Kompakte Riemannsche Flächen

Rainer Weissauer

Garben

Die Garbenaxiome

Eine **Prägarbe** $\mathcal{G}$ von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X ist eine Vorschrift, welche jeder offenen Menge U von X eine abelsche Gruppe $\mathcal{G}(U)$ zuordnet so, daß für jede Inklusion $V \subset U$ offener Mengen ein Gruppenhomomorphismus

$$r_U^V : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$$

existiert mit den Eigenschaften $r_V^V = id$ und $r_V^W \circ r_U^V = r_U^W$ $(W \subset V \subset U)$. Eine Prägarbe $\mathcal{G}$ auf X nennt man eine **Garbe** auf X, wenn weiterhin die folgenden beiden **Garbenaxiome** G1 und G2 (und G3) erfüllt sind. Diese lauten: Sei $U \subset X$ offen und $U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von U. Dann gilt

(G1) Für $f \in \mathcal{G}(U)$ impliziert $r_U^{U_i}(f) = 0$ für alle $i \in I$ das Verschwinden $f = 0$.

(G2) Gegeben seien $f_i \in \mathcal{G}(U_i)$ für alle $i \in I$ mit $r_{U_i}^{U_i \cap U_j}(f_i) = r_{U_j}^{U_i \cap U_j}(f_j)$. Dann existiert $f \in \mathcal{G}(U)$ mit $r_U^{U_i}(f)) = f_i$ für alle $i \in I$.

Ist $I = \emptyset$, dann folgt $\mathcal{G}(\emptyset) = 0$. Wir nehmen dies der Klarheit halber im folgenden als zusätzliches Axiom (G3) an.

Wir schreiben für $r_U^V(f)$ manchmal auch nur $f|V$ oder $r(f)$ um anzudeuten, daß es sich um verallgemeinerte Einschränkungen handeln sollte.

1.Beispiel. Sei $\mathcal{C}_X(U)$ die abelsche Gruppe der *stetigen komplexwertigen Funktionen* auf U, dann definiert dies eine Garbe $\mathcal{C}_X$ auf X in offensichtlicher Weise.

2.Beispiel. Sei A eine abelsche Gruppe (versehen mit der diskreten Topologie). Sei $A_X(U)$ die Gruppe der lokal konstanten stetigen Abbildungen $f : U \to A$. Dies mit den offensichtlichen Restriktionssabbildungen r_U^V die **konstante Garbe** A_X auf X mit Werten in A.

3.Beispiel. Sei A eine abelsche Gruppe und $x \in X$ ein fester Punkt. Dann definiert die Vorschrift $\mathcal{G}(U) = A$ für $U \ni x$ resp. $\mathcal{G}(U) = 0$ sonst eine Garbe auf X, die **Wolkenkratzergarbe** im Punkt x mit Werten in A.

Sei $\mathcal{G}$ eine (Prä-)Garbe auf X. Sei $x \in X$ ein Punkt. Der **Halm** $\mathcal{G}_x$ der (Prä-)Garbe $\mathcal{G}$ im Punkt x ist eine abelsche Gruppe, definiert als der direkte Limes

$$\mathcal{G}_x = \lim_{\rightarrow} \mathcal{G}(U)$$

über das gerichtete System aller offenen Teilmengen U von X, welche den Punkt x enthalten (siehe Appendix).

Sei $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf X und $U \subseteq X$ eine offenen Teilmenge. Für jeden Punkt $x \in U$ hat man einen natürlichen Homomorphismus $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}_x$. Man sieht leicht

Fakt. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Erfüllt $\mathcal{F}$ die Garbeneigenschaft G1, dann ist die folgende natürliche Abbildung injektiv*

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \ .$$

Beispiel. Für die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X (siehe nächster Abschnitt) ist der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ enthalten im Potenzreihenring $\mathbb{C}[[t]]$ (Identitätssatz!) und $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ ist injektiv (für zusammenhängendes $U \subset X$ mit $x \in U$).

Ein **Garbenhomomorphismus** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ zwischen Garben (abelscher Gruppen) auf X, ist eine Kollektion von Gruppenhomomorphismen $\phi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$, welche die alle folgenden Diagramme kommutativ machen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "r_U^V"'] & \mathcal{H}(U) \arrow[d, "r_U^V"] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{H}(V) \end{tikzcd}$$

für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ von X. Sind alle Morphismen ϕ_U injektiv, nennt man ϕ eine **Garbeninjektion** und $\mathcal{G}$ eine **Untergarbe** von $\mathcal{H}$. Ein Garbenhomomorphism $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ indiziert Gruppenhomorphismen $\phi_x : \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ der Halme für alle $x \in X$.

Sei $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ein Garbenhomomorphismus. Dann definiert

$$Kern(\phi)(U) = Kern\Big(\phi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)\Big)$$

eine Untergarbe von $\mathcal{G}$, den **Kern** von ϕ. Dies benutzt Garbenaxiom (G1) und (G2) für $\mathcal{G}$ und Garbenaxiom (G1) für $\mathcal{H}$!

Definition.*Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

heißt **exakt**, *wenn alle induzierten Halmsequenzen*

$$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0$$

für alle Punkte $x \in X$ exakt sind.

Bemerkung. Die Exaktheit aller Sequenzen $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U) \to 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Exaktheit.

Übungsaufgabe. Definieren die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger eine Garbe?

Appendix (direkte Limiten)

Sei I eine Indexkategorie. D.h., wir nehmen an daß für je zwei Objekte $i, j \in I$ ein geeignetes Objekt $k \in I$ existiert mit Morphismen $i \to k$ und $j \to k$; weiterhin soll für je zwei Morphismen $u, v \in Mor(i, j)$ ein Morphismus $w : j \to k$ existieren mit $w \circ u = w \circ v$. Einen kovarianten Funktor $I \to Ab$ nennt man dann ein gerichtetes System $(A_i, \phi_{i\to j}, i, j \in I, i \to j \in Mor(i, j))$ abelscher Gruppen. Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt kofinal, falls $\forall i \in I$ ein Morphismus $i \to j$ existiert mit $j \in J$.

Sei $A_i, \phi_{i\to j}, i, j \in I$ ein derartiges gerichtetes System. $A_j \ni a_j \sim a_i \in A_i$, falls $\exists k, j \to k, i \to k$ mit $\phi_{i\to k}(a_i) = \phi_{j\to k}(a_j)$, definiert eine Äquivalenzrelation auf $\bigsqcup_{i\in I} A_i$. Weiterhin definiert

$$\lim_{\rightarrow} A_i = \lim_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{i\in I} A_i / \sim$$

den **direkten Limes** des gerichteten Systems.

Bemerkung. Eine Unterkategorie J von I heisst **kofinal**, wenn für jedes $i \in I$ eine $j \in J$ existiert und ein Morphismus $i \to j$. Ist J eine kofinale Unterkategorie von I, dann gilt

$$\lim_{j\in J} A_j \; = \; \lim_{i\in I} A_i \; .$$

Wir bemerken weiterhin

a) $\lim_i A_i$ ist eine abelsche Gruppe.

b) Ist $\psi_i : A_i \to A'_i$ eine kompatibles System von Gruppenhomomorphismen, dann indiziert dies einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \lim_i A_i \to \lim_i A'_i$ der direkten Limiten.

c) Sind alle A_i Ringe, dann ist $\lim_i A_i$ ein Ring. Sind ψ_i wie oben sogar Ringhomorphismen, dann ist der Limes ψ ein Ringhomomorphismus.

d) Der direkte Limes ist ein **exakter Funktor**. Das heißt: Sind $A'_i \to A_i \to A''_i$ kompatible Systeme von exakten Sequenzen abelscher Gruppen. Dann induziert dies eine exakte Sequenz von direkten Limiten

$$\lim_i A'_i \to \lim_i A_i \to \lim_i A''_i \ .$$

Beweis der letzten Aussage d): Gegeben $a \in \lim_i A_i$ – representiert durch ein $a_i \in A_i$ – im Kern. Das heißt, es existiert ein $j \in I$ mit $i \to j$ und $Bild(a_i) = 0$ in A''_j. Alle Objekte i, welche von j ausgehen (d.h. $j \to i$), definieren eine kofinale Teilkategorie J von I. Unter dem mittleren senkrechten Isomorphismus entspricht a der Äquivalenzklasse des Element $a_j := \phi_{i \to j(i)}(a_i)$ in $\lim_{j \in J} A_j$. Das Bild von a_j in A''_j is Null. Daher ist a_j das Bild eines Elementes $a'_j \in A'_j$. Die Äquivalenzklasse a' von a'_j – geliftet auf die obere Zeile – bildet auf a ab.

Die Exaktheit des Limes Funktors folgt daher unmittelbar aus dem folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & a_i/\sim \arrow[r, mapsto] & 0 \\
lim_{i\in I} A'_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & \lim_{i\in I} A_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & \lim_{i\in I} A''_i \arrow[d, equal] \\
lim_{j\in J} A'_j \arrow[r] & \lim_{j\in J} A_j \arrow[r] & \lim_{j\in J} A''_j \\
a'_j \arrow[r, mapsto] & a_j \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

Riemannsche Flächen

Sei X ein zusammenhängender separierter σ-kompakter topologischer Raum. X heißt **Riemannsche Fläche**, wenn eine **holomorphe Struktur** auf X gegeben ist. Eine holomorphe Struktur ist eine Äquivalenzklasse holomorpher Atlanten von X. Ein Atlas ist eine Überdeckung $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ durch eine offene Überdeckung von X, zusammen mit Homöomorphismen (Kartenabbildungen)

$$\phi_i : U_i \cong V_i \subset \mathbb{C} \quad , \quad i \in I$$

auf offene Teilmengen V_i von $\mathbb{C}$, für die alle Kartenwechsel $\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$: $\phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ holomorphe Abbildungen sind.

Es gilt automatisch

$$\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$$

und $\phi_{ii} = id_{V_i}$ für alle $i, j, k \in I$. Die Daten (X, U_i, ϕ_i, I) definieren einen holomorphen Atlas. Zwei Atlanten heißen äquivalent, wenn sie zu einem gemeinsamen holomorphen Atlas "verfeinert"weren können.

Die Riemannsche Zahlenkugel S als Riemannsche Fläche:

$S = S_0 \cup S_\infty$ ist eine offene Überdeckung; Die stereographische Projektion auf die $\mathbb{C}$ von ∞ definiert eine Kartenabbildung $\phi_0 : S_0 \cong \mathbb{C}$. Die entsprechende Projektion auf $\mathbb{C}$ (Tangentialebene bei ∞ von unten betrachtet!) definiert eine Kartenabbildung $\phi_\infty : S_\infty \cong \mathbb{C}$. Es gibt 4 Kartenwechsel. Zwei sind die Identität, die beiden anderen $\phi_{\infty 0}$ und $\phi_{0\infty}$ sind invers zueinander. Der Atlas ist holomorph wegen

Fakt. $\phi_{o\infty}(z) = z^{-1}$.

Beweis. Für $z = re^{i\phi}$ gilt $\phi_{o\infty}(r \cdot e^{i\phi}) = R \cdot e^{i\phi} - R \cdot e^{-i\phi} = z^{-1}$. Denn $R = r^{-1}$. Dies folgt aus dem Satz von Thales und der Orthogonalität der beiden Vektoren $(r, 1)$ und $(R, -1)$; somit $r \cdot R + 1 \cdot (-1) = 0$. QED

Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Funktion

$$f : X \to \mathbb{C}$$

heißt **holomorph**, falls alle Abbildungen

$$f \circ \phi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{C}$$

holomorph sind. Analog definiert man $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen. Ist X eine Riemannsche Fläche, dann erbt jede (zusammenhängende) offene Teilmenge $U \subset X$ die Struktur einer Riemannschen Fläche. Eine Funktion $f : U \to C$ heißt holomorph, wenn sie auf jeder Zusammenhangskomponente holomorph ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die $\mathbb{C}$-Algebra der holomorphen Funktionen auf U. Mit den Einschränkungen als Restriktionsabbildungen definiert dies offensichtlich eine Garbe von Ringen auf X, die **Strukturgarbe** der Riemannschen Fläche. Man hat die Garbeninklusionen

$$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{C}_X^\infty \subset \mathcal{C}_X \ .$$

Lemma. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist jede holomorphe Funktion auf X konstant: $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}_X(X) = \mathbb{C}$.*

Beweis. Jede holomorphe Funktion f auf X ist stetig, nimmt daher ihr Maximum in einem Punkt $x_0 \in X$ an. Aus dem Maximumsprinzip (angewendet auf $f \circ \phi_i^{-1}$ in einer geeigneten Karte V_i) folgt, daß f in einer Umgebung von x_0 konstant ist. Dann ist f aber generell konstant, denn

Lemma. *Sei X eine Riemannsche Fläche, und U eine nichtleere offene Teilmenge von X. Dann gilt $\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U)$.*

Beweis. Sei f holomorph auf X. Dann folgt $f = 0$, wenn $f = 0$ gilt in einer Umgebung von U. X ist (automatisch wegweise) zusammenhängend. Wähle einen stetigen Weg von x zu $x_0 \in U$. Endliche viele Karten überdecken diesen Weg. Man beweist $f(x) = 0$ mittels des Identitätsatzes (in den endlich vielen relevanten Karten V_i). QED

Definition. *Eine stetige Abbildung $g : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen heißt holomorph, wenn für alle offenen Teilmengen $V \subset Y$ und alle $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt $f \circ g \in \mathcal{O}_X(g^{-1}(V))$.*

Offensichtlich ist Holomorphie von $g : X \to Y$ eine lokale Eigenschaft von g auf X. Für eine Überdeckung $X = \bigsqcup_i U_i$ gilt also: g ist holomorph $\Longleftrightarrow$ alle

$g|U_i$ sind holomorph. Außerdem genügt es in der Definition V aus einer offenen Überdeckung zu wählen.

Übungsaufgabe. Definiere analog die Garben $\mathcal{O}_X^*, \mathcal{M}_X, \mathcal{M}_X^*$ und zeige $\mathcal{M}_S(S) = \mathbb{C}(z)$ sowie $\mathcal{M}_S^*(S) = \mathbb{C}(z)^*$. Siehe [BF], Seite 152 ff.

Übungsaufgabe. Jede nichtkonstante meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}^*(X)$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X definiert eine holomorphe Abbildung $f : X \to S$ auf die Riemannsche Zahlenkugel[1]. (Ist X kompakt und zshg., ist diese Abbildung $f : X \to S$ automatisch surjektiv nach Korollar 8).

Exakte Garbensequenzen

Sei X eine Riemannsche Fläche. Sei $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe und $\mathcal{O}_X^*$ die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen auf X. Die Exponentialabbildungen $f(z) \mapsto exp(2\pi i \cdot f(z))$

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X^*(U)$$

definieren die **Exponentialabbildung** als Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$. Der Kern ist offensichtlich die konstante Garbe $\mathbb{Z}_X$.

Satz. *Die zugehörige Garbensequenz*

$$\boxed{0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0}$$

ist exakt.

Beweis. Dies folgt aus dem nächsten Lemma, denn für jede einfach zshg. und zshg. Teilmenge $U \subset X$ mit Kartenabbildung $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$ ist

$$exp(2\pi i.) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X^*(U)$$

surjektiv. Siehe Busam-Freitag. QED

Analog liefert auf Riemannschen Flächen X die holomorphe Ableitung $\partial f(z) = f'(z) \cdot dz$ die exakte Garbensequenz auf X

$$\boxed{0 \to \mathbb{C}_X \to \mathcal{O}_X \to \Omega_X \to 0}\ .$$

[1]Hinweis: Hat f einen Pol bei $x_0 \in X$ und keine wesentliche Singularität, dann ist $\frac{1}{f}$ holomorph in der Nähe von x_0 mit $\frac{1}{f}(x_0) = 0$. D.h. eine Kugel $K_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ wird unter f holomorph nach $V_0 = \mathbb{C}$ abgebildet. Setzt man $f(x_0) = \infty$, dann setzt sich $\phi_{\infty 0} \circ f = \frac{1}{f}$ von $K_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ zu einer holomorphen Abbildung $K_r(x_0) \to V_\infty$ fort für die Kartenmenge $V_\infty = \mathbb{C}$.

Hierbei ist $\Omega_X(U) = \{f(z)dz \mid f \in \mathcal{O}(U)\}$ für $U \subseteq \mathbb{C}$ die Garbe der holomorphen 1-Formen auf X. Die globale Verheftungsvorschrift unterscheidet sich jedoch von derjenigen der Garbe $\mathcal{O}_X$. [Ist U einfach zusammenhängend in einer lokalen Karte, dann besitzt jede Form $\omega \in \Omega(U)$ eine lokale Stammfunktion $g(z) = \int_{z_0}^{z} \omega \in \mathcal{O}(U)$ wegen des Cauchy Integralsatzes. Es gilt $\partial g = \omega$ auf U. Der Kern von ∂ besteht aus den lokalkonstanten $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf U].

Lemma. *Eine Sequenz $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ von Garbenhomomorphismen auf X ist exakt gdw gilt*

(i) $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ *ist exakt für alle offenen $U \subset X$.*

(ii) $\forall U\ \forall h \in \mathcal{H}(U)\ \forall x \in U\ \exists V \subset U, x \in V$ *mit* $r_U^V(h) \in$ *Bild*$(\mathcal{G}(V))$ *(für U,V offen in X)*

Beweis. Eine Richtung ist klar, da Halmbildung als direkter Limes ein exakter Funktor ist. (Insbesondere vertauscht Halmbildung mit Kernbildung, was wir weiter unten benutzen werden). Wir beschränken uns auf die Umkehrung, daß (i) und (ii) aus der Exaktheit der Halmsequenzen folgt. (ii) ist klar wegen der Surjektivität von $\mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ und der Halm-Definition. Nun zum Beweis von (i).

Die Injektivität $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ folgt aus

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, hook] \\ \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \arrow[r, hook] & \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

Analog zeigt man, daß die Zusammensetzung $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$ Null ist. Somit ist

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$$

eine Untergarbe des Kerns $\mathcal{K}$ des Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Da Halm- und Kernbildung vertauschen, induziert die obige Garbeninklusion Halmisomorphismen $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{K}_x$ für alle x. Exaktheit bei $\mathcal{G}$ folgt daher aus dem nächsten

Lemma. *Sei $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{K}$ eine Garbeninklusion mit $\psi_x : \mathcal{F}_x \cong \mathcal{K}_x$ für alle $x \in X$. Dann gilt $\mathcal{F} = \mathcal{K}$.*

Beweis. Sei $k \in \mathcal{K}(U)$. Für alle $x \in U$ existiert $V = V_x$ mit $x \in V \subset U$ und $f_V \in \mathcal{F}(V)$ mit $f_V = r_U^V(h)$ wegen der Halmsurjektivität. Die V_x definieren eine Überdeckung von U. Die Elemente f_V sind durch h (und V) und

$$f_V = r_U^V(h)$$

eindeutig bestimmt. Daher Verkleben sich die f_V mittels Garbenaxiom G2 zu einem Schnitt f von $\mathcal{F}(U)$. Wegen Garbenaxiom G1 gilt dann sogar $f_V = h$ auf ganz U. Es folgt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{K}(U)$. QED

Verheftungskonstruktionen

Wir diskutieren in diesem Abschnitt einige der kohomologischen Grundlagen, die für die Theorie der Riemannschen Flächen und allgemeiner die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten relevant sind.

Cech-Kohomologie

Sei $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ des topologischen Raums X durch offene Teilmengen U_i. Für eine Garbe $\mathcal{G}$ abelscher Gruppen auf X definiert man den **Cech-Komplex**

$$0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to \cdots$$

durch

$$C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{\nu_0, \ldots, \nu_i} \mathcal{G}(U_{\nu_0} \cap \cdots \cap U_{\nu_i})$$

mit den Abbildungen $\partial_i : C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und

$$\partial_0(s)_{ij} = (s_j|_{U_i \cap U_j} - s_i|_{U_i \cap U_j})$$

für $s = (s_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und für $s = (s_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ usw.

$$\partial_1(s)_{ijk} = (s_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} - s_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} + s_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}) .$$

Man nennt $Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = Kern(\partial_i) \subset C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ die i**-Kozykel** und $B^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = Bild(\partial_{i-1})$ die i**-Ränder**. Es gilt $B^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \subseteq Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und per Definition ist die Quotientengruppe dieser abelschen Gruppen

$$H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) \ = \ Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) / B^i(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

die i-te **Cech-Kohomologie** $H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G})$ von $\mathcal{G}$ zur Überdeckung $\mathcal{U}$. Aus den Garbenaxiomen G1 und G2 folgt sofort

$$\boxed{H^0_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) \ \cong \ \mathcal{G}(U)} \ .$$

Kozykelrelationen. $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ wird beschrieben durch Kollektionen (s_{ij}) mit $s_{ij} \in \mathcal{G}(U_i \cap U_j)$ mit der Kozykel-Eigenschaft

$$s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$. Insbesondere folgt daraus $s_{ii} = 0$ für alle $i \in I$ und $s_{ij} = -s_{ji}$ auf $U_i \cap U_j$ für alle $i, j \in I$. Ein 1-Zykel ist ein 1-Rand, wenn auf $U_j \cap U_i$ für alle $i, j \in I$ und geeignete $b_i \in \mathcal{G}(U_i)$ gilt

$$s_{ji} = b_j - b_i \ .$$

Verfeinerungen. Offene Überdeckungen von X definieren eine Kategorie: Objekte sind offene Überdeckungen $\mathcal{U}$ und Morphismen sind **Verfeinerungen** $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Für $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (Überdeckung $\mathcal{U}$) und $X = \bigcup_{i \in J} V_i$ (Überdeckung $\mathcal{V}$) ist eine Verfeinerung $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Abbildung $\phi : J \to I$ in der umgekehrten Richtung mit der Eigenschaft $V_j \subseteq U_{\phi(j)}$ für alle $j \in J$. Der Morphismus φ induziert Abbildungen $\varphi_i : Z^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to Z^i(\mathcal{V}, \mathcal{G})$, welcher Ränder in Ränder überführt. Im Fall $i = 1$ vermöge

$$\varphi_1(s)_{ij} := s_{\phi(i)\phi(j)}|_{V_i \cap V_j} \in \mathcal{G}(V_i \cap V_j) \ ,$$

und analog für $i > 1$. Ist $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, hängt die induzierte Abbildung $H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) \to H^i_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{G})$ nicht ab[2] von der Wahl der Verfeinerungsabbildung $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Indentifiziert man alle Verfeinerungsabbildungen, erhält man eine Indexkategorie. In der Tat: Für Verfeinerungen $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ und $\varphi' : \mathcal{U} \to \mathcal{V}'$ ist $X = \bigcup_{(i,j) \in J \times J'} V_j \cap V'_{j'}$ eine gemeinesame Verfeinerung von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}'$ durch die Projektionen $J \times J' \to J$ und $J \times J' \to J'$. Damit kann die i-te Kohomologie als der *direkte Limes* über alle Verfeinerungen definiert werden

$$H^i(X, \mathcal{G}) \ = \ \lim_{\mathcal{U}} \ H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) \ .$$

Ist X kompakt, dann besitzt jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ für endliches $J \subset I$. Die Inklusion $\phi : J \to I$ definiert eine Verfeinerung. Somit bilden die endlichen Überdeckungen eines kompakten Raumes X ein kofinales System. $H^i(X, \mathcal{G})$ kann daher im kompakten Fall als *Limes über alle endlichen Überdeckungen $\mathcal{U}$ von X berechnet werden.*

Lemma 1. *Für $\mathbb{C}^\infty_X$-Modulgarben $\mathcal{G}$ gilt $H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) = 0$ und damit $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$.*

---

[2]Verfeinerungen $\varphi, \varphi' : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ definieren Homotopien $h_i : C^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{i-1}(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ durch $h_1(s)_i = s_{\phi(i),\phi'(i)}|_{V_i \cap V_i}$ bzw. $h_2(s)_{ij} = s_{\phi(i),\phi'(i),\phi'(j))}|_{V_i \cap V_i \cap V_j} - s_{\phi(i),\phi(j),\phi'(j)}|_{V_i \cap V_j \cap V_j}$ usw. Dann gilt $\partial_{i-1} \circ h_i + h_{i+1} \circ \partial_i = \varphi'_i - \varphi_i$, z.B. für $i = 1$ wegen $\big(s_{\phi(j)\phi'(j)} - s_{\phi(i),\phi'(i)}\big) + \big(s_{\phi'(i)\phi'(j)} - s_{\phi(i)\phi'(j)} + s_{\phi(i)\phi'(i)}\big) - \big(s_{\phi(j)\phi'(j)} - s_{\phi(i)\phi'(j)} + s_{\phi(i)\phi(j)}\big) = s_{\phi'(i),\phi'(j)} - s_{\phi(i),\phi(j)}$.

Beweis. Sei X kompakt (oder parakompakt) und $\sum_k \varphi_k = 1$ eine Partition der Eins für $\mathcal{U}$, d.h. es gilt $supp(\varphi_k) \subset U_{\phi(k)}$ für eine Abbildung $\phi : \{k\} \to I$. Für 1-Kozykel s_{ji} setze $b_i = \sum_k \varphi_k s_{i\phi(k)} \in \mathcal{G}(U_i)$. Beachte φ_k und damit $\varphi_k s_{i\phi(k)}$ kann auf U_i fortgesetzt (!) werden durch Null auf das Komplement $U_i \setminus U_{\phi(k)}$. Dann ist $b_j - b_i = \sum_k \varphi_k(s_{j\phi(k)} - s_{i\phi(k)}) = (\sum_k \varphi_k) \cdot s_{ji} = s_{ji}$ auf $U_j \cap U_i$. Analog zeigt man $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$ für $i > 1$. QED

Proposition 1 (ohne Beweis; siehe [Go], [Gu]) *Eine kurze exakte Garbensequenz* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ *auf einem parakompakten Raum* X *liefert eine lange exakte Kohomologiesequenz*

$$0 \to H^0(X, \mathcal{E}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to$$

$$\to H^1(X, \mathcal{E}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to$$

$$\to H^2(X, \mathcal{E}) \to H^2(X, \mathcal{F} \to H^2(X, \mathcal{G}) \to \textit{usw.}\ .$$

DeRham Kohomologie

Für eine reelle C^∞-Mannigfaltigkeit X sei A^i_X die Garbe der $\mathbb{C}$-wertigen alternierenden i-Formen auf X. D.h. lokal auf Karten ist $A^i_X(U)$ gegeben durch Formen $\sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I$ mit $I \subseteq \{1, \cdots, \dim(X)\}$ und $\#I = i$ sowie $\omega_I(x) \in C^\infty(U)$.

Proposition 2. *Für Riemannsche Flächen gilt* $\boxed{H^i_{dR}(X) \cong H^i(X, \mathbb{C}_X)}$.

Beweis. Für Riemannsche Flächen ist $\dim(X) = 2$. Daher gilt $A^i_X = 0$ für $i > 2$. Das **Poincare Lemma** liefert exakte Garbensequenzen auf X

$$0 \to \mathbb{C}_X \to A^0_X \to Z^1_X \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to Z^1_X \to A^1_X \to A^2_X \to 0$$

für $Z^1_X = Kern(d : A^1_X \to A^2_X)$ definiert durch die Cartan Ableitung d. Sei

$$H^i_{dR}(X) \ := \ \frac{Kern(d : A^i_X(X) \to A^{i+1}_X(X))}{Bild(d : A^{i-1}_X(X) \to A^i_X(X))}\ .$$

Ist X parakompakt (z.B. kompakt) gilt für alle C^∞_X-Modulgarben auf X, somit insbesondere für die Garben A^i_X nach Lemma 1 (bzw. einer Verallgemeinerung [Go], [Gu])

$$(*) \quad \boxed{H^j(X, A^i_X) = 0} \quad , \quad \forall j \geq 1\ .$$

1) OBdA sei X zusammenhängend. Dann sieht man durch direkte Inspektion $H^0(X, \mathbb{C}_X) = \mathbb{C} = H^0_{dR}(X)$. 2) Wegen $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \to Z^1_X(X) \twoheadrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X)$ und $H^1(X, A^0_X) = 0$ induziert der $\delta : Z^1_X(X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X)$ einen Isomorphismus

$$\overline{\delta}: \ H^1_{dR}(X) = \frac{Kern(d : A^1_X(X) \to A^2_X(X))}{Bild(d : A^0_X(X) \to A^1_X(X))} \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)\ .$$

3) Lemma 1 in der scharfen Form $(*)$ zeigt analog $H^i(X, \mathbb{C}_X) \cong 0$ für $i \geq 3$ und

$$H^2_{dR}(X) = H^1(X, Z^1_X) \cong A^2(X)/Bild(d : A^1_X(X) \to A^2_X(X)) \cong H^2(X, \mathbb{C}_X)\ .$$

Bemerkung. Analog zeigt man $H^i_{dR}(X) \cong H^i(X, \mathbb{C}_X)$ (für alle i) allgemein für (para)kompakte C^∞-Mannigfaltigkeiten X. Die Vergleichsisomorphismen sind funktoriell bezüglich C^∞-Abbildungen $f : X \to Y$ solcher Mannigfaltigkeiten.

Ist X kompakt, liefert Integration über X eine Abbildung $\int_X : A^{\dim(X)}(X) \to \mathbb{C}$. Diese verschwindet nach Stokes auf den Formen in $dA^{\dim(X)-1}(X)$, induziert also eine surjektive $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\int_X : \ H^{\dim(X)}_{dR}(X) \to \mathbb{C}$.

Beispiel. Sei X der Kreisring $S^1 \subset \mathbb{C}^*$. Dann gilt $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{C}$ und dieser Isomorphismus wird induziert von $\int_{S^1} : H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{C}$. [Parametrisiert man S^1 durch $[0,1] \ni t \mapsto exp(2pit)$, entspricht $\omega \in A^1(S^1)$ einer Form $g(t)dt$ mit $g(t) = g(t+1)$. Sei $G(t)$ eine Stammfunktion; diese erfüllt $G(t) = G(t+1)$ genau dann wenn gilt $\int_{S^1} \omega = 0$]. Die Cech-Kohomologie $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1})$ berechnet man wie folgt. Überdecke S^1 durch überlappende Sektoren U_i der Winkelbreite $4\pi/n$ um die $n-ten$ Einheitswurzeln ζ^i. Für wachsendes n liefert dies ein kofinales System von Überdeckungen $\mathcal{U}_n$. Es gilt $U_i \cap U_j = \emptyset \Leftrightarrow \zeta^i/\zeta^j \neq \zeta, 1, \zeta^{-1}$. Jeder Chech 1-Kozykel (f_ij) entspricht daher einem Tupel von n Zahlen $f_{12}, ..., f_{n1} \in \mathbb{Z}$. Zwei solche Tupel unterscheiden sich um einen Rand genau dann wenn die Summe $f_{12} + \cdots + f_{n1} \in \mathbb{Z}$ übereinstimmt. Diese Summenabbildungen definieren einen Isomorphismus $H^1_{\mathcal{U}}(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \cong \mathbb{Z}$ und diese sind kompatibel für alle n. Es folgt $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \cong \mathbb{Z}$. Dasselbe gilt analog für $H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1})$, also $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \subset H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1})$. Vergleich: Der Pullback $\omega \in A^1(S^1)$ der geschlossenen Form $\frac{dz}{2\pi iz} \in A^1(\mathbb{C}^*)$ auf S^1 entspricht der Form dt auf $[0,1]$. Es gilt $\int_{S^1} \omega = 1$. Der 1-Kozykel $\delta(\omega)$ in $Z^1(\mathcal{U}_n, \mathbb{C})$ wird gegeben durch die Differenzen von Stammfunktionen auf den $U_i, i = 1, ..., n$. Wählt man t als Stammfunktion von dt auf allen n Karten, ist diese Differenz $0, ..., 0, 1$. Es folgt

Folgerung 1. *Für $[\omega] \in H^1_{dR}(S^1)$ ist das Bild $\overline{\delta}([\omega]) \in H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1})$ genau dann in $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1})$, wenn $\int_{S^1} \omega \in \mathbb{Z}$ gilt.*

Die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathbb{C}_X)$

Sei C eine abelsche Gruppe (aufgefasst als diskreter topologischer Raum). Eine Mannigfaltigkeit X mit einer glatten Operation $C \times X \to X$ heisst C-**Raum**, wenn C **frei**[3] auf X operiert, geschrieben als $(c, x) \mapsto c \cdot x$. Sei $p : X \to Y$ die Projektion auf den Quotient $Y = X/C$. Ein C-Morphismus $f : X \to X'$ zwischen C-Räumen ist eine glatte äquivariante Abbildung $f : X \to X'$, d.h. es gilt $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$. Diese induziert eine glatte Abbildung $X/C \to X'/C$ der Quotienten. Ein C-Raum heisst **trivial**, wenn er als C-Raum isomorph ist zu $X' = C \times Y$ mit Operation $c \cdot (c', y) = (c + c', y)$. Die Gruppe der C-Isomorphismen des trivialen C-Raums X', welche auf dem Quotient Y die Idententität induzieren, werden beschrieben durch die Abbildungen $f_c(c', y) = c(y) \cdot (c', y)$ für lokalkonstante Funktionen $c : Y \to C$. Ist Y zusammenhängend, ist diese Gruppe isomorph zu C.

Sei X ein C-Raum. Wegen der freien Operation von C gibt es eine Überdeckung von $Y = X/C$ durch zusammenhängende offene Mengen U_i, für die $C \times U_i$ als C-Raum trivial ist. D.h. es gibt C-Isomorphismen $\psi_i : p^{-1}(U_i) \cong A \times U_i$. Für jeden Durchschnitt $U_j \cap U_i$ sei $\psi_{ji} = A \times (U_j \cap U_i) \to A \times (U_j \cap U_i)$ definiert durch $\psi_{ji} = \psi_j^{-1} \circ \psi_i$ für die Einschränkungen von ψ_j, ψ_i auf den Durchschnitt. Dann gilt notwendiger Weise $\psi_{ji}(c', x) = (c_{ji} + c', x)$ für gewisse $c_{ji} \in C$. Aus der Definition der ψ_{ji} folgt sofort die Kozykelrelationen $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$. Die (c_{ij}) definieren daher einen Cech-Kozykel in $Z^1(\mathcal{U}, C_Y)$ für die Garbe C_Y der lokalkonstanten Funktionen auf Y mit Werten in C. Eine andere Wahl der Isomorphismen ψ verändert diesen Kozykel um einen Korand. Die Klasse in $H^1_{\mathcal{U}}(Y, C_Y)$ hängt daher nur vom C-Raum X ab, und dieser kann umgekehrt bis auf C-Raumisomorphie aus dem 1-Kozykel (bzw. dessen Kohomologieklasse) rekonstruiert werden[4]. *Die Isomorphieklassen von C-Räumen mit Quotient Y entsprechen daher den Elementen der Kohomologiegruppe $H^1(Y, C_Y)$, und die Klasse des trivialen C-Raums entspricht dem Nullelement.*

---

[3] Für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung U_x von x mit $\gamma(U_x) \cap U_x \neq \emptyset \Longrightarrow \gamma = 1$.

[4] $Y = (\biguplus U_i)/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $u_i \sim u_j$ gdw u_i und u_j denselben Punkt in U_{ij} definieren. Analog $X = (\biguplus C \times U_i)/\sim$ mit $(c, u_i) \sim (c', u_j)$ genau dann wenn u_i und u_j denselben Punkt $u \in U_{ij}$ definieren und wenn gilt $c' = c + c_{ij}(u)$. Die Kozykelrelationen zeigen, daß dies eine Äquivalenzrelation definiert.

Jede Klasse ξ in $H^1(Y,C)$ definiert also einen C-Raum X und eine **unverzweigte** Quotientenabbildung $p : X \to Y$. Ist Y zusammenhängend, so folgt aus dem bekannten Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und universeller Überlagerung, daß ein C-Raum X mit Quotient $p : X \to Y$ trivial ist genau dann, wenn jeder (glatte) geschlossene Weg $\gamma : S^1 \to Y$ sich zu einem geschlossenen Weg in X liften lässt. Wie man leicht sieht, ist dies genau dann der Fall, wenn $\gamma^*(\xi) \in H^1(S^1, C_{S^1})$ trival ist.

Folgerung 2. *Es gilt* $\xi = 0$ *genau dann wenn gilt* $\gamma^*(\xi) = 0$ *für alle* $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$.

Jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ abelscher Gruppen definiert eine exakte Garbensequenz $0 \to A_X \to B_X \to C_X \to 0$. Da $B_X(X) = C_X(X)$ surjetiv ist, folgt die Exaktheit von $0 \to H^1(X, A_X) \to H^1(X, B_X) \to H^1(X, C_X)$ eine Klasse von $H^1(X, B_X)$ liegt daher in $H^1(X, A_X)$ genau dann wenn ihr Bild in $H^1(X, C_X)$ verschwindet. Es folgt: $\xi \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$ liegt in $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ genau dann wenn gilt $\gamma^*(\xi) \in H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1})$ für alle geschlossenen glatten Wege γ in X. Zusammen mit Folgerung 1 ergibt dies

Lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Garben

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X$ die Stukturgarbe der holomorphen Funktionen einer komplexen Mannigfaltigkeit X. Für $\mathcal{O}_X$-lineare Garbenhomomorphismen $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ist die Quotientengarbe[5] $Kokern(\varphi)$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe nennt man eine **lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe** (oder auch ein Vektorbündel) vom Rang r auf X, wenn es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X gibt so daß die Einschränkungen von $\mathcal{F}$ auf die Teilmengen $U_i \in \mathcal{U}$ der Überdeckung als $\mathcal{O}_X$-Modulgarben isomorph sind zur direkten Summe $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_{U_i}$. Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{E}$ hat man $\mathcal{O}_{U_i}$-Isomorphismen

$$\psi_i^{\mathcal{E}} : \mathcal{E}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^r \ .$$

Dies liefert $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$-lineare **Übergangsisomorphismen**

$$a_{ji}^{\mathcal{E}} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^r \cong \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^r$$

[5] Man definiert $Kokern(\varphi)(U)$ als die Garbe aller Funktionen $f : U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x / \varphi_x(\mathcal{G}_x)$ mit der folgenden lokalen Eigenschaft: Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung V (abhängig von f) so dass die Komponente f_y im Produkt für alle $y \in V$ als Restklasse eines globalen Schnitts von $\mathcal{F}(V)$ im Halmquotient $\mathcal{F}_y \to \mathcal{F}_y / \varphi_y(\mathcal{G}_y)$ representiert wird.

auf $U_i \cap U_j$ durch $a^{\mathcal{E}}_{ji} = \psi^{\mathcal{E}}_j|_{U_i \cap j} \circ \psi^{\mathcal{E}}_i|^{-1}_{U_i \cap j}$. Offensichtlich gilt

$$a^{\mathcal{E}}_{ji} \circ a^{\mathcal{E}}_{ik} = a^{\mathcal{E}}_{jk}$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ sowie $a^{\mathcal{E}}_{ii} = id$ auf U_i. Gelten diese Bedingungen, sagt man die $a^{\mathcal{E}}_{ji}$ definieren einen 1-Kozykel $a^{\mathcal{E}}_{ji} \in Z^1(\mathcal{U}, Gl(n, \mathcal{O}(U_j \cap U_i)))$. Wähle man andere $\mathcal{O}$-lineare Isomorphismen anstatt $\psi^{\mathcal{E}}$, so sind diese von der Gestalt $b_i \circ \psi^{\mathcal{E}}_i$ für gewisse $b_i \in Gl(n, \mathcal{O}(U_i))$. Dies ändert die $a^{\mathcal{E}}_{ji}$ ab in $b_j|_{U_i \cap j} \circ a^{\mathcal{F}}_{ji} \circ b_i|^{-1}_{U_i \cap j}$.

Die O_X-Modulgarbe $\mathcal{E}$ kann man (bis auf Isomorphie) rekonstruieren aus den 1-Kozyklen $a^{\mathcal{E}}_{ji} \in Z^1(\mathcal{U}, Gl(n, \mathcal{O}(U_j \cap U_i)))$. Setzt man $\tilde{\mathcal{E}}(U) = \{\tilde{s}_i \in \mathcal{O}(U_i)^r | \tilde{s}_j = a^{\mathcal{E}}_{ji}(\tilde{s}_i)\}$, definiert dies eine zu $\mathcal{E}$ isomorphe $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\tilde{\mathcal{E}}$. Der Isomorphismus $\mathcal{E} \cong \tilde{\mathcal{E}}$ wird gegeben durch die Abbildung, die $\mathcal{E}(U) \ni s = (s_i)$, $s_i \in \mathcal{E}(U \cap U_i)$ auf $\tilde{\mathcal{E}}(U) \ni \tilde{s} = (\tilde{s}_i) \in \mathcal{O}(U \cap U_i)$ abbildet vermöge $\tilde{s}_i = \psi_i(s_i)$.

Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ vom Rang n resp m definiert man die lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ vom Rang $n \cdot m$ durch die Übergangsmatrizen $a^{\mathcal{E}}_{ji} \otimes a^{\mathcal{F}}_{ji}$ (Kronecker-Produkt der Matrizen). Hierzu muss man gegebenfalls vorher zu einer Verfeinerung der Überdeckung übergehen, die $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ trivialisiert. Analog definiert man $det(\mathcal{E})$ und $\mathcal{E}^\vee$ als die lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Modulgarben vom Rang 1 resp. n, die durch die Übergangsmatrizen $\det(a^{\mathcal{E}}_{ji})$ resp $(a^{\mathcal{E}}_{ji})^{-t}$ gegeben sind. Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{L}$ vom Rang 1 gilt $\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$. Die Menge der Isomorphieklassen $Pic(X)$ der lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{L}$ vom Rang 1 auf X (**Geradenbündel**) erhält somit durch das Tensorprodukt $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ eine Gruppenstruktur[6].

