Riemannsche Flächen

Vorlesung im SS 2001

(Rainer Weissauer)

0.1 Grundlagen

Garben

Eine **Prägarbe** $\mathcal{G}$ (abelscher Gruppen) auf einem topologischen Raum X ist eine Vorschrift, welche jeder offenen Menge U von X eine abelsche Gruppe $\mathcal{G}(U)$ zuordnet so daß für jede Inklusion $V \subset U$ offener Mengen ein Gruppenhomomorphismus

$$r_U^V : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$$

existiert mit den Eigenschaften $r_V^V = id$ und $r_V^W \circ r_U^V = r_U^W$ $(W \subset V \subset U)$.

Eine Prägarbe $\mathcal{G}$ auf X heißt **Garbe**, wenn weiterhin die folgenden beiden **Garbenaxiome** G1 und G2 (und G3) erfüllt sind. Diese lauten: Sei $U \subset X$ offen und $U = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung von U. Dann gilt

(G1) Sei $f \in \mathcal{G}(U)$. Dann impliziert $r_U^{U_i}(f) = 0$ für alle $i \in I$ das Verschwinden $f = 0$.

(G2) Gegeben seien $f_i \in \mathcal{G}(U_i)$ für alle $i \in I$ mit $r_{U_i}^{U_i\cap U_j}(f_i) = r_{U_j}^{U_i\cap U_j}(f_j)$. Dann existiert $f \in \mathcal{G}(U)$ mit $r_U^{U_i}(f)) = f_i$ für alle $i \in I$.

Ist $I = \emptyset$, dann folgt $\mathcal{G}(\emptyset) = 0$. Wir nehmen dies der Klarheit halber im folgenden als zusätzliches Axiom (G3) an.

Wir schreiben für $r_U^V(f)$ manchmal auch nur $f|V$ oder $r(f)$ um anzudeuten, daß es sich um Einschränkungen handelt.

1.Beispiel: Sei $\mathcal{C}_X(U)$ die abelsche Gruppe der **stetigen komplexwertigen Funktionen** auf U, dann definiert dies eine Garbe $\mathcal{C}_X$ auf X in offensichtlicher Weise.

2.Beispiel: Sei A eine abelsche Gruppe (versehen mit der diskreten Topologie). Sei $A_X(U)$ die Gruppe der lokal konstanten stetigen Abbildungen $f : U \to A$. Dann definiert dies mit den offensichtlichen Restriktionssabbildungen r_U^V die **konstante Garbe** A_X auf X mit Werten in A.

3.Beispiel: Sei A eine abelsche Gruppe und $x \in X$ ein fester Punkt. Dann definiert die Vorschrift $\mathcal{G}(U) = A$ für $U \ni x$ resp. $\mathcal{G}(U) = 0$ sonst eine Garbe auf X, die **Wolkenkratzergarbe** im Punkt x mit Werten in A.

Sei $\mathcal{G}$ eine (Prä-)Garbe auf X. Sei $x \in X$ ein Punkt. Der **Halm** $\mathcal{G}_x$ der (Prä-)Garbe $\mathcal{G}$ im Punkt x ist eine abelsche Gruppe, definiert als der direkte Limes

$$\mathcal{G}_x = \lim_{\rightarrow} \mathcal{G}(U)$$

(über das gerichtete System aller offenen Teilmengen U von X welche x enthalten).

Sei $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf X. Für jedes $x \in U$ hat man einen natürlichen Homomorphismus $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}_x$ sowie das elementare

Lemma: *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Erfüllt $\mathcal{F}$ die Garbeneigenschaft G1, dann ist*

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

injektiv.

Beispiel: Für die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X (siehe nächster Abschnitt) ist der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ enthalten im Potenzreihenring $\mathbb{C}[[t]]$ (Identitätssatz!) und $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ ist injektiv (für zusammenhängendes $U \subset X$ mit $x \in U$).

Ein **Garbenhomomorphismus** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ zwischen Garben (abelscher Gruppen) auf X, ist eine Kollektion von Gruppenhomomorphismen $\phi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$, welche die alle folgenden Diagramme kommutativ machen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "r_U^V"] & \mathcal{H}(U) \arrow[d, "r_U^V"'] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{H}(V) \end{tikzcd}$$

für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ von X. Sind alle Morphismen ϕ_U injektiv, nennt man ϕ eine **Garbeninjektion** und $\mathcal{G}$ eine **Untergarbe** von $\mathcal{H}$. Ein Garbenhomomorphism $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ indiziert Gruppenhomorphismen $\phi_x : \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ der Halme für alle $x \in X$.

Sei $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ein Garbenhomomorphismus. Dann definiert

$$Kern(\phi)(U) = Kern\Big(\phi_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)\Big)$$

eine Untergarbe von $\mathcal{G}$, den **Kern** von ϕ. Dies benutzt Garbenaxiom G1 und G2 für $\mathcal{G}$ und Garbenaxiom G1 für $\mathcal{H}$!

Definition: *Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

heißt **exakt**, *wenn alle induzierten Halmsequenzen*

$$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0$$

für alle Punkte $x \in X$ exakt sind.

Bemerkung: Die Exaktheit aller Sequenzen $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U) \to 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Exaktheit.

Übungsaufgabe: Definieren die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger eine Garbe?

Appendix (direkte Limiten)

Sei I eine Indexkategorie. Wir nehmen an daß für je zwei Objekte $i, j \in I$ ein geeignetes Objekt $k \in I$ existiert mit Morphismen $i \to k$ und $j \to k$; weiterhin soll für je zwei Morphismen $u, v \in Mor(i,j)$ ein Morphismus $w : j \to k$ existieren mit $w \circ u = w \circ v$. Einen kovarianten Funktor $I \to Ab$ nennt man dann ein gerichtetes System $(A_i, \phi_{i\to j}, i, j \in I, i \to j \in Mor(i,j))$ abelscher Gruppen. Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt kofinal, falls $\forall i \in I$ ein Morphismus $i \to j$ existiert mit $j \in J$.

Sei $A_i, \phi_{i\to j}, i, j \in I$ ein derartiges gerichtetes System. $A_j \ni a_j \sim a_i \in A_i$, falls $\exists k, j \to k, i \to k$ mit $\phi_{i\to k}(a_i) = \phi_{j\to k}(a_j)$, definiert eine Äquivalenzrelation auf $\bigsqcup_{i\in I} A_i$. Weiterhin definiert

$$\lim_{\to} A_i = \lim_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{i\in I} A_i/\sim$$

den **direkten Limes** des gerichteten Systems.

Bemerkung: Ist J eine **kofinale** Unterkategorie von I, dann gilt

$$\lim_{j\in J} A_j \ = \ \lim_{i\in I} A_i \ .$$

Wir bemerken weiterhin

a) $\lim_i A_i$ ist eine abelsche Gruppe.

b) Ist $\psi_i : A_i \to A_i'$ eine kompatibles System von Gruppenhomomorphismen, dann indiziert dies einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \lim_i A_i \to \lim_i A_i'$ der direkten Limiten.

c) Sind alle A_i Ringe, dann ist $\lim_i A_i$ ein Ring. Sind ψ_i wie oben sogar Ringhomorphismen, dann ist der Limes ψ ein Ringhomomorphismus.

d) Der direkte Limes ist ein **exakter Funktor**. Das heißt: Sind $A_i' \to A_i \to A_i''$ kompatible Systeme von exakten Sequenzen abelscher Gruppen. Dann induziert dies eine exakte Sequenz von direkten Limiten

$$\lim_i A_i' \to \lim_i A_i \to \lim_i A_i'' \ .$$

Beweis der letzten Aussage d): Gegeben $a \in \lim_i A_i$ – representiert durch $a_i \in A_i$ – im Kern. Das heißt, es existiert ein $j \in I$ mit $i \to j$ und $Bild(a_i) = 0$ in A''_j. Alle Objekte i, welche von j ausgehen (d.h. $j \to i$), definieren eine kofinale Teilkategorie J von I. Unter dem mittleren senkrechten Isomorphismus entspricht a der Äquivalenzklasse des Element $a_j := \phi_{i \to j(i)}(a_i)$ in $\lim_{j \in J} A_j$. Das Bild von a_j in A''_j is Null. Daher ist a_j das Bild eines Elementes $a'_j \in A'_j$. Die Äquivalenzklasse a' von a'_j – geliftet auf die obere Zeile – bildet auf a ab.

Die Exaktheit des Limes Funktors folgt daher unmittelbar aus dem folgenden Diagramm

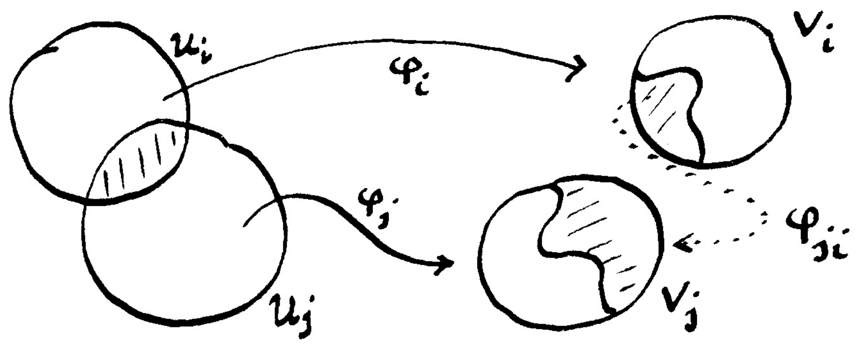
$$\begin{tikzcd}
 & a_i/\sim \arrow[r, mapsto] & 0 \\
lim_{i \in I} A'_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & \lim_{i \in I} A_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & \lim_{i \in I} A''_i \arrow[d, equal] \\
lim_{j \in J} A'_j \arrow[r] & \lim_{j \in J} A_j \arrow[r] & \lim_{j \in J} A''_j \\
a'_j/\sim \arrow[r, mapsto] & a_j/\sim &
\end{tikzcd}$$

Riemannsche Flächen

Sei X ein zusammenhängender separierter topologischer Raum. X heißt **Riemannsche Fläche**, wenn eine **holomorphe Struktur** auf X gegeben ist. Eine holomorphe Struktur ist eine Äquivalenzklasse holomorpher Atlanten von X. Ein Atlas ist eine Überdeckung $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ durch eine offene Überdeckung von X, zusammen mit Homöomorphismen (Kartenabbildungen)

$$\phi_i : U_i \cong V_i \subset \mathbb{C} \quad , \quad i \in I$$

auf offene Teilmengen V_i von $\mathbb{C}$, für die alle Kartenwechsel $\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$: $\phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ holomorphe Abbildungen sind.



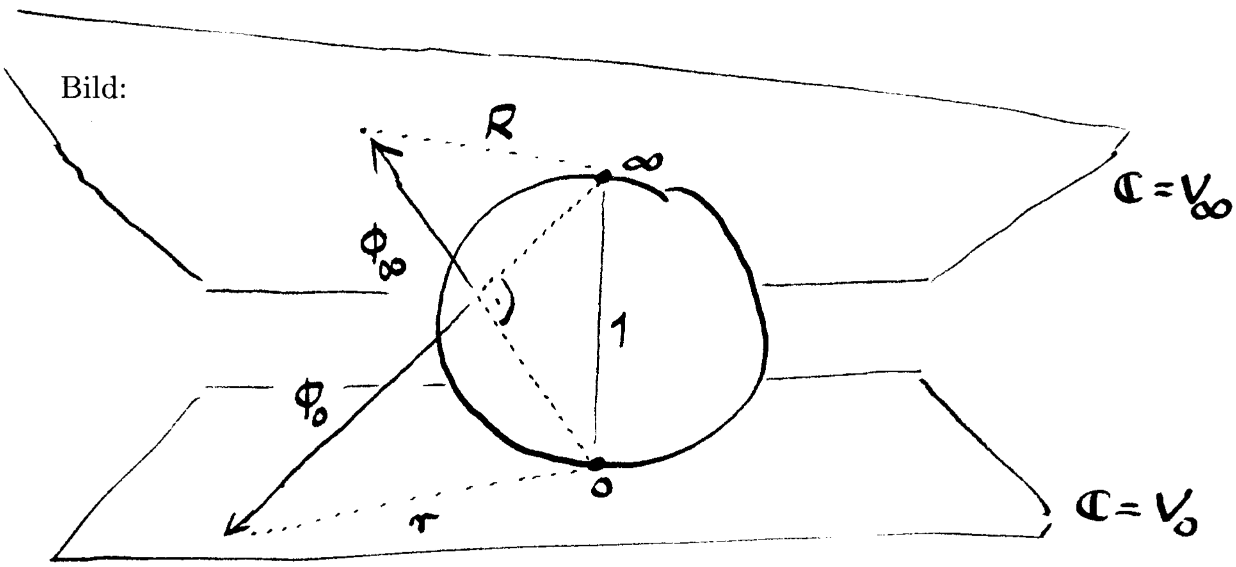
Es gilt automatisch $\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$ und $\phi_{ii} = id_{V_i}$ für alle $i, j, k \in I$. Die Daten (X, U_i, ϕ_i, I) definieren einen holomorphen Atlas. Zwei Atlanten heißen äquivalent, wenn sie zu einem gemeinsamen holomorphen Atlas "verfeinert" weren können.

Die Riemannsche Zahlenkugel S als Riemannsche Fläche:

$S = S_0 \cup S_\infty$ ist eine offene Überdeckung; Die stereographische Projektion auf die $\mathbb{C}$ von ∞ definiert eine Kartenabbildung $\phi_0 : S_0 \cong \mathbb{C}$. Die entsprechende Projektion auf C (Tangentialebene bei ∞ von unten betrachtet!) definiert eine Kartenabbildung $\phi_\infty : S_\infty \cong \mathbb{C}$. Es gibt 4 Kartenwechsel. Zwei sind die Identität, die beiden anderen $\phi_{\infty 0}$ und $\phi_{0\infty}$ sind invers zueinander. Der Atlas ist holomorph wegen

Lemma: $\phi_{o\infty}(z) = z^{-1}$.

Beweis: Für $z = re^{i\phi}$ gilt $\phi_{o\infty}(r \cdot e^{i\phi}) = R \cdot e^{i\phi} - R \cdot e^{-i\phi} = z^{-1}$. Denn $R = r^{-1}$. Dies folgt aus dem Satz von Thales und der Orthogonalität der beiden Vektoren $(r, 1)$ und $(R, -1)$; somit $r \cdot R + 1 \cdot (-1) = 0$.



Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Funktion

$$f : X \to \mathbb{C}$$

heißt **holomorph**, falls alle Abbildungen

$$f \circ \phi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{C}$$

holomorph sind. Analog definiert man $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen. Ist X eine Riemannsche Fläche, dann erbt jede (zusammenhängende) offene Teilmenge $U \subset X$ die Struktur einer Riemannschen Fläche. Eine Funktion $f : U \to C$ heißt holomorph, wenn sie auf jeder Zusammenhangskomponente holomorph ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{O}_X(U)$$

die $\mathbb{C}$-Algebra der holomorphen Funktionen auf U. Mit den Einschränkungen als Restriktionsabbildungen definiert dies offensichtlich eine Garbe auf X, die **Strukturgarbe** der Riemannschen Fläche. Man hat die Garbeninklusionen

$$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{C}_X^\infty \subset \mathcal{C}_X \ .$$

Lemma: *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist jede holomorphe Funktion auf X konstant: $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}_X(X) = \mathbb{C}$.*

Beweis: Jede holomorphe Funktion f auf X ist stetig, nimmt daher ihr Maximum in einem Punkt $x_0 \in X$ an. Aus dem Maximumsprinzip (angewendet auf $f \circ \phi_i^{-1}$ in einer geeigneten Karte V_i) folgt, daß f in einer Umgebung von x_0 konstant ist. Dann ist f aber generell konstant, denn

Lemma: *Sei X eine Riemannsche Fläche, und U eine nichtleere offene Teilmenge von X. Dann gilt $\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U)$.*

Beweis: Sei f holomorph auf X. Dann folgt $f = 0$, wenn $f = 0$ gilt in einer Umgebung von U. X ist (automatisch wegweise) zusammenhängend. Wähle einen stetigen Weg von x zu $x_0 \in U$. Endliche viele Karten überdecken diesen Weg. Man beweist $f(x) = 0$ mittels des Identitätsatzes (in den endlich vielen relevanten Karten V_i).

Definition: *Eine Abbildung $g : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen heißt holomorph, wenn für alle offenen Teilmengen $V \subset Y$ und alle $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt $f \circ g \in \mathcal{O}_X(g^{-1}(V))$.*

Offensichtlich ist Holomorphie von $g : X \to Y$ eine lokale Eigenschaft von g auf X. Für eine Überdeckung $X = \bigsqcup_i U_i$ gilt also: g ist holomorph $\Longleftrightarrow$ alle $g|U_i$ sind holomorph. Außerdem genügt es in der Definition V aus einer offenen Überdeckung zu wählen.

Übungsaufgabe: Definiere analog die Garben $\mathcal{O}_X^*, \mathcal{M}_X, \mathcal{M}_X^*$ und zeige $\mathcal{M}_S(S) = \mathbb{C}(z)$ sowie $\mathcal{M}_S^*(S) = \mathbb{C}(z)^*$. Siehe auch Busam-Freitag Seite 152 ff.

Übungsaufgabe: Jede nichtkonstante meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}^*(X)$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X definiert eine surjektive holomorphe Abbildung $f : X \to S$ auf die Riemannsche Zahlenkugel. Hinweis: Hat f einen Pol bei $x \in X$, dann ist $\frac{1}{f}$ holomorph bei x.

Die Exponentialsequenz

Sei X eine Riemannsche Fläche. Sei $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe und $\mathcal{O}_X^*$ die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen auf X. Die Exponentialabbildungen $f(z) \mapsto exp(2\pi i \cdot f(z))$

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X^*(U)$$

definieren einen Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$, die **Exponentialabbildung**. Der Kern ist offensichtlich die konstante Garbe $\mathbb{Z}_X$.

Satz: *Die zugehörige Garbensequenz*

$$0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$$

ist exakt.

Beweis: Dies folgt aus dem nächsten Lemma, denn für jede einfach zusammenhängende zusammenhängende Teilmenge $U \subset X$ mit Kartenabbildung $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$ ist $exp : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X^*(U)$ surjektiv. Siehe Busam-Freitag.

Lemma: *Eine Sequenz* $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ *von Garbenhomomorphismen auf* X *ist exakt gdw gilt*

(i) $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ *ist exakt für alle offenen* $U \subset X$.

(ii) $\forall U\ \forall h \in \mathcal{H}(U)\ \forall x \in U\ \exists V \subset U, x \in V$ *mit* $r_U^V(h) \in Bild(\mathcal{G}(V))$ *(für* U,V *offen in* X*)*

Beweis: Eine Richtung ist klar, da Halmbildung als direkter Limes ein exakter Funktor ist. (Insbesondere vertauscht Halmbildung mit Kernbildung, was wir weiter unten benutzen werden). Wir beschränken uns auf die Umkehrung, daß (i) und (ii) aus der Exaktheit der Halmsequenzen folgt. (ii) ist klar wegen der Surjektivität von $\mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ und der Halm-Definition. Nun zum Beweis von (i).

Die Injektivität $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ folgt aus

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, hook] \\ \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \arrow[r, hook] & \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

Analog zeigt man, daß die Zusammensetzung $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$ Null ist. Somit ist

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$$

eine Untergarbe des Kerns $\mathcal{K}$ des Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Da Halm- und Kernbildung vertauschen, induziert die obige Garbeninklusion Halmisomorphismen $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{K}_x$ für alle x. Exaktheit bei $\mathcal{G}$ folgt daher aus dem nächsten

Lemma: *Sei $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{K}$ eine Garbeninklusion mit $\psi_x : \mathcal{F}_x \cong \mathcal{K}_x$ für alle $x \in X$. Dann gilt $\mathcal{F} = \mathcal{K}$.*

Beweis: Sei $k \in \mathcal{K}(U)$. Für alle $x \in U$ existiert $V = V_x$ mit $x \in V \subset U$ und $f_V \in \mathcal{F}(V)$ mit $f_V = r_U^V(h)$ wegen der Halmsurjektivität. Die V_x definieren eine Überdeckung von U. Die Elemente f_V sind durch h (und V) und

$$f_V = r_U^V(h)$$

eindeutig bestimmt. Daher Verkleben sich die f_V mittels Garbenaxiom G2 zu einem Schnitt f von $\mathcal{F}(U)$. Wegen Garbenaxiom G1 gilt dann sogar $f_V = h$ auf ganz U. Es folgt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{K}(U)$.

Die Fundamentalgruppe

0.2 Cechkohomologie

Der Cechkomplex

Sei $X = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ eine Überdeckung $\mathcal{U}$ des Raumes. Sei $\mathcal{G}$ ein Prägarbe auf X. Dann definiert man für $r \geq 0$

$$C^r_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G}) = \prod_{i_0,..,i_r\in I} \mathcal{G}(U \cap \bigcap_{\nu=0}^{r} U_{i_\nu}) \ .$$

Die Randabbildungen $d = d_r : C^r_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G}) \to C^{r+1}_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G})$

$$(df)_{i_0,...,i_{r+1}} = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu \cdot r^{U_0,.,U_\nu,...,U_{r+1}}_{U_0,.,\hat{U}_\nu,...,U_{r+1}}(f_{i_0,..,\hat{i}_\nu,...,i_{r+1}})$$

machen dies zu einem Komplex. Dies ist der sogenannte **Cech-Komplex**. Die **Kohomologie** dieses Komplexes bezeichnen wir mit

$$H^i_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G}) = Z^i_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G})/B^i_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G}) \ .$$

Hierbei ist $Z^i_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G}) = Kern(d_i)$ und $B^i_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G}) = Bild(d_{i-1})$ die Gruppe der i-**Zykel** beziehungsweise i-**Ränder**.

Der Cech-Komplex kann wie folgt nach links verlängert werden:

$$0 \to \mathcal{G}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{G}(U\cap U_i) \to \prod_{i,j\in I} \mathcal{G}(U\cap U_i \cap U_j) \to \prod_{i,j,k} \mathcal{G}(U\cap U_i\cap U_j \cap U_k) \to ... \ .$$

Die Abbildungen sind dann konkret

$d_{-1} : f \mapsto (f_i)_{i\in I}$ mit $f_i = (r^{U_i}_U(f))_{i\in I}$

$d_0 : (f_i)_{i\in I} \mapsto (f_{ij})_{i,j\in I}$ mit $f_{ij} = r^{U_i\cap U_j\cap U}_{U_j\cap U}(f_j) - r^{U_i\cap U_j \cap U}_{U_i\cap U}(f_i)$

kurz: $(f_j - f_i)|W$, $W = U_i \cap U_j \cap U$

$d_1 : (f_{ij}) \mapsto (f_{ijk})$ mit $f_{ijk} = (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})|W$ for $W = U_i\cap U_j \cap U_k \cap U$.

Der verlängerte Komplex ist exakt in den Graden -1 und 0 genau dann, wenn $\mathcal{G}$ eine Garbe ist (Garbenaxiom G1 und G2). Für eine Garbe erhält man daher einen exakten Komplex

$$0 \to \mathcal{G}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{G}(U \cap U_i) \to Z^1_{\mathcal{U}}(U,\mathcal{G}) \to H^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G}) \to 0 \ .$$

Hierbei ist $Z^1(\mathcal{G}; U_i \cap U_j)$ die Gruppe aller $f_{ij} \in \prod_{i,j\in I} \mathcal{G}(U_i \cap U_j)$, welche die **Kozykelbedingungen**

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk}$$

erfüllen für alle $i, j, k \in I$. Diese Kozykelbedingungen implizieren

$$f_{ii} = 0,\ f_{ij} = -f_{ji} \quad , \quad i, j \in I \ .$$

Die erste Kohomologie ist der Quotient nach der Gruppe der **Ränder**. Diese haben die Gestalt

$$f_{ij} \ = \ r_{V_i}^{V_i\cap V_j}(f_i) \ - \ r_{V_j}^{V_i\cap V_j}(f_j) \quad , \quad f_i \in \mathcal{G}(U_i) \ .$$

Beispiel: *Für eine* **Wolkenkratzergarbe** $\mathcal{G}$ *mit Werten in* A *im Punkt* x *gilt* $\mathcal{G}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(V)$ *für alle* V. *Dies impliziert*

$$H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) = 0 \ .$$

(Für einen Kozykel f_{ij} wähle $k \in I$ mit $x \in U_k$ und setze $f_i = f_{ik}$ - fortgesetzt (!) zu $\mathcal{G}(U_i)$. Dann gilt $f_{ij} = f_i - f_j$ in A. (Der wesentliche Fall ist wenn $x \in U_i \cap U_j$).

Allgemein sei $X = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung und $\phi_i, i \in I$ seien Garbenhomomorphismen $\phi_i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ einer Garbe $\mathcal{G}$ mit den beiden Eigenschaften

a) **(Partion der Eins)** Für festes $i \in I$ sind fast alle ϕ_j Null auf $\mathcal{G}(U_i)$ und es gilt
$$\sum_{j\in I} \phi_j |\ \mathcal{G}(U_i) \ = \ id_{\mathcal{G}(U_i)} \ .$$

b) **(Fortsetzungseigenschaft)** Für alle $i \in I$ existiert eine offene Teilmenge $V_i \subset X$ mit $X = U_i \cup V_i$, so daß die Restriktion von ϕ_i auf $\mathcal{G}(V_i)$ verschwindet.

Folgerung: *Dann gilt* $H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) = 0$.

Beweis: Eigenschaft b) und Garbenaxiom G2 für die Überdeckung von $X = U_i \cap V_i$ induzierte Überdeckung von $U_i \cap U_j$ zeigt, daß $\phi_j(f_{ij}) \in \mathcal{G}(U_i \cap U_j)$

sich zu einem Element in $\mathcal{G}(U_i)$ fortsetzen läßt! Für fast alle $j \in I$ kann wegen Eigenschaft a) Null als Fortsetzungen gewählt werden. Daher können die Fortsetzungen aufsummiert werden

$$f_i = \sum_{k \in I} \phi_k(f_{ik}) \in \mathcal{G}(U_i) \ .$$

Nun folgt nach Einschränken auf $U_i \cap U_j$

$$r(f_i) - r(f_j) = \sum_k \phi_k(r(f_{ik}) - r(f_{jk})) = \sum_k \phi_k(f_{ij}) = f_{ij}$$

wegen Eigenschaft b). Also ist der Kozykel ein Korand.

Übungsaufgabe: Für 2-Kozykel f_{ijk} setze $g_{ij} = \sum_l \phi_l(f_{ijl})$. Zeige $f_{ijk} + (g_{jk} - g_{ik} + g_{ij}) = 0$ und schließe $H^2_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) = 0$. Allgemeiner zeige $H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) = 0$ für $i \geq 1$.

Übungsaufgabe: Sei $\mathcal{U}$ eine endliche Überdeckung von X. Zeige

$$H^i_{\mathcal{U}}(X.\mathbb{C}_X) \cong H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z}_X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \ .$$

Benutze die Exaktheit des Tensorfunktors $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Übungsaufgabe: Jeder Cech 2-Kozykel f_{ijk} kann durch Abändern um einen Rand alternierend gemacht werden.

Hinweis: ObdA gilt $f_{aaa} = 0$ (Modifiziere um einen Rand). Auswerten der Zykeleigenschaft bei $abbb$ und $aaab$ liefert dann $f_{abb} = f_{aab} = 0$; Auswerten bei $abab$ liefert die Symmetrie $f_{bab} = f_{aba}$. Modifizieren um einen Rand liefert $\tilde{f}_{aba} = f_{aba} + (g_{ba} - g_{aa} + g_{ab})$ und damit $\tilde{f}_{aaa} = \tilde{f}_{aba} = \tilde{f}_{bab} = 0$. (Setze $g_{ab} + g_{ba} = -f_{aba}$ für $a \neq b$ sowie $g_{aa} = -f_{aaa}$). Auswerten bei $abcb$ und $babc$ liefert schließlich die Behauptung.

Verfeinerungen

Seien $\mathcal{V}: \ X = \bigsqcup_{j\in J} V_j$ und $\mathcal{U}: \ X = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ offene Überdeckungen von X. Eine Abbildung

$$J \to I \quad j \mapsto \overline{j}$$

$$V_j \subset U_{\overline{j}}$$

nennen wir **Verfeinerungsdatum**. Existiert ein solches Verfeinerungsdatum $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ nennen wir $\mathcal{V}$ eine **Verfeinerung** von $\mathcal{U}$ und schreiben $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$.

Seien $X = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ und $X = \bigsqcup_{j\in J} V_j$ zwei beliebige Überdeckungen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ von X. Dann definiert $X = \bigsqcup_{i\in I\cup J} U_i \cap V_j$ eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{U} * \mathcal{V}$ dieser Überdeckungen (mit Indexmenge $I \times J$).

Definition: *Die erste* **Cech-Kohomologiegruppe** *einer Garbe $\mathcal{G}$ auf X ist definiert als direkter Limes über alle Verfeinerungen von Überdeckungen $\mathcal{U}$ von X*

$$H^1(X,\mathcal{G}) = \lim_{\prec} \ H^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G}) \ .$$

Lemma: *Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Dann existiert eine kanonische Abbildung*

$$H^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G}) \to H^1_{\mathcal{V}}(X,\mathcal{G})$$

zwischen den Cech-Kohomologiegruppen. Diese ist injektiv und unabhängig vom Verfeinerungsdatum. Insbesondere folgt

$$H^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G}) \hookrightarrow H^1(X,\mathcal{G}) \ .$$

Beweis: 1) <u>Die Abbildung</u>: Auf dem Zykelniveau bildet sie $\mathcal{U}$-Cechkozykel representiert durch $(f_{ii'})_{i,i'\in I}$ ab auf den $\mathcal{V}$-Cechkozykel $(f_{jj'})_{j,j'\in J}$, wobei letzterer durch $f_{jj'} = f_{\overline{j}\overline{j}'}|V_j \cap V_{j'}$ definiert wird. Diese Abbildung ist additiv und respektiert Koränder. Sie liefert somit die gewünschte kanonische Abbildung.

2) <u>Unabhängigkeit</u>: Zwei gegebene Verfeinerungsdaten $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ faktorisieren über $\mathcal{U} \to \mathcal{U} * \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Die Abbildungen $\phi_1, \phi_2 \ : \ J \to I$ fakorisieren über die Produktabbildung $\phi_1 \times \phi_2 \ : \ J \to I \times I$ und (resp.) die Projektion

$p_1, p_2 : I \times I \to I$. Man reduziert daher auf den universellen Fall der beiden universellen Verfeinerungsdaten

$$\mathcal{U} \rightrightarrows \mathcal{U} * \mathcal{U} \ .$$

Wir setzen $U_{ii'} = U_i \cap U_{i'}$. Die kanonischen Abbildungen führen den gegebenen $\mathcal{U}$-Kozykel $(f_{ii'})$ über in die $\mathcal{U} * \mathcal{U}$-Kozykel, welche jeweils durch $f_{aa'\ bb'} := f_{ab}$ und $\tilde{f}_{aa'\ bb'} := f_{a'b'}$ definiert sind. Zu zeigen ist die Äquivalenz

$$f_{aa'\ bb'} \sim \tilde{f}_{aa'\ bb'}$$

auf $U_{aa'} \cap U_{bb'} = (U_a \cap U_{a'}) \cap (U_b \cap U_{b'})$ (modulo Rändern). Dies folgt aus der Identität auf $U_{aa'} \cap U_{bb'}$

$$f_{ab} = f_{a'b'} + (f_{aa'} - f_{bb'}) \ ,$$

welche aus den Kozykelidentitäten für die $f_{ii'}$ folgt.

3) <u>Injektivität</u>: Sei $(f_{ii'})_{i,i' \in I}$ ein Cechkozykel im Kern der Abbildung. Das heißt es gilt $(*)$: $\quad f_{\overline{j}\ \overline{j}'} = f_j - f_{j'}$ auf $V_j \cap V_{j'}$ für alle $j, j' \in J$.

Fixiere zuerst $i \in I$ und definiere auf $U_i \cap V_j$

$$F_{i,j} := f_{i\overline{j}} + f_j$$

für alle $j \in J$. Wegen des Garbenaxioms G2 bezüglich der Überdeckung $\mathcal{V}$ (geschnitten mit U_i) verheften sich die Schnitte $F_{i,j}$ zu einem Schnitt F_i auf ganz U_i. Denn auf $U_i \cap (V_j \cap V_{j'})$ gilt nach Restriktion

$$F_{i,j} - F_{i,j'} = f_{i\overline{j}} + f_j - f_{i\overline{j}'} - f_{j'} \text{ (Definition)}$$

$$= -f_{\overline{j}\overline{j}'} + f_j - f_{j'} \text{ (Kozykelbedingung für } f_{ii'} \text{ auf } U_i \cap U_{\overline{j}} \cap U_{\overline{j}'})$$

$$= 0 \text{ (Gleichung } (*) \text{ auf } V_j \cap V_{j'}).$$

Nach Konstruktion gilt wegen $(*)$ auf $V_j = U_{\overline{j}} \cap V_j$ für alle $j \in J$

$$F_{\overline{j}} = \ (F_{\overline{j},j} = f_{\overline{j}\overline{j}} + f_j) \ = f_j \ .$$

Nunmehr definieren $f_{ii'}$ und $\tilde{f}_{ii'} = f_{ii'} + F_{i'} - F_i$ äquivalente $\mathcal{U}$-Kozykel. Anderseits gilt auf $U_i \cap V_j$

$$\tilde{f}_{i\overline{j}} = f_{i\overline{j}} + F_{\overline{j}} - F_i = f_{i\overline{j}} + f_j - F_i = F_{i,\overline{j}} - F_i = 0 \ .$$

Somit gilt auf $U_i \cap U_{i'} \cap V_j$ dann

$$\tilde{f}_{ii'} = \tilde{f}_{i\overline{j}} \; - \tilde{f}_{i'\overline{j}} = 0 \ .$$

Variert man $j \in J$, dann folgt $\tilde{f}_{ii'} = 0$ auf ganz $U_i \cap U_{i'}$ wegen dem Garbenaxiom G1. Damit ist die Injektivität gezeigt.

Bemerkung: Analog definiert man für Verfeinerungen $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ kanonische Abbildungen $H^i_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G}) \to H^i_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{G})$ und zeigt, daß diese nicht von der Wahl des Verfeinerungsdatums abhängen. Damit sind auch die höheren Cech-Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{G})$ für $i \geq 2$ als Limes über die Verfeinerungen aller Überdeckungen wohldefiniert. Eine ausführliche Darstellung findet man in den Büchern von Godement oder Gunning.

Übungsaufgabe: Behandle explizit den Fall $i = 2$. Zeige für 2-Kozykel $(f_{abc})_{a,b,c} \in Z^2_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{G})$ auf $U_{aa'} \cap U_{bb'} \cap U_{cc'}$ die Relation

$$f_{abc} - (g_{bc} - g_{ac} + g_{ab}) = f_{a'b'c'} \ ,$$

wobei $g_{ab} = (f_{a'bb'} - f_{aa'b})|U_{aa'} \cap U_{bb'}$ auf $U_a \cap U_{a'} \cap U_b \cap U_{b'}$ definiert ist. Hinweis: Benutze die Kozykelrelation von f für die Indizes $(abcc')$, $(aa'bc')$, $(aa'cc')$, $(a'bb'c')$ und $(bb'cc')$.

Übungsaufgabe: Sei X kompakt. Zeige $H^i(X.\mathbb{C}_X) \cong H^i(X, \mathbb{Z}_X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Das Lemma von Leray

Lemma: *Sei $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Verfeinerung. Gilt $H^1_{\mathcal{V}}(U_i) = 0$ für alle $i \in I$. Dann gilt*

$$H^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathcal{V}}(X,\mathcal{G})$$

und somit

$$H^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G}) \cong H^1(X,\mathcal{G}) \ .$$

Die Vorausetzung sind insbesondere dann erfüllt, wenn $H^1(U_i,\mathcal{G}) = 0$ gilt für alle $i \in I$.

Beweis des Lemmas: a) Gegeben sei ein Kozykel $Z^1_{\mathcal{V}}(X,\mathcal{G})$ representiert durch die $f_{jj'}$ auf $V_j \cap V_{j'}$. Wegen $H^1_{\mathcal{V}}(U_i,\mathcal{G}) = 0$ gibt es $g^i_j \in \mathcal{G}(U_i \cap V_j)$ mit $(*)$

$$r^{U_i\cap V_j \cap V_{j'}}_{V_j \cap V_{j'}}(f_{jj'}) = g^i_{j'} - g^i_j \quad , \quad \text{auf } U_i \cap V_j \cap V_{j'} \ .$$

b) Die neu definierten Elemente $g^i_j - g^{i'}_j$ auf $U_i \cap U_{i'} \cap V_j$ verkleben sich wegen $(*)$ auf $U_i \cap U_{i'}$ zu Schnitten $(**)$

$$F_{ii'} \quad , \quad \text{auf } U_i \cap U_{i'}$$

$$F_{ii'} = g^i_j - g^{i'}_j \quad , \quad \text{auf } U_i \cap U_{i'} \cap V_j \quad \forall j \in J \ .$$

c) Die $F_{ii'}$ definieren einen Kozykel in $Z^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G})$. (Es genügt dazu wegen Axiom G1 die Kozykelbedingungen auf allen Durchschnitten mit $V_j, j \in J$ zu verifizieren! Dort wird $F_{ii'}$ aber nach Definition $(**)$ sogar ein Korand).

d) Die Elemente $g_j = g^{\overline{j}}_j \in \mathcal{G}(V_j)$ werden mittels der Verfeinerungsabbildung $j \mapsto \overline{j}, J \to I$ definiert und zeigen die Äquivalenz $F_{\overline{j}\overline{j}'} \sim f_{jj'}$

$$F_{\overline{j}\overline{j}'} - f_{jj'} \ = \ g^{\overline{j}'}_{j'} - g^{\overline{j}}_j$$

auf $V_j \cap V_{j'} = U_{\overline{j}} \cap U_{\overline{j}'} \cap V_j \cap V_{j'}$. (Betrachte die Differenz der Gleichungen $(*)$ mit $i = \overline{j}'$ und $(**)$ mit $i = \overline{j}, i' = \overline{j}'$).

Vom Nutzen der Parakompaktheit

Sei X ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ von X heißt **lokal endlich**, falls für alle $x \in X$ eine Umgebung $V(x)$ von x existiert derart, daß $V(x) \cap U_i = \emptyset$ gilt für fast alle $i \in I$.

Ein separierter topologischer Raum X heißt **parakompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine lokalendliche Verfeinerung besitzt.

Beispiele: Kompakte Räume sowie abgeschlossene Teilmengen von parakompakten Räumen sind parakompakt. Eine Mannigfaltigkeit ist parakompakt, wenn sie Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist. Wir zitieren nun folgenden Satz (s. Schubert, Seite 88)

Satz (Partition der Eins): *Ist X parakompakt und $\mathcal{U} : X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$ zusammen mit stetigen nichtnegativen Funktionen*

$$\phi_j : V_j \to \mathbb{R}$$

mit kompaktem Träger in V_j derart, daß

$$\sum_{j\in J} \phi_j(x) = 1 \ .$$

(Die Summen sind de facto endliche Summen! Die offenen Mengen $\tilde{V}_j = \phi_j^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ in V_j bilden erneut eine lokal endliche Überdeckung von X).

Variante(s.Spivak): *Ist X eine parakompakte C^∞-Mannigfaltigkeit, können die ϕ_j sogar in $C_c^\infty(V_j, \mathbb{R})$ gewählt werden (d.h. unendlich oft differenzierbar mit kompaktem Träger).*

Korollar: *Ist X eine parakompakte C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$H^1(X, \mathcal{C}_X^\infty) = 0 \ .$$

Allgemeiner gilt dies auch für beliebige $\mathcal{C}_X^\infty$-Modulgarben auf X.

Beweis: Die Funktionen ϕ_j zu einer lokalendlichen Überdeckung haben kompakten Träger und können daher durch auf ganz X fortgesetzt werden. Das heißt $\phi_j \in C^\infty(X)$. Die Multiplikationsabbildungen

$$\phi_j | U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

definieren Garbenendomorphismen

$$\mathcal{C}_X^\infty \to \mathcal{C}_X^\infty$$

mit der Fortsetzungseigenschaft, und bilden eine Partion der Eins. Daraus folgt die Behauptung.

Eine Liftungsmethode: Sei X parakompakt und sei eine Garbensurjektion $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ auf X gegeben. Gegeben sei außerdem ein $z \in C^1_{\mathcal{V}}(X, \mathcal{H})$.

Lemma: *Dann existiert eine lokalendliche Verfeinerung $\tilde{\mathcal{V}}$ von $\mathcal{V}$, derart daß das Bild $\tilde{z}$ von z in $C^1_{\tilde{\mathcal{V}}}(X, \mathcal{H})$ im Bild von $C^1_{\tilde{\mathcal{V}}}(X, \mathcal{G})$ liegt.*

Zum Beweis: ObdA sei $\mathcal{V}$ lokalendlich, versehen mit einer Partion der Eins $\sum_i \phi_i = 1$. Für $x \in X$ existiert dann eine Umgebung $V(x)$ mit $V(x) \cap V_i = \emptyset$ für fast alle $i \in I$. Wir hätten gerne:

Entweder $V(x) \subset V_i$ oder $V(x) \cap V_i = \emptyset$ für $i \in I$.

Für $x \in V_i$ kann durch Verkleinern sofort $V(x) \subset V_i$ angenommen werden (es gibt nur endlich viele solche $i \in I$). Schlecht ist der Fall wo $x \notin V_i$, aber $V(x) \cap V_i \neq \emptyset$ (ein Punkt am Rand von V_i). Wir bekommen dann aber:

a) Entweder gilt $V(x) \subset V_i$ oder $V(x) \cap supp(\phi_i) = \emptyset$ für $i \in I$.

b) Jedes $V(x)$ liegt in mindestens einem $\tilde{V}_i \subset supp(\phi_i)$. Sei $i = i(x)$ eine solche Wahl.

Für festes $V(x) \subset \tilde{V}_{i(x)}$ und beliebiges $x' \in X$ gilt dann

c) $V(x'), V(x) \subset V_{i(x')} \cap V_{i(x)}$ oder $V(x') \cap V(x) = \emptyset$.

Denn entweder ist $V(x') \subset V_{i(x)}$ oder $V(x') \cap V(x) \subset V(x') \cap supp(\phi_{i(x)}) = \emptyset$. Jetzt benutze Vertauschung von x und x'. Sei $\tilde{\mathcal{V}}$ gegeben durch $X = \bigsqcup_{x \in X} V(x)$. $\tilde{\mathcal{V}}$ definiert mit $x \mapsto i(x)$ ein Verfeinerungsdatum $\mathcal{V} \to \tilde{\mathcal{V}}$. $\tilde{z}$ wird durch die Einschränkung der Elemente $f_{i(x)i(x')}$ von $V_{i(x)} \cap V_{i(x')}$ auf $V(x) \cap V(x')$ repräsentiert. Da für festes x in c) nur endlich viele Indices $i = i(x') \in I$ auftreten mit $V(x) \subset V_{i(x')}$ (lokale Endlichkeit von $\mathcal{V}$) kann man die $V(x)$ noch so schrumpfen, daß alle relevanten $f_{i(x)i(x')}$ auf $V(x)$ (und damit auf $V(x) \cap V(x')$) im Bild von $\mathcal{G}(V(x))$ liegen. Dies liefert das gewünschte Anhebung auf $C^1_{\tilde{\mathcal{V}}}(X, \mathcal{G})$.

Die lange exakte Kohomologiesequenz

Satz: *Sei X ein topologischer Raum und*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \to 0$$

eine exakte Garbensequenz auf X. Dann existiert eine zugehörige lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppen

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \ .$$

Zusatz: *Ist X parakompakt, kann diese exakte Sequenz verlängert werden*

$$\to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \to H^2(X,\mathcal{F}) \to H^2(X,\mathcal{G}) \to H^2(X,\mathcal{H}) \to ...$$

(und so weiter).

Beweis: Exaktheit an der ersten, zweiten und im Prinzip auch an der fünften Stelle wurde bereits früher gezeigt.

Die vierte Stelle

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(X) \arrow[r, "\delta"] & H^1(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "\psi^1"] & H^1(X,\mathcal{G}) \\
 & Z^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[r, "\psi^1"] & Z^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{G}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$h \overset{\delta}{\longmapsto} f_{ij} = (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j} \longmapsto (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$$

Sei $h \in \mathcal{H}(X)$, $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ eine geignete Überdeckung mit $h|U_i = \phi(g_i)$ für $g_i \in \mathcal{G}(U_i), i \in I$. Dann ist $f_{ij} = (g_i - g_j)|U_i \cap U_j$ ein Schnitt in $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$. Die f_{ij} bestimmen einen 1-Kozykel in $Z^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{F})$. Wir definieren $\delta(h)$ als die Kohomologieklasse dieses Zykels. Diese ist unabhängig von der Wahl der Lifts g_i und der Wahl der Überdeckung. Offensichlich gilt $\psi^1 \circ \delta = 0$.

Umgekehrt gilt für einen 1-Kozykel im Kern von ψ^1 – dieser sei repräsentiert durch f_{ij} – dann $\psi^1(f_{ij}) = (g_i - g_j)|U_i \cap U_j$ für eine geeignete Überdeckung und geeignete $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$! Beachte, daß die $h_i = \phi(g_i) \in \mathcal{H}(U_i)$ automatisch die Verheftungsbedingung erfüllen und sich zu einem globalen Schnitt $h \in$

$\mathcal{H}(X)$ verkleben. Die obige Konstruktion liefert dann durch Bildung von $\delta(h)$ gerade den ursprünglichen Kozykel (f_{ij}) zurück. Damit ist die Exaktheit an der vierten Stelle gezeigt.

Nun zur dritten Stelle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(X) \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{H}(X) \arrow[r, "\delta"] & H^1(X,\mathcal{F}) \\ & & Z^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{F}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$g \longmapsto h \longmapsto (g_i - g_j)|_{U_i \cap U_j}$$

Ist $\delta(h) = 0$, dann ist $(g_i - g_j)|U_i \cap U_j$ (mit den Bezeichnungen wie oben) gleich einem Korand $(f_i - f_j)|U_i \cap U_j$ für gewisse $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$. (Vielleicht muß man hierbei die Überdeckung verfeinern). Nach der Ersetzung $\tilde{g}_i = g_i - f_i$ erhält man Schnitte von $\mathcal{G}(U_i)$, welche die Verheftungsbedingung erfüllen und sich daher zu einem globalen Schnitt $g \in \mathcal{G}(X)$ verkleben. Offensichtlich gilt $\phi(g) = h$, denn dies gilt in allen Karten U_i. Dies impliziert die Exaktheit an der dritten Stelle.

Der weitere Beweis im parakompakten Fall verbleibt als Übungsaufgabe (im Kohomologiegrad 2). Benutze an der sechsten Stelle die Liftungsmethode des vorigen Kapitels! Der allgemeine Fall ist in den Büchern von Godement oder Gunning ausführlich dargestellt.

0.3 Hilfsmittel aus der Analysis

Die de Rham Kohomologie

Sei X eine zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, zum Beispiel eine Riemannsche Fläche. Dann hat man auf X die Garben $\mathcal{A}_X^i$ der komplexwertigen **alternierenden i-Formen**.

Zur Erinnerung: Ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, dann gilt

$$\mathcal{A}_X^0(U) = C_X^\infty(U)$$

$$\mathcal{A}_X^1(U) = C_X^\infty(U) \cdot dx + C_X^\infty(U) \cdot dy$$

$$\mathcal{A}_X^2(U) = C_X^\infty(U) \cdot dx \wedge dy.$$

Wir setzen $\mathcal{A}_X^i = 0$ für $i \neq 0, 1, 2$. Die in den Karten definierten Ableitungen $d(f) = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$ (totales Differential) und $d(g_1 \cdot dx + g_2 \cdot dy) = (g_2)_x - (g_1)_y$ (Divergenz) verheften sich zu einem Garbenkomplex

$$0 \to \mathcal{A}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^2 \to 0 \quad .$$

Es genügt $d \circ d = 0$ in lokalen Karten zu zeigen und folgt dort aus $f_{xy} = f_{yx}$ (Symmetrie der Hessematrix).

Definition: Die Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte dieses Komplexes

$$\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^i(X) = Kern\Big(d : \mathcal{A}_X^i(X) \to \mathcal{A}_X^{i+1}(X)\Big)/Bild\Big(d : \mathcal{A}_X^{i-1}(X) \to \mathcal{A}_X^i(X)\Big)$$

nennt man die **de Rham-Kohomologie** der C^∞-Mannigfaltigkeit X.

Lemma: *Ist $X \subset \mathbb{R}^2$ ein offener Quader um Null, dann gilt für $i \geq 1$*

$$\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^i(X) = 0 \ .$$

Beweis: Jedes $g(x,y) \cdot dx \wedge dy$ ist von der Form $d(g_2(x,y) \cdot dy)$ (setze $g_2(x,y) = \int_0^x g(t,y)dt$). Für $-(g_1)_y = (g_2)_x$ gilt $dg = g_1 dx + g_2 dy$ für $g(x,y) = \int_0^1 (x \cdot g_1(tx,ty) + y \cdot g_2(tx,ty))dt$ (benutze partielle Integration!). $\square$

Aus diesem Lemma folgt die Exaktheit des de Rham Komplexes in den Halmen. Somit ist der de Rham Kompex ein exakter Garbenkomplex auf X. Er liefert zwei kurze exakte Garbensequenzen

$$0 \to \mathcal{K}ern(d) \to \mathcal{A}_X^1 \to \mathcal{A}_X^2 \to 0$$

$$0 \to \mathbb{C}_X \to \mathcal{A}^0_X \to \mathcal{K}ern(d) \to 0\ ,$$

wobei $\mathcal{K}ern(d)$ eine Untergarbe von $\mathcal{A}^1_X$ ist.

Satz: *Ist X eine parakompakte zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, dann gibt es Isomorphismen*

$$\boxed{\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X)\ \cong\ H^i(X, \mathbb{C}_X)}\ .$$

Beweis: Dies gilt allgemein, aber wir zeigen nur die Fälle $i = 0, 1, 2$. Hierbei ist der Fall $i = 0$ klar. Die Garben $\mathcal{A}^i_X$ sind $\mathcal{C}^\infty_X$-Modulgarben. Daher gilt

$$H^i(X, \mathcal{A}^\nu_X) = 0 \quad \text{für } i > 0\ ,$$

da X nach Annahme parakompakt ist.

Für $i = 1$ folgt die Behauptung wegen $\mathcal{K}ern(d)(X) \cong \mathcal{K}ern(d : \mathcal{A}^1_X(X) \to \mathcal{A}^2_X(X))$ aus $H^1(X, \mathbb{C}_X) \cong \mathcal{K}ern(d)(X)/d(\mathcal{A}^0_X(X))$. Letzteres folgt aus der langen exakten Kohomologiesequenz

$$0 \to \mathbb{C}_X(X) \to \mathcal{A}^0_X(X) \to \mathcal{K}ern(d)(X) \to H^1(X, \mathbb{C}_X) \to 0\ .$$

Analog beweist man $H^2(X, \mathbb{C}_X) \cong H^1(X, \mathcal{K}ern(d))$ und $H^1(X, \mathcal{K}ern(d)) \cong \mathcal{A}^2_X(X)/d\mathcal{A}^1_X(X)$. Dies liefert den Fall $i = 2$.

1.Bemerkung: Die obigen Aussagen übertragen sich auf parakompakte C^∞-Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension d. (Wir benutzen im folgenden aber nur die Fälle $d = 1, 2$).

2.Bemerkung: Ist $f : X \to Y$ eine unendlich oft differenzierbare Abbildung zwischen parakompakten Mannigfaltigkeiten, dann induziert der Pullback von Differentialformen eine Abbildung zwischen den de Rham Kohomologiegruppen. Andererseits gibt es eine 'offensichtliche' Abbildung zwischen den Chechkohomologiegruppen (für konstante Garben!). Man zeigt leicht, daß das folgende Diagram kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X) \arrow[d, "\cong"'] \\ H^i(Y, \mathbb{C}_Y) \arrow[r, "f^*"] & H^i(X, \mathbb{C}_X) \end{tikzcd}\ .$$

Korollar: *Für Quader (oder sternförmiges) offene Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^2$ gilt $H^i(X, \mathbb{C}_X) = 0$ für alle $i \geq 1$. Analog gilt dies für offene Intervalle $X \subset R$.*

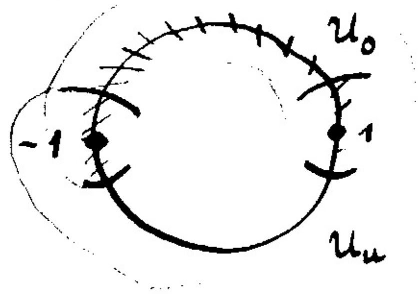
Man kann daraus für beliebige konstante Garben ableiten

$$H^1(X, A_X) = 0 \ .$$

Für $A_X = \mathbb{Z}_X$ folgt dies sofort aus der langen exakten Sequenz zur Garbensequenz $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathbb{C}_X \to (\mathbb{C}/\mathbb{Z})_X \to 0$.

Das letzte Korollar – zusammen mit dem Leray-Lemma – erlaubt es explizit Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathbb{C}_X)$ auszurechnen.

Beispiel $X = S^1$ (Einheitskreis): Die Überdeckung $\mathcal{U} : S^1 = U_o \cup U_u$ erfüllt die Leraybedingung! Es folgt $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) = \mathbb{Z}$ und $H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1}) = \mathbb{C}$.



Genauer erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\
H^1(S^1, \mathbb{C}_{S^1}) \arrow[r] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

von Isomorphismen, induziert von den Abbildungen

$$\omega \in \mathcal{A}^1(S^1) \longmapsto \oint_{S^1} \omega \ \in \ \mathbb{C} \quad \text{(pos. Orientierung)}$$

beziehungsweise

$$f_{ou} \in Z^1_{\mathcal{U}}(S^1, \mathbb{C}_{S^1}) \longmapsto f_{ou}(1) - f_{ou}(-1) \ \in \ \mathbb{C} \ .$$

Die vertikale Abbildung ist $\omega \mapsto f_{ou} = f_u - f_o \in \mathbb{C}_{S^1}(U_o \cap U_u)$, wobei f_o, f_u beliebige Stammfunktionen von ω auf U_o respektive U_u sind.

Beispiel $X = S$ (Riemannsche Zahlenkugel): Analog zeigt man mit der Überdeckung $S = U_0 \cup U_\infty$ die Aussage $H^1(S, \mathbb{C}_S) = 0$.

Das Wirtinger Kalkül

Sei X eine Riemannsche Fläche. Insbesondere ist dann X eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $dim(X) = 2$. Eine komplexwertige Einsform auf X ist in lokalen Karten gegeben durch

$$u(x,y) \cdot dx + v(x,y) \cdot dy \ .$$

Anstelle der lokalen Basen dx und dy, betrachten wir im folgenden die lokalen Basen

$$dz = dx + i \cdot dy$$

$$d\overline{z} = dx - i \cdot dy \ .$$

Die äußere Ableitung $d(f) = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$ einer C^∞-Funktion f wird in diesen Koordinaten

$$d(f) = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \cdot (dx + i \cdot dy) + \frac{1}{2}(f_x + if_y) \cdot (dx - i \cdot dy)$$

oder kurz

$$d(f) = \partial(f) \cdot dz + \overline{\partial}(f) \cdot d\overline{z} \ .$$

In Zukunft benutzen wir die Schreibweise $\partial(f) = \frac{\partial}{\partial z}(f) \cdot dz$ mit $\frac{\partial}{\partial z}(f) = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$ und analog $\overline{\partial}(f) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f) \cdot d\overline{z}$ mit $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f) = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$.

Die folgenden Aussagen sind unmittelbar zu verifizieren

Lemma: *Es gilt $d = \partial + \overline{\partial}$ sowie $\partial \circ \partial = \overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$.*

Die zweite Aussage folgt aus $dz \wedge dz = 0$ und $d\overline{z} \wedge d\overline{z} = 0$. In der Tat zerfällt der Komplex der Differentialformen wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(X) & = & & \mathcal{A}^{1,1}(X) & \\
\mathcal{A}^1(X) \arrow[u, "d"] & = & \mathcal{A}^{1,0}(X) \arrow[ur, "\overline{\partial}"] & \oplus & \mathcal{A}^{0,1}(X) \arrow[ul, "\partial"'] \\
\mathcal{A}^0(X) \arrow[u, "d"] & = & & \mathcal{A}^0(X) \arrow[ul, "\partial"] \arrow[ur, "\overline{\partial}"'] &
\end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{A}^{1,0}(X)$ die C^∞-Einsformen der Gestalt $a(x,y) \cdot dz$ und $\mathcal{A}^{0,1}$ die C^∞-Einsformen der Gestalt $b(x,y) \cdot d\overline{z}$.

Diese zuerst nur lokale Zerlegung ist jedoch auch global wohldefiniert, denn ein **holomorpher** Kartenwechsel respektiert die so definierte Zerlegung des Raumes der C^∞-Einsformen. Die Jakobimatrix $J(\phi)$ eines holomorphen Kartenwechsels $\phi(z)$ ist eine Diagonalmatrix bezüglich der Basis $dz, d\overline{z}$:

$$J(\phi) = diag(\phi'(z), \overline{\phi}'(z)) \ .$$

Hierbei ist $\phi'(z)$ die komplexe Ableitung von $\phi(z)$. Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem

Lemma: *Eine Form $f \in \mathcal{A}^0(X)$ ist holomorph auf X genau dann wenn gilt*

$$\overline{\partial}(f) = 0$$

(die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen !). Für eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ gilt in lokalen Koordinaten

$$\partial(f) = f'(z) \cdot dz \ .$$

Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß man sechs kurze exakte Garbensequenzen auf X erhält.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A}_X^{1,1} & & \\
 & \mathcal{A}_X^{1,0} \arrow[ur, "\overline{\partial}"] & & \mathcal{A}_X^{0,1} \arrow[ul, "\partial"'] & \\
\Omega_X^1 \arrow[ur, hook] & & \mathcal{A}_X^0 \arrow[ul, "\partial"'] \arrow[ur, "\overline{\partial}"] & & \overline{\Omega}_X^1 \arrow[ul, hook'] \\
 & \mathcal{O}_X \arrow[ul] \arrow[ur, hook] & & \overline{\mathcal{O}}_X \arrow[ul, hook'] \arrow[ur] & \\
 & & \mathbb{C}_X \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichne Ω_X^1 den Kern des Garbenhomomorphismus $\overline{\partial} : \mathcal{A}_X^{1,0} \to \mathcal{A}_X^{1,1}$, die Garbe der **holomorphen Differentialformen** auf X. Analog hat man die Garbe $\overline{\Omega}_X^1$ der antiholomorphen Differentialformen.

Das Dolbeaut Lemma

Sei $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit **kompaktem** Träger auf $\mathbb{C}$. Dann existiert ein $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ mit

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = g \ .$$

Der Lösungsraum besteht dann aus allen Funktionen in $f + \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Beweis: Die gesuchte Funktion f erhält man bei geeigneter Normierung als Faltung von $g(z)$ mit $\frac{1}{z}$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C}} g(z+w) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z} \ .$$

Das Integral isz wohldefiniert. Der Term $z^{-1} dz \wedge \overline{z}$ ist in Polarkoordinaten gleich $const \cdot exp(-i\theta) dr d\theta$. Der Pol verschwindet! Da g kompakten Träger besitzt, kann man Differentiation und Integration vertauschen. Dies gibt

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w}} f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{w}} g(z+w) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z} \ .$$

Anstatt über $\mathbb{C}$, kann über $\mathbb{C} - D_\varepsilon$ integriert (Komplement eines Kreises vom Radius ε) und anschließend der Limes $\varepsilon \to 0$ vollzogen werden. Auf $\mathbb{C} - D_\varepsilon$ ist z^{-1} holomorph und es gilt $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z^{-1} = 0$ (Cauchy-Riemann). Wegen $\frac{\partial}{\partial \overline{w}} g(z+w) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} g(z+w)$ und der Produktformel ergibt dies

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w}} f(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C} - D_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{g(z+w)}{z} dz \wedge d\overline{z}$$

oder wegen des Satzes von **Stokes**

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} \frac{g(z+w)}{z} (-dz) \ = \ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 g(w + \varepsilon \cdot e^{2\pi i \theta}) d\theta \ .$$

Das Integral läuft im Uhrzeigersinn (!) über den Kreis vom Radius ε um Null. Im Limes ergibt sich wie behauptet $\frac{\partial}{\partial \overline{w}} f(w) = g(w)$. $\square$

Da man jede gegebene C^∞-Funktion auf einer Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{C}$ außerhalb einer kleinen Kreisumgebung von x mit einer glatten Abschneidefunktion zu einer Funktion mit kompakten Träger modifizieren kann, folgt aus der bewiesenen Behauptung unmittelbar das

Dolbeaut Lemma: *Ist X eine beliebige Riemannsche Fläche. Dann ist die Garbensequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{A}_X^0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}_X^{0,1} \longrightarrow 0$$

exakt.

Aus den schon bekannten Verschwindungssätzen für die C^∞-Modulgarben $\mathcal{A}_X^0, \mathcal{A}_X^{0,1}$ folgt aus der langen exakten Kohomologiesequenz das

Korollar: Für eine beliebige Riemannsche Fläche X gilt $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Weiterhin ist wegen der langen exakten Kohomologiesequenz $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ äquivalent zur Aussage, daß die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial \overline{w}} f(w) = g(w)$ für alle $g \in C^\infty(X)$ eine Lösung $f \in C^\infty(X)$ besitzt.

Ein entsprechender Verschwindungssatz für $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ gilt aber in dieser Form nicht, es sei denn X ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit der induzierten holomorphen Struktur.

Dolbeaut Theorem: *Sei D eine Gebiet in $\mathbb{C}$, dann gilt $H^1(D, \mathcal{O}_D) = 0$.*

Dies wird im nächsten Abschnitt skizziert. Aussagen dieses Typs werden benötigt um mit Hilfe deseray Lemmas den **Endlichkeitssatz** zu beweisen. Dieser besagt, daß für kompakte Riemannsche Flächen $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum endlich dimensional ist.

Beweis des Dolbeaut Verschwindungsatz

Sei $D = \mathbb{C}$ oder ein offenes Teilgebiet von $\mathbb{C}$ sowie

$$g \in C^\infty(D) \ .$$

Wir wollen zeigen daß es ein $f \in C^\infty(D)$ gibt mit $(\frac{\partial}{\partial \overline{w}} f)(w) = g(w)$. Da der Träger von g nicht mehr notwendig kompakt angenommen wird, bedarf es einer Approximation.

Ausschöpfungen: Sei dazu D ein Gebiet in $\mathbb{C}$ mit einer Ausschöpfung

$$D = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

durch eine aufsteigende Folge von offenen beschränkten Teilmengen D_n. Wir nehmen außerdem an

$$D_n \subset \overline{D}_n \subset D_{n+1} \quad , \quad \forall n \ .$$

Schließlich fordern wir für alle n folgende Approximationseigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall h \in \mathcal{O}(D_{n-1}) \ \exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(D_n) \quad \sup_{\overline{D}_{n-2}} |h - \tilde{f}| \leq \varepsilon \ .$$

Lemma: (ohne Beweis) *Solche Ausschöpfungen existieren immer.*

Die Einschränkung der gegebenen Funktion $g \in C^\infty(D)$ auf D_n kann durch eine C^∞-Abschneidung außerhalb von D_n zu einer C^∞-Funktion g_n auf $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger modifiziert werden. Also gibt es ein f_n mit $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f_n = g_n$ auf ganz $\mathbb{C}$. Die Einschränkung von f_n auf D_n erfüllt dann

$$f_n \in C^\infty(D_n) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f_n = g| \ D_n \ .$$

ObdA kann f_n noch beliebig durch eine holomorphe Funktion $\tilde{f}_n \in \mathcal{O}(D_n)$ abgeändert werden. Damit kann für $h = f_n - f_{n-1} \in \mathcal{O}(D_{n-1})$ erreicht werden

$$\sup_{\overline{D}_{n-2}} |f_n - f_{n-1}| \ \leq \ 2^{-n} \ .$$

Nach diesen Vorbereitungen liefert ein teleskopischer Ansatz die gewünschte Lösungsfunktion f

$$f(z) \;=\; f_k(z) + \sum_{\nu \geq k} (f_{\nu+1}(z) - f_\nu(z)) \;.$$

Offensichtlich ist $f(z)$ unabhängig (!) von der Wahl von k. Die auftretende unendliche Reihe ist absolut und gleichmäßig konvergent auf D. Somit ist wegen $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f_{\nu+1}(z) - f_\nu(z)) = 0$ (auf D_k für $\nu \geq k$) die Reihe holomorph auf D_k. Es folgt daher auf D_k

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) \;=\; \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f_k(z) + 0 \;=\; g(z) \;.$$

Da k beliebig gewählt werden kann gilt daher $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = g$ auf ganz D.

Der Endlichkeitssatz

0.4 Der Satz von Riemann-Roch

Divisoren

Sei X eine Riemannsche Fläche. Sei A eine abelsche Gruppe. Ein A-wertiger Divisor ist eine A-wertige Funktion auf X mit diskretem Träger in X. Insbesondere gilt für einen $\mathbb{Z}$-wertigen Divisor – oder kurz **Divisor** – auf X

$$D : X \to \mathbb{Z}$$

die Gleichung $D(x) = 0$ für fast alle Punkte $x \in K$ eines beliebigen Kompaktums $K \subset X$. Wir schreiben $D = \sum_{x \in X} D(x) \cdot [x]$. Für kompakte Riemannsche Flächen ist der Träger $supp(D)$ eines Divisors notwendigerweise endlich und wir definieren den **Grad**

$$deg(D) = \sum_{x \in X} D(x) \ .$$

Wir schreiben $D_1 + D_2$ für die Summe zweier Divisoren. Wir schreiben $D_1 \leq D_2$, falls $D_1(x) \leq D_2(x)$ gilt für alle $x \in X$. Ist $f \in \mathcal{M}^*(X)$ eine meromorphe Funktion auf X, dann nennt man

$$(f) = \sum_{x \in X} ord_x(f) \cdot [x]$$

den **Hauptdivisor** der Funktion f. Für kompaktes X legt der Hauptdivisor (f) die meromorphe Funktion f bis auf eine Konstante in $\mathbb{C}^*$ fest.

Die Garben $\mathcal{O}_D$: Sei D ein Divisor auf X. Setze

$$\mathcal{O}_D(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \mid f \in \mathcal{M}(U),\ D(x) + ord_x(f) \geq 0 \ \forall x \in U \} \ .$$

Dies definiert Untergarben $\mathcal{O}_D$ der Garbe der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}_X$.

Beispiel: Für $f \in \mathcal{M}^*(X)$ und $D = -(f)$ gilt $f \in \mathcal{O}_D(X)$.

Bemerkung 1: Für $f \in \mathcal{M}^*(X)$ mit Hauptdivisor (f) und beliebiges D definiert Multiplikation mit f einen Garbenisomorphismus

$$f : \ \mathcal{O}_{D+(f)} \ \cong \ \mathcal{O}_D \ .$$

Die Isomorphieklasse der Garbe $\mathcal{O}_D$ hängt also nur vom Bild des Divisors in der **Klassengruppe** $Cl(X)$ (Divisoren auf X modulo Hauptdivisoren auf X) ab.

Bemerkung 2: Sei P ein Punkt auf X aufgefasst als Divisor vom Grad 1 und sei D ein beliebiger Divisor auf X. Dann ist $D \leq D + P$ und man hat eine exakte Garbensequenz auf X

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_P \to 0 \; .$$

Hierbei ist $\mathbb{C}_P$ die Wolkenkratzergarbe mit Weten in $\mathbb{C}$ im Punkt P. Die Abbildung

$$\pi : \mathcal{O}_{D+P}(U) \to \mathbb{C}_P(U)$$

ist Null außer wenn $P \in U$. In diesem Fall ist $\pi(f) = a_{-D(P)-1}(f) \in \mathbb{C}$ (Koeffizient der Laurententwicklung von f im Punkt $\phi_i(P)$ bezüglich einer fest gewählten Karte um P.

Der Satz von Riemann-Roch

Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen, dann sind auch die Kohomologiegruppen auf natürliche Weise $\mathbb{C}$-Vektorräume. Wir schreiben im folgenden kurz $h^i(X, \mathcal{G})$ für die Dimensionen $dim_{\mathbb{C}}(H^i(X, \mathcal{G}))$.

Endlichkeitssatz: *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist die Dimension*

$$g := h^1(X, \mathcal{O}_X) \ < \infty$$

endlich. Die Zahl g nennt man das **Geschlecht** *der Riemannschen Fläche.*

Den hochgradig nichttrivialen Beweis dieses Endlichkeitssatzes stellen wir vorläufig zurück! Wir erhalten als unmittelbare Anwendung den

Satz von Riemann-Roch: *Sei X eine kompakte Riemennsche Fläche und D ein Divisor auf X. Dann sind $h^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $h^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich und*

$$\boxed{h^0(X, \mathcal{O}_D) - h^1(X, \mathcal{O}_D) - deg(D) \ = \ 1 - g} \ ,$$

d.h. die linke Seite hängt nicht ab von D.

Beweis: Aus der langen exakten Kohomologiesequenz der Garbensequenz aus Bemerkung 2 des vorigen Paragraphen folgt

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to \mathbb{C} \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0$$

Beachte $H^1(X, \mathbb{C}_P) = 0$! Aus den Dimensionsformeln für Kern und Bild folgt daraus sofort:

$$h^0(X, \mathcal{O}_D) - h^1(X, \mathcal{O}_D) - deg(D)$$
$$= h^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) - h^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) - deg(D + P) \ .$$

Die Endlichlichkeit von h^0, h^1 für D respektive $D{+}P$ sind außerdem äquivalent!

Der Satz von Riemann-Roch folgt aus dieser Beobachtung, denn jeder Divisor kann durch endlich viele Additionen bzw. Subtraktionen von Punkten in den Nulldivisor übergeführt werden. Für den Nulldivisor schließlich ist $h^0(X, \mathcal{O}) = 1$ und $h^1(X, \mathcal{O}) = g$. qed.

Korollar: *Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche existiert eine nichtkonstante meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}^*(X)$.*

Wähle $D \geq 0$ mit $deg(D) \geq g+1$. Dann gilt $h^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$!

Korollar: *Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche existiert eine von Null verschiedene meromorphe Differentialform df oder*

$$\omega = df/f \in \Omega^1_{\mathcal{M}}(X) .$$

Übungsaufgabe: Zeige $deg(f) = 0$ für $f \in \mathcal{M}^*(X)$. Schließe daraus, daß jede meromorphe Funktion auf X jeden Funktionswert gleich oft annimmt! Benutze Bemerkung 1 und den Satz von Riemann-Roch.

Übungsaufgabe: Berechne das Geschlecht $g(S)$ der Riemannschen Zahlenkugel S: Benutze die Standardkarten ($\mathcal{U}$ ist die Standardüberdeckung mit den zwei Karten $U_0 \cong \mathbb{C}$ und $U_\infty \cong \mathbb{C}$), den Dolbeautschen Satz $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ und das Leray Lemma um $H^1(S, \mathcal{O}) = H^1_{\mathcal{U}}(S, \mathcal{O})$ zu zeigen. Zeige dann $H^1_{\mathcal{U}}(S, \mathcal{O}) = 0$ unter Zuhilfenahme der Laurententwicklung von holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}^*$.

Übungsaufgabe: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Ist das Geschlecht $g = g(X)$ gleich Null, dann gibt es eine meromorphe Funktion f mit einem einfachen Pol in einem vorgegebenen Punkt (Riemann-Roch). Zeige $f : X \to S$ definiert eine bijektive holomorphe Abbildung auf die Riemansche Zahlenkugel. Zeige, daß auch die Umkehrfunktion holomorph ist. Insbesondere gilt $X \cong S$.

Die Garbe der holomorphen Differentialformen Ω^1

Die Berechnung der ersten Kohomologiegruppen der Garben $\mathcal{O}_D$ benutzt Hilfsmittel der Differential- und Integralrechnung. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt eine Brücke zu den holomorphen bzw. meromorphen Differentialformen geschlagen.

Eine Differentialform ω – eine 1-Form – auf einer im Moment nicht notwendig zusammenhängenden "Riemannschen Fläche" X heißt holomorph, wenn sie bezüglich lokaler Karten $\phi_i : U_i \cong V_i \subset \mathbb{C}$ eines holomorphen Atlanten die Gestalt

$$\omega|U_i \;=\; \phi_i^*(\omega_i) \quad , \quad \omega_i = f_i(z) \cdot dz \ , \ f_i \in \mathcal{O}(V_i)$$

besitzt. Wir schreiben $\Omega^1(X)$ für den $\mathcal{O}(X)$-Modul aller holomorphen Differentialformen auf X.

In der Tat definiert $\Omega^1(U)$ für variierendes $U \subset X$ eine Garbe auf X, die **Garbe der holomorphen Differentialformen** Ω^1 auf X. Man erhält eine exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{1,0} \xrightarrow{\;\overline{\partial}\;} \mathcal{A}_X^{1,1} \longrightarrow 0 \quad .$$

Analog definiert man die Garbe $\Omega^1_{\mathcal{M}}$ der **meromorphen Differentialformen** auf X; in lokalen Karten ist eine meromorphe Differentialform von der Gestalt $f_i(z) \cdot dz$ für meromorphes $f_i \in \mathcal{M}(V_i)$.

Für eine meromorphe Differentialform $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{M}}(X)$ auf einer Riemannschen Fläche X ist die **Ordnung** im Punkt $P \in X$

$$ord_P(\omega) \;=\; ord_{\phi_i(P)}(f_i(z)) \quad , \quad f_i(z)dz = \phi_i^*(\omega)|U_i$$

wohldefiniert! Das heißt, die so definierte ganze Zahl ist unabhängig von der Wahl der Karte $P \in U_i$. Dies folgt aus der Tatsache, daß eine lokal im Punkt P biholomorpher Kartenwechsel ϕ_{ij} die Eigenschaft $d\phi_{ij}/dz(P) \neq 0$ besitzt (Funktionentheorie I)!

Außerdem ist für jeden Punkt P von X das **Residuum**

$$res_P(\omega) \quad , \quad \omega \in \Omega_{\mathcal{M}}(X)$$

einer meromorphen Differentialform wohl definiert und hängt nicht von der Wahl der zur Berechnung gewählten Karte ab!

Variante: Sei D ein Divisor auf X, dann definiert

$$\Omega^1_D(U) = \{\omega \in \Omega^1_{\mathcal{M}}(U) \mid ord_x(\omega) + D(x) \geq 0 \ \forall x \in U \ \}$$

eine Untergarbe der Garbe der meromorphen Differentialformen auf X.

Lemma: *Sei X eine Riemannsche Fläche, dann gilt $\mathcal{M}^*(X) \cong \Omega^1_{\mathcal{M}}(X)$.*

Genauer: Sei eine globale Differentialform $0 \neq \omega \in \Omega^1_{\mathcal{M}}(X)$ der Riemanschen Fläche X mit dem zugehörigen **"kanonischem"Divisor**

$$K = \sum_{x \in X} ord_x(\omega) \cdot [x]$$

fest gewählt. Dann gilt offensichtlich

Lemma: *Für jeden Divisor D definiert*

$$\mathcal{O}_{K-D}(U) \ni \ f \ \mapsto \ f \cdot (\omega|U) \ \in \Omega^1_{-D}(U)$$

einen Garbenisomorphismus

$$\boxed{\mathcal{O}_{K-D} \ \cong \ \Omega^1_{-D}} \ .$$

Beispiel: $X = S$ (Riemannsche Zahlenkugel) und $\omega = dz/z$ mit $K = -O - \infty$. Insbesondere gilt $\Omega^1(S) = \mathcal{O}_{-0-\infty}(S) = 0$.

Epilog: Da Ω^1_{-D} eine Untergarbe der Garbe aller meromorphen Einsformen $\Omega^1_{\mathcal{M}}$ auf X ist, kann man die Quotientengarbe $\Omega^1_{\mathcal{M}}/\Omega^1$ aller sogenannten **Mittag-Leffler Verteilungen** betrachten (siehe Appendix)

$$0 \to \Omega^1_{-D} \to \Omega^1_{\mathcal{M}} \to \Omega^1_{\mathcal{M}}/\Omega^1_{-D} \to 0 \ .$$

Globale Schnitte der Quotientengarbe $\mathcal{ML}(\Omega^1_{-D}) = \Omega^1_{\mathcal{M}}/\Omega^1_{-D}$ entsprechen Vorgaben von Hauptteilen relativ zu D in endlich vielen Punkten der kompakten Riemannschen Fläche X.

Appendix (Garbenquotienten)

Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ eine Garbeninklusion auf X. Dann existiert eine Quotientengarbe $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$ auf X und eine kanonische Abbildung $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ so daß

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

exakt wird. $\mathcal{H}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch die folgende Eigenschaft: Für jeden Prägarbenhomomorphismus $\tilde{\pi} : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ in eine Garbe $\mathcal{K}$ mit $\tilde{\pi}(\mathcal{F}) = 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Prägarbenhomomorphismus $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[drr, "0"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\exists!"] \\ & & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Ein Kandidat für $\mathcal{H}$ ist definiert durch

$$\mathcal{H}(U) = \{g : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x \mid \text{mit } *\} \ ,$$

wobei die Bedingung $(*)$ besagt: 1) $g(x) \in \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$ 2) $\forall x \in U \exists U(x) \subset U$ offen mit $x \in U(x)$ und $g_x \in \mathcal{G}(U(x))$ so daß gilt $g|U(x) = g_x$.

Übungsaufgabe: $\mathcal{H}$ ist eine Garbe auf X und erfüllt die gewünschte universelle Eigenschaft.

Übungsaufgabe: Zeige $\mathcal{H}(U) = \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{H}_{\mathcal{U}}(U)$ (Limes über alle Überdeckungen) mit

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}}(U) = \{(g_i \in \mathcal{G}(U \cap U_i))_{i \in I} \mid (g_i - g_j)| (U_i \cap U_j \cap U) \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U)\} \ \text{ modulo}$$

$$\{(f_i)_{i \in I} \mid f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U)\} \ .$$

Der Residuensatz

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Die exakte Garbensequenz

$$0 \to \Omega^1 \to \Omega^1_{\mathcal{M}} \to \Omega^1_{\mathcal{M}}/\Omega^1 \to 0\ .$$

liefert die Kohomologiesequenz $(*)$

$$H^0(X,\Omega^1_{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^0(X,\Omega^1_{\mathcal{M}}/\Omega^1) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\Omega^1)\ .$$

Schnitte η der mittleren Kohomologiegruppe sind sogenannte **Mittag-Leffler** Verteilungen: $\eta = (\eta_i)_{i\in I}$ für $\eta_i \in \Omega^1_{\mathcal{M}}(U_i)/\Omega^1(U_i)$ mit $r(\eta_i) - r(\eta_j) \in \Omega^1(U_i\cap U_j)$. Hierbei ist $X = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Das Residuum

$$res(\eta) = \sum_{P\in X} res_P(\eta)$$

einer Mittag-Lefflerverteilung η von meromorphen Differentialformen auf einer kompakten Riemannschen Fläche X ist wohldefiniert!

Bemerkung: Für unsere Zwecke genügt die Existenz der exakten Sequenz $(*)$. Diese ist unmittelbar einsichtig und erfordert nicht die Kenntnis der zugrundeliegenden kurzen Garbensequenz!

Zur Berechnung von $H^1(X,\Omega^1)$ benutzen wir die exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{A}^{1,0}_X \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^2_X \longrightarrow 0$$

(Dolbeaut Lemma). Wegen $H^1(X,\mathcal{A}^{(1,0)}) = 0$ liefert dies einen Isomorphismus

$$H^0(X,\mathcal{A}^2_X)/d(H^0(X,\mathcal{A}^{(1,0)}_X)) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\Omega^1)\ .$$

Beachte $\overline{\partial}(H^0(X,\mathcal{A}^{(1,0)}_X)) = d(H^0(X,\mathcal{A}^{(1,0)}_X))$!

Residuensatz : *Das Diagram*

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,\Omega^1_{\mathcal{M}}/\Omega^1) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[d, "res"] & & H^1(X,\Omega^1) \\
\mathbb{C} & & H^0(X,\mathcal{A}^2_X)/d(H^0(X,\mathcal{A}^{(1,0)}_X)) \arrow[ll, "(2\pi i)^{-1}\int_X"'] \arrow[u, "\cong"', "\delta"]
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Insbesondere gilt für jede globale meromorphe Differentialform $\eta \in \Omega^1_{\mathcal{M}}(X)$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X

$$res(\eta) = 0 \ .$$

Beweis: Die untere horizontale Abbildung ist wohl definiert (Satz von Stokes)! Sei $\omega = \delta^{-1}(\delta(\eta))$ und $\eta = (\eta_i)_i$ eine Mittag-Leffler Verteilung. Dann gilt nach eventueller Verfeinerung der Überdeckung

$$\omega|_{U_i} = d\varepsilon_i^{(1,0)}$$

$$\eta_i - \eta_j = \varepsilon_i^{(1,0)} - \varepsilon_j^{(1,0)} \qquad \text{auf } U_i \cap U_j$$

für gewisse $\varepsilon_i^{(1,0)} \in \mathcal{A}^{(1,0)}(U_i)$ – nach Definition von δ.

Die Formen η_i der Mittag-Leffler Verteilung η sind holomorph und natürlich vom Typ $(1,0)$ – außerhalb einer endlichen Polstellenmenge $S \subset X$. Somit folgt aus Axiom G2 (für die Garbe $\mathcal{A}^{(1,0)}_{X \setminus S}$) die Existenz einer Form

$$\varepsilon \in \mathcal{A}^{(1,0)}(X \setminus S)$$

mit $\varepsilon = \eta_i - \varepsilon_i^{(1,0)}$ auf $\tilde{U}_i = U_i \setminus S \cap U_i$ für alle $i \in I$. Mithin gilt $d\varepsilon = \overline{\partial}\varepsilon = -\overline{\partial}\varepsilon_i^{(1,0)} = -d\varepsilon_i^{(1,0)} = -\omega$ auf allen $\tilde{U}_i$. Somit also

$$d\varepsilon = -\omega \qquad \text{auf } X \setminus S \ .$$

Aus dem Satz von **Stokes** folgt

$$\int_X \omega = \int_{X \setminus S} \omega = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{X_\epsilon} \omega = \sum_{P \in S} \lim_{\epsilon \to 0} \int \oint -\varepsilon \ .$$

Die rechten Integrale haben Uhrzeigersinn, und sind für $P \in U_i$ über kleine Kreise vom Radius ϵ erstreckt um $\phi_i(P)$ in $V_i \subset \mathbb{C}$. Die einzelnen Terme sind daher gleich $lim_{\epsilon \to 0} - \oint (\eta_i - \varepsilon_i^{(1,0)})$. Da $\varepsilon_i^{(1,0)}$ stetig bei P ist, verschwindet dieser Beitrag im Limes und es bleibt $lim - \oint \eta_i = res_P(\eta_i)$. Durch aufsummieren folgt die Behauptung des Residuensatzes.

Algebraische Distributionen

Wir fixieren einen Divisor D auf der kompakten Riemannschen Fläche X. Eine $\mathbb{C}$-Linearform auf dem endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ nennen wir eine algebraische Distribution vom Typ D.

Man hat eine natürliche Abbildung

$$can_D : \; H^1(X, \Omega^1_{-D}) \to H^0(X, \mathcal{O}_D)^* \; .$$

Diese leitet sich von der **Residuenabbildung** $Res = (2\pi i)^{-1} \int_X \circ \, \delta^{-1}$

$$Res : \; H^1(X, \Omega^1) \to \mathbb{C}$$

des vorigen Abschnitts ab durch Cupproduktbildung

$$can_D(\xi)(f) = Res(f \cup \xi) \; .$$

Das **Cupprodukt** ist auf dem Niveau von Cechkozykeln definiert: $\xi = (\omega_{ij}) \in Z^1_{\mathcal{U}}(X, \Omega^1_D)$ definiert hierbei $f \cup \xi$, repräsentiert durch den Cechkozykel $(f \cdot \omega_{ij}) \in Z^1_{\mathcal{U}}(X, \Omega^1)$. Wir geben ein

Beispiel: Sei $P \in X$ ein Punkt. Nur der Einfachheit halber nehmen wir an $P \notin supp(D)$. Wähle ein kleines Kreisgebiet K_P um P (in einer Karte) welcher keinen Punkt von $supp(D)$ enthält. Dann überdecken $U_1 = K_P$ und $U_2 = X \setminus P$ ganz X. Beachte $\Omega^1_D(U_1 \cap U_2) = \Omega^1(U_1 \cap U_2)$ auf Grund der Annahmen. Somit definiert die Mittag-Leffler Verteilung

$$\eta_P = \frac{dz}{z - P} \quad \in \; Z^1_{\{U_1, U_2\}}(X, \Omega^1_D)$$

(in lokalen Karten) eine Kohomologieklasse

$$\delta_P = \delta(\eta_P) \in H^1(X, \Omega_D)$$

mit der Eigenschaft

$$Res(f\delta_P) = f(P)$$

(Cauchy's Integralsatz!).

Mit anderen Worten, die **Dirac-Distribution** δ_P auf $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ für $P \notin supp(D)$ wird auf diese Weise realisiert! Wir überlassen es dem Leser die Konstruktion auf den Fall $P \in supp(D)$ zu verallgemeinern und bemerken

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_{D-P}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\delta_P} \mathbb{C} \to 0$$

Die Dirac-Distrubtionen erzeugen somit aus recht naheliegenden Gründen den Dualraum von $H^0(X, \mathcal{O}_D)$. Es folgt

Lemma: *Die kanonische Abbildung*

$$can_D : H^1(X, \Omega^1_{-D}) \twoheadrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D)^*$$

ist surjektiv.

Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß die kanonische Abbildung can_D ein *Isomorphismus* ist. Diese fundamentale Aussage nennt man **Serre Dualität**. Als Spezialfall erhält man etwa den Isomorphismus $Res : H^1(X, \Omega^1) \cong \mathbb{C}$. Der erste Schritt in die Richtung des Serre Dualitätssatzes ist das nächste

Lemma: *Es gibt eine Konstante $c(X)$ derart, daß für $Kern_D = Kern(can_D)$ gilt*

$$dim_{\mathbb{C}}(Kern_D) \leq c(X) \qquad \text{für } deg(D) >> 0 \ .$$

Beweis: Benutze $\Omega^1_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}$! Der Satz von Riemann-Roch liefert dann $h^1(X, \Omega^1_{-D}) = h^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) - deg(K-D) + (g(X)-1)$, also $-deg(K-D) + (g(X)-1)$ für $deg(D) > deg(K)$. Andererseits gilt $h^0(X, \mathcal{O}_D) \geq deg(D) + (1-g(X))$. Daraus folgt die Behauptung.

Serre Dualität

Seien D_1, D_2 zwei Divisoren mit $D_1 \leq D_2$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Für uns genügt der Fall $D_2 = D_1 + P$ für einen Punkt P. Allerdings wollen wir auch zulassen $P \in supp(D_1)$.

Lemma: *Für $D_2 \geq D_1$ hat man ein kommutatives Diagram wie folgt*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] & H^0(X, \mathcal{O}_{D_2})^* \arrow[r, two heads, "1"] & H^0(X, \mathcal{O}_{D_1})^* \\
B \arrow[u, two heads, "3"] \arrow[r, hook] & H^1(X, \Omega^1_{-D_2}) \arrow[u, two heads] \arrow[r, two heads, "2"] & H^1(X, \Omega^1_{-D_1}) \arrow[u, two heads] \\
 & Kern_{D_2} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "4", "\phi_{D_1,D_2}"'] & Kern_{D_1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Beweis: Die Surjektivität 1) folgt aus $\mathcal{O}_{D_1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{D_2}$. Die Surjektivität 2) folgt aus der exakten Sequenz $0 \to \mathcal{O}_{K-D_2} \to \mathcal{O}_{K-D_1} \to \mathbb{C}_P \to 0$ und $H^1(X, \mathbb{C}_P) = 0$.

Die Surjektivität 4) von ϕ_{D_1,D_2} folgt unmittelbar aus der Surjektivität 3).

Die Surjektivität 3) folgt, wenn jedes $\phi \in A$,

d.h. $\phi \in \mathcal{O}_{D_2}(X)^*$ mit $\phi(\mathcal{O}_{D_1}(X)) = 0$,

im Bild von $Kern(H^1(X, \Omega^1_{-D_2}) \to H^1(X, \Omega^1_{-D_1}))$ liegt. Für $D_2 = D_1 + P$ und obdA $h^0(X, \mathcal{O}_{D_1+P}) = h^0(X, \mathcal{O}_{D_1}) + 1$, ist dies obdA nur für die Dirac-Distribution

$$\phi = \delta_P^{(D_2)} : H^0(X, \mathcal{O}_{D_1+P}) \to \mathbb{C}$$

vom Typ D_2 zum Punkt P zu prüfen!

Die Surjektivität 3) folgt daher aus

$$\begin{tikzcd}
\delta_P^{(D_2)} & H^0(X,\mathcal{O}_{D_1+P})^* & \\
& H^1(X,\Omega^1_{-D_1-P}) \arrow[u] \arrow[r] & H^1(X,\Omega^1_{-D_1}) \\
\eta_P^{(-D_2)} \arrow[uu, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & 0
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist die unterste Zeile in lokalen Koordinaten um P in Termen von Cech 1-Kozykeln zur Überdeckung $X = K_P \cup (X \setminus P)$ – siehe letzter Paragraph – gegeben

$$\eta_P^{(-D_2)} = [(z-P)^{D_2(P)} \cdot \frac{dz}{z-P}] \quad \mapsto \quad [(z-P)^{D_1(P)} \cdot dz] \ .$$

Der Kozykel $(z-P)^{D_1(P)} \cdot dz \in \Omega^1_{-D_1}(K_P \cap (X \setminus P))$ ist aber ein Rand, denn er lässt sich auf $\Omega^1_{-D_1}(K_P)$ fortsetzen.

Damit ist der Fall $D_2 = D_1 + P$ bewiesen. Der allgemeine Fall $D_2 \geq D_1$ folgt durch Iteration.

Lemma: *Für $0 \neq g \in \mathcal{M}^*(X)$ gilt*

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,\mathcal{O}_D)^* \arrow[r, "g^*", "\sim"'] & H^0(X,\mathcal{O}_{D+(g)})^* \\
H^1(X,\Omega^1_{-D}) \arrow[u, twoheadrightarrow] \arrow[r, "g", "\sim"'] & H^1(X,\Omega^1_{-D-(g)}) \arrow[u, twoheadrightarrow] \\
Kern_D \arrow[u, hookrightarrow] \arrow[r, "\phi_g", "\sim"'] & Kern_{D+(g)} \arrow[u, hookrightarrow]
\end{tikzcd}$$

Beweis: Dies folgt aus $Res(fg \cup \omega) = Res(f \cup g\omega)$ mittels der Isomorphismen $g : \mathcal{O}_{D+(g)} \cong \mathcal{O}_D$ und $g : \Omega^1_{-D} \cong \Omega^1_{-D-(g)}$ (Multiplikation mit g).

Korollar: *Sei P ein Punkt, n eine natürliche Zahl und D ein beliebiger Divisor auf X. Dann existiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung*

$$H^0(X,\mathcal{O}_{nP}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}\Big(Kern_{D+nP}, Kern_D\Big)$$

welche $g \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ *auf* $[g] = \phi_{D,D+nP+(g)} \circ \phi_{D+nP+(g)}$ *abbildet. Beachte* $D_1 = D \leq D_2 = D + nP + (g)$.

Somit ist

$$[g] : Kern_{D+nP} \to Kern_D$$

eine Surjektion für alle $g \neq 0$. Daraus folgt aber die Serre Dualität

$$Kern_D = 0 \ .$$

Denn anderenfalls wäre wegen der letzten beiden Lemmas

$$H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{C}}\Big(Kern_{D+nP}, Kern_D\Big)$$

eine Injektion! Dies ist aber unmöglich, denn für $n >> 0$ hat die rechte Seite eine unabhängig von n beschränkte Dimension $\leq c(X) \cdot dim_{\mathbb{C}}(Kern_D)$. Andererseits gilt $h^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \to \infty$ für $n \to \infty$. Damit ist gezeigt

Serre Dualität: *Für jeden Divisor D auf der kompakten Riemannschen Fläche ist die Cupproduktpaarung*

$$\boxed{H^0(X, \mathcal{O}_D) \times H^1(X, \Omega^1_{-D}) \xrightarrow{\cup} H^1(X, \Omega^1) \xrightarrow{Res} \mathbb{C}}$$

nicht ausgeartet. Insbesondere gilt $Res : H^1(X, \Omega^1) \cong \mathbb{C}$.

Korollar: *Die Cupproduktpaarung*

$$H^0(X, \Omega^1_D) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\cup} H^1(X, \Omega^1) \xrightarrow{Res} \mathbb{C}$$

nicht ausgeartet. Insbesondere gilt

$$dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X) = g \ .$$

Korollar: $h^1(X, \mathcal{O}_D) = h^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$.

Übungsaufgabe: Zeige $deg(K) = 2g - 2$. Benutze Riemann-Roch und $h^0(X, \mathcal{O}_K) = g$.

Übungsaufgabe: Zeige $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$.

0.5 Stammfunktionen

Differentiale

Ein meromorphes Differential $\omega \in \Omega^1(X)$ heißt Differential 1.Gattung, wenn es holomorph ist auf X. Es heißt **Differential 2.Gattung**, wenn für alle $x \in X$ gilt $res_x(\omega) = 0$ (Residuenfreiheit). Differentiale ω, welche höchstens einfache Polstellen besitzen, heißen **Differentiale 3.Gattung**.

Sei nun für den Rest dieses Abschnitts X eine kompakte Riemannsche Fläche. Sei $\omega \in \Omega_{3rd}(X)$ ein Differential dritter Gattung auf X. Sei S die Menge der Polstellen von ω und $a_x = res_x(\omega)$. Der **Residuensatz** liefert

$$\sum_{x \in S} res_x(\omega) = 0 \ .$$

Die exakte Sequenz $(*)$ des Residuensatzes zeigt wegen $H^1(X, \Omega^1) \cong \mathbb{C}$ (**Serre Dualität**), daß diese Summenbedingung sogar notwendig und hinreichend für die Existenz einer Differentialform 3.Gattung mit vorgegebenen Residuen $a_x, x \in X$ ist. Man erhält daher als Verfeinerung von $(*)$ die exakte Sequenz

$$0 \to \Omega^1(X) \to \Omega^1_{3rd}(X) \to Div_{\mathbb{C}}(X)^0 \to 0 \ .$$

Rechts steht die Gruppe $Div_{\mathbb{C}}(X)^0$ aller komplexwertigen Divisoren auf X vom Grad Null. Ist $Q \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann bilden die **Basisformen**

$$\omega_{P,Q} \in \Omega^1_{3rd}(X)$$

mit Residuum -1 in P und 1 in Q und Null sonst eine $\mathbb{C}$-Basis des Vektorraums $\Omega^1_{3rd}(X)/\Omega^1(X)$. Hierbei durchläuft P die Punkte von X.

Sei allgemeiner $\eta \in \Omega^1_{\mathcal{M}}(X)$ eine beliebige meromorphe Differentialform auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Dann liefert der Residuensatz und obige Betrachtung die Existenz einer Differentialform $\omega \in \Omega^1_{3rd}(X)$ mit denselben Residuen wie η. Die Differenz $\eta - \omega$ ist ein Differential 2.Gattung. Also folgt

$$\Omega^1_{\mathcal{M}}(X) = \Omega^1_{3rd}(X) \ + \ \Omega^1_{2nd}(X) \quad ,$$

$$\Omega^1_{3rd}(X) \ \cap \ \Omega^1_{2nd}(X) = \Omega^1(X) \ .$$

Wir werden in den nächsten Abschnitten die Existenz von globalen (logarithmischen) Stammfunktionen von Differentialformen (dritter) zweiter Gattung studieren.

Stammfunktionen

Die Ableitung $\omega = \partial F$ einer meromorphen Funktion F auf X liefert immer ein Differential 2.Gattung auf X

$$\partial : \mathcal{M}(X) \to \Omega_{2nd}(X) \ .$$

Umgekehrt besitzt lokal jedes Differential ω 2.Gattung eine meromorphe Stammfunktion (benutze die Laurententwicklung in lokalen Koordinaten; $\omega = F'(z) \cdot dz$ und obdA $F = z^n, n \in \mathbb{Z}$ mit $\omega = nz^{n-1} \cdot dz$. Dann kommt $n - 1 = -1$ nicht vor!). Man erhält daher die beiden folgenden exakten Garbensequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, hook] & \Omega^1_X \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \mathcal{M}_X \arrow[r, "\partial"] & \Omega^1_{X,2nd} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \mathbb{C} & & 0 \arrow[d, equal] \\
\mathbb{C} \arrow[r, equal] & \mathbb{C} \arrow[r] & \Omega^1(X) \arrow[r, "\delta"] & H^1(X,\mathbb{C}) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{O}) \arrow[r] & H^1(X,\Omega^1) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\cong"', "Res"] & H^2(X,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[ul, "\frac{1}{2\pi i}\int_X"'] & H^2(X,\mathcal{O})
\end{tikzcd}$$

(es gilt $H^2(X,\mathcal{O}) = 0$ wegen der Dolbeaut Sequenz!) sowie analog

$$\mathbb{C} \to \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\partial} \Omega^1_{2nd}(X) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathcal{M})$$

Übungsaufgabe: $H^1(X,\mathcal{M}) = 0$. Hinweis: Jeder Kozykel $f_{ij} \in Z^1_{\mathcal{U}}(X,\mathcal{M}_X)$ hat in $Z^1_{\mathcal{V}}(X,\mathcal{M}_X)$ bezüglich einer geeigneten endlichen Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$ nur endlich viele Pole und liegt daher im Bild von $Z^1_{\mathcal{V}}(X,\mathcal{O}_D)$ für einen geeigneten Divisor $D \geq 0$ vom Grad $>> 0$. $H^1(X,\mathcal{O}_D) = 0$ verschwindet wegen Riemann-Roch.

Ein Vergleich der Abbildungen Res und der Abbildung $(2\pi i)^{-1} \int_X$ und ein Blick auf den Beweis des Residuensatzes zeigt, daß die surjektive) Abbildung $\delta : H^1(X,\Omega^1) \to H^2(X,\mathbb{C})$ aus Dimensionsgründen ($H^1(X,\Omega^1) \cong \mathbb{C}$ Serredualität) ein Isomorphismus sein muß.

Korollar (Hodge Filtration): *Man hat eine kurze exakte Sequenz*

$$\boxed{0 \to \Omega^1(X) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathcal{O}) \to 0}$$

Korollar: *Es folgt* $dim_{\mathbb{C}}(H^1(X,\mathbb{C})) = 2g$ *und* $dim_{\mathbb{C}}(H^2(X,\mathbb{C})) = 1$.

Korollar (Obstruktion): *Der Hindernisraum für die Existenz einer globalen meromorphen Stammfunktion für eine Differentialform 2.Gattung ist die Kohomologiegruppe* $H^1(X,\mathbb{C})$

$$\boxed{H^1(X,\mathbb{C}) \;\cong\; \Omega^1_{2nd}(X)/\partial(\mathcal{M}(X))}\ .$$

Beispiel: Für eine elliptische Kurve X definiert $y^2 = 4x^3 + ux + v$ mit $u, v \in C$ (siehe Freitag-Busam) gilt $g(X) = 1$ sowie $\Omega^1_{2nd}(X) = \mathbb{C}\frac{dx}{y} + \mathbb{C}\frac{xdx}{y} + \partial(\mathcal{M}(X))$.

Bemerkung: $\eta_\omega \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$ heißt Glättung von $\omega \in \Omega^1_{2nd}(X)$, wenn $\delta(\omega) = \delta(\eta_\omega)$ gilt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(X) \arrow[r, "\partial"] & \Omega^1_{2nd}(X) \arrow[r, two heads, "\delta"] & H^1(X,\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}^1_{closed}(X) \arrow[r, two heads, "\delta"] & H^1(X,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Die Zuordnung $\omega \mapsto \eta_\omega$ liefert einen Isomorphismus zwischen

$$\mathcal{A}^1_{closed}(X)/d\mathcal{A}^0(X) \quad \text{und} \quad \Omega^1_{2nd}(X)/\partial(\mathcal{M}(X))\ .$$

Übungsaufgabe: Jedes $\omega \in \Omega^1_{2nd}(X)$ hat eine endliche Polstellenmenge $S \subset X$ (X kompakt) und besitzt eine Glättung η_ω, welche mit ω außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von S übereinstimmt.

Hinweis: Die auf $X - S$ holomorphe Form ω besitzt lokal um S holomorphe Stammfunktionen f_s, $s \in S$. Sei $\phi \in C_c^\infty(X)$ mit Werten in $[0,1]$ mit $\phi(x) = 1$ nahe bei $s \in S$ und Träger in einer kleinen Umgebung von S. Ersetze ω durch $d[(1-\phi)f_s]$ nahe bei S. (Vergleiche mit dem Abel-Jacobi Theorem, wo die Glättung von Differentialformen 3.Gattung benutzt wird).

Die kanonische Polarisierung

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Wir wollen auf dem $2g$-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $H^1(X,\mathbb{C})$ eine alternierende Paarung definieren. Dazu benutzen wir die deRham Isomorphismen

$$H^1(X,\mathbb{C}) \cong H^1_{dR}(X) = \mathcal{A}^1_{closed}(X)/d(\mathcal{A}^0(X))$$

$$H^1(X,\mathbb{R}) \cong H^1_{dR}(X,\mathbb{R}) = \mathcal{A}^1_{closed}(X,\mathbb{R})/d(\mathcal{A}^0(X,\mathbb{R})) \ .$$

Komplexe Konjugation auf den Koeffizienten der Differentialformen definiert daher die dieselbe komplexe Konjugation auf $H^1(X,\mathbb{C})$ wie die Konjugation definiert durch $H^1(X,\mathbb{C}) = H^1(X,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{C}^g = H^1(X,\mathbb{C}) = H^1(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$. Aus der exakten Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 0$ folgt $H^1(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(X,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^g$. Insbesondere ist $H^1(X,\mathbb{Z})$ torsionsfrei, und somit

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g} \ .$$

Das Cupproduct:

$$H^1_{dR}(X) \times H^1_{dR}(X) \to \mathbb{C}$$

$$(\omega,\eta) \ \mapsto \ \langle \omega,\eta\rangle = \int_X \omega \wedge \eta \ .$$

Hierbei sind $\omega,\eta \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$ Repräsentanten. Die Paarung ist wohldefiniert (Satz von Stokes). Wegen $\eta \wedge \omega = -\omega \wedge \eta$ ist $\langle .,.\rangle$ eine alternierende $\mathbb{C}$-Linearform auf $H^1(X,\mathbb{C})$.

Lemma: *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche.*

(i) Der Teilraum $\Omega^1(X) \subset H^1_{dR}(X)$ (Hodgefiltration) ist maximal isotrop und die $\mathbb{C}$-lineare Paarung $\langle .,.\rangle$ ist nicht ausgeartet.

(ii) $h(w) = i \cdot \langle \omega, \overline{\omega}\rangle$ definiert eine positive definite reellwertige hermitesche Form auf $H^1_{dR}(X)$.

Beweis: Wegen $dz \wedge dz = 0$ ist $\Omega^1(X)$ ein isotroper Teilraum der Dimension g. Analog ist $\overline{\Omega}^1(X)$ ein isotroper Teilraum g. Sei nun $\omega \in \Omega^1(X)$. Lokal gilt $\omega = f(z)dz$. Wegen $i\omega \wedge \overline{\omega} = |f(z)|^2 \cdot 2dx \wedge dy$ gilt dann $h(\omega) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\omega = 0$. Daraus und aus der Isotropie folgt $\Omega^1(X) \cap \overline{\Omega}^1(X) = 0$. Aus Dimensionsgründen folgt dann das nächste Lemma, aus dem seinerseits die noch zu zeigenden Aussagen von (i) und (ii) unmittelbar folgen.

Lemma (Hodge Zerlegung): *Die deRham Kohomologie $H^1_{dR}(X) \cong H^1(X, \mathbb{C})$ zerfällt in zwei Teilräume*

$$\boxed{\Omega^1(X) \oplus \overline{\Omega}^1(X) \;=\; H^1_{dR}(X)} \,.$$

Insbesondere gilt $\Omega^1(X) \cap H^1(X, \mathbb{R}) = 0$.

Übungsaufgabe: Sei X kompakt und $\eta_\omega \in H^1_{dR}(X)$ eine Glättung von $\omega \in \Omega^1_{2nd}(X)$. Zeige

$$\langle \eta_\omega, \omega \rangle = 2\pi i \cdot \sum_{x \in X} res_x(f_x \cdot \omega) \;,$$

wobei f_x eine lokale Stammfunktion von η bei x ist.

Hinweis: Kopiere den Beweis des Abel-Jacobi Theorems.

Übungsaufgabe: Sei $\rho \in \Omega^1_{3rd}(X)$ und X kompakt. Zeige $\int_X \rho \wedge \eta$ ist wohldefiniert für $\eta \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$ und Null für $\eta \in \Omega^1(X)$.

Die Picardgruppe

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Die Gruppe

$$\boxed{Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*)}$$

ist die sogenannte **Picardgruppe** von X. Die Exponentialsequenz liefert die lange exakte Sequenz

$$0 \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to Pic(X) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to 0 \ .$$

Beachte $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$ wegen der Dolbeaut Sequenz. Wir zeigen später (im Abschnitt additive versus multiplikative Theorie)

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ .$$

Die Randabbildung

$$0 \to Pic^0(X) \to Pic(X) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to 0$$

von $Pic(X)$ nach $H^2(X, \mathbb{Z})$ heißt **Chernklassenabbildung** und ihr Kern ist die **Picard Varietät** $Pic^0(X)$.

Satz: *Der Kern $Pic^0(X)$ der Chernklassenabbildung ist ein g-dimensionaler komplexer Torus*

$$\boxed{Pic^0(X) \ \cong \ H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbb{Z})} \ .$$

Dieser Quotient ist ein kompakter Torus und isomorph zu $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$. D.h. $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ definiert ein Gitter in $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}^g$.

Bemerkung: Dies schließt im Fall $g = 1$ beispielsweise die Möglichkeit $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{2} \subset \mathbb{C} \cong H^1(X, \mathcal{O})$ aus.

Beweis: Der Isomorphiesatz liefert wegen $H^1(X, \mathbb{R}) \cap \Omega^1(X) = 0$ aus $\mathbb{R}$-Dimensionsgründen folgenden Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen

$$H^1(X, \mathbb{R}) \cong H^1(X, \mathbb{C})/\Omega^1(X) \ .$$

Anderseits gilt $H^1(X, \mathbb{C})/\Omega^1(X) \cong H^1(X, \mathcal{O})$ (Hodge Filtration). Somit ist $Pic^0(X)$ isomorph zu $H^1(X, \mathbb{R})/H^1(X, \mathbb{Z}) \cong H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Lokalfreie Garben

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{L}$ heißt lokal frei vom Rang 1 auf X – oder kurz **Linienbündel** – wenn es eine offene Überdeckung $\bigsqcup_i U_i$ von X gibt, welche $\mathcal{L}$ trivialisiert: $\mathcal{L}|U_i \cong \mathcal{O}_{U_i}$ (Isomorphismen ϕ_i von $\mathcal{O}_{U_i}$-Modulgarben !). Ist $\mathcal{L}$ ein Linienbündel, dann auch sein Dual $\mathcal{L}^*(U) = Hom_{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{L}(U), \mathcal{O}(U))$.

Zwei Linienbündel heißen isomorph, wenn sie isomorph als $\mathcal{O}_X$-Modulgarben auf X sind. Die Isomorphieklassen von Linienbündeln bilden eine Gruppe. Die Gruppenstruktur ist induziert durch das $\mathcal{O}_X$-Tensorprodukt. Das inverse Element von der Isomorphieklasse von $\mathcal{L}$ ist – wie man leicht zeigt – das duale Linienbündel $\mathcal{L}^*$.

Lemma: *Die Gruppe $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ ist isomorph zur Gruppe der Isomorphieklassen von lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Garben auf X vom Rang 1.*

Beweisskizze: Sei $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ representiert durch $\xi \in H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{O}^*)$ mit zugehörigem Cechkozykel $\xi_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$. Dann definiert

$$\mathcal{O}_\xi(U) = \{f_i \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U) \mid f_j = \xi_{ji} \cdot f_i \text{ auf } U_i \cap U_j \ \forall i, j\}$$

ein Linienbündel auf X. (Offensichtlich wird $\mathcal{O}_\xi$ gerade von der Überdeckung $\mathcal{U}$ trivialisiert). Die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}_\xi$ hängt nur von ξ ab, d.h. ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{U}$ und der Wahl des Kozykel ξ_{ij}, welcher ξ repräsentiert! Dies ist leicht einzusehen.

Weiterhin gilt

$$\mathcal{O}_\xi \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\xi'} \ \cong \ \mathcal{O}_{\xi \cdot \xi'} \ .$$

Die Zuordnung $\xi \mapsto \mathcal{O}_\xi$ definiert also einen Gruppenhomomorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \ \to \ \text{Linienbündel}/\sim \ .$$

Injektivität: Sei ξ im Kern. Dann gibt es eine Isomorphismus $\phi : \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_\xi$ von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. Sei $f = \phi(1) \in \mathcal{O}_\xi(X)$ das Bild von $1 \in \mathcal{O}(X)$. Dann gilt $f_i = res(f) \in \mathcal{O}_\xi(U_i)$. Wegen $f_j = \xi_{ji} \cdot f_i$ ist $\xi_{ji} = f_j/f_i$ ein Korand und die Kohomologieklasse ξ ist Null.

Surjektivität: Sei $\mathcal{L}$ ein Linienbündel mit den $\mathcal{O}_X$-linearen Trivialisierungen

$$\phi_i : \ \mathcal{L}|U_i \ \cong \ \mathcal{O}_{U_i} \ .$$

Dann definiert

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \cong \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

einen $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$-linearen Isomorphismus. Diese ist notwendigerweise gegeben durch Multiplikation mit der Einheit (!)

$$\xi_{ji} := \phi_j \circ \phi_i^{-1}(1) \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j) \ .$$

Dies definiert einen Cechkozykel in $Z^1_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{O}_X^*)$ und man zeigt sofort $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_\xi$ für die Kohomologieklasse ξ dieses Kozykels.

Beispiel: (Übungsaufgabe) Sei D ein Divisor auf einer (nicht notwendig kompakten) Riemannschen Fläche X. Dann ist $\mathcal{L} = \mathcal{O}_D$ ein Linienbündel auf X. Es gilt $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{D'} \cong \mathcal{O}_{D+D'}$ sowie $(\mathcal{O}_D)^* \cong \mathcