{array}$$

Beweis. Teil (i) folgt aus dem Satz von Riemann-Roch. Für einen Divisor D vom Grad Null gilt $h^0(X, \mathcal{O}_{D+gQ}) = 1 - g + \deg(D + gQ) + h^1 = 1 + h^1 \geq 1$. Somit existiert ein nichttrivialer Schnitt f mit $D + gQ - (f) \geq 0$ und damit

$$D + gQ - (f) = P_1 + \dots + P_g,$$

da der Grad links und damit auch rechts gleich g ist. Dies zeigt (i).

Die Aussage (ii) genügt es – durch additive Fortsetzung entlang eines Verbindungsweges zwischen P und Q – für nahe beieinander liegende Punktepaare P, Q zu zeigen. Für solche kann man $\beta(P - Q)$ wie folgt berechnen:

Berücksichtigt man alle auftretenden Identifikationen und Abbildungen²⁷

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \xleftarrow{H^1(i)} & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) & \xleftarrow{H^1(\exp(2\pi i -))} & H^1(X, \mathbb{C}_X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}^g \\
 \uparrow & & \uparrow \delta & & \uparrow \sim \delta & & \downarrow pr \\
 & \swarrow \delta \circ res & \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X) & & & & \\
 Pic^0(X) & \xleftarrow{\quad} & & & H_{dR}^1(X) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^g / \Gamma
 \end{array}$$

folgt aus den Diagrammen von Proposition 3 und Lemma 11, daß

$$\eta_{PQ} \in H_{dR}^1(X)$$

nach rechts (unten) auf

$$\left(\int_Q^P \omega_1, \dots, \int_Q^P \omega_g \right)$$

mod Γ in \mathbb{C}^g / Γ abgebildet wird. Andererseits wird η_{PQ} unter

$$H^1(i) \circ H^1(\exp(2\pi i -)) \circ \delta$$

auf $\delta \circ res(\omega_Q)$ in $Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ abgebildet.

Wegen des Residuensatzes liegt $\delta \circ res(\omega_{PQ})$ in $Pic^0(X)$. Dies definiert als Bild von $[\eta_{PQ}]$ nach links in $Pic^0(X)$. Dieses Bild ist $\delta \circ res(\omega_{PQ}) = \delta(P - Q)$ bezüglich der Rand-Abbildung $\delta : Div^0(X) \rightarrow Pic^0(X)$ aus der exakten Garbensequenz $0 \rightarrow \mathcal{I}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow Div_X \rightarrow 0$ und induziert den Isomorphismus

$$\delta : Cl(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = Pic(X)$$

(by abuse of notation). Dies beweist Aussage (ii). QED

²⁷Der Divisor $Q - P$ ist das Residuum $res(\omega_{PQ})$ des Differentials $\omega_{PQ} \in \Omega_{3rd, \mathbb{Z}}(X)$. Nach dem ersten Diagramm im Beweis von Lemma 10 ist das Bild $\delta(Q - P)$ in $Pic^0(X)$ das Bild unter $H^1(i)$ von $\delta(\omega_{PQ}) \in H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$. Nach Proposition 3 ist $\delta(\omega_{PQ}) = H^1(\exp(2\pi i -))(\delta([\eta_{PQ}]))$ für $\delta([\eta_{PQ}]) \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$. Identifiziert man $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ mit $H_{dR}^1(X)$, entspricht dies der Form $\eta_{PQ} \in H_{dR}^1(X)$. Dies erlaubt es $\alpha(\delta(\eta_{PQ}))$ durch die Cup-Produkte $[\eta_{PQ}] \wedge [\omega_i]$ für $i = 1, \dots, g$ zu berechnen. Nach Lemma 11 erhält man $\alpha(\delta(\eta_{PQ})) = (\int_Q^P \omega_1, \dots, \int_Q^P \omega_g)$ für P nahe bei Q . Auf der anderen Seite ist $H^1(i)(\delta(\omega_{PQ})) = H^1(i \circ \exp(2\pi i -))(\delta([\eta_{PQ}]))$.

Die Albanese Varietät $Alb(X)$

Sei X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche und sei $x_0 = Q \in X$ ein fixierter Punkt. Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ die *Periodengruppe* aller \mathbb{C} -linearen Abbildung $\Omega(X) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert für $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ durch $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$. Setze

$$Alb(X, x_0) := \Omega(X)^* / \Lambda .$$

Die Zuordnung $(X, x_0) \mapsto Alb(X, x_0)$ definiert einen **kovarianten Funktor**, d.h. jede holomorphe Abbildung $\pi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwischen kompakten zshg. Riemannschen Flächen mit $y_0 = \pi(x_0)$ induziert somit einen Homomorphismus

$$Alb(\pi) : Alb(X, x_0) \rightarrow Alb(Y, y_0) .$$

1) Im folgenden sei $\omega_1, \dots, \omega_g$ unsere fixierte Basis von $\Omega(X)$ und wir beschreiben $Alb(X, x_0)$ oBdA durch den isomorphen Quotienten

$$Alb(X) := \mathbb{C}^g / \Lambda ,$$

wobei wir $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ auffassen als die Untergruppe aller Vektoren $(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_g)$ definiert durch die Wege $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$; diese ist unabhängig vom Basispunkt x_0 .

2) Die Abbildung $(x_1, \dots, x_g) \mapsto (\sum_{i=1}^g \int_{x_0}^{x_i} \omega_1, \dots, \sum_{i=1}^g \int_{x_0}^{x_i} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$ ist wohldefiniert mod Λ , und definiert eine holomorphe Abbildung

$$alb_g : X^g \longrightarrow Alb(X) .$$

3) Andererseits sei

$$cl : X^g \longrightarrow Cl^0(X)$$

definiert durch $cl(x_1, \dots, x_g) = \sum_{i=1}^g (x_i - x_0)$. Die Abbildung cl ist *surjektiv* nach dem Satz von Abel-Jacobi (i). Der Satz von Abel-Jacobi (ii)²⁸ liefert uns die untere

²⁸Die Formel in Teil (ii) des Satzes von Abel-Jacobi gilt a priori nur für Punkte P, Q , die nahe beieinander liegen. Da man je zwei Punkte auf X durch einen Weg verbinden kann und jeden solchen Weg in Stücke zerlegen kann, deren Enden nahe genug beieinander liegen, gilt durch Aufaddieren die Formel von Teil (ii) des Satzes von Abel-Jacobi für alle Punkte P, Q aus X und alle Verbindungswege von P nach Q . Das zeigt insbesondere, daß das Ergebnis nicht von der Wahl des Verbindungsweges abhängt. Die Mehrdeutigkeit der Integrale $\int_Q^P \omega$ wird durch die Gruppe Λ beschrieben. Daraus folgt $\Lambda \subseteq \Gamma$ und damit insbesondere $rang(\Lambda) \leq rang(\Gamma)$, und die natürliche Projektion $pr : \mathbb{C}^g / \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^g / \Gamma$ macht das nachfolgende Diagramm kommutativ.

horizontale und die linke vertikale Abbildung des kommutativen Diagramms für $\Gamma = \alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X))$

$$\begin{array}{ccc}
 X^g & \xrightarrow{\text{alb}_g} & \mathbb{C}^g / \Lambda \\
 \downarrow \text{cl} & \nearrow \lambda & \downarrow \text{pr} \\
 Cl^0(X) & \xrightarrow[\beta]{\sim} & \mathbb{C}^g / \Gamma
 \end{array}$$

Lemma. *Es existiert ein Gruppenhomomorphismus*

$$\lambda : Cl^0(X) \longrightarrow Alb(X) = \mathbb{C}^g / \Lambda ,$$

der auf den erzeugenden Divisorenklassen $x - x_0 \in Div^0(X)$ gegeben ist durch

$$\lambda(x - x_0) = \left(\int_{x_0}^x \omega_1, \dots, \int_{x_0}^x \omega_g \right) \text{ mod } \Lambda$$

und der $\beta = \text{pr} \circ \lambda$ erfüllt.

Beweis: Man definiert λ auf $Div(X)^0$ und muß zeigen, daß Hauptdivisoren²⁹ $(f) = \sum_{i=1}^k P_i - \sum_{i=1}^k Q_i$ auf Null abbildet werden: Sei $\pi : X \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ die durch $f \in M(X)^*$ definierte Abbildung und γ ein Verbindungsweg in $P^1(\mathbb{C})$ zwischen 0 und ∞ ohne π -Verzweigungspunkte. Dann ist $\pi^{-1}(\gamma)$ ein ‘Verbindungsweg’ zwischen den Punkten P_i, Q_i in X für $i = 1, \dots, k$ bei geeigneter Nummerierung. Aus $\int_{\pi^{-1}(\gamma)} \omega_i = \int_{\gamma} Tr(\omega_i)$ und $\lambda((f)) = \left(\int_{\pi^{-1}(\gamma)} \omega_1, \dots, \int_{\pi^{-1}(\gamma)} \omega_g \right) \text{ mod } \Lambda$ folgt daher $\lambda((f)) = 0$ aus $Tr(\omega_i) \in \Omega(P^1(\mathbb{C})) = \{0\}$.

Lemma. *Es gilt $\Lambda = \Gamma$.*

Beweis: Nach der letzten Fußnote gilt $\Lambda \subseteq \Gamma$. Dies definiert die Projektion $\text{pr} : \mathbb{C}^g / \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^g / \Gamma$. Die Abbildungen β, λ und pr sind Gruppenhomomorphismen und $s = \lambda \circ \beta^{-1}$ definiert einen Schnitt der Surjektion pr , d.h. es gilt $\text{pr} \circ s = \text{id}$. Also zerfällt $\mathbb{C}^g / \Lambda = \text{Kern}(\text{pr}) \oplus s(\mathbb{C}^g / \Gamma)$ als abelsche Gruppe. Durch Vergleich der p -Torsionsgruppen folgt für jede Primzahl p für $\text{Kern}(\text{pr}) = \Gamma / \Lambda$ die Beziehung $p^{\text{rang}(\Lambda)} = \#(\Gamma / \Lambda)[p] \cdot p^{\text{rang}(\Gamma)}$. Wegen $\text{rang}(\Lambda) \leq \text{rang}(\Gamma)$ folgt daraus $\text{rang}(\Lambda) = \text{rang}(\Gamma)$ und $\#(\Gamma / \Lambda)[p] = 1$. Die Ranggleichheit zeigt Γ / Λ ist endlich, und $\#(\Gamma / \Lambda)[p] = 1$ für alle Primzahlen p zeigt $\Gamma = \Lambda$.

²⁹OBdA ist kein P_i, Q_i ein Verzweigungspunkt. Dies gilt für alle $f + \varepsilon$ mit $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ klein genug. Obiges Argument zeigt $\lambda((f + \varepsilon)) = 0$. Benutze dann $\lambda((f)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda((f + \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0$.

Korollar 16. Die Projektion pr induziert Isomorphismus von Gruppen

$$\boxed{Alb(X) = \mathbb{C}^g / \Lambda \cong \mathbb{C}^g / \Gamma \cong J(X)} .$$

Proposition 4. Die Gruppen $\Gamma = \alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X))$ und Λ stimmen überein, also gilt

$$\boxed{\alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X)) = \left\langle (\oint_{\gamma} \omega_1, \dots, \oint_{\gamma} \omega_g) \text{ für } \gamma \in \pi_1(X, x_0) \right\rangle .}$$

D.h. es gibt einen Gruppenisomorphismus³⁰

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Z}_X) \quad , \quad \gamma \mapsto \eta_{\gamma}$$

derart, daß für alle $\omega \in A^1(X)$ mit $d\omega = 0$ folgende **Formel** gilt:

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_X \eta_{\gamma} \wedge \omega .$$

Hierbei fassen wir η_{γ} via $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \subset H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong H_{dR}^1(X)$ als geschlossene 1-Form in $A^1(X)$ auf modulo exakten 1-Formen in $dA^0(X)$.

Beweis. $\Lambda = \Gamma = \alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X))$ und die Definition von α zeigt die Existenz³¹ einer surjektiven Abbildung

$$\eta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_X) ,$$

die γ auf die Klasse $[\eta_{\gamma}] \in H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ einer geschlossenen 1-Form η_{γ} abbildet mit $\oint_{\gamma} \omega = \int_X \eta_{\gamma} \wedge \omega$ für alle $\omega \in \Omega(X)$. Durch komplexe Konjugation gilt diese Formel dann auch für alle $\omega \in \overline{\Omega(X)}$. Für exakte Formen $\omega \in A^1(X)$ ist die Formel trivialerweise richtig, denn beide Seiten sind Null. Daraus folgt die zweite Aussage, da der Raum aller geschlossenen 1-Formen in $A^1(X)$ wegen der Hodge Zerlegung gegeben ist durch

$$\Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega}^1(X) \oplus dA^0(X) .$$

³⁰ Λ ist ein Quotient von $\pi_1(X, x_0)$.

³¹Stetige Abbildungen $S^1 = [0, 1]/0 \sim 1 \rightarrow X$ können beliebig gut durch stückweise glatte Wege approximiert werden (Satz von Stone-Weierstraß). Dies zeigt, daß stückweise C^1 -glatte Wege $\gamma : S^1 = [0, 1]/0 \sim 1 \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_0$ Repräsentanten der Homotopiegruppe $\pi_1(X, x_0)$ liefern. Für stückweise glatte γ und $\omega \in \Omega(X)$ ist das Integral $\int_{\gamma} \omega$ wohldefiniert.

Poincare Dualität

Für eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche X wurde in Proposition 4 die Existenz einer surjektiven Abbildung $\eta : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ gezeigt mit $\gamma \mapsto [\eta_\gamma]$ sowie

$$\oint_\gamma \eta = \int_X \eta_\gamma \wedge \eta$$

für alle $\eta \in A^1(X)$ mit $d\eta = 0$. Andererseits haben wir das nichtausgeartete alternierende Cup-Produkt

$$\eta \cap \eta' = \int_X \eta \wedge \eta'$$

auf der de Rham Kohomologie $H_{dR}^1(X)$ und damit auch auf $H^1(X, \mathbb{C}_X)$.

Lemma 13. *Die Einschränkung der alternierenden Cup-Produkt Paarung von $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ auf $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ hat Werte in \mathbb{Z} .*

Beweis. Zu zeigen ist $[\eta_\gamma] \cap [\eta_{\gamma'}] = \int_X \eta_\gamma \wedge \eta_{\gamma'} \in \mathbb{Z}$ oder äquivalent $\oint_\gamma \eta_{\gamma'} \in \mathbb{Z}$. Für die Kurve $\gamma : S^1 \rightarrow X$ gilt aber

$$\oint_\gamma \eta_{\gamma'} = \int_{S^1} \gamma^*(\eta_{\gamma'}) \in \mathbb{Z}$$

wegen der Funktorialität des Isomorphismus $\bar{\delta} : H_{dR}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)$ sowie Funktorialität von $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ unter Pullback; siehe Folgerung 3. QED

Poincare Dualität. *Die Cup-Produkt Paarung definiert eine nicht ausgeartete ganzzahlige (d.h. unimodulare³²) alternierende Paarung auf $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, die sogenannte **Polarisierung***

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{Z}_X) \times H^1(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow \mathbb{Z}}.$$

Wäre dies nicht der Fall, zeigt die Elementarteilertheorie alternierender Formen (*Satz von Frobenius*) die Existenz eines primitiven Vektors $\eta \in H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ sowie einer Primzahl p mit

$$n_\gamma \cap \eta = \int_{S^1} \gamma^*(\eta) \in p \cdot \mathbb{Z}$$

³²Der Beweis benutzt nur $\Gamma \subseteq \Lambda$. In der Tat zeigt die Unimodularität und die Tatsache, daß auch die Cup-Produkte zwischen Λ und Γ Werte in \mathbb{Z} haben, dann erneut $\Gamma = \Lambda$.

für alle geschlossenen Wege γ (siehe letzte Bemerkung des Appendix). Betrachte dann die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{p \cdot \text{id}} H^1(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^1(X, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X)$$

Das Bild $\bar{\eta}$ von η in $H^1(X, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X)$ ist dann nicht trivial wegen der Primitivität von η . Aus $\int_{S^1} \gamma^*(\eta) \in p \cdot \mathbb{Z}$ folgt $\gamma^*(\bar{\eta}) = 0$ in $C := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für alle $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. Dies impliziert $\bar{\eta} = 0$ nach Folgerung 2. Ein Widerspruch! QED

Appendix (Satz von Frobenius)

In diesem Appendix geben wir einen Beweis für den im letzten Abschnitt benutzten Satz von Frobenius.

Lemma. Sei $n = 2g$ gerade und $A = -A'$ eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen in \mathbb{Z} . Dann existiert eine $U \in Gl(n, \mathbb{Z})$, so daß die unimodular transformierte Matrix $B = U'AU$ Blockdiagonalgestalt $B = \text{diag}(D_1, \dots, D_g)$ besitzt

- mit $D_i = \begin{pmatrix} 0 & d_i \\ -d_i & 0 \end{pmatrix}$ und d_i in \mathbb{Z} .

Beweis. Wir beweisen die Existenz einer Blockdiagonalzerlegung durch Induktion nach g . Unter den Einträgen aller $B = U'AU$, $U \in Gl(n, \mathbb{Z})$ bezeichne $d = B_{ij}$ einen Eintrag mit minimaler Anzahl von Primteilern (gezählt mit Vielfachheiten). Durch unimodulare Transformation ist oBdA $B_{ij} = B_{12}$. Für $(x, y) = x'By$ ist $(e_1, \lambda e_2 + \mu e_k) = \lambda B_{12} + \mu B_{1k}$. Ist B_{1k} nicht durch B_{12} teilbar, gibt es teilerfremde $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ für die $\lambda B_{12} + \mu B_{1k}$ weniger Primteiler besitzt als B_{12} . Dies ist aber nicht möglich, da $e_1, \lambda e_2 + \mu e_k, e_3, \dots, \lambda' e_2 + \mu' e_k, e_{k+1}, \dots$ eine Basis von \mathbb{Z}^n ist für geeignete $\lambda', \mu' \in \mathbb{Z}$. Die Minimalität von B_{12} zeigt daher $B_{12} | B_{1k}$ für $k \geq 2$. Wären nicht alle B_{2k} durch B_{21} teilbar, kann man e_1 durch $\lambda e_1 + \mu e_k$ und e_k durch $\lambda' e_1 + \mu' e_k$ ersetzen so, dass $(e_2, \lambda e_1 + \mu e_k)$ weniger Primteiler besitzt als $B_{21} = -B_{12}$. Wie oben wäre dies ein Widerspruch! Wegen

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ -X' & E_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & \beta \\ -\beta' & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & X \\ 0 & E_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_1 X + \beta \\ -(D_1 X + \beta)' & * \end{pmatrix}$$

findet man daher ein $X \in M_{2, n-2}(\mathbb{Z})$ und eine zugehörige unimodulare Block-Dreiecksmatrix U , welches B in eine Block-Diagonalmatrix $\text{diag}(D_1, *)$ transformiert, durch Induktion dann sogar von der Block-Diagonalform $\text{diag}(D_1, \dots, D_g)$

mit

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & d_i \\ -d_i & 0 \end{pmatrix}$$

für $d_1 = d$ und gewisse $d_i \in \mathbb{Z}$ für $i \geq 2$. QED

Wie man leicht sieht ist die Existenz einer unimodular transformierten Matrix $B = U'AU$ in Blockdiagonalgestalt (wie im Lemma) äquivalent zu der Aussage, daß ein $V \in Gl(2g, \mathbb{Z})$ existiert mit $C = V'AV$ in **Frobenius Normalform**

$$C = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D' & 0 \end{pmatrix}$$

mit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_g)$. Die Matrixidentität

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I' & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & IDJ \\ -(IDJ)' & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt dann, daß man D durch IDJ ersetzen kann für beliebige $I, J \in Gl(g, \mathbb{Z})$. Der Elementarteilersatz für ganzzahlige $g \times g$ -Matrizen zeigt daher

Satz von Frobenius. Sei $n = 2g$ gerade und $A = -A'$ eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen in \mathbb{Z} . Dann existiert ein $V \in Gl(n, \mathbb{Z})$ so, daß die transformierte Matrix $C = V'AV$ in Frobenius Normalform vorliegt

$$C = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D' & 0 \end{pmatrix}$$

mit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_g)$ und ganzen Zahlen $d_i \geq 0$ sowie der Teilerbedingung

$$d_1 | d_2 | \dots | d_g .$$

Es verbleibt als Übungsaufgabe zu zeigen, daß d_1, \dots, d_g durch A eindeutig bestimmt sind. Z.B. ist d_1 der ggT(A_{ij}) aller Einträge A_{ij} der Matrix A .

Bemerkung. Ist A nicht unimodular, gilt $d_g > 1$ und für jeden Primteiler $p | d_g$ und den primitiven Vektor $\eta = e_g \in \mathbb{Z}^{2g}$ gilt daher $p | x'A\eta$ für alle $x \in \mathbb{Z}^{2g}$.

Der Siegelsche Halbraum

Sei X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche. Wir wählen eine symplektische Basis $e_1, \dots, e_g, e_{g+1}, \dots, e_{2g}$ von $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ so, daß die Cup-Produkt Matrix $e_i \cap e_j$ bis auf das Vorzeichen gegeben ist in **Frobenius Normalform**

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $\omega_1, \dots, \omega_g$ eine fixierte Basis von $\Omega(X)$.

Basiswechsel Matrix. Die lineare Abbildung (*Periodenabbildung*)

$$\boxed{\Omega(X) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X) = H^1(X, \mathbb{Z}_X) \otimes \mathbb{C}}$$

schreiben wir als $2g \times g$ -Blockmatrix (mit den Blockeinträgen Ω_1, Ω_2) bezüglich der obigen Basen $\omega_i, i = 1, \dots, g$ resp. $e_j, j = 1, \dots, 2g$. Dann gilt

$$\omega_i = i\text{-te Spalte von } \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen Ω_1 und Ω_2 sind hierbei komplexe $g \times g$ -Matrizen mit der Eigenschaft

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{2g} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}_{ji} \cdot e_j.$$

Fakt 1. Daß $\Omega(X) \subset H^1(X, \mathbb{C})$ maximal isotrop ist, ist gleichbedeutend mit

$$(\Omega'_1, \Omega'_2) \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \Omega'_2 \Omega_1 = \Omega'_1 \Omega_2.$$

Fakt 2. Daß $i \cdot \omega_\nu \cap \bar{\omega}_\mu$ eine positiv definite hermitesche Matrix definiert, ist gleichbedeutend mit

$$i \cdot (\Omega'_1, \Omega'_2) \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Omega}_1 \\ \bar{\Omega}_2 \end{pmatrix} > 0 \iff i \cdot (\Omega'_2 \bar{\Omega}_1 - \Omega'_1 \bar{\Omega}_2) > 0.$$

Lemma 14. Es gilt $\det(\Omega_2) \neq 0$.

Beweis. $\Omega_2 v = 0$ impliziert $\overline{\Omega_2} \bar{v} = 0$ und $v' \Omega_2' = 0$. Somit folgt insbesondere $v'(i \cdot [\Omega_2' \overline{\Omega_1} - \Omega_1' \overline{\Omega_2}]) \bar{v} = 0$. Also $v = 0$ (Fakt 2). QED

Ersetzt man die Ω_i für $i = 1, 2$ durch $\Omega_i \Omega_2^{-1}$, folgt

Folgerung 4. Zu der Wahl der symplektischen Gitterbasis von $(H^1(X, \mathbb{Z}_X), \cap)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ von $\Omega(X)$ so daß gilt $\Omega_2 = E$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ E \end{pmatrix}$$

und die Matrix Ω erfüllt dann die beiden Eigenschaften

- **Symmetrie:** $\boxed{\Omega = \Omega'}$ (wegen Fakt 1)
- **Definitheit:** $\boxed{\text{Im}(\Omega) > 0}$ (wegen Fakt 2).

Die Menge der komplexen $g \times g$ -Matrizen Ω mit diesen beiden Eigenschaften ist der **Siegelsche Halbraum \mathbf{H}_g** vom Geschlecht g und es gilt

$$\boxed{\Omega \in \mathbf{H}_g}.$$

Übungsaufgabe. Die symplektische Gruppe $\Gamma_g = \text{Aut}(\bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} \cdot e_i, \cap)$ bzw.

$$\Gamma_g = \{M \in \text{Gl}(2g, \mathbb{Z}) \mid M' J M = J\}$$

operiert auf \mathbf{H}_g via der folgenden Linksoperation

$$\Omega \in \mathbf{H}_g, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g \implies (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1} \in \mathbf{H}_g.$$

Wir verweisen hierzu auf Freitag's Buch über Siegelsche Modulformen [Fr]. Zeige

$$\mathbf{H}_g \cong \left\{ \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \mid \text{mit den Eigenschaften von Fakt 1 und 2} \right\} / \text{Gl}(g, \mathbb{C}).$$

Korollar 17. Der so definierte Periodenpunkt

$$\boxed{\Omega \in \Gamma_g \setminus \mathbf{H}_g, \quad \Gamma_g = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})}$$

der Riemannschen Fläche X ist wohldefiniert, das heisst unabhängig von allen gemachten Basiswahlen.

Beweis. Änderungen der symplektischen \mathbb{Z} -Basen e_1, \dots, e_{2g} und der \mathbb{C} -Basen $\omega_1, \dots, \omega_g$ entsprechen Änderungen der Ω_1, Ω_2 -Matrix von links durch Matrizen in $Sp(2g, \mathbb{Z})$ und rechts in $Gl(g, \mathbb{C})$. Eine Abänderung des Basispunktes x_0 entspricht einer biholomorphen Translation auf dem komplexen Torus $Jac(X)$. QED

Die Abbildung $\alpha : \mathbb{C}^{2g} \rightarrow \mathbb{C}^g$ definiert für $x, y \in \mathbb{Z}^g$ das Periodengitter Λ

$$\alpha : v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2g} \quad \mapsto \quad v' \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ E \end{pmatrix} = -x' + y'\Omega \in \mathbb{C}^g .$$

Korollar 18. *Das Periodengruppe Λ ist $\{x + \Omega y \mid x, y \in \mathbb{Z}^g\}$ und insbesondere gilt*

$$\boxed{Alb(X) = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \Omega \cdot \mathbb{Z}^g)} .$$

Lemma 15. *Die Gitterbasis e_1, \dots, e_{2g} von Γ ist \mathbb{R} -linear unabhängig in \mathbb{C}^g .*

Beweis. Jede reelle Relation $(x_1, x_2)(E, \Omega)' = 0$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^g$ führt auf $x_1 = 0$ und $x_2'\Omega = 0$. Es folgt $x_2'Im(\Omega)x_2 = 0$ und damit $x_2 = 0$ wegen $Im(\Omega) > 0$. QED

Komplexe Tori

Aus dem letzten Lemma folgt: Die Periodengruppe $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$ ist kokompakt und definiert daher ein Gitter in \mathbb{C}^g [Beachte, $\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$ definiert eine \mathbb{R} -Basis von \mathbb{C}^g . Aus $\mathbb{C}^g = \mathbb{R}^g + \Omega\mathbb{R}^g$ als \mathbb{R} -Vektorraum folgt $\mathbb{C}^g/\Lambda \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$ im topologischen Sinn].

Dies hat die folgende Konsequenz:

Die Gruppe Λ operiert durch Translation *eigentlich diskontinuierlich* auf \mathbb{C}^g und der Quotient $Alb(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ ist daher eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Beachte, die durch Addition erklärte Gruppenstruktur $+ : Alb(X) \times Alb(X) \rightarrow Alb(X)$ definiert offensichtlich eine holomorphe Abbildung. Eine zshg. kompakte komplexe Mannigfaltigkeit Y mit einer (kommutativen) holomorphen Gruppenstruktur nennt man einen komplexen Torus. In diesem Sinne ist $Alb(X)$ ein komplexer Torus.

Korollar 16. Die Projektion pr induziert einen biholomorphen Isomorphismus komplexer Tori zwischen der Albanese und der Jacobi Varietät

$$\boxed{Alb(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda \cong \mathbb{C}^g/\Gamma \cong J(X)} .$$

$Alb(X, x_0) \cong J(X)$ hängt bis auf biholomorphe Isomorphie nicht von der Basiswahl $\omega_1, \dots, \omega_g$ von $\Omega(X)$ und bis auf Translation nicht vom Basispunkt x_0 ab.

X^g als auch $Alb(X)$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension g (letzteres folgte aus Lemma 15) und die Abbildung

$$alb_g : X^g \rightarrow Alb(X)$$

ist dann (!) offensichtlich auf Grund ihrer Definition *holomorph*. Aus Korollar 16 und der Surjektivität von cl und β folgt, daß dann auch alb *surjektiv* ist.

Beachte $X \hookrightarrow X^g$ vermöge $x \mapsto (x, x_0, \dots, x_0)$. Die Komposition von alb_g mit dieser Einbettung $X \hookrightarrow X^g$ definiert eine *holomorphe Abbildung*

$$alb : (X, x_0) \rightarrow Alb(X, x_0) .$$

Lemma 16. Für $g \geq 1$ ist diese Abbildung alb *injektiv*

$$alb : X \hookrightarrow Alb(X) .$$

Beweis. Anderfalls gäbe es $x \neq x_0$ mit $alb(x) = alb(x_0) = 0$. Also $\mathcal{O}_X(x - x_0) \cong \mathcal{O}_X$. Es folgt $h^0(X, \mathcal{O}_X(x - x_0)) = 1$. Somit existiert ein $0 \neq f \in M(X)$ mit Nullstelle in x_0 und einfachem Pol bei x . Die zugehörige endliche verzweigte Überlagerung $\pi : X \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ ist vom Grad 1, also biholomorph (siehe Seite 48). Ein Widerspruch! QED

Folgerung. Für $g = 1$ ist alb aus Dimensionsgründen biholomorph (Korollar 8). Es gibt also ein $\Omega \in \mathbb{C}$ mit $Im(\Omega) > 0$ so, daß X eine *elliptische Kurve* ist:

$$\boxed{X \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \Omega \cdot \mathbb{Z})} .$$

Greensche Funktionen

Aus Lemma 14 oder der zugehörigen Folgerung 4 ergibt sich, daß meromorphe Differentialformen η auf eindeutige Weise (!) um holomorphe Formen in $\Omega(X)$ abgeändert werden können so, daß die Perioden

$$\oint_{e_i} \eta$$

für geeignete Repräsentanten der Wege $e_i, i = 1, \dots, e_{2g}$ der *normierten* Form η alle *rein imaginär* sind, d.h. in $i \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ liegen.

Insbesondere kann man die Differentiale ω_{PQ} dritter Gattung so durch Addition einer geeigneten Differentialform in $\Omega(X)$ normieren, daß alle Perioden $\oint_{\gamma} \omega_{PQ}$ rein imaginär sind (γ sei hierbei ein geschlossener stückweise glatter Weg, der nicht durch P und Q geht). In der Tat sind bis auf Perioden in $2\pi i\mathbb{Z}$ durch Umläufe um die Punkte P und Q alle anderen Perioden gegeben durch Summen von ganzzahligen Vielfachen der Integrale $\oint_{\gamma} \omega_{PQ}$ für Repräsentanten der Wegeklassen e_1, \dots, e_{2g} . Wir nehmen daher im folgenden an, die Formen ω_{PQ} seien normiert im obigen Sinn. Dann ist das Integral

$$\zeta_{PQ}(z) = \operatorname{Re} \left(\int_{z_1}^z \omega_{PQ} \right) = \int_{z_1}^z \operatorname{Re}(\omega_{PQ})$$

als Realteil einer lokal holomorphen Funktion eine wohldefinierte globale harmonische C^∞ -Funktion auf $X \setminus \{P, Q\}$, d.h. wird annulliert von dem Operator $d \circ \bar{\partial} = -d \circ \partial$. In der Nähe von P bzw. Q ist diese Funktion bis auf eine harmonische³³ glatte Funktion gegeben durch

$$\operatorname{Re} \left(\int_{z_1}^z \left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z - z_0} \right) \right) = \log(|z|) - \log(|z - z_0|).$$

Durch Multiplikation mit $|\omega(Q)|^2$ und Integration über Q definiert man die harmonische Funktion $G_P(z)$ mit log-Pol bei P . Die Funktion $\zeta_{PQ}(z) - G_P(z) + G_Q(z)$ ist harmonisch auf ganz X und wegen des Maximum-Prinzips daher konstant. Man zeigt dann

$$\zeta_{PQ}(z) = G_P(z) - G_Q(z).$$

³³In lokalen Koordinaten ist $d \circ \bar{\partial}$ gleich $\partial \circ \bar{\partial} = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2)$.

Differenziale zweiter Gattung

Ein meromorphes Differential $\omega \in \Omega^1(X)$ heißt Differential erster Gattung, wenn es auf X holomorph ist. Es heißt **Differential zweiter Gattung**, wenn für alle $x \in X$ gilt $\text{res}_x(\omega) = 0$ (Residuenfreiheit). Differenziale ω , welche höchstens einfache Polstellen besitzen, heißen Differenziale dritter Gattung.

Sei nun für den Rest dieses Abschnitts X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche. Wir erinnern an die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega(X) \rightarrow \Omega_{3rd}(X) \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{C}}(X)^0 \rightarrow 0 .$$

Für jede meromorphe Differentialform η ist die Summe ihrer Residuen Null (der sogenannte Residuensatz). Nach Korollar 13 existiert ein $\omega \in \Omega_{3rd}(X)$ mit denselben Residuen wie η . Die Differenz $\eta - \omega$ ist ein Differential 2. Gattung. Also folgt

$$\Omega_{\mathcal{M}}(X) = \Omega_{3rd}(X) + \Omega_{2nd}(X) \quad , \quad \Omega_{3rd}(X) \cap \Omega_{2nd}(X) = \Omega(X) .$$

Wir werden im nächsten Abschnitt die Existenz von globalen Stammfunktionen zweiter Gattung studieren.

Stammfunktionen

Die Ableitung $\omega = \partial F$ einer meromorphen Funktion F auf X liefert ein Differential 2. Gattung auf X

$$\partial : \mathcal{M}_X(X) \rightarrow \Omega_{2nd}(X) .$$

Umgekehrt besitzt lokal jedes meromorphe Differential 2. Gattung ω eine meromorphe Stammfunktion (benutze die Laurententwicklung in lokalen Koordinaten; $\omega = F'(z) \cdot dz$ und obdA $F = z^n, n \in \mathbb{Z}$ mit $\omega = nz^{n-1} \cdot dz$ für obdA $n \neq 0$). Man erhält daher die beiden folgenden exakten Garbensequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\partial} & \Omega_X & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_X & \longrightarrow & \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{X,2nd} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz der oberen exakten Sequenz liefert

$$0 \rightarrow \Omega(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow 0 .$$

Analog hat man wegen³⁴ $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$ die exakte Sequenz

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\partial} \Omega_{2nd}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X) \longrightarrow 0 .$$

Korollar (Obstruktion). *Das Hindernis für die Existenz einer globalen meromorphen Stammfunktion einer gegebenen Differentialform 2. Gattung liegt in der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathbb{C}_X)$*

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \Omega_{2nd}(X) \text{ mod } \partial\mathcal{M}(X)} .$$

Für jeden glatten Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$ ist für z im Komplement der Polstellenmenge das Integral $\int_{\gamma} \omega$ wohldefiniert und aufgefasst als Funktion von z bis auf Periodenintegrale holomorph (resp. meromorph auf X). Diese Funktionen nennt man Abelsche Integrale.

Beispiel. Für eine elliptische Kurve X definiert durch $y^2 = 4x^3 + ux + v$ mit $u, v \in \mathbb{C}$ gilt $g_X = 1$ sowie

$$\Omega_{2nd}(X) = \mathbb{C} \cdot \frac{dx}{y} + \mathbb{C} \cdot \frac{xdx}{y} + \partial\mathcal{M}(X)$$

mit $\Omega(X) = \mathbb{C} \cdot \frac{dx}{y}$ Für die Weierstraßfunktion $\wp(z)$ mit $x = \wp(z)$ und $y = \wp'(z)$ ist $\frac{dx}{y} = dz$ und $\int_{z_0}^z \frac{dx}{y} \in z - z_0 + \Lambda$. Genauer $\int_0^1 dz = 1$ und $\int_0^{\Omega} dz = \Omega$ (die Wege sind Geraden in \mathbb{C} von 0 nach 1 resp. von 0 nach Ω . Im Quotienten $X = \mathbb{C}/\Lambda$ sind diese Wege geschlossene Wege! Analog ist $\frac{xdx}{y} = \wp(z)dz$ und $\int_{z_0}^z \frac{xdx}{y} = \int_{z_0}^z \wp(z)dz \in -\zeta(z) + \zeta(z_0) + \Pi$ für das Gitter

$$\Pi = - \int_0^1 \zeta(z)dz \cdot \mathbb{Z} - \int_0^{\Omega} \zeta(z)dz \cdot \mathbb{Z} .$$

³⁴Übungsaufgabe: $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$. Hinweis: Jeder Kozykel $f_{ij} \in Z_{\mathcal{U}}^1(X, \mathcal{M}_X)$ hat in $Z_{\mathcal{V}}^1(X, \mathcal{M}_X)$ bezüglich einer geeigneten endlichen Verfeinerung (Schrumpfung!) \mathcal{V} von \mathcal{U} nur endlich viele Pole und liegt daher im Bild von $Z_{\mathcal{V}}^1(X, \mathcal{O}_D)$ für einen geeigneten Divisor $D \geq 0$ vom Grad $\gg 0$. Wegen Serre-Dualität $H^1(X, \mathcal{O}_D) = H^0(X, \Omega \otimes \mathcal{O}_X(-D))$ verschwindet aber $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ für $\text{deg}(D) > \text{deg}(\Omega_X) = 2g - 2$.

Exakte Garbensequenzen

Im Folgenden die Liste der benutzten exakten Garbensequenzen. Für abelsche Gruppen $C \cong B/A$ die Sequenz

$$0 \rightarrow A_X \rightarrow B_X \rightarrow C_X \rightarrow 0$$

und als Spezialfälle

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow (\mathbb{C}/\mathbb{Z})_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die aus dem Poincare Lemma folgenden d -Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow A_X^0 \rightarrow A_{X,closed}^1 \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow A_{X,closed}^1 \rightarrow A_X^1 \rightarrow A_X^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die $\bar{\partial}$ -Sequenzen (Dolbeaut Sequenzen) für lokalfreie \mathcal{O}_X -Modulgarben \mathcal{E}

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow A_X^0(\mathcal{E}) \rightarrow A_X^{0,1}(\mathcal{E}) \rightarrow 0.$$

Die ∂ -Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X \rightarrow 0. \\ 0 &\rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{M}_X \rightarrow \Omega_{X,2nd} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die meromorphen ∂ log-Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \Omega_X \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \mathbb{C}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow \Omega_{X,3rd} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Divisoren-Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow Div_X \rightarrow Div_{X,\mathbb{C}} \rightarrow Div_{X,(\mathbb{C}/\mathbb{Z})} \rightarrow 0. \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow Div_X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Residuen-Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_{3rd,\mathbb{Z}} \rightarrow Div_X \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_{X,3rd} \rightarrow Div_{X,\mathbb{C}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Exponential-Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0.$$

Literatur.

[BF] Busam R.-Freitag E., *Funktionentheorie 1*

[Fo] Forster O., *Riemannsche Flächen*

[F] Freitag E., *Funktionentheorie 2*

[Fr] Freitag E., *Siegelsche Modulfunktionen*

[Go] Godement R., *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*

[Gu] Gunning R.C., *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*