Folgerung 3. *Für $[\omega] \in H^1_{dR}(X)$ liegt $\overline{\delta}([\omega]) \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$ genau dann in $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, wenn $\int_{S^1} \gamma^*(\omega) \in \mathbb{Z}$ gilt für jeden glatten geschlossenen Weg $\gamma \colon S^1 \to X$.*

[6] Angenommen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ werden trivialisiert durch $\mathcal{U}$, dann sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ isomorph als $\mathcal{O}_X$-Modulgarben genau dann wenn $a^{\mathcal{E}}_{ji} = b_j|_{U_i \cap j} \circ a^{\mathcal{F}}_{ji} \circ b_i|^{-1}_{U_i \cap j}$ gilt für geeignete $b_i \in Gl(r, \mathcal{O}(U_i))$. Man zeigt damit leicht: Die Gruppe $Pic(X)$ der Isomorphieklassen von lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Garben vom Rang 1 auf X ist isomorph zur Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$.

Der Endlichkeitssatz

Wir zeigen wie in [Fo], daß für eine lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X die erste Cech-Kohomologie $H^1(X, \mathcal{F})$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Ist $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe, folgt aus diesem Endlichkeitssatz die Existenz nichttrivialer meromorpher Funktionen auf X und allgemeiner der Satz von Riemann-Roch.

Hilberträume holomorpher Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Für holomorphe Funktionen f auf D definiert man $\|f\|_{L^2(D,\mathcal{O})}$ als Wert in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ durch

$$\|f\|^2_{L^2(D,\mathcal{O})} = \int_D |f(z)|^2 dxdy \ .$$

f heisst **quadratintegrierbar** im Fall $\|f\|_{L^2(D)} < \infty$. Der Raum $L^2(D, \mathcal{O})$ aller quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen auf D ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem hermiteschen positiv definiten Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_D f(z)\overline{g(z)} dxdy \ .$$

Dieses ist wohldefiniert wegen $|fg| \leq (|f|^2 + |g|^2)/2$, und es gilt $\langle f, g\rangle \leq \|f\|\|g\|$ wie man leicht zeigt. Ist D beschränkt, dann ist $vol(D) = \int_D dxdy$ endlich. Ist $vol(D)$ endlich, gilt $\|f\|^2_{L^2(D,\mathcal{O})} \leq vol(D) \cdot sup_{z\in D}|f(z)|^2$.

Lemma 2. *$L^2(D, \mathcal{O})$ ist Cauchy-vollständig, d.h. $L^2(D, \mathcal{O})$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Sei $B = B_r(z_0)$ einen offene Kugel vom Radius r in D. Man zeigt für $f_n(z) = (z - z_0)^n$ die Orthogonalität $\langle f_n, f_m\rangle = 0$ für $n \neq m$ sowie $\|f_n\|_{L^2(B)} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \cdot r^{n+1}$ (Polarkoordinaten). Für Taylorreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ gilt

$$\|f\|^2_{L^2(B)} = \pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \cdot r^{2n+2} \ .$$

Insbesondere gilt daher wegen $a_0 = f(z_0)$

$$\pi r^2 \cdot |f(z_0)|^2 \ \leq \ \|f\|^2_{L^2(B)} \ \leq \ \|f\|^2_{L^2(D)} \ .$$

Somit ist jede Cauchyfolge f_ν in $L^2(D,\mathcal{O})$ lokal gleichmässig konvergent auf D, und damit konvergieren die Funktionen $f_\nu(z)$ lokal gleichmässig (auf der abgeschlossen Kugel um z_0 vom Radius $r/2$) gegen eine holomorphe Grenzfunktion $f(z)$ auf D. QED

Eine offene Teilmenge $D' \subset D$ heisst **Schrumpfung** (Notation: $D' \ll D$), wenn $D' \subset K \subset D$ gilt für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$.

Lokales Schrumpfungslemma. *Sei $D' \ll D$ eine Schrumpfung und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein abgeschlossener $\mathbb{C}$-Unterraum $A \subseteq L^2(D,\mathcal{O})$ endlicher Kodimension mit der Eigenschaft: Für alle $f \in A$ gilt*

$$\|f\|_{L^2(D',\mathcal{O})} \;\leq\; \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D,\mathcal{O})} \;.$$

Beweis. Es gibt offensichtlich ein $r > 0$ so daß D' sich überdecken lässt durch endlich viele offene Kugeln $B_{r/2}(z_\nu)$ für die alle vergrösserten Kugeln $B_r(z_\nu)$ noch in D liegen. Der Unterraum A aller $f \in L^2(D,\mathcal{O})$ mit der Eigenschaft

$$f(z_\nu) = \cdots = f^{(n-1)}(z_\nu) = 0 \qquad \forall \nu$$

hat endliche Kodimension, nämlich $\leq n \cdot \#\{z_\nu\}$. Aus

$$\|f\|^2_{L^2(B_{\frac{r}{2}}(z_\nu),\mathcal{O})} = \sum_{j=n}^\infty \frac{\pi |a_j|^2}{j+1} \cdot (\frac{r}{2})^{2j+2} \leq 2^{-2n} \sum_{j=n}^\infty \frac{\pi |a_j|^2}{j+1} \cdot r^{2j+2} \leq 2^{-2n} \|f\|^2_{L^2(B_r(z_\nu),\mathcal{O})}$$

folgt $\|f\|_{L^2(B_{\frac{r}{2}}(z_\nu),\mathcal{O})} \leq 2^{-n} \|f\|_{L^2(B_r(z_\nu),\mathcal{O})}$ und damit die Behauptung

$$\|f\|_{L^2(D',\mathcal{O})} \leq \sum_\nu \|f\|_{L^2(B_{\frac{r}{2}}(z_\nu),\mathcal{O})} \leq \#\{z_\nu\} 2^{-n} \cdot \max_\nu \|f\|_{L^2(B_r(z_\nu),\mathcal{O})} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{L^2(D,\mathcal{O})}$$

falls n so gross gewählt wird, so daß $\#\{z_\nu\} \cdot 2^{-n} < \varepsilon$. QED

Schrumpfen von Überdeckungen

Sei $\mathcal{U}$ eine *endliche* Überdeckung einer Riemannschen Fläche X durch offene Kartenmengen $U_1, .., U_n$ mit in $\mathbb{C}$ *beschränkten* Bildmengen $V_i \subset \mathbb{C}$ bezüglich der Kartenabbildungen $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$. Wir nennen solche Überdeckungen *gute* Überdeckungen. Für eine gute Überdeckung und $f = (f_i) \in C^0_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{O})$ definiert man

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(U_i,\mathcal{O})} \, .$$

Hierbei sei $\|f_i\|^2_{L^2(U_i,\mathcal{O})} := \|f_i \circ \phi_i^{-1}\|^2_{L^2(V_i,\mathcal{O})}$. Analog für $\eta = (f_{ij}) \in C^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{O})$

$$\|\eta\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|f_{ij}\|^2_{L^2(U_i \cap U_j,\mathcal{O})} \, .$$

Die so definierten Normen $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{U}}$ resp. $\|\eta\| = \|\eta\|_{\mathcal{U}}$ definieren wie im lokalen Fall Hilberträume $C^i_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Die Unterräume der quadratintegrierbaren Kozykel $Z^i_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ sind abgeschlossen, und damit selbst Hilberträume. Wir fixieren ein für alle mal eine solche Überdeckung $\mathcal{U}$ und nennen sie $\mathcal{U}_0$, wobei wir hier *zusätzlich annehmen, die offenen Mengen der Überdeckung $\mathcal{U}_0$ seien alle biholomorph äquivalent zum Einheitskreis*!

Definition. Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ gute Überdeckungen von X mit den oben geforderten Eigenschaften. Man nennt $\mathcal{V}$ eine **Schrumpfung** von $\mathcal{U}$, wenn $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist mit der Eigenschaft $V_j \ll U_{\phi(j)}$ für alle j. Wir schreiben dann $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$. Das lokale Schrumpfungslemma gibt sofort

Schrumpfungslemma. *Für eine Schrumpfung $\mathcal{V} \ll \mathcal{U}$ guter Überdeckungen und eine Konstante $\varepsilon > 0$ existiert ein abgeschlossener Unterraum $A \subset Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ endlicher Kodimension mit $\|f\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon \cdot \|f\|_{\mathcal{U}}$ für alle $f \in A$.*

Komplizierter ist der Beweis des folgenden Resultates (sei $\mathcal{U}_0$ fixiert wie oben).

Schlüssellemma. *Gegeben seien Schrumpfungen $\mathcal{W} \ll \mathcal{V} \ll \mathcal{U} \ll \mathcal{U}_0$ von guten Überdeckungen $\mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{U}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ so dass gilt: Für $\xi \in Z^1_{(2)}(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ existieren $\zeta \in Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ und $\eta \in C^0_{(2)}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ mit*

- $max(\|\zeta\|_{\mathcal{U}}, \|\eta\|_{\mathcal{W}}) \leq C \cdot \|\xi\|_{\mathcal{V}}$
- *Es gilt $\zeta = \xi + \delta\eta$ nach Einschränken auf $\mathcal{W}$.*

Zusatz. *Es existiert ein endlich dimensionaler Unterraum $S \subset Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, so daß jedes $\zeta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ sich nach nach Einschränken auf $\mathcal{W}$ schreibt in der Form*

$$\sigma = \zeta + \delta(\eta) \quad , \quad \sigma \in S \, .$$

Wir betrachten jetzt Schrumpfungen $\mathcal{U} \ll \mathcal{U}_0$ unserer festen Überdeckung $\mathcal{U}_0$. Dadurch wird der Zusatz des Schlüssellemmas anwendbar und zeigt, daß die Abbildung

$$H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{O}) \to H^1_{\mathcal{W}}(X, \mathcal{O})$$

ein Bild der Dimension $\leq dim_{\mathbb{C}}(S)$ besitzt, falls $\mathcal{W}$ fein genug gewählt wurde, d.h wenn $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ die Voraussetzungen des letzten Lemmas erfüllen. (Dies ist aber im Limes über alle Verfeinerungen keine echte Einschränkung). Aus dem ersten Teil des Schlüssellemmas folgt anderseits, daß die Verfeinerungsabbildung

$$H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{O}_X) \twoheadrightarrow H^1_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{O}_X)$$

unter den dort gemachten Voraussetzungen surjektiv ist. Hält man $\mathcal{U}$ (mit den im Schlüssellemma gemachten Voraussetzung fest) folgt daher im Limes über alle $\mathcal{V}$ (für $\mathcal{V}$ wie im Schlüssellemma; diese definieren ein cofinales System von Überdeckungen von X)

$$\boxed{H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{O}_X) \twoheadrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)}\ .$$

Zusammen mit der obigen Aussage folgt

Korollar. $g_X := dim_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{O})) \leq dim_{\mathbb{C}}(S) < \infty$ *(Geschlecht von X).*

Aus dem Beweis des Schlüssellemmas ergibt sich, daß ausser der Kompaktheit von X bis auf eine zu modifizierende Stelle im Beweis (Schritt 2) nur lokale Eigenschaften eine Rolle spielen. Daher zeigt dasselbe Argument die folgende Verallgemeinerung des Endlichkeitssatzes

Endlichkeitssatz. *Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{F}$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X gilt $dim_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{F})) < \infty$.*

Korollar 1. *Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{F}$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Rang r gibt es einen Divisor mit $H^0(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$.*

Wendet man dies auf die Sequenz (mit einer Wolkenkratzergarbe δ_D)

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}(D) \to \delta_D \to 0$$

an für $D = P_1 + \cdots + P_k$, folgt $\dim(\mathcal{F}(D)(X)) > 0$ aus

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(D)(X) \to \mathbb{C}^{r \cdot k} \to H^1(X, \mathcal{F})$$

für genügend grosses r. Man erhält

Korollar 2. *Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{F}$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche gibt es einen positiven Divisor mit $H^0(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$.*

Korollar 3. *Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{F}$ vom Rang r auf einer kompakten Riemannschen Fläche gibt es einen Divisor D und eine exakte Sequenz lokalfreier $\mathcal{O}_X$-Garben auf X*

$$0 \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to 0$$

mit einer lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{E}$ auf X vom Rang $r-1$.

Beweis. Sei $\varphi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(D)$ definiert durch einen nichttrivialen Schnitt s in $H^0(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D))$ durch $\varphi(f) = f \cdot s$ (Korollar 2). φ ist automatisch injektiv! Lokal bei $P \in X$ sei $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_U^r$. In $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_U$ sei lokal bei P das Bild von s gleich $(s_1(x), ..., s_r(x))$ (oBdA in einer Karte) und $m_P = min\{ord_P(s_i) | i = 1, ..., r\}$. Für $\tilde{D} = \sum_{P \in X} m_P \cdot P$ erweitert sich φ zu einer Injektion $\psi : \mathcal{O}_X(\tilde{D} - D) \to \mathcal{F}$, deren Quotient lokalfrei vom Rang $r-1$ ist. [Ist $m_P = ord_P(s_i)$, dann gilt $\mathcal{F}|_U \cong \bigoplus_{j=1^r} \mathcal{O}_U = Bild(\mathcal{O}_U(\tilde{D} - D)) \oplus \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{O}_U$].

Korollar 4. *Für eine kompakte Riemannschen Fläche X und jede lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{L}$ vom Rang 1 auf X gibt es einen Divisor D auf X mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.*

Für kompakte Riemannsche Flächen folgt

$$\boxed{Cl(X) \cong Pic(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)} \,.$$

$Pic(X)$ ist die Gruppe der Isomorphieklassen lokalfreier $\mathcal{O}_X$-Garben $\mathcal{L}$ (mit dem Tensorprodukt $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ als Multiplikation). Also gilt $Pic(X) = H^1(X, Gl(1, \mathcal{O}_X)) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Jedes solche $\mathcal{L}$ ist nach Korollar 4 isomorph zu einem $\mathcal{O}_X(D)$ als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, und es gilt $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(\tilde{D})$ als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe gdw $\varphi : \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X(\tilde{D} - D)$ gilt als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Der Schnitt $f = \varphi(1)$ ist dann eine meromorphe Funktion auf X mit Hauptdivisor $(f) = \tilde{D} - D$. Somit ist $Pic(X)$ isomorph zur Gruppe $Cl(X)$ aller Divisoren auf X modulo der Untergruppe aller Hauptdivisoren (Divisoren von meromorphen Funktionen) auf X

$$Cl(X) \;=\; Div(X)/(M(X)^*) \,.$$

Der Grad einer lokalfreien Garbe. Da Hauptdivisoren den Grad Null haben, ist der Grad $deg(\mathcal{L})$ einer lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Garbe $\mathcal{L}$ vom Rang 1 auf X wohldefiniert als Grad $deg(D)$ eines beliebigen Divisors D auf X mit $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$.

Für eine lokalfreie Garbe $\mathcal{E}$ vom Rang r auf X [gegeben durch Cech-Kozykel $(a_{ji}^{\mathcal{E}})$ in $Z^1(\mathcal{U}, Gl(r, \mathcal{O}))$, d.h. mit $a_{ji}^{\mathcal{E}}$ in $Gl(r, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$] definiert man die lokalfreie Garbe $\det \mathcal{E}$ vom Rang 1 auf X durch die Cech-Kozykel $(\det(a_{ji}^{\mathcal{E}}))$ in $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ und man setzt

$$deg(\mathcal{E}) \ := \ deg(\det \mathcal{E}) \ .$$

Beachte, $\det(\mathcal{E}) \cong \det \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \det \mathcal{E}_2$ im Fall einer exakten $\mathcal{O}_X$-linearen Sequenz $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$ von lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Garben. Es folgt in diesem Fall

$$deg(\mathcal{E}) = deg(\mathcal{E}_1) + deg(\mathcal{E}_2) \ .$$

Satz von Riemann-Roch. *Für eine lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{E}$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Rang r gilt $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ für $i \neq 0, 1$ sowie*

$$\boxed{\chi(X, \mathcal{E}) \ := \ \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{E}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{E}) \ = \ r \cdot (1 - g_X) + deg(\mathcal{E})} \ .$$

Beweis. Für kurze exakte Garbensequenzen lokalfreier $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$$

wurde $rang(\mathcal{E}) = rang(\mathcal{E}_1) + rang(\mathcal{E}_2)$ und $deg(\mathcal{E}) = deg(\mathcal{E}_1) + deg(\mathcal{E}_2)$ gezeigt. Mit Hilfe von Korollar 3 führt man damit den Beweis zurück auf den Fall $r = 1$ indem man zeigt $\chi(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E}_1) + \chi(\mathcal{E}_2)$. Im Fall $r = 1$ gilt $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X(D)$ für einen Divisor $D = \sum_{i=1}^k P_i - \sum_{j=1}^\ell Q_j$ für Punkte P_i, Q_j in X nach Korollar 4. Nun führt man den Beweis durch Induktion[7] nach $k + \ell$ mit Hilfe von exakten Sequenzen vom Typ

$$0 \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_X(D + P) \to \delta_P \to 0 \ .$$

Der Fall $P^1(\mathbb{C})$. Man zeigt leicht $Cl(P^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$. Also ist jedes $\mathcal{L} \in Pic(P^1(\mathbb{C}))$ isomorph ist zu $\mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)$ für $k = deg(\mathcal{L})$. Offensichtlich gilt aber

$$H^0(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cdot z \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \cdot z^k$$

für $k \geq 0$ und $H^0(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)$ ist Null sonst. Nach dem Satz von Riemann-Roch ist daher $h^1(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)) = -k - 1$ für $k < 0$ und $h^1(P^1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P^1(\mathbb{C})}(k \cdot \infty)$ ist Null für $k \geq 0$. Insbesondere ist $g = 0$.

[7] In der Tat ist $H^0(X, \delta_P) = \mathbb{C}$. Ausserdem ist $H^1(X, \delta_P) = 0$, wie man leicht mit Lemma 1 zeigt. Daraus folgt $\chi(X, \mathcal{O}_X(D + P)) = \chi(X, \mathcal{O}_X(D)) + 1$.

Lokalfreie Garben auf $P^1(\mathbb{C})$. Für jedes Vektorbündel $\mathcal{F}$ auf $X = P^1(\mathbb{C})$ vom Rang 2 existieren Linienbündel $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ und eine exakte Sequenz (Korollar 3)

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{L}_1 \longrightarrow 0$$

Wir behaupten[8] *dann*: $\mathcal{F} \cong \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$.

Zum Beweis sei oBdA $deg(\mathcal{L}_0) \geq deg(\mathcal{L}_1)$ [anderenfalls ersetzen wir $\mathcal{F}$ durch $\mathcal{F}^\vee$ und $\mathcal{L}_i$ durch $\mathcal{L}_{1-i}^\vee$]. Ausserdem kann oBdA angenommen werden $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{L}_0 \cong \mathcal{O}_X(k \cdot \infty)$ mit $k \geq 0$ (Tensorieren mit $\mathcal{L}_1^\vee$). Damit gilt $H^1(X, \mathcal{L}_0) = 0$ und die lange Kohomologiesequenz liefert

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0(X) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{p} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Es gibt daher ein $s \in \mathcal{F}(X)$ mit $p(s) = 1$. Durch $j(g) = g \cdot s$ definiert dieser Schnitt eine $\mathcal{O}_X$-lineare Garbenabbildung $j : \mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ mit $p \circ j = id$, von der man leicht zeigt: $\mathcal{F} = i(\mathcal{L}_0) \oplus j(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{O}_X$. QED

Korollar 5. *Jedes Vektorbündel $\mathcal{F}$ auf $P^1(\mathbb{C})$ vom Rang r ist isomorph*[9] *zu einer direkten Summe $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{L}_i$ von Geradenbündeln $\mathcal{L}_i$.*

Beweis Nach Korollar 3 existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

mit $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{\nu > 0} \mathcal{L}_\nu$ für gewisse Geradenbündel $\mathcal{L}_\nu$ (letzteres durch Induktion nach r). Für $\tilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{L}_1)$ und $\mathcal{E} = p^{-1}(\bigoplus_{\nu > 1} \mathcal{L}_\nu)$ gilt

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{q} \mathcal{L}_1 \longrightarrow 0$$

mit $q = pr_1 \circ p$. Wie oben gezeigt ist dann $\tilde{\mathcal{F}} = i(\mathcal{L}_0) \oplus j(\mathcal{L}_1)$ und man zeigt leicht $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus j(\mathcal{L}_1) \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{L}_1$. Da der Rang von $\mathcal{E}$ kleiner als r ist, folgt dann die Behauptung durch Induktion. QED

Korollar 6. *Für Vektorbündel $\mathcal{F}$ auf $X = P^1(\mathbb{C})$ sei $D(\mathcal{F}) = \Omega_X \otimes \mathcal{F}^\vee$ für ein Geradenbündel Ω_X vom Rang -2. Dann gilt $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{1-i}(X, D(\mathcal{F}))^*$.*

[8] Tatsächlich kann der Isomorphismus so gewählt werden, dass i der Inklusion von $\mathcal{L}_0$ auf den ersten Summanden entspricht und p der Projektion auf den zweiten Summand (Übungsaufgabe).

[9] Die analoge Aussage ist für Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g \geq 1$ falsch.

Beweis des Schlüssellemmas

Gegeben sei ein quadratintegrierbarer holomorpher 1-Kozykel für $\mathcal{V}$

$$\xi = (f_{ij}) \in Z^1_{(2)}(\mathcal{V}, \mathcal{O}) .$$

1) Wegen $H^1_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{C}^\infty_X) = 0$ gibt es C^∞-Funktionen $g_i : V_i \to \mathbb{C}$ mit $f_{ij} = g_i - g_j$ auf $V_i \cap V_j$ (**Lemma 1**).

2) Die Holomorphie $\overline{\partial} f_{ij} = 0$ der f_{ij} zeigt $\overline{\partial} g_i = \overline{\partial} g_j$ auf $V_i \cap V_j$. Daher existiert eine **globale** C^∞-Differentialform $\omega \in A^{0,1}(X)$ mit $\omega|_{V_i} = \overline{\partial} g_i \cdot d\overline{z}$ (Verheftungseiegnschaft von Garbenaxiom G2).

3) Da die $U_{0,i} \in \mathcal{U}_0$ biholomorph äquivalent zum Einheitskreis in $\mathbb{C}$ sind, liefert das **Dolbeaut Lemma** Funktionen $h_i \in C^\infty(U_{0,i})$ mit $\overline{\partial} h_i|_{U_i} = \omega$ auf $U_i \subset U_{0,i}$. Da jedes U_i Schrumpfung in einer Karte von $\mathcal{U}_0$ ist, sind die h_i damit obdA beschränkt auf U_i.

4) Wegen $\overline{\partial} h_i = \overline{\partial} h_j$ auf $U_i \cap U_j$ sind die holomorphen Funktionen $F_{ij} = h_i - h_j$ beschränkt auf $U_i \cap U_j$, und erfüllen tautologisch die Kozykelrelationen. Wir setzen

$$\zeta := \ (F_{ij}) \in Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) .$$

5) Auf V_i gilt per Konstruktion $\overline{\partial} h_i = \overline{\partial} g_i$, und damit $h_i - g_i \in \mathcal{O}(V_i)$.

6) h_i ist beschränkt auf V_i, aber nicht notwendig $h_i - g_i$. Schrumpft man auf $\mathcal{W}$, dann wird $h_i - g_i$ beschränkt und damit folgt

$$\eta := \ (h_i - g_i) \ \in \ C^0_{(2)}(\mathcal{W}, \mathcal{O}) .$$

7) Schränkt man ξ und ζ auf $\mathcal{W}$ ein, erhält man auf $\mathcal{W}$ wegen $F_{ij} = h_i - h_j$ und $f_{ij} = g_i - g_j$ die Identität

$$\zeta - \xi \ = \ (F_{ij} - f_{ij}) = (h_i - g_i) - (h_j - g_j) = \delta\eta .$$

8) Der $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$L = \{(\zeta, \xi, \eta) \mid \zeta = \xi + \delta\eta \quad \text{auf } \mathcal{W}\}$$

ist ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes

$$H = Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \oplus Z^1_{(2)}(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \oplus C^0_{(2)}(\mathcal{W}, \mathcal{O}) .$$

Daher ist L selbst auch Cauchy-vollständig und damit ein Hilbertraum mit der eingeschränkten Metrik. Die Einbettung $L \subset H$ und die Projektion auf den zweiten Summanden sind stetige lineare Abbildungen. Also ist

$$pr_2 : L \to Z^1_{(2)}(\mathcal{V}, \mathcal{O})$$

eine stetige, lineare und wegen 7) auch surjektive Abbildung.

9) Der Satz von der offenen Abbildung (**Satz von Banach**) zeigt daher: Es existiert eine Konstante $C > 0$ so dass gilt

$$\forall \xi \in Z^1_{(2)}(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \quad \exists (\zeta, \xi, \eta) \in L \quad \|(\zeta, \xi, \eta)\|_H \ \leq \ C \cdot \|\xi\| \ .$$

Dies beweist den ersten Teil des Schlüssellemmas. QED

Beweis des Zusatzes. 10) Setze $\varepsilon = \frac{1}{2C}$. Dann gibt es nach dem Schrumpfungslemma einen Unterraum endlicher Kodimension $A \subset Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ mit $\|\xi|_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon \cdot \|\xi\|_{\mathcal{U}}$. Setze $S = A^{\perp}$. Dann ist S endlich dimensional mit

$$A \oplus S = Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \ .$$

11) Für $\xi \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ ist die Schrumpfung $\xi_0 = \xi|_{\mathcal{V}}$ auf $\mathcal{V}$ beschränkt und damit gilt $\xi_0 \in Z^1_{(2)}(\mathcal{V}, \mathcal{O})$. Nach Schritt 9) existieren daher $\zeta_0 \in Z^1_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ und $\eta_0 \in C^0_{(2)}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ mit

$$\zeta_0 = \xi_0 + \delta\eta_0$$

auf $\mathcal{W}$ und $\|\zeta_0\|_{\mathcal{U}} \leq C \cdot \|\xi_0\|_{\mathcal{V}}$ sowie $\|\eta_0\|_{\mathcal{W}} \leq C \cdot \|\xi_0\|_{\mathcal{V}}$.

13) Schritt 10) liefert eine orthogonale Zerlegung von ζ_0 in $\alpha_0 \in A$ und $\sigma_0 \in S$

$$\zeta_0 = \alpha_0 + \sigma_0 \ .$$

14) Wegen 10), 13) und 9) erfüllt die Einschränkung $\xi_1 = \alpha_0|_{\mathcal{V}} \in Z^1_{(2)}(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ von $\alpha_0 \in A$ dann

$$\|\xi_1\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon\|\alpha_0\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon\|\zeta_0\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon C \dot{\|}\xi_0\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{2}\|\xi_0\|_{\mathcal{V}} \ .$$

15) Iteriert man jetzt die Schritte 11-14, erhält man sukzessive $\zeta_\nu, \xi_\nu, \eta_\nu, \alpha_\nu, \sigma_\nu$ mit $\xi_{\nu+1} = \alpha_\nu|_{\mathcal{V}}$. Auf $\mathcal{W}$ gilt

$$\zeta_\nu = \xi_\nu + \delta\eta_\nu \quad , \quad \zeta_\nu = \xi_{\nu+1} + \sigma_\nu$$

mit $\|\xi_\nu\|_{\mathcal{V}} \;\le\; 2^{-\nu}\|\xi_0\|_{\mathcal{V}}$ und $\|\eta_\nu\|_{\mathcal{W}} \le C\|\xi_\nu\|_{\mathcal{V}}$ und $\|\sigma_\nu\|_{\mathcal{U}} \le \|\zeta_\nu\|_{\mathcal{U}} \le C\|\xi_\nu\|_{\mathcal{V}}$.

16) Auf $\mathcal{W}$ gilt

$$\xi_{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k} \sigma_k \;=\; \xi_0 + \delta(\sum_{\nu=0}^{k} \eta_\nu) \;.$$

Aus $\|\xi_{k+1}\| \to 0$ folgt $\xi_{k+1} \to 0$. Die Limiten $\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu$ und $\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu$ exitieren nach dem Cauchy Kriterium in den Hilberträumen S bzw. $C^0_{(2)}(\mathcal{W}, \mathcal{O})$; die geometrische Reihe $C\|\xi_0\|_{\mathcal{V}} \sum_{\nu=0}^{\infty}(1/2)^\nu$ liefert Majoranten. Daraus folgt auf $\mathcal{W}$ im Limes $\sigma = \xi + \delta(\eta)$. QED

Der Fall lokalfreier Garben

Um den Beweis von $\mathcal{O}_X$ auf den Fall lokalfreier Garben $\mathcal{F}$ zu übertragen, nimmt man zusätzlich oBdA an, dass die Überdeckung $\mathcal{U}_0$ die Garbe $\mathcal{F}$ trivialisiert, d.h. $\mathcal{F}|U_{0,i} \;\cong\; \mathcal{O}^r_{U_{0,i}}$ für alle i. Die Kartenwechsel zwischen den Trivialisierungen werden definiert durch holomorphe Matrixfunktionen, deren Einträge auf $\mathcal{U}$ beschränkte Funktionen sind falls $\mathcal{U} \ll \mathcal{U}_0$. Mit dieser Bemerkung definiert man die Hilberträume $C^i_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit Hilfe der Trivialisierungen. Dies benutzt keine Kartenwechsel. Da die Kartenwechsel beschränkt sind, sind die Unterräume $Z^i_{(2)}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ abgeschlossen, und damit auch Hilberträume.

Das Dolbaut Lemma überträgt sich wegen $H^1(U_i, \mathcal{F}) \cong H^1(U_i, \mathcal{O}^r_{U_i}) = 0$. Das einzige globale Argument ist in Schritt 2. Hier benötigt man die verallgemeinerte globale antiholomorphe Ableitung

$$\overline{\partial} : C^\infty_X(\mathcal{F}) = A^0_X(\mathcal{F}) \to A^{0,1}_X(\mathcal{F}) \;.$$

Diese ist global definiert wegen $\overline{\partial}(\tilde{s}_j) = \overline{\partial}(a^{\mathcal{F}}_{ji} \circ \tilde{s}_i) = a^{\mathcal{F}}_{ji} \circ \overline{\partial}(\tilde{s}_i)$ auf $U_j \cap U_i$, da die Matrixeinträge von $a^{\mathcal{F}}_{ji}$ holomorph sind. Damit überträgt sich der Beweis von Schritt 2.

Der Satz von der offenen Abbildung

Intervallschachtelung. Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $B_{r_i}(x_i) = \{y | d(x_i, y) \le r_i\}$ eine absteigende Kette von Kugeln mit $r_i > 0$ und $\lim_i r_i = 0$. Dann ist x_i eine Cauchy-Folge mit Limes x und es gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i) = \{x\}$.

Satz von Baire. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und A_i abgeschlossen in X. Ist eine nichtleere offene Kugel $U_{r_1}(x_1)$ in $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dann existiert ein i so dass bereits A_i eine nichtleere offene Kugel enthält.

[Falls nicht, wäre der Schnitt von $U_{r_1}(x_1)$ mit $X - A_1$ offen und nicht leer und enthält damit eine Kugel $U_{r_2}(x_2)$ oBdA mit $0 < r_2 < r_1/2$. Wiederhole den Vorgang für $X - A_2$ und $U_{r_2}(x_2)$. Dann ist $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_{r_i}(x_i) \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ nach Konstruktion. Wegen $x \in U_{r_1}(x_1)$ ein Widerspruch zur Annahme.]

Satz von Banach. *Jede surjektive stetige lineare Abbildung $f : A \to B$ zwischen Banachräumen ist offen.*

Beweis des Satzes. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ und damit $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(nU)$ für $0 \in U$ offen. Nach Baire enthält somit einer der Abschlüsse $\overline{f(nU)}$ eine nichtleere offene Kugel V. Durch Reskalieren ist obdA $n = 1$. Also $V - V \subset \overline{f(U)} - \overline{f(U)} \subset \overline{f(U - U)}$. Ersetzt man U duch $U - U$ und V durch $V - V$, kann $0 \in V$ angenommen werden. Also für geeignetes $C > 0$

$$\boxed{V_{C\cdot\varepsilon}(0) \subset \overline{f(U_\varepsilon(0))}}\ .$$

Wähle eine Nullfolge $\varepsilon_i > 0$ mit $\sum_i \varepsilon_i < \infty$. Dann gilt

$$y \in V_{C\cdot\varepsilon_1}(0) \Longrightarrow\ \ y \in \overline{f(U_{\varepsilon_1}(0))} \Longrightarrow\ \ \exists x_1 \in U_{\varepsilon_1}(0) \quad \text{mit}\ \ \|y - f(x_1)\| < C\cdot\varepsilon_2\ .$$

In der Tat kann $\|y - f(x_1)\|$ beliebig klein gewählt werden!

Angewendet auf $y - f(x_1) \in V_{C\cdot\varepsilon_2}(0)$ erhält man analog ein $x_2 \in U_{\varepsilon_2}(0)$ mit $y - f(x_1) - f(x_2) \in V_{C\cdot\varepsilon_3}(0)$ usw. Dies definiert eine Folge von $x_n \in U_{\varepsilon_n}(0)$ mit

$$\|y - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\| < C \cdot \varepsilon_{n+1}\ ,$$

somit $y = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$. Anderseits gibt es ein $x \in A$ mit $x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i$ wegen $\|x_i\| < \varepsilon_n$ und der Majorante $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i =: C'$ (Cauchykriterium für Reihen). Insbesondere $\|x\| < C'$. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$y = f(x)\ .$$

Dies zeigt: Für alle $y \in V_{C\cdot\varepsilon_1}(0)$ existiert ein $x \in U_{C'}(0)$ mit $f(x) = y$ wegen $V_{C\varepsilon_1} \subseteq f(U_{C'}(0))$. QED

Dolbeaut Lemma

Dolbeaut Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $V << U$ und $g \in C_c^\infty(U)$. Dann existiert eine beschränkte Funktion $f \in C^\infty(V)$ mit $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = g|_V$.*

Beweis. Es genügt für $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ die Existenz von $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ zu zeigen mit $\partial f / \partial \overline{z} = g$. Man macht folgenden Ansatz (Faltung mit dem Cauchy Kern):

$$f(w) \ := \ \frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C}} g(z+w) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z}$$

ist wegen $dz d\overline{z}/z = const.exp(-i\theta) dr d\theta$ (Polarkoordinaten) wohldefiniert. Da g kompakten Träger besitzt, kann Integration und Differentiation vertauscht werden:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w}} f = \frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\overline{w}} g(z+w) \cdot \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z}$$

und wegen der Kettenregel sowie $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z = 0$ ist dies

$$\frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{g(z+w)}{z} \cdot dz \wedge d\overline{z}\ .$$

Mit Hilfe des Satzes von Stokes schreibt sich dies als $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\varepsilon \frac{g(z+w)}{z} \cdot (-dz)$. Das Integral läuft im Uhrzeigersinn (!) um einen Kreisweg vom Radius ε um den Nullpunkt. Im Limes ε erhält man den gewünschten Wert $g(w)$. QED

Korollar 7. *Für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{E}$ auf kompakten (parakompakten) Riemannschen Flächen X gilt $H^i(X, \mathcal{E}) = 0$ für $i \geq 2$.*

Beweis. Das Dolbeaut Lemma kann als lokale Aussage über die Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X gesehen werden und zeigt die Exaktheit der Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow A_X^0 \xrightarrow{\overline{\partial}} A_X^{0,1} \longrightarrow 0$$

für die $\mathbb{C}_X^\infty$-Modulgarben A_X^0 der C^∞-Nullformen und der C^∞-(0,1)Formen $A_X^{0,1}$, d.h. der Formen in A_X^1 der Gestalt $g(z) d\overline{z}$. Die Behauptung des Korollars folgt daher aus Lemma 1 und der langen exakten Kohomologiesequenz. Allgemeiner (mit analogem Beweis) gilt auch für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{E}$ Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow A_X^0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\overline{\partial}} A_X^{0,1}(\mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

für $\mathbb{C}_X^\infty$-Modulgarben $A_X^0(\mathcal{E})$ und $A_X^{0,1}(\mathcal{E})$. QED

Holomorphe Abbildungen

Sei
$$f : X \to Y$$
eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen X und Y. Ist X zshg. und f nicht konstant, dann ist f auch auf keiner nicht leeren offenen Teilmenge konstant (benutze analytische Fortsetzung und den Identitätssatz).

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heisst **offen**, wenn $f(V)$ offen ist für alle offene Mengen $V \subset X$.

Lemma 3. *Eine nichtkonstante holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen (X zsgh.) ist eine offene Abbildung.*

Beweis. Wähle eine Kartenüberdeckungen $X = \bigcup_i U_i$ und $Y = \bigcup U'_j$ so dass $f(U_i) \subset U'_j$ für geeignete j abhängig von i. Wegen $f(V) = \bigcup_i f(V \cap U_i)$ ist $f(V)$ offen wenn jedes $f(V \cap U_i)$ offen in U'_j ist.

Die Kartenabbildungen $\psi : U_i \to V_i \subset \mathbf{C}$ resp. $\psi' : U'_j \to V'_j \subset \mathbf{C}$ definieren eine holomorphe Funktion
$$g = \psi'_j \circ f|_U \circ \psi_j^{-1} : V_i \to V'_j \subset \mathbf{C} \, .$$
Da für V offen $\psi_i(V \cap U_i) \subset \mathbf{C}$ ein komplexes Gebiet ist und g auch dort in keiner Umgebung eines Punktes konstant ist, ist
$$f(V \cap U_i) = g(\psi_i(V \cap U_i)) \subset U'_j \cong V'_j \subset \mathbf{C}$$
offen (Satz von der Gebietstreue für g). QED

Korollar 8. *Eine nichtkonstante holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen ist surjektiv, wenn X kompakt ist und X und Y beide zusammenhängend sind. Alle Fasern $F = f^{-1}(y)$ sind dann endlich.*

Beweis. $f(X)$ ist kompakt und damit abgeschlossen. Andererseits ist $f(X)$ offen, also $f(X) = Y$ (Y ist zshg). F ist abgeschlossen, und da X kompakt ist auch kompakt. Andererseits ist F diskret, denn anderenfalls hätte F einen Häufungspunkt und f wäre konstant y nach dem Identitätssatz. Kompakte diskrete Mengen sind endlich.

Unverzweigte Abbildungen

Seien die Bezeichnungen wie im letzten Abschnitt, d.h. X und Y seien zusammenhängende Riemannsche Flächen. Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Für jeden Punkt $x \in X$ kann man Karten U um x resp. U' um $y = f(x)$ wählen. Die Kartenabbildungen $\psi : U \to V \subset \mathbf{C}$ resp. $\psi' : U' \to V' \subset \mathbf{C}$ definieren eine holomorphe Funktion $g : V \to V'$

$$g = \psi' \circ f|_U \circ \psi^{-1} .$$

Sei $\xi = \psi(x)$. Die kleinste ganze Zahl $e = e(x)$ so dass lokal gilt

$$g(z) = h(z)^e \quad , \quad h(z) \text{ holomorph mit } h'(\xi) \neq 0$$

dann nennt man den **Verzweigungsindex** von f im Punkt x. Man nennt x **unverzweigt** im Fall $e(x) = 1$, oder äquivalent dazu falls

$$g'(\xi) \neq 0 .$$

Anderenfalls nennt man x, beziehungsweise auch seinen Bildpunkt $f(x)$, einen **Verzweigungspunkt** von f. Wegen der Kettenregel hängen diese Definitionen nicht von der Wahl der Karten ab [Kartenwechsel sind biholomorph. Ableitungen von biholomorphen Funktionen sind nirgends Null.]

Die Menge $\Sigma \subset X$ der Verzweigungspunkte von f ist abgeschlossen [$g'(\xi) \neq 0$ ist eine offene Bedingung] und diskret [anderenfalls gäbe es einen Häufungspunkt x von Σ, und g' wäre identisch Null auf V und somit g konstant in einer Umgebung von ξ. Also wäre f konstant in einer Umgebung von x, und dann konstant (Identitätssatz). Widerspruch!]. Es folgt

Lemma 4. *Sei X kompakt und zusammenhängend und $f : X \to Y$ holomorph und nicht konstant. Dann ist auch Y kompakt und die Menge $\Sigma_f \subset X$ der Verzweigungspunkte von f ist endlich.*

Sei die Situation wie im letzten Lemma. Dann ist $f(\Sigma_f)$ eine endliche Teilmenge S von Y. Für $y \notin S$ sei $F = f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_n\}$ die Menge der Urbildpunkte. Da f unverzweigt in allen Punkten $x_i \in F$ ist, folgt aus dem Satz von der Umkehrfunktion die Existenz von Umgebungen U_i von x_i, welche unter f biholomorph auf ihr Bild $f(U_i) \subset Y$ abgebildet werden

$$f : U_i \ \cong \ f(U_i) .$$

Durch Verkleinern der U_i gilt ausserdem obdA

$$U_i \cap U_j = \emptyset \ .$$

Sei $V := \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$. Ersetzt man U_i durch $U_i \cap f^{-1}(V)$, kann zusätzlich noch angenommen werden

$$f(U_i) = f(U_j) = V \ .$$

Wir zeigen schliesslich

$$f^{-1}(V) = \biguplus_{i=1}^n U_i \quad \text{(disjunkte Vereinigung)}\ ,$$

oBdA durch Verkleinern von V. [Das Komplement K von $U_1 \cup .. \cup U_n$ in X ist kompakt, also auch das Bild $f(K)$ in Y. Wegen $y \notin f(K)$ gibt es daher eine offene Teilmenge $V' \subset V$ um y mit $V' \cap f(K) = \emptyset$. Ersetzt man V durch V' und U_i durch $U_i' = U_i \cap f^{-1}(V')$, impliziert $f(x') \in V'$ dann $x_i \in U_i$ für ein $i = 1, .., n$. Da $f|_{U_i} : U_i \to V$ biholomorph ist, folgt dann aus $x' \in U_i$ und $f(x') \in V'$ sofort $x' \in U_i'$. Also $f^{-1}(V') = U_1' \cup .. \cup U_n'$.]

Wir fassen zusammen. Für $Y' = Y \setminus S$ und $X' = f^{-1}(Y \setminus S)$ ist die Einschränkung von

$$f : X' \to Y'$$

eine holomorphe **Überlagerung**: Für jeden Punkt $y \in Y'$ gibt es (beliebig kleine) offene Umgebungen $V \subset Y'$ von y mit der Eigenschaft

- $f^{-1}(V) = \biguplus_{i=1}^n U_i$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Mengen U_i in X'
- f eingeschränkt auf jedes U_i ist biholomorph $f : U_i \cong V$.

Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen zshg. Riemannschen Flächen. Ist X kompakt, dann existiert eine endliche Teilmenge $S \subset Y$ und einen Zahl n so dass die Einschränkung von f auf $f^{-1}(Y \setminus S)$ eine n-blättrige unverzweigte holomorphe Überlagerung von $Y \setminus S$ ist. Man nennt n den* **Grad** *von f.*

Beweis. Je zwei Punkte in $Y \setminus S$ kann man durch einen Weg verbinden. Für jeden Wegpunkt y existiert eine gute Umgebung V im obigen Sinn und oBdA einfach zsgh. Endlich viele davon überdecken den Weg. Man schliesst dann sofort, dass die Kardinalität $n = \#f^{-1}(y)$ auf dem Verbindungsweg nicht von y abhängt.

Verzweigungspunkte .

Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Sei $x \in X$ ein Verzweigungspunkt der Abbildung f mit der Verzweigungsordnung $e = e_x$. Dann existiert eine Kartenumgebung U von x mit Kartenabbildungen

$$\begin{tikzcd} X \supset U \arrow[r, "\psi", "\sim"'] \arrow[d, "f"] & V \arrow[r, "h", "\sim"'] & h(V) \arrow[d, "\pi"] \\ Y \supset U' \arrow[rr, "\psi'", "\sim"'] & & V' \end{tikzcd}$$

mit einer biholomorphen Abbildung h und der Abbildung

$$\pi(z) = z^e$$

wegen $g(z) = h(z)^e$ und $h'(\xi) \neq 0$ für $\xi = \psi(x)$.

Mit anderen Worten. Ersetzt man die Kartenabbildung ψ durch die Kartenabbildung $h \circ \psi$, so ist f lokal in einer Umgebung U von x in den Karten gegeben durch die Abbildung $\pi(z) = z^e$. Dabei kann man durch Verkleinern von U und geeignete Kordinatenwahl annehmen $V = \mathbb{E} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ sowie dann durch Verkleinern von V' auch $V' = \pi(V) = \mathbb{E}$, also

$$\begin{tikzcd} X \supset U \arrow[r, "\psi", "\sim"'] \arrow[d, "f"] & \mathbb{E} \arrow[d, "z \mapsto z^e"] \\ Y \supset U' \arrow[r, "\psi'", "\sim"'] & \mathbb{E} \end{tikzcd}$$

Eigenschaften von π. Die Abbildung $\pi(z) = z^e$

$$\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

ist holomorph und surjektiv. Wegen $\pi'(z) = e \cdot z^{e-1}$ ist π unverzweigt ausserhalb von $z = 0$, und

$$\pi : \mathbb{E}^* \to \mathbb{E}^* \quad , \quad \mathbb{E}^* = \mathbb{E} \setminus 0$$

ist eine e-blättrige unverzweigte holomorphe Überlagerung.

Gradformel. *Sei $f : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion vom Grad n zwischen zshg. kompakten Riemannschen Flächen. Für jedes $y \in Y$ gilt dann*

$$\boxed{grad(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e_x} \, .$$

Beweis. Für $y \in Y$ wähle eine Umgebung V mit $V \cap S = \{y\}$ oder $\emptyset$. Dann ist

$$f : f^{-1}(V^*) \to V^* \quad , \quad V^* = V \setminus \{y\}$$

eine n-blättrige unverzweigte holomorphe Überlagerung. Für jede offene Umgebung $V' \subset V$ von y bleibt die Einschränkung von f (auf $f^{-1}(V'^*)$) eine n-blättrige Überlagerung.

Andererseits: Um jeden Punkt $x \in F = f^{-1}(y)$ gibt es eine Umgebung $U = U_x$ (homöomorph zu E), derart daß

$$f|_{U_x} : U_x^* \to f(U_x) \setminus y \quad , \quad U_x^* = U_x \setminus x$$

eine $e(x)$-blättrige Überlagerung ist. Dies bleibt richtig für Einschränkungen.

Durch Verkleinern gilt obdA $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ für $x \neq x'$ in F sowie $f(U_x) \subset V$ (Stetigkeit von f). Wähle eine Umgebung V' von y in der offenen Menge $\bigcap_{x \in F} f(U_x)$ (f ist offen) und im Komplement der kompakten Menge $f(X \setminus \bigcup_{x \in F} U_x)$. Dann gilt $f^{-1}(V') = \biguplus_{x \in F} f^{-1}(V') \cap U_x$ und somit

$$f^{-1}(V'^*) = \biguplus_{x \in F} f^{-1}(V'^*) \cap U_x^* \, .$$

$f : f^{-1}(V'^*) \cap U_x^* \to V'^*$ ist eine e_x-blättrige Überlagerung. Also $n = \sum_{x \in F} e_x$ und $\# f^{-1}(y) = n - \sum_{\pi(x) = y} (e_x - 1)$. QED

Korollar 9. *Ist $f : X \to P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, d.h. f einen meromorphe Funktion auf X, dann nimmt f jeden Wert $y \in P^1(\mathbb{C})$ gezählt mit Multiplizität gleich oft, nämlich $n = grad(f)$ mal, an.*

Korollar 10. *Ist $f : X \to P^1(\mathbb{C})$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, dann ist der Grad des Haupdivisors (f) gleich Null.*

Dies ist klar, da der Grad die Zahl der Nullstellen minus die Zahl der Polstellen von f ist (jeweils mit Vielfachheiten gezählt).

Meromorphe Funktionen

Sei X eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche und $M(X)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf X. Aus dem Endlichkeitssatz folgt unmittelbar der folgende Existenzsatz

Lemma 5. *Für paarweise verschiedene $x_1, ..., x_r \in X$ und komplexe Zahlen $a_1, ..., a_r$ gibt es ein $f \in M(X)$ mit $f(x_i) = a_i$ für $i = 1, .., .r$.*

Beweis. Es genügt, dass die auf $\{x_1, ..., x_r\}$ holomorphen Funktionen f in $M(X)$ Punkte trennen (Stone-Weierstrass). Betrachte dazu $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-y)$ und die exakte Sequenz $0 \to \mathcal{L}(X) \to \mathcal{O}_X(n \cdot x - y)(X) \to \mathbb{C}^n \to H^1(X, \mathcal{L})$. Für $n > 1 + \dim H^1(X, \mathcal{L})$ existiert $0 \neq s \in \mathcal{O}_X(n \cdot x - y)(X)$ mit einer Polstelle bei x und einer Nullstelle bei y. Dann hat $f = (s + a)^{-1}$ eine Nullstelle bei x und ist ungleich Null bei y. Für geeignetes $0 \neq a \in \mathbb{C}$ ist $s(x_i) + a \neq 0$ für alle $i = 1, 2, .., r$, also ist $f \in M(X)$ holomorph in $x_1, ..., x_r$ und trennt x von y für $x, y \in \{x_1, ..., x_r\}$. QED

Seien f, g nichtkonstante meromorphe Funktionen auf X und sei $n = grad(f)$ und $S \in P^1(\mathbb{C})$ die Bildmenge der Verzweigungspunkte von f. Dann ist für $z \in P^1(\mathbb{C}) \notin S$ und $f^{-1}(z) = \{x_1, ..., x_n\}$ das Polynom

$$P(t, z) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \big(t - g(x_i)\big) \;=\; t^n + a_1(z)t^{n-1} + ... + a_n(z)$$

wohldefiniert. Die Koeffizienten sind meromorphe Funktionen auf $P^1(\mathbb{C}) \setminus S$, da $z \mapsto x_i$ lokal eine biholomorphe Funktion ist. Die $a_i(z)$ lassen sich zu meromorphen Funktionen auf ganz $P^1(\mathbb{C})$ fortsetzen[10]. Setzt man $t = g(x)$ und beachtet $z = f(x)$ für $x \in X$, folgt $P(g(x), f(x)) = 0$.

Grad-Lemma. *Für jede nichtkonstante meromorphe Funktion $f \in M(X)$ ist $M(X)$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{C}(f)$ vom Grad $n = deg(f)$.*

Beweis. Wie bereits gezeigt gibt es für jedes $g \in M(X)$ ein Polynom $P(t)$ vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}(f)$, das g als Nullstelle besitzt. Aus dem Satz

[10]Für $z_0 \in S$ sei oBdA g holomorph in den Punkten von $f^{-1}(z_0)$; falls nicht, ersetze $g(x)$ durch $g(x) \cdot (f(x) - z_0)^r$ für geeignetes r. Dies reskaliert die $a_i(z)$ um den Faktor $(f(x) - z_0)^{ir}$. Dann sind die $a_i(z)$ beschränkt in einer Umgebung von z_0, da dies für $g(x)$ in einer Umgebung der Punkte in $x \in f^{-1}(z_0)$ gilt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, lässen sich die $a_i(z)$ holomorph auf z_0 fortsetzen.

vom primitiven Element folgt daraus $M(X) = \mathbb{C}(f)[g]$, und weiterhin $[M(X) : \mathbb{C}(f)] = m < n = deg(f)$. Wäre $m < n$, würden die Funktionen $h \in M(X)$, die holomorph sind in den Punkten $x \in f^{-1}(z_0) = \{x_1, ..., x_n\}$ für $z_0 \notin S$, nicht die Punkte trennen können. Beachte nämlich, jedes $h \in M(X)$ lässt sich algebraisch durch f und g ausdrücken, aber $f(x) = z_0$ ist fixiert und $g(x)$ hat höchstens m verschiedene Werte (Nullstellen eines Polynoms vom Grad m mit Koeffizienten $b_i(z_0)$ in $\mathbb{C}$). QED

Geschlecht $g = 0$. Für eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht Null liefert die exakte Sequenz $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(P) \to \delta_P \to 0$ die exakte Kohomologiesequenz $\mathbb{C} \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(P)) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ und damit für jeden Punkt $P \in X$ eine nicht konstante meromorphe Funktion f mit einem einzigen Pol der Ordnung 1 bei P. Die zugehörige Abbildung $X \to P^1(\mathbb{C})$ hat daher den Grad $n = 1$ und definiert damit eine biholomorphe Abbildung (wegen $e_x \leq n = 1$). Also ist X biholomorph zum $P^1(\mathbb{C})$ genau dann, wenn X Geschlecht Null hat.

Direkte Bilder

Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und $\pi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten (Riemannschen Flächen). Dann definiert die Vorschrift $\pi_*(\mathcal{G})(U) = \mathcal{G}(\pi^{-1}(U))$ eine Garbe $\pi_*(\mathcal{G})$ auf Y, das **direkte Bild** von $\mathcal{G}$. Die Garbenaxiome G1 und G2 übertragen sich unmittelbar von $\mathcal{G}$ auf $\pi_*(\mathcal{G})$.

Ist $\mathcal{G}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X, dann ist $\pi_*(\mathcal{G})$ ein $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y vermöge der Skalarmultiplikation. Diese ist für $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ und $s \in \pi_*(\mathcal{G})(U) = \mathcal{G}(\pi^{-1}(U))$ definiert durch

$$f \star s := \pi^*(f) \cdot s$$

in $\mathcal{G}(\pi^{-1}(U)) = \pi_*(\mathcal{G})(U)$ für $\pi^*(f) = f(\pi(x)) \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$.

Lemma 6. *Sei $\pi : X \to Y$ eine endliche verzweigte Überlagerung von Riemannschen Flächen vom Grad n. Ist $\mathcal{G}$ eine lokalfreie Garbe vom Rang r auf X, dann ist $\pi_*(\mathcal{G})$ lokalfrei auf Y vom Rang $n \cdot r$.*

Beweis. Die Aussage ist lokal auf Y, daher ist oBdA $r = 1$ und $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$. Beachte dann für z in einer genügend kleinen Umgebung U von z in Y gilt $\pi_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\biguplus_{i=1}^k U_i) = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_X(U_i)$ und $\pi : U_i \to U$ ist bis auf biholomorphe Kartenabbildungen oBdA gegeben durch $z = \pi(w) = w^{e_i}$ mit $U_i = U$ als

Einheitskreis. Wegen $\mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{O}_Y(U) \oplus \mathcal{O}_Y(U) \cdot w \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_Y(U) \cdot w^{e_i - 1}$ als $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe (Taylorentwicklung !) folgt $\pi_* \mathcal{O}_Y(U) \cong \mathcal{O}_Y(U)^n$ aus $\sum_{i=1}^k e_i = n$. Dieser offensichtliche Isomorphismus ist $\mathcal{O}_Y(U)$-linear. QED

Lemma 7. *Sei $\pi : X \to Y$ eine endliche verzweigte Überlagerung von Riemannschen Flächen vom Grad n. Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X, dann gilt*

$$H^i(X, \mathcal{G}) \cong H^i(Y, \pi_*(\mathcal{G})) \quad , \quad (i = 0, 1) \; .$$

Beweis. Dies ist klar für $i = 0$. Für $i = 1$ betrachte geeignete Überdeckungen $\mathcal{U}$ von Y durch kleine offene Mengen mit $\pi^{-1}(U) = \biguplus_{r \in F} V_r$ derart dass $\pi : V_i \to U$ bis auf biholomorphe Abbildungen durch $w \mapsto z = w^{e_i}$ gegeben ist und $\mathcal{G}$ trivial ist auf U_i. Sei $\mathcal{V}$ die zugehörige Überdeckung von X durch die V_r für variierendes $U \in \mathcal{U}$. Beachte $\pi_*(\mathcal{G})(U_i \cap U_j) = \mathcal{G}(\pi^{-1}(U_i \cap U_j))$ ist gleich $\mathcal{G}(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \prod_{r,s \in F} \mathcal{G}((V_r)_i \cap (V_s)_j)$. Daher gilt $C^1(\mathcal{U}, \pi_* \mathcal{G}) = C^1(\mathcal{V}, \mathcal{G})$. Man sieht sofort, dass diese Identifikation sich überträgt auf 1-Zykel und 1-Ränder: $Z^1(\mathcal{U}, \pi_* \mathcal{G}) = Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ und $\partial C^0(\mathcal{U}, \pi_* \mathcal{G}) = \partial C^0(\mathcal{V}, \mathcal{G})$. Es folgt $H^i_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{G}) \cong H^i_{\mathcal{U}}(Y, \pi_*(\mathcal{G}))$. Da $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$ cofinale Überdeckungen sind, folgt die Behauptung. QED

Relative Dualität

Für eine n-blättrige verzweigte Überlagerung $\pi : X \to Y$ von Riemannschen Flächen sei $S \subset Y$ die Bildmenge der endlich vielen Verzweigungspunkte von π. Wir konstruieren dazu einen $\mathcal{O}_Y$-linearen Garbenhomomorphismus auf Y

$$\pi_*(\Omega_X) \longrightarrow \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*(\mathcal{O}_X)^\vee \; .$$

Lemma 8. *Dieser definiert einen Isomorphismus lokalfreier $\mathcal{O}_Y$-Garben auf Y*

$$\boxed{\pi_*(\Omega_X) \;\cong\; \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*(\mathcal{O}_X)^\vee} \; .$$

Verallgemeinerung. Allgemeiner gibt es für lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Garben $\mathcal{E}$ auf X einen kanonischen $\mathcal{O}_Y$-linearen Garbenisomorphismus[11]

$$\boxed{\pi_*(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee) \;\cong\; \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \pi_*(\mathcal{E})^\vee} \; ,$$

[11] Setzt man $D_X(\mathcal{E}) := \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee$ und $D_Y(\mathcal{F}) := \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}^\vee$, schreibt sich die Formel für die relative Dualität in der Form $\pi_*(D_X(\mathcal{E})) \cong D_Y(\pi_*(\mathcal{E}))$. Aus Lemma 7 folgt daraus dann **Serre Dualität** durch Reduktion auf Korollar 6: *Für Vektorbündel $\mathcal{F}$ auf X und $D(\mathcal{F}) = \Omega_X \otimes \mathcal{F}^\vee$ gilt $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{1-i}(X, D(\mathcal{F}))^*$.*

auch zu deuten als eine nichtausgeartete $\mathcal{O}_Y$-lineare Paarung lokalfreier Garben

$$\pi_*(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*(\mathcal{E}) \longrightarrow \Omega_Y$$

definiert durch die Auswertung $\pi_*(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*(\mathcal{E}) \longrightarrow \pi_*(\Omega_X)$ und die **Spurabbildung** Tr. Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung Spur $Tr : \Omega(\pi^{-1}(U)) \to \Omega(U)$ ist wie folgt charakterisiert: Für holomorphe Differentialformen η auf $\pi^{-1}(U)$ ist $Tr(\eta)$ die eindeutig bestimmte holomorphe Differentialform auf U mit

$$(*) \qquad \boxed{\int_\gamma Tr(\eta) = \int_{\pi^{-1}(\gamma)} \eta}$$

für alle stückweise glatten Wege $\gamma : [0,1] \to U \setminus (U \cap S)$. Beachte, lokal besteht $\pi^{-1}(\gamma)$ per Definition aus genau n Wegen, vorausgesetzt U wurde genügend klein gewählt so dass $\pi^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von n zu U biholomorph äquivalenten Gebieten ist.

Eindeutigkeit. $Tr(\eta)$ ist durch die Bedingung $(*)$ eindeutig bestimmt, denn $Tr(\eta)(z)$ ist für $z \in U \setminus (U \cap S)$ die z-Ableitung von $\int_{z_0}^z Tr(\eta)$ für irgend einen Weg γ in $U \setminus (U \cap S)$ von z_0 nach z (die Ableitung ist unabhängig vom Weg oder dem gewählten Basispunkt $z_0 \in U \setminus (U \cap S)$). Es bleibt also nur die Existenz von $Tr(\eta) \in \Omega(U)$ zu zeigen.

Existenz. Die Existenz von $Tr(\eta)$ kann man lokal auf Y zeigen, denn $Tr(\eta)$ verheftet sich automatisch wegen der koordinatenfreien Charakterisierung $(*)$. Sei daher oBdA U so klein, dass $\pi^{-1}(U)$ in k einfach zusammenhängende Komponenten $U_1, ..., U_k$ zerfällt und so dass die $U_j, j = 1, .., k$ und U biholomorph äquivalent sind zu $\mathbb{E}$ mit den Koordinaten $w = w_j$ und $w^e = z$ für $e = e_j$. Sei oBdA η Null auf allen Komponenten ausser einer einzigen Komponente U_j. Sei $\eta = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu dw$ (lokal auf U_j). Ersetzt man oBdA π durch $\pi|_{U_j}$, so ist

$$\int_{\pi^{-1}(\gamma)} \sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu dw = \sum_{\nu \geq 0} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{a_\nu w^{\nu+1}}{\nu+1} \Big|_{x_i}^{y_i} .$$

Beachte $x_i = x_0 \zeta^i$ und $y_i = y_0 \zeta^i$ für eine primitive e-te Einheitswurzel ζ. Somit ist die innere Summe auf der rechten Seite Null für alle Summanden ν ausser für $e|(\nu+1)$, wo sich als Wert $e \cdot \frac{a_\nu w^{\nu+1}}{\nu+1}|_{x_0}^{y_0}$ ergibt. Wir setzen

$$Tr(\sum_{\nu \geq 0} a_\nu w^\nu dw) = \sum_{\nu \geq 0 \ , \ e|\nu+1} a_\nu z^{(\nu+1)/e} \frac{dz}{z} ,$$

denn für $e|(\nu+1)$ gilt

$$\int_{x_0^e}^{y_0^e} a_\nu z^{(\nu+1)/e}\frac{dz}{z} \;=\; ea_\nu \frac{z^{(\nu+1)/e}}{\nu+1}|_{x_0^e}^{y_0^e} = ea_\nu \frac{w^{\nu+1}}{\nu+1}|_{x_0}^{y_0} \;.$$

Summation über $\nu \geq 0$ und über $j = 1,..,k$ liefert wie gewünscht $(*)$. Beachte $Tr(\sum_{\nu\geq 0} a_\nu w^\nu dw) \in \Omega(U)$ wegen $(\nu+1)/e \geq 1$.

$\mathcal{O}_Y$-Linearität. Aus der Definition folgt $Tr(g(\pi(w))w^\nu dw) \;=\; g(z)Tr(w^\nu dw)$ [oBdA für $g(z) = z^k$ mit $g(\pi(w)) = w^{ek}$ für $k \in \mathbb{N}$]. Somit ist Tr ein $\mathcal{O}_Y$-lineare Abbildung. Lokal auf U_j gilt

$$\mathcal{O}(U_j) = \bigoplus_{\mu=0}^{e-1} \pi^*(\mathcal{O}(U))\cdot w^\mu \quad , \quad \Omega_X(U_j) = \bigoplus_{\nu=0}^{e-1} \pi^*(\mathcal{O}(U))\cdot w^\nu dw \;.$$

Aus $Tr(w^\mu \cdot w^\nu dw) = \delta_{\mu,e-1-\nu} \cdot dz$ für $0 \leq \mu,\nu \leq e-1$ folgt die *Nichtausgeartetheit der Paarung*. Dies zeigt Lemma 8 (sowie seine Verallgemeinerung). QED

Topologisches versus analytisches Geschlecht

Meromorphe Differentialformen. Sei X eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche und $\pi : X \to P^1(\mathbb{C})$ definiert durch eine nicht konstante meromorphe Funktion f. Dies liefert sofort eine nicht verschwindende meromorphe Differentialform auf X

$$\omega = \frac{df}{f} = d\ \log(f) = \partial\ \log(f)\;.$$

Jede meromorphe Differentialform ω ist in lokalen Koordinaten von der Form $g(z)dz$ für eine meromorphe Funktion g. Man definiert $div(\omega)$ durch den lokal durch g definierten Divisor (hängt nicht von den Kartenabbildungen ab!). Für jede meromorphe Differentialform η ist $h = \eta/\omega$ eine meromorphe Funktion auf X. Somit gilt $div(\eta) = div(\omega) + (h)$. Wegen $deg((h)) = 0$ hängt daher der Grad $deg(div(\eta))$ nicht ab von der (nichtverschwindenden) meromorphen Differential η auf X und ist daher eine Invariante von X. In der Tat gilt $\Omega_X \cong \mathcal{O}_X(D)$ für $D = div(\eta)$ und insbesondere daher

$$deg(\Omega_X) \;=\; deg(div(\eta))\;.$$

Beispiel. $\eta = \frac{dz}{z}$ ist eine meromorphe Differentialform auf $X = P^1(\mathbb{C})$ mit $div(\eta) = -0 - \infty$. Beachte $dz/z = -d\zeta/\zeta$ für $\zeta = 1/z$ (die Karte bei ∞).

Hurwitz Formel. Für $\pi : X \to P^1(\mathbb{C})$ wie oben ist $\frac{df}{f} = \pi^*(\frac{dz}{z})$ eine meromorphe Differentialform auf X. Lokal für $z = w^e$ ist $\pi^*(dz) = d(w^e) = ew^{e-1}dw$. Es folgt $div(\frac{df}{f}) = \pi^*(\frac{dz}{z}) + \sum_{x\in X}(e_x - 1)\cdot x$ mit

$$deg(div(\frac{df}{f})) = n \cdot deg(div(\frac{dz}{z})) + \sum_{x\in X}(e_x - 1) = -2n + \sum_{x\in X}(e_x - 1) \ .$$

Triangulierungen. Urbilder in X von Triangulierungen von $Y = P^1(\mathbb{C})$, für die jeder Verzweigungspunkt ein Eckpunkt ist, definieren Triangulierungen von X. Ihre Euler Charakteristik $\chi_{top}(X) = 2 - 2g_{top} := E_X - K_X + F_X$ (E_X, K_X, F_X ist die Zahl der Ecken, Kanten, Flächen) ist

$$n(E_Y - K_Y + F_Y) - \sum_x (e_x - 1) \ ,$$

denn $F_X = nF_Y, K_X = nK_Y$ und $E_X = nE_Y - \sum_{x\in X}(e_x - 1)$. Wegen $\chi_{top}(Y) = (E_Y - K_Y + F_Y) = 2$ für $Y = P^1(\mathbb{C})$ ergibt sich $\chi_{top}(X) = 2n - \sum_{x\in X}(e_x - 1)$. Die Hurwitz Formel zeigt

$$\boxed{deg(\Omega_X) \ = \ deg(div(\omega)) \ = \ 2g_{top} - 2} \ .$$

Lemma 9. *Es gilt* $\boxed{g_{top} = g}$.

Beweis. 1) Es gilt $\Omega_X \cong \mathcal{O}(D)$ mit $deg(D) = 2g_{top} - 2$ (Vergleich der Gradformel für df/f mit einer Triangulierung wie oben). Also wegen *Riemann-Roch*

$$h^0(X, \Omega_X) - h^1(X, \Omega_X) = 2g_{top} - g - 1 \ .$$

2) Aus $h^i(X, \mathcal{L}) = h^i(X, \pi_*\mathcal{L})$ für $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ folgt wegen *Riemann-Roch* auf Y

$$1 - g = deg(det(\pi_*\mathcal{O})) + n \cdot (1 - g_Y)$$

für $n = deg(\pi)$ und $g_Y = 0$. Für $\mathcal{L} = \Omega_X$ folgt analog

$$h^0(X, \Omega_X) - h^1(X, \Omega_X) = deg(det(\pi_*\Omega_X)) + n \cdot (1 - g_Y) \ .$$

3) *Relative Dualität* liefert $det(\pi_*\Omega_X) \cong (\Omega_Y)^n \otimes_{\mathcal{O}_Y} det(\pi_*\mathcal{O}_X)^{-1}$ und damit

$$deg(det(\pi_*\mathcal{O}_X)) + deg(det(\pi_*\Omega_X)) = n \cdot deg(\Omega_Y) \ .$$

Zusammen mit den Formeln in 2) folgt $1 - g + h^0(X, \Omega_X) - h^1(X, \Omega_X) = 0$ und wegen 1) dann $1 - g + (2g_{top} - 2 + 1 - g) = 0$. Also $g = g_{top}$. QED

Korollar 12. *Es gilt* $\boxed{deg(\Omega_X) \ = \ 2g - 2}$.

Cup-Produkt

Für *kompakte orientierte* C^∞-Mannigfaltigkeiten X der Dimension n definiert man das **Cup-Produkt**

$$H^i_{dR}(X) \times H^{n-i}_{dR}(X) \to H^n_{dR}(X) \to \mathbb{C}$$

durch das $\wedge$-Produkt von Differentialformen und anschliessende Integration

$$\boxed{[\omega] \cap [\eta] \ := \ \int_X \omega \wedge \eta}$$

für Representanten ω, η mit $d\omega = 0, d\eta = 0$. [Beachte $\int_X (\omega + d\rho) \wedge \eta = \int_X \omega \wedge \eta$ wegen $\int_X d\rho \wedge \eta = \int_X d(\rho \wedge \eta) = \int_{\partial X} \rho \wedge \eta = 0$ und $\partial X = \emptyset$]. Es gilt

$$[\omega] \cap [\eta] = (-1)^{i(n-i)} \cdot [\eta] \cap [\omega] \ .$$

Für kompakte zshg. Riemannsche Flächen X ist der einzige interessante Fall die *alternierende* Cup-Produkt Paarung

$$H^1_{dR}(X) \times H^1_{dR}(X) \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

Für geschlossene (exakte) komplexwertige 1-Formen ω ist auch die konjugiert komplexe Form $\overline{\omega}$ geschlossen (exakt). Somit ist $[\omega] \mapsto \overline{[\omega]}$ für $\overline{[\omega]} := [\overline{\omega}]$ ein $\mathbb{C}$-antilinearer Automorphismus von $H^1_{dR}(X)$.

Periodenrelationen

Sei $\Omega(X) = H^0(X, \Omega_X)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der holomorphen 1-Formen auf X. Jede Form $\omega \in \Omega(X)$ ist eine geschlossene Form in $A^1(X)$. [Beachte $d\omega = d(f(z)dz) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 0$ wegen der Holomorphie von f (in lokalen Karten; Cauchy-Riemann Differentialgleichungen).] Ihr Repräsentat $\omega \in \Omega(X)$ definiert einen Repräsentanten $[\omega]$ in $H^1_{dR}(X)$]. Dies gibt eine natürliche Abbildung $\Omega(X) \to H^1_{dR}(X)$. Verschwindet die Kohomologieklasse $[\omega]$, dann verschwindet auch ω wegen

$$i[\omega] \cap [\overline{\omega}] = i \int_X \omega \wedge \overline{\omega} \ \geq \ 0$$

mit $= 0$ genau dann wenn $\omega = 0$. [Beachte $if(z)dz \wedge \overline{f(z)dz} = 2|f|^2 dx \wedge dy$ in den lokalen Koordinaten der Karten.] Es folgt $\Omega(X) \hookrightarrow H^1_{dR}(X)$. Ditto für antiholomorphe Formen in $\overline{\Omega(X)}$.

$$\Omega(X) \cap \Omega(X) = 0$$

gilt bezüglich des Cup-Produkts wegen $f(z)dz \wedge f(z)dz = 0$, d.h. $dz \wedge dz = 0$. Die Abbildung $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \to H^1_{dR}(X)$, die $(\omega, \overline{\eta})$ auf $[\omega] + [\overline{\eta}]$ schickt für $\omega, \eta \in \Omega(X)$, ist injektiv und $\mathbb{R}$-linear. Ist nämlich $[\omega]+[\overline{\eta}] = 0$, folgt $i\int_X \omega \wedge \overline{\omega} = i[\omega] \cap [\overline{\omega}] = -i[\omega] \cap [\eta] \in \Omega(X) \cap \Omega(X) = \{0\}$ und damit $\omega = 0$. Analog zeigt man $\eta = 0$.

Periodenrelationen. *Bezüglich der alternierenden Cup-Produkt $\mathbb{C}$-Bilinearform auf $H^1_{dR}(X)$ ist $\Omega(X)$ isotrop*

$$\Omega(X) \cap \Omega(X) = 0 \ .$$

Die hermitesche Paarung

$$\langle \omega, \eta \rangle = i \int_X \omega \wedge \overline{\eta} = i \cdot [\omega] \wedge [\overline{\eta}]$$

ist positiv definit auf $\Omega(X)$ *und es gilt* $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \hookrightarrow H^1_{dR}(X)$.

Hodge Zerlegung

1) Die exakte Garbensequenz $0 \to \mathbb{C}_X \to \mathcal{O}_X \to \Omega_X \to 0$ und $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$ (*Dolbeaut*) liefern auf einer kompakten zshg. Riemannschen Fläche X die exakte Sequenz

$$0 \to \Omega(X) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \Omega_X) \twoheadrightarrow H^2(X, \mathbb{C}_X) \to 0$$

mit $H^2(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}^r$ und[12] $r \geq 1$. Für $B = Bild(H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}))$ zeigt die rechte Seite der exakten Sequenz dann $\dim B = g - (h^1(X, \Omega_X) - r)$.

2) Im Beweis von Lemma 9 wurde gezeigt (*Riemann-Roch*)

$$\dim \Omega(X) = 2g_{top} - g - 1 + h^1(X, \Omega^1) = g + (h^1(X, \Omega^1) - 1) \ .$$

3) Aus der *Definitheit* $\Omega(X) \cap \overline{\Omega(X)} = 0$ (*Periodenrelationen*) folgt $\overline{\Omega(X)} \hookrightarrow B$ mit Hilfe der Sequenz von 1). Somit folgt aus 2) durch komplexe Konjugation

$$\dim(\overline{\Omega(X)}) = g + (h^1(X, \Omega_X) - 1) \leq g - (h^1(X, \Omega_X) - r) = \dim(B) \ ,$$

[12] wegen $H^2(X, \mathbb{C}_X) \cong H^2_{dR}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$; der Endlichkeitssatz $h^1(X, \Omega_X) < \infty$) zeigt $r < \infty$.

Wegen $h^1(X,\Omega_X) - r \geq 0$ nach Schritt 1) und $r \geq 1$ (siehe die letzte Fußnote) folgt aus der letzten Ungleichung $h^1(X,\Omega_X) = 1$ und $r = h^2(X,\mathbb{C}_X) = 1$, sowie dann $\dim(\Omega(X)) = g$ nach Schritt 2).

4) Die exakte Sequenz in 1) vereinfacht sich mit diesen Informationen zu der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \Omega(X) \to H^1(X,\mathbb{C}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to 0\ .$$

Aus $\dim(\Omega(X)) = g$ und $\dim(H^1(X,\mathcal{O}_X)) = g$ folgt daher[13]

$$\boxed{h^1(X,\mathbb{C}_X) = 2g}\ .$$

Insgesamt folgt daher aus Dimensionsgründen mit Hilfe der schon gezeigten Periodenrelationen die

Hodge Zerlegung. *Für kompakte Riemannsche Flächen X gilt*

$$\boxed{H^1_{dR}(X) = \Omega(X) \oplus \overline{\Omega(X)}\ \cong H^1(X,\mathbb{C}_X)}\ .$$

$\Omega(X)$ ist <u>maximal isotrop</u> bezüglich des alternierenden Cup-Produkts und es gilt

$$\boxed{\dim(\Omega(X))\ =\ g}\ .$$

Weiterhin gilt

$$\boxed{H^1(X,\Omega_X) \cong H^2(X,\mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}}\ .$$

[13]Dies zeigt auch $2 - 2g = \chi(X) := \sum_\nu (-1)^\nu \dim_{\mathbb{C}}(H^\nu(X,\mathbb{C}_X)) = 1 - 2g + 1$.

Differentiale dritter Gattung

Eine meromorphe Differentialform heisst *Differential dritter Gattung*, wenn sie nur einfache Polstellen besitzt. Sei $\Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ der Raum der Differentiale dritter Gattung auf X, deren Residuen ganzzahlig sind. Man hat eine exakte (!) Sequenz

$$0 \to \mathbb{C}_X^* \to \mathcal{M}_X^* \to \Omega_{3rd,\mathbb{Z}} \to 0\ ,$$

deren rechte Abbildung durch die logarithmische holomorphe Ableitung ∂log definiert ist. Für $f \in \mathcal{M}^*(X)$ ist $\partial log(f) = \frac{df}{f}$ in $\Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$; die Residuen sind die Pol/Nullstellen-Vielfachheiten von f. Eine Funktion $G \in M(X)$ nennt man eine **logarithmische Stammfunktion** von $\omega = g(z)dz$, wenn gilt

$$\partial log(G) := \frac{G'(z)}{G(z)}dz = g(z)dz\ .$$

Lokal existiert eine logarithmische Stammfunktion genau dann, wenn die Residuen von ω ganzzahlig sind [Setze $G(z) = exp(\int_{z_0}^{z} \omega)$ und reduziere auf $\omega = n\frac{dz}{z}$ für $n \in \mathbb{Z}$].

Lemma 10. *Sei X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche. Die Obstruktion $\delta(\omega)$ für die Existenz einer meromorphen logarithmischen Stammfunktion G zu einer gegebenen Differentialform $\omega \in \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ liegt in der abelschen Gruppe $H^1(X, \mathbb{C}^*)$*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow M^*(X) \xrightarrow{\partial log} \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C}^*) \longrightarrow 0$$

Beweis. Dazu genügt $H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0$. Diese Aussage kann reduziert[14] werden auf $H^1(X, Div_X) = 0$ durch Vergleich der Kohomologie der beiden horizontalen exakten (!) Garbensequenzen des Diagrams

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Omega_X \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}_X^* \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & \mathcal{M}_X^* \arrow[r, "\partial log"] \arrow[d, equal] & \Omega_{3rd,\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d, "res"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X^* \arrow[r] & \mathcal{M}_X^* \arrow[r, "(.)"] & Div_X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[14] Benutze z.B. das kofinale System aller endlichen Überdeckungen von X und geeignete Schrumpfungen, um diese Aussage auf das Verschwinden $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ für einzelne Wolkenkratzergarben $\mathcal{G}$ mit Werten in A im Punkt $x \in X$ zurückzuführen!

Hierbei ist $res(\omega) = \sum_{x \in X} res_x(\omega) \cdot [x]$. Beachte $res(\partial log f) = (f)$ in $Div(X)$. Die Garbe Div_X der Divisoren auf X ordnet jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ die Gruppe $Div_X(U)$ der formalen Summen $D = \sum_{x \in U} n_x \cdot x$ mit $n_x \in \mathbb{Z}$ zu, für die der Träger von D endlichen Durchschnitt mit jedem Kompaktum von U besitzt. Beachte, auch die rechte vertikale Garbensequenz ist exakt!

Die exakten Kohomologiesequenzen geben

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^*(X)/\mathbb{C}^* \arrow[r, hook, "\partial \log"] \arrow[d, equal] & \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[d, "res"] & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \arrow[r] \arrow[d, "H^1(i)"] & H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{M}^*(X)/\mathbb{C}^* \arrow[r, hook] & Div(X) \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[d, "\ell"] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \arrow[r] & H^1(X, Div_X) \\
& H^1(X, \Omega_X) \cong \mathbb{C} & & &
\end{tikzcd}$$

Wegen[15] $Cl(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ und $H^1(X, Div_X) = 0$ folgt aus der unteren exakten Sequenz $H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0$. Die Aussage des Lemmas folgt damit aus der oberen horizontalen exakten Sequenz. QED

Die vertikale Sequenz im letzten Diagramm zeigt wegen $H^1(X, \Omega_X) \cong \mathbb{C}$ (Hodge Zerlegung) die Existenz einer additiven Abbildung $\ell : Div(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, so dass jeder Divisor von $Kern(\ell)$ im Bild von res liegt. Nun gilt aber $\sum_x res_x(\omega) = 0$ für jede Form $\omega \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ [Benutze eine geeignete Triangulierung von X]. Daraus folgt sofort $\ell(D) = c \cdot deg$ für ein $c \in \mathbb{C}^*$.

Korollar 13. *Für kompakte zshg. Riemannsche Flächen hat man exakte Sequenzen*

$$\boxed{0 \to \Omega(X) \to \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \to Div(X)^0 \to 0}\ .$$

[15]Die Abbildung $Div(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, welche D auf die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}(-D)$ abbildet, ist die Randabbildung $\delta : Div(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ der langen Kohomologiesequenz gebildet zur kurzen exakten Garbensequenz $0 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{M}_X^* \to Div_X \to 0$ [Für $f, g \in M(X)^*$ gilt: $(f) = (g) \Leftrightarrow f/g \in \mathbb{C}^*$]. Der Verbindungsmorphismus induziert daher einen Isomorphismus

$$\boxed{Cl(X) \xrightarrow[\sim]{\delta} Pic(X)}$$

welcher die Klasse von $D \in Div(X)$ auf die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}_X(-D)$ in $Pic(X)$ abbildet. Siehe auch Korollar 4.

Für jeden Divisor D vom Grad $deg(D) = 0$ gibt es also eine Form $\omega \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ mit $res(\omega) = D$. Insbesondere existiert für $P, Q \in X$ ein Differential ω_{PQ} dritter Gattung mit Residuum $-P + Q$ (d.h -1 bei P und $+1$ bei Q), das eindeutig ist bis auf eine Form in $\Omega(X)$:

$$\boxed{\exists \omega \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \quad , \quad res(\omega_{PQ}) = P - Q} \, .$$

Korollar 14. *Für kompakte zshg. Riemannsche Flächen X induziert die Inklusion $i : \mathbb{C}_X^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X^*$ eine exakte Sequenz*

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \xrightarrow{H^1(i)} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0} \, .$$

Beweis. Nach Korollar 13 ist $Pic^0(X) := Kern(deg : Pic(X) \to \mathbb{Z})$ das Bild von $\delta \circ res$. Die Behauptung folgt daher aus $\delta \circ res = H^1(i) \circ \delta$. QED

Additive versus Multiplikative Theorie

Im letzten Abschnitt wurden Differentiale ω_{PQ} dritter Gattung auf kompakten Riemannschen Flächen konstruiert, deren Pole in vorgegebenen Punkten P, Q von X liegen. Wir nehmen jetzt an[16], *P liege nahe genug bei Q.*

Nach dem *Satz von Cauchy* (für $j \geq 2$) resp. dem *Residuensatz* für $j = 1$ existieren dann mit den Bezeichnungen der letzten Fußnote *holomorphe* Stammfunktionen

$$g_j(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P_j}^{x} \omega_{PQ} \quad , \quad j = 1, 2, .., k$$

mit $g_j \in \mathcal{O}\big(U_j \cap (X - \overline{PQ})\big)$, da ω_{PQ} holomorph ist auf $X - \{P, Q\}$. Es gilt $2\pi i \cdot \partial g_j = \omega_{PQ}$ auf der geschlitzten Riemannschen Fläche $X - \overline{PQ}$. Somit definiert $G_j(x) = exp(2\pi i g_j(x))$ logarithmische Stammfunktionen von ω_{PQ} auf $U_j - \overline{PQ}$. Wegen der Wahl der Überdeckung sind die Funktionen $res_{U_j}^{U_j \cap U_{j'}}(G_j)$ holomorph auf $U_j \cap U_{j'}$ für *alle Paare $j \neq j'$*, da $\overline{PQ}$ in keinem der Durchschnitte $U_j \cap U_{j'}$ für $1 \leq j \neq j' \leq k$ enthalten ist.

[16] Damit meinen wir, es gebe eine lokale Karte U_1 biholomorph zum Einheitskreis $\mathbb{E}$ so, dass die Bilder von P, Q und damit deren Verbindungsgerade $\overline{PQ}$ im Kreis $\frac{1}{2}\mathbb{E}$ vom Radius $< 1/2$ liegen. Wir überdecken dann die kompakte Riemannsche Fläche X durch U_1 und endlich viele weitere *einfach zusammenhängende* Karten $U_j, j = 2, 3, ...$ Für $\mathcal{U} = \{U_1, .., U_k\}$ nehmen wir an, alle U_j für $j \geq 2$ seien disjunkt zum Bild von $\frac{1}{2}\mathbb{E}$ in U_1. Wir wählen Stützpunkte $P_j \in U_j$ mit $P_1 \notin \overline{QP}$.

Folgerung. *Für die Randabbildung $\delta : \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \to H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{C}^*_X)$ bzw. die induzierten Abbildung $\delta : \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \to H^1(X, \mathbb{C}^*_X)$ von Seite 45 ist*

$$\delta(\omega_{PQ}) \in H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{C}^*)$$

nach Definition der Randabbildung δ representiert durch den 1-Kozykel

$$\delta(\omega_{PQ})\big(U_j \cap U_{j'}\big) = \frac{res^{U_j \cap U_{j'}}_{U_j}(G_j)}{res^{U_j \cap U_{j'}}_{U_{j'}}(G_{j'})} \quad \in \quad \mathbb{C}^*_X(U_j \cap U_{j'}) \ .$$

Beweis. Die Werte liegen in $\mathbb{C}^*(U_j \cap U_{j'})$, da zwei logarithmische Stammfunktionen sich lokal nur um eine Konstante in $\mathbb{C}^*$ unterscheiden. QED

Proposition 3. *Für Punkte P nahe genug bei Q einer kompakten Riemannschen Fläche X existiert eine geschlossene 1-Form $\eta_{PQ} \in A^1(X)$, deren Bild $\delta([\eta_{PQ}])$ in $H^1_{dR}(X, \mathbb{C}) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)$ unter dem Verbindungshomomorphismus*[17] *von der 'Exponentialabbildung' $H^1(exp(2\pi i -))$ abgebildet wird auf das Bild $\delta(\omega_{PQ}) \in H^1(X, \mathbb{C}^*)$ der meromorphen Differentialform $\omega_{PQ} \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ unter dem Verbindungshomomorphismus*[18] *$\delta : \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \to H^1(X, \mathbb{C}^*_X)$.*

$$\begin{array}{ccc}
[\eta_{PQ}] \ \in H^1_{dR}(X) = \frac{Kern(d: A^1(X) \to A^2(X))}{dA^0(X)} & \xrightarrow[\sim]{\delta} & H^1(X, \mathbb{C}_X) \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle H^1(exp(2\pi i -))} \\
\omega_{PQ} \ \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathbb{C}^*_X)
\end{array}$$

Für die Abbildungen δ des Diagramms verweisen wir auf Seite 13 und 45.

Beweis. Die Klasse $\delta(\omega_{PQ})$ wird repräsentiert durch den 1-Kozykel $G_j/G_{j'}$ mit $G_j = exp(2\pi i \cdot g_j)$ für die holomorphen Funktionen g_j, definiert auf dem Durchschnitt von U_j mit der geschlitzten Riemannschen Ebene $X - \overline{PQ}$. Wähle eine Abschneidefunktion $\phi \in C^\infty_c(U_1)$, welche Werte ≥ 0 hat und ausserhalb von $\frac{1}{2}\mathbb{E}$ und damit in den $U_j, j \geq 2$ verschwindet sowie auf dem Schlitz $\overline{PQ}$ identisch 1 ist. Setze $f_1 = (1 - \phi)g_1 \in C^\infty(U_1)$ sowie $f_j = g_j$ für $j \geq 2$. Dann verheftet sich

$$\eta_{PQ}|U_j \ := \ 2\pi i \cdot d(f_j(x)) \in \mathcal{A}^1_{closed}(U_j)$$

[17] siehe Seite 14.

[18] wie im Beweis von Lemma 10; siehe letzte Fußnote.

zu einer geschlossenen globalen 1-Form auf X und es gilt

$$\eta_{PQ} = \omega_{PQ} \quad \text{auf} \quad \bigcup_{j\geq 2} U_j \ .$$

Da der Träger der Abschneidefunktion ϕ disjunkt zu den Durchschnitten $U_j \cap U_{j'}$ ist für $j \neq j'$, gilt für den 1-Kozykel $\delta([\eta_{PQ}])_{jj'} = (f_j(x) - f_{j'}(x))_{jj'} = (g_j(x) - g_{j'}(x))_{jj'} \in \mathbb{C}$ auf $U_j \cap U_{j'}$. Daraus folgt wie behauptet

$$\delta([\eta_{PQ}])_{jj'} = (g_j(x) - g_{j'}(x))_{jj'} \xmapsto{exp(2\pi i -)} \delta(\omega_{PQ})_{jj'} \ .$$

Lemma 11. *Sei X ein zshg. kompakte Riemannsche Fläche und $\omega \in \Omega(X)$. Für Punkte P, Q in X sei $\eta_{PQ} \in A^1(X)$ die in der letzten Proposition 3 konstruierte geschlossene 1-Form auf X. Dann gilt für das Cup-Produkt*

$$\boxed{[\eta_{PQ}] \cap [\omega] \ = \ \int_X \eta_{PQ} \wedge \omega \ = \ \int_Q^P \omega} \ .$$

Beweis. Für geeignete kleine offene Umgebungen U_ε der Schlitzgerade $\overline{PQ}$ gilt

$$\int_X \eta_{PQ} \wedge \omega \ = \ lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X - U_\varepsilon} \eta_{PQ} \wedge \omega \ .$$

Außerhalb von U_1 stimmt $\eta = \eta_{PQ}$ mit der meromorphen 1-Form $\omega_{P,Q} \in \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ überein und auf U_1 zumindestens bis auf den Term $-d(\phi(z)g_1(z))$. Auf Grund von $dz \wedge dz = 0$ und $d\omega = 0$ gilt daher

$$\int_{X-U_\varepsilon} \eta_{PQ} \wedge \omega \ = \ \int_{U_1 - U_\varepsilon} d(-\phi g_1) \cdot \omega \ = \ \int_{U_1 - U_\varepsilon} d(-\phi g_1 \cdot \omega) \ .$$

Da ϕ kompakten Träger in U_1 hat, ist dieses Integral gleich $-\oint_\varepsilon \phi g_1 \omega$ (Stokes). Integration erfolgt über den Rand von U_ε in X im Uhrzeigersinn! Ist ε klein genug, wird $\phi = 1$ auf der Kontur. Im Limes $\varepsilon \to 0$ strebt das Konturintegral daher gegen

$$-\int_Q^P g_1(z^+)\omega(z) + \int_Q^P g_1(z^-)\omega(z) \ .$$

ω ist holomorph auf U_1 im Komplement der Schlitzgerade $\overline{PQ}$. Nähert man sich einem Punkt z des Schlitzes von 'oben' im Punkt z^+ beziehungsweise von 'unten'im Punkt z^-, so gilt im Limes $g_1(z^+) = g_1(z^-) + res_{z=P} \frac{-dz}{(z-P)}$. Es folgt $g_1(z^+) = g_1(z^-) - 1$, und daraus wie behauptet $\int_X \eta_{P,Q} \wedge \omega = \int_Q^P \omega$. QED

Chernklasse versus Grad

Die exakte Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp(2\pi i-)} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

definiert die erste **Chernklasse**, d.h. den Homomorphismus

$$c_1 : Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}_X) \ .$$

Korollar 15. *Es gilt* $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ *und* $Kern(c_1 : Pic(X) \to \mathbb{Z}) = Pic^0(X)$.

Beweis. Betrachte das folgende Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{C}_X \arrow[r, "exp(2\pi i-)"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{C}_X^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_X \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "exp(2\pi i-)"] & \mathcal{O}_X^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und das daraus folgende Kohomologie-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^1(X, \mathbb{C}_X) \arrow[r, two heads, "exp(2\pi i-)"] \arrow[d] & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \arrow[r] \arrow[d, "H^1(i)"] & H^2(X, \mathbb{Z}_X) \arrow[d, equal] & \\
H^1(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "exp(2\pi i-)"] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r, two heads, "c_1"] & H^2(X, \mathbb{Z}_X) \arrow[r] & H^2(X, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

$c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}_X)$ ist surjektiv wegen $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (Dolbeaut). Nach Proposition 3 ist $H^1(exp(2\pi i-)) : H^1(X, \mathbb{C}_X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ surjektiv[19].

Nach Korollar 14 ist das Bild von $H^1(i)$ in $Pic^0(X) \subset Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Da in der oberen Zeile das Bild von $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ in $H^2(X, \mathbb{Z})$ verschwindet, folgt durch eine Diagrammjagd $c_1(Pic^0(X)) = 0$. Somit ist $H^2(X, \mathbb{C}_X)$ als Quotient von $\mathbb{Z} = Pic(X)/Pic^0(X)$ ein zyklischer $\mathbb{Z}$-Modul.

Wegen[20] $H^2(X, \mathbb{Z}_X) \otimes \mathbb{C} = H^2(X, \mathbb{C}_X) = \mathbb{C}$ folgt daraus $H^2(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}$. QED

[19]Punkte $P, Q \in X$, die nahe beieinander liegen, erzeugen $Div(X)$. Daher erzeugen die Differentiale $\omega_{P,Q}$ den Raum $\Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)/\Omega^1(X)$. Die Klassen $\delta(\omega_{P,Q})$ erzeugen wie im letzen Abschnitt gezeigt $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$, denn die Randabbildung $\delta : \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ ist surjektiv (Lemma 10). Aber $\exp(2\pi i\delta([\eta_{PQ}])) = \delta(\omega_{PQ})$ für $\delta([\eta_{PQ}]) \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$ gilt nach Proposition 3. Daher ist $H^1(X, \mathbb{C}_X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$ surjektiv.

[20]Der Funktor $\otimes\mathbb{C}$ von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen ist ein exakter Funktor. Dies zeigt $H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z}_X) \otimes \mathbb{C} = H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{C}_X)$ für alle i.

Lemma 12. *Für eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche gilt* $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

Beweis. Mit der exakten Garbensequenz $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \to 0$ zeigt man die Injektivität von $p \cdot id : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \to H^1(X, \mathbb{Z}_X)$. Aus den Isomorphismen $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \otimes \mathbb{C} \cong H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathbb{C}^{2g}$ (siehe Fußnote 18) folgt daher die Behauptung. QED

Die Jacobische Varietät $J(X)$

Sei X eine kompakte zsgh. Riemannsche Fläche. Die Inklusion $j : \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ induziert $H^1(j) : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ und der Kokern

$$\boxed{J(X) \ = \ H^1(X, \mathbb{Z}_X) \backslash H^1(X, \mathcal{O}_X)}$$

definiert die **Jacobische Varietät** $J(X)$ von X. Die Exponentialsequenz und die Aussage $Pic^0(X) = Kern(c_1 : Pic(X) \to H^2(X, \mathbb{Z}_X))$ von Lemma 11 definieren einen Gruppenisomorphism

$$\boxed{Pic^0(X) \cong J(X)} \ .$$

Die Zuordnung $X \mapsto J(X)$ definiert einen **kontravarianten Funktor**: Jede holomorphe Abbildung $\pi : X \to Y$ zwischen kompakten zshg. Riemannschen Flächen induziert eine Homomorphismus

$$\boxed{J(\pi) : J(Y) \to J(X)} \ .$$

Alternative Beschreibung. Die Struktur des Quotienten von $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}^g$ nach der Untergruppe, die durch das Bild von $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ unter $H^1(j)$ gegeben wird, wird erst später klar. (Siegelscher Halbraum). Deshalb benutzen wir eine andere Beschreibung der Jacobischen Varietät $J(X)$, z.B in Form des *isomorphen Quotienten*[21]

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) \backslash H^1(X, \mathbb{C}_X) / \ \Omega(X) \ .$$

[21] Dazu benutzen wir den Isomorphismus $H^1(X, \mathbb{C}_X)/\delta(\Omega(X)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (siehe Schritt 1) im Abschnitt Hodge Zerlegung). Dies erlaubt es die Abbildung $H^1(j) : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ durch die Abbildung $H^1(i) : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X)$, welche induziert ist von der Inklusion $i : \mathbb{Z}_X \to \mathbb{C}_X$, zu ersetzen. Allerdings erfordert dies die Beschreibung der Periodenabbildung $\delta : \Omega(X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X)$. Um dies zu vermeiden (und deshalb unterdrücken wir auch die Erwähnung der Abbildung δ) benutzt man das Cup-Produkt und die Isotropie von $\Omega(X)$.

Wir fixieren nun eine $\mathbb{C}$-Basis $\omega_1, ..., \omega_g$ von $\Omega(X)$ und betrachten dann die vom Cup-Produkt induzierte Abbildung, welche die Klasse $[\eta] \in H^1_{dR}(X)$ auf den Vektor $([\eta] \cap [\omega_1], \cdots, [\eta] \cap [\omega_g])$ in $\mathbb{C}^g$ abbildet, sowie die induzierte $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\alpha : H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong H^1_{dR}(X) \to \mathbb{C}^g \ ,$$

Nach Lemma 11 gilt dann

$$\alpha([\eta]) \ = \ (\int_P^Q \omega_1, \cdots, \int_P^Q \omega_g) \ \in \mathbb{C}^g \ .$$

Der Kern von α ist isomorph zu dem maximal isotropen Unterraum von $H^1_{dR}(X)$ der von $\Omega(X)$ erzeugten Klassen unter dem Isomorphismus $\overline{\delta} : H^1_{dR}(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Omega(X) \arrow[r, hook, "\delta"] \arrow[d, hook] & H^1(X, \mathbb{C}_X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & A^0_X(X) \arrow[r, "d"] & A^1_X(X) \arrow[r, two heads, "\delta"] & H^1(X, \mathbb{C}_X) & &
\end{tikzcd}$$

und α induziert daher einen Isomorphismus $H^1(X, \mathbb{C}_X)/\Omega(X) \cong \mathbb{C}^g$. Das Gitter $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ in $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ wird unter α auf eine isomorphe Untergruppe $\Gamma := \alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X))$ von $\mathbb{C}^g$ abgebildet[22]. Man erhält damit

$$\overline{\alpha} : H^1(X, \mathbb{Z}_X) \backslash H^1(X, \mathbb{C}_X) / \ \Omega(X) \ \cong \ \mathbb{C}^g / \Gamma \ .$$

Die Komposition der Isomorphismen $Pic^0(X) \cong J(X) \cong \mathbb{C}^g/\Gamma$ definiert daher einen *Gruppenisomorphismus* $Pic^0(X) \to \mathbb{C}^g/\Gamma$. Mit dem Isomorphismus $\delta : Cl(X) \cong Pic(X)$ aus Fußnote 10 ergibt sich das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Pic^0(X) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & Pic(X) \arrow[r, "c_1"] & H^2(X, \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\
& \mathbb{C}^g/\Gamma & & & \\
0 \arrow[r] & Cl^0(X) \arrow[r] \arrow[u, "\sim", "\beta"'] & Cl(X) \arrow[r, "deg"] \arrow[uu, "\sim", "\delta"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[uu, "\sim"] & 0
\end{tikzcd}$$

Satz von Abel-Jacobi: *Für eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche X und einen beliebigen Punkt Q auf X gilt:*

[22] α ist injektiv auf $H^1(X, \mathbb{Z}_X)$, denn $H^1(X, \mathbb{R}_X) \cap \Omega(X) \subseteq \overline{\Omega}(X) \cap \Omega(X) = \{0\}$.

(i) Jede Divisorklasse in $Cl^0(X)$ besitzt einen Repräsentant von der Form $(P_1 - Q) + \cdots + (P_g - Q)$ für geeignete Punkte $P_1, \cdots, P_g$ aus X.

(ii) Der <u>Isomorphismus</u> $\beta : Cl^0(X) \longrightarrow \mathbb{C}^g/\Gamma$ wird konkret beschrieben durch

$$\beta(Q - P) \;=\; \left(\int_Q^P \omega_1, \cdots, \int_Q^P \omega_g\right) \; mod\, \Gamma \; .$$

Modulo Γ hängen die Integrale nicht von der Wahl des Integrationsweges von P nach Q auf X ab (siehe auch Fußnote 22).

Beweis. Teil (i) folgt aus dem Satz von Riemann-Roch. Für einen Divisor D vom Grad Null gilt $h^0(X, \mathcal{O}_{D+gQ}) = 1 - g + deg(D + gQ) + h^1 = 1 + h^1 \geq 1$. Somit existiert ein nichttrivialer Schnitt f mit $D + gQ + (f) \geq 0$ beziehungsweise

$$D + gQ + (f) = Q_1 + ... + Q_g \; ,$$

da der Grad der linken Seite gleich g ist. Dies zeigt (i).

Die Aussage (ii) genügt es – durch additive Fortsetzung entlang eines Verbindungsweges zwischen P und Q – für nahe beieinander liegende Punktepaare P, Q zu zeigen. Für solche kann man $\beta(Q - P)$ wie folgt berechnen:

Berücksichtigt man alle auftretenden Identifikationen und Abbildungen[23]

$$\begin{tikzcd}
H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \arrow[l, "H^1(i)"'] & H^1(X, \mathbb{C}_X) \arrow[l, "H^1(exp(2\pi i -))"'] \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{C}^g \arrow[dd, "pr"] \\
& \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \arrow[u, "\delta"'] \arrow[ul, "\delta\circ res"] \arrow[dl, dotted] & & \\
Pic^0(X) \arrow[uu, hook] & & H^1_{dR}(X) \arrow[ll] \arrow[uu, "\sim"', "\delta"] \arrow[r] & \mathbb{C}^g/\Gamma
\end{tikzcd}$$

[23]Der Divisor $Q - P$ ist das Residuum $res(\omega_{PQ})$ des Differentials $\omega_{PQ} \in \Omega_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$. Nach dem ersten Diagram im Beweis von Lemma 10 ist das Bild $\delta(Q - P)$ in $Pic^0(X)$ das Bild unter $H^1(i)$ von $\delta(\omega_{PQ}) \in H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$. Nach Proposition 3 ist $\delta(\omega_{PQ}) = H^1(exp(2\pi i -))(\delta([\eta_{PQ}]))$ für $\delta([\eta_{PQ}]) \in H^1(X, \mathbb{C}_X)$. Identifiziert man $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ mit $H^1_{dR}(X)$, entspricht dies der Form $\eta_{PQ} \in H^1_{dR}(X)$. Dies erlaubt es $\alpha(\delta(\eta_{PQ}))$ durch die Cup-Produkte $[\eta_{PQ}] \wedge [\omega_i]$ für $i = 1, ..., g$ zu berechnen. Nach Lemma 11 erhält man $\alpha(\delta(\eta_{PQ})) = (\int_Q^P \omega_1, ..., \int_Q^P \omega_g)$. Auf der anderen Seite ist $H^1(i)(\delta(\omega_{PQ})) = H^1(i \circ exp(2\pi i -))(\delta([\eta_{PQ}]))$.

folgt aus den Diagrammen von Proposition 3 und Lemma 11, daß $\eta_{PQ} \in H^1_{dR}(X)$ nach rechts auf $(\int_Q^P \omega_1, ..., \int_Q^P \omega_g)$ mod Γ in $\mathbb{C}^g/\Gamma$ abgebildet wird und nach links auf $\delta(Q-P) \in Pic^0(X)$ als Bild von ω_{PQ}. Andererseits entspricht $\delta(Q-P)$ der Divisorenklassen von $Q-P$ in $Cl^0(X)$. Dies beweist Aussage (ii). QED

Die Albanese Varietät $Alb(X)$

Sei X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche und sei $x_0 = Q \in X$ ein fixierter Punkt. Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ die *Periodengruppe* aller $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\Omega(X) \to \mathbb{C}$ definiert für $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ durch $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$. Setze

$$\boxed{Alb(X, x_0) := \Omega(X)^*/\Lambda} \ .$$

Die Zuordnung $(X, x_0) \mapsto Alb(X, x_0)$ definiert einen **kovarianter Funktor**: Jede holomorphe Abbildung $\pi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwischen kompakten zshg. Riemannschen Flächen mit $y_0 = \pi(x_0)$ induziert einen Homomorphismus

$$\boxed{Alb(\pi) : Alb(X, x_0) \to Alb(Y, y_0)} \ .$$

1) Im folgenden betrachten wir unsere fixierte Basis $\omega_1, .., \omega_g$ von $\Omega(X)$ und beschreiben $Alb(X, x_0)$ oBdA durch den isomorphen Quotienten

$$\boxed{Alb(X) := \mathbb{C}^g/\Lambda} \ ,$$

wobei wir $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ auffassen als die Untergruppe aller Vektoren $(\int_\gamma \omega_1, ..., \int_\gamma \omega_1)$ definiert durch die Wege $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$.

2) Die Abbildung $(x_1, ..., x_g) \mapsto (\sum_{i=1}^g \int_{x_0}^{x_i} \omega_1, \cdots, \sum_{i=1}^g \int_{x_0}^{x_i} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$ ist wohldefiniert mod Λ, und definiert eine holomorphe Abbildung

$$alb_g : X^g \longrightarrow Alb(X) \ .$$

3) Andererseits sei

$$cl : X^g \longrightarrow Cl(X)^0$$

definiert durch $cl(x_1, ..., x_g) = \sum_{i=1}^g (x_i - x_0)$. Die Abbildung cl ist *surjektiv* nach dem Satz von Abel-Jacobi (i). Der Satz von Abel-Jacobi (ii)[24] liefert uns die untere vertikale und die rechte vertikale Abbildung des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd} X^g \arrow[rr, two heads, "alb_g"] \arrow[d, "cl"'] & & \mathbb{C}^g/\Lambda \arrow[d, "pr"] \\ Cl(X)^0 \arrow[urr, "\lambda"'] \arrow[rr, "\sim", "\beta"'] & & \mathbb{C}^g/\Gamma \end{tikzcd}$$

für $\Gamma = \alpha(H^1(X, \mathbb{Z}_X))$.

4) Wir definieren jetzt einen *Gruppenhomomorphismus*

$$\lambda : Cl(X)^0 \longrightarrow Alb(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda \ ,$$

der auf den erzeugenden Divisorenklassen $x - x_0 \in Div^0(X)$ gegeben ist durch

$$\lambda(x - x_0) = (\int_{x_0}^{x} \omega_1, \cdots, \int_{x_0}^{x} \omega_g) \mod \Lambda$$

und der offensichtlich $\beta = pr \circ \lambda$ erfüllt. Der entscheidende Punkt ist die

Wohldefiniertheit: λ definiert auf $Div(X)^0$ wie oben bildet Hauptdivisoren auf Null ab. Für jeden Hauptdivisor (f) findet man einen 'Weg' γ mit Anfangspunkten in den Polstellen und Endpunkten in den Nullstellen (eindeutig bis auf geschlossene Wege) mit $\int_\gamma \omega + \oint \omega = \int_{\overline{\infty,0}} Tr(\omega) = 0$ wegen $Tr(\omega) \in \Omega(P^1(\mathbb{C})) = \{0\}$. Wegen $\oint \omega \in \Lambda$ folgt die Wohldefiniertheit aus $\lambda((f)) = \int_\gamma \omega$ mod Λ.

5) Die Abbildungen β, λ und pr sind *Gruppenhomorphismen* und $s = \lambda \circ \beta^{-1}$ definiert einen Schnitt der Surjektion $pr : \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}^g/\Gamma$, d.h. es gilt $pr \circ s = id$. Also zerfällt $\mathbb{C}^g/\Lambda = Kern(pr) \oplus s(\mathbb{C}^g/\Gamma)$ als abelsche Gruppe. Durch Vergleich

[24] Die Formel in Teil (ii) des Satzes von Abel-Jacobi gilt a priori nur für Punkte P, Q, die nahe beieinander liegen. Da man je zwei Punkte auf X durch einen Weg verbinden kann und jeden solchen Weg in Stücke zerlegen kann, deren Enden nahe genug beieinander liegen, gilt durch Aufaddieren die Formel von Teil (ii) des Satzes von Abel-Jacobi für alle Punkte P, Q aus X und alle Verbindungswege von P nach Q. Das zeigt insbesondere, daß das Ergebnis nicht von der Wahl des Verbindungsweges abhängt. Die Mehrdeutigkeit der Integrale $\int_Q^P \omega$ wird durch die Gruppe Λ beschrieben. Daraus folgt $\Lambda \subseteq \Gamma$ und damit insbesondere $rang(\Lambda) \leq rang(\Gamma)$, und die natürliche Projektion $pr : \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}^g/\Gamma$ macht das nachfolgende Diagramm kommutativ.

der p-Torsionsgruppen folgt für jede Primzahl p aus $Kern(pr) = \Gamma/\Lambda$ die Beziehung $p^{rang(\Lambda)} = \#(\Gamma/\Lambda)[p] \cdot p^{rang(\Gamma)}$. Wegen $rang(\Lambda) \leq rang(\Gamma)$ folgt daraus $rang(\Lambda) = rang(\Gamma)$ und $\#(\Gamma/\Lambda)[p] = 1$. Ersteres zeigt, dass Γ/Λ eine endliche Gruppe ist, und $\#(\Gamma/\Lambda)[p] = 1$ für alle Primzahlen p zeigt dann $\Gamma = \Lambda$.

Proposition 4. *Die Gruppen $\Gamma = \alpha(H^1(X,\mathbb{Z}))$ und Λ stimmen überein, d.h.*

$$\boxed{\alpha(H^1(X,\mathbb{Z})) \; = \; \left\langle \; \left(\oint_\gamma \omega_1, ..., \oint_\gamma \omega_g\right) \; \textit{für } \gamma \in \pi_1(X,x_0) \; \right\rangle} \, .$$

Genauer: Es gibt einen Gruppenisomorphismus[25]

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} H^1(X,\mathbb{Z}) \qquad , \qquad \gamma \longmapsto \eta_\gamma$$

derart, daß für alle $\omega \in A^1(X)$ mit $d\omega = 0$ gilt

$$\oint_\gamma \omega = \int_X \eta_\gamma \wedge \omega \, .$$

Hierbei fassen wir η_γ via $H^1(X,\mathbb{Z}) \subset H^1(X,\mathbb{C}) \cong H^1_{dR}(X)$ als geschlossene 1-Form in $A^1(X)$ auf modulo exakten 1-Formen in $d(A^0(X))$.

Beweis. Die Aussage $\Gamma = \Lambda$ wurde bereits gezeigt. Per Definition zeigt dies die Existenz einer Klasse η_γ in $H^1(X,\mathbb{Z}_X)$ mit $\oint_\gamma \omega = \int_X \eta_\gamma \wedge \omega$ für alle $\omega \in \Omega(X)$. Durch komplexe Konjugation gilt diese Formel dann auch für alle $\omega \in \overline{\Omega(X)}$. Für exakte Formen $\omega \in A^1(X)$ ist die Formel trivialerweise richtig, denn beide Seiten sind Null. Da $\Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega}^1(X) \oplus dA^0(X)$ der Raum aller geschlossen Formen in $A^1(X)$ ist (Hodge Zerlegung), folgt damit auch die zweite Aussage. QED

Korollar 16. *Die Projektion pr induziert einen biholomorphen Isomorphismus komplexer Tori zwischen der Albanese und der Jacobi Varietät*

$$\boxed{Alb(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda \; \cong \; \mathbb{C}^g/\Gamma \cong J(X)} \, .$$

$Alb(X,x_0) \cong J(X)$ hängt bis auf Isomorphie nicht von der Wahl der auxiliären Basis $\omega_1, .., \omega_g$ von $\Omega(X)$ oder des Basispunktes x_0 ab.

[25] Λ ist ein Quotient von $\pi_1(X,x_0)$.

X^g als auch $Alb(X)$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension g und die Abbildung $alb_g : X^g \to Alb(X)$ ist offensichtlich *holomorph*. Aus Korollar 16 und der Surjektivität von cl und β folgt, daß alb auch *surjektiv* ist.

Poincare Dualität

Für eine kompakte zshg. Riemannsche Fläche X wurde in Proposition 4 gezeigt, daß für jede de Rham Kohomologieklasse η, die unter dem Vergleichsisomorphismus $H_{dR}(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}_X)$ in der Untergruppe $H^1(X, \mathbb{Z})$ liegt, eine geschlossene Kurve γ in X existiert derart, daß für die Klasse $\eta = \eta_\gamma$ gilt

$$\oint_\gamma \omega = \int_X \eta_\gamma \wedge \omega$$

für alle $\omega \in A^1(X)$ mit $d\omega = 0$ und umgekehrt für jedes $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ ein solches $\eta_\gamma \in H^1(X, \mathbb{Z})$ existiert. Andererseits haben wir das nichtausgeartete alternierende Cup-Produkt

$$\eta \cap \omega = \int_X \eta \wedge \omega$$

auf der de Rham Kohomologie $H^1_{dR}(X)$ und damit auch auf $H^1(X, \mathbb{C})$.

Lemma 13. *Die Einschränkung der alternierenden Cup-Produkt Paarung von $H^1(X, \mathbb{C})$ auf $H^1(X, \mathbb{Z})$ ist ganzzahlig.*

Beweis. Zu zeigen ist $[\eta_\gamma] \cap [\eta_{\gamma'}] = \int_X \eta_\gamma \wedge \eta_{\gamma'} \in \mathbb{Z}$ oder äquivalent $\oint_\gamma \eta_{\gamma'} \in \mathbb{Z}$. Für die Kurve $\gamma : S^1 \to X$ gilt aber

$$\oint_\gamma \eta_{\gamma'} = \int_{S^1} \gamma^*(\eta_{\gamma'}) \in \mathbb{Z}$$

wegen Folgerung 3 (siehe Funktorialität des Vergleichsisomorphismus). QED

Poincare Dualität. *Die Cup-Produkt Paarung definiert eine nicht ausgeartete ganzzahlige alternierende Paarung auf $H^1(X, \mathbb{Z})$, die* **Polarisierung**

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{Z}) \times H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}}\ .$$

Wäre dies nicht der Fall, zeigt die Elementarteilertheorie alternierender Formen (Satz von Frobenius) die Existenz eines primitiven Vektors $\xi \in H^1(X, \mathbb{Z}_X)$ sowie einer Primzahl p mit $\int_{S^1} \gamma^*(\xi) \in p \cdot \mathbb{Z}$ für alle geschlossenen Wege γ. Betrachte dann die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{p \cdot id} H^1(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^1(X, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X)$$

Das Bild $\overline{\xi}$ von ξ in $H^1(X, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X)$ ist dann nicht trivial wegen der Primitivität von ξ. Aus $\int_{S^1} \gamma^*(\xi) \in p \cdot \mathbb{Z}$ folgt $\gamma^*(\overline{\xi}) = 0$ in $C = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für alle $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. Dies impliziert $\overline{\xi} = 0$ nach Folgerung 2. Ein Widerspruch! QED

Der Siegelsche Halbraum

Sei X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche. Wir wählen eine symplektische Basis $e_1, .., e_g, e_{g+1}, .., e_{2g}$ von $H^1(X, \mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ s, daß die Cup-Produkt Matrix $e_i \cap e_j$ gegeben ist in Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $\omega_1, ..., \omega_g$ eine fixierte Basis von $\Omega(X)$.

Basiswechsel Matrix. Die lineare Abbildung (*Periodenabbildung*)

$$\boxed{\Omega(X) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C}_X) = H^1(X, \mathbb{Z}_X) \otimes \mathbb{C}}$$

schreiben wir als $2g \times g$-Blockmatrix (mit den Blockeinträgen Ω_1, Ω_2) bezüglich der obigen Basen $\omega_i, i = 1, ..., g$ resp. $e_j, j = 1, ..., 2g$. Dann gilt

$$\omega_i \;=\; i\text{-te Spalte von} \quad \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen Ω_1 und Ω_2 sind hierbei komplexe $g \times g$-Matrizen mit der Eigenschaft

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{2g} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}_{ji} \cdot e_j \ .$$

Fakt 1. *Dass $\Omega^1(X) \subset H^1(X, \mathbb{C})$ maximal isotrop ist, ist gleichbedeutend mit*

$$(\Omega_1', \Omega_2') \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega_2'\Omega_1 = \Omega_1'\Omega_2 \ .$$

Fakt 2. *Dass die Matrix $i \cdot \langle \omega_\nu, \omega_\mu \rangle$ eine positiv definite hermitesche Matrix ist, ist gleichbedeutend mit*

$$i \cdot (\Omega_1', \Omega_2') \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Omega}_1 \\ \overline{\Omega}_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i \cdot (\Omega_2' \overline{\Omega}_1 - \Omega_1' \overline{\Omega}_2) > 0 \; .$$

Lemma 14. *Es gilt $det(\Omega_2) \neq 0$.*

Beweis. $\Omega_2 v = 0$ impliziert $\overline{\Omega}_2 \overline{v} = 0$ und $v' \Omega_2' = 0$. Somit folgt insbesondere $v'\big(i \cdot [\Omega_2' \overline{\Omega}_1 - \Omega_1' \overline{\Omega}_2]\big)\overline{v} = 0$. Also $v = 0$ (Fakt 2). QED

Ersetzt man die Ω_i für $i = 1, 2$ durch $\Omega_2^{-1} \Omega_i$, folgt

Folgerung 4. *Zu der Wahl der symplektischen Gitterbasis von $(H^1(X, \mathbb{Z}), \langle ., . \rangle)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Basis $\omega_1, ..., \omega_g$ von $\Omega^1(X)$ so dass gilt $\Omega_2 = E$, d.h.*

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ E \end{pmatrix}$$

und die Matrix Ω erfüllt dann die beiden Eigenschaften

- *Symmetrie:* $\boxed{\Omega = \Omega'}$ *(wegen Fakt 1)*
- *Definitheit:* $\boxed{Im(\Omega) > 0}$ *(wegen Fakt 2).*

Die Menge der komplexen $g \times g$-Matrizen Ω mit diesen beiden Eigenschaften ist der **Siegelsche Halbraum** $\mathbf{H}_g$ vom Geschlecht g und es gilt

$$\boxed{\Omega \in \mathbf{H}_g} \; .$$

Übungsaufgabe. Die symplektische Gruppe $\Gamma = Aut(\mathbb{Z}^{2g}, \langle ., . \rangle)$ operiert auf $\mathbf{H}_g$ via der folgenden Linksoperation

$$\Omega \in \mathbf{H}_g \; , \; \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1} \in \mathbf{H}_g \; .$$

Wir verweisen hierzu auf Freitags Buch über Siegelsche Modulformen [Fr]. Zeige

$$\mathbf{H}_g \cong Gl(g, \mathbb{C}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \mid \text{mit Fakt 1 und 2} \right\} .$$

Korollar 17. *Der so definierte Periodenpunkt*

$$\boxed{\Omega \in \Gamma \setminus \mathbf{H}_g \quad , \quad \Gamma = Sp(2g, \mathbb{Z})}$$

der Riemannschen Fläche X ist wohldefiniert, das heisst unabhängig von allen gemachten Basiswahlen.

Beweis. Änderungen der symplektischen $\mathbb{Z}$-Basen $e_1, ..., e_{2g}$ und der $\mathbb{C}$-Basen $\omega_1, ..., \omega_g$ entsprechen Änderungen der Ω_1, Ω_2-Matrix von rechts durch Matrizen in $Sp(2g, \mathbb{Z})$ und links in $Gl(g, \mathbb{C})$. Eine Abänderung des Basispunktes x_0 entspricht nur einer Translation auf dem komplexen Torus $Jac(X)$. QED

Die Abbildung $\alpha : \mathbb{C}^{2g} \to (\mathbb{C}^g)^*$ definiert für $x, y \in \mathbb{Z}^g$ das Periodengitter

$$\alpha : v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad v' \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ E \end{pmatrix} = -x' + y'\Omega \, .$$

Korollar 18. *Das Periodengruppe Λ ist $\{x + \Omega y \mid x, y \in \mathbb{Z}^g\}$ und insbesondere gilt*

$$\boxed{Alb(X) = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g)} \, .$$

Beachte $X \hookrightarrow X^g$ vermöge $x \mapsto (x, x_0, ..., x_0)$. Die Einschränkung von alb_g auf X definiert eine holomorphe Abbildung $alb : X \to All(X)$.

Lemma. *Für $g \geq 1$ ist die Abbildung alb injektiv*

$$alb : X \hookrightarrow Alb(X) \, .$$

Beweis. Anderfalls gäbe es $x \neq x_0$ mit $alb(x - x_0) = 0$ und damit $\mathcal{O}_X(x - x_0) \cong \mathcal{O}_X$. Es folgt $h^0(X, \mathcal{O}_X(x - x_0)) = 1$. Somit existiert ein $0 \neq f \in M(X)$ mit Nullstelle in x_0 und einfachem Pol bei x. Die zugehörige endliche verzweigteÜberlagerung $\pi : X \to P^1(\mathbb{C})$ ist vom Grad 1, also biholomorph (analog wie auf Seite 36). Ein Widerspruch! QED

Beispiel. Im Fall $g = 1$ ist die Abbildung aus Dimensionsgründen auch surjektiv, also ein biholomorpher Isomorphismus. Es gibt also ein $\Omega \in \mathbb{C}$ mit $Im(\Omega) > 0$ so dass X eine *elliptische Kurve* ist:

$$\boxed{X \cong \mathbb{C} / (\mathbb{Z} + \Omega \cdot \mathbb{Z})} \, .$$

Differentiale zweiter Gattung

Ein meromorphes Differential $\omega \in \Omega^1(X)$ heißt Differential erster Gattung, wenn es auf X holomorph ist. Es heißt **Differential zweiter Gattung**, wenn für alle $x \in X$ gilt $res_x(\omega) = 0$ (Residuenfreiheit). Differentiale ω, welche höchstens einfache Polstellen besitzen, heißen Differentiale dritter Gattung.

Sei nun für den Rest dieses Abschnitts X eine zshg. kompakte Riemannsche Fläche. Wir erinnern an die exakte Sequenz

$$0 \to \Omega(X) \to \Omega_{3rd}(X) \to Div_{\mathbb{C}}(X)^0 \to 0 \ .$$

Für jede meromorphe Differentialform η ist die Summe ihrer Residuen Null (der sogenannte Residuensatz). Also existiert ein $\omega \in \Omega_{3rd}(X)$ mit denselben Residuen wie η. Die Differenz $\eta - \omega$ ist ein Differential 2.Gattung. Also folgt

$$\Omega_{\mathcal{M}}(X) = \Omega_{3rd}(X) \ + \ \Omega_{2nd}(X) \quad , \quad \Omega_{3rd}(X) \ \cap \ \Omega_{2nd}(X) = \Omega(X) \ .$$

Wir werden in den nächsten Abschnitten die Existenz von globalen Stammfunktionen zweiter Gattung studieren.

Stammfunktionen

Die Ableitung $\omega = \partial F$ einer meromorphen Funktion F auf X liefert ein Differential 2.Gattung auf X

$$\partial : \mathcal{M}_X(X) \to \Omega_{2nd}(X) \ .$$

Umgekehrt besitzt lokal jedes meromorphe Differential 2.Gattung ω eine meromorphe Stammfunktion (benutze die Laurententwicklung in lokalen Koordinaten; $\omega = F'(z) \cdot dz$ und obdA $F = z^n, n \in \mathbb{Z}$ mit $\omega = nz^{n-1} \cdot dz$. Dann kommt $n - 1 = -1$ nicht vor!). Man erhält daher die beiden folgenden exakten Garbensequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, hook] & \Omega_X \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \mathcal{M}_X \arrow[r, "\partial"] & \Omega_{X,2nd} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz der oberen exakten Sequenz liefert

$$0 \to \Omega(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to 0 \ .$$

Analog hat man wegen[26] $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$ die exakte Sequenz

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\partial} \Omega_{2nd}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow 0 \ .$$

Korollar (Obstruktion): *Das Hindernis für die Existenz einer globalen meromorphen Stammfunktion einer Differentialform 2. Gattung liegt in der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathbb{C})$*

$$\boxed{H^1(X, \mathbb{C}) \ \cong \ \Omega_{2nd}(X) \ \ mod \ \ \partial M(X)} \ .$$

Beispiel: Für eine elliptische Kurve X definiert durch $y^2 = 4x^3 + ux + v$ mit $u, v \in \mathbb{C}$ gilt $g_X = 1$ sowie

$$\Omega_{2nd}(X) = \mathbb{C} \cdot \frac{dx}{y} + \mathbb{C} \cdot \frac{xdx}{y} + \partial M(X) \ .$$

[26]Übungsaufgabe: $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$. Hinweis: Jeder Kozykel $f_{ij} \in Z^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{M}_X)$ hat in $Z^1_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{M}_X)$ bezüglich einer geeigneten endlichen Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$ nur endlich viele Pole und liegt daher im Bild von $Z^1_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{O}_D)$ für einen geeigneten Divisor $D \geq 0$ vom Grad $>> 0$. $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$ verschwindet wegen Riemann-Roch.

Literatur.

[BF] Busam R.-Freitag E., *Funktionentheorie 1*

[Fo] Forster O., *Riemannsche Flächen*

[F] Freitag E., *Funktionentheorie 2*

[Fr] Freitag E., *Siegelsche Modulfunktionen*

[Go] Godement R., *Topologie algébrique et thèorie des faisceaux*

[Gu] Gunning R.C., *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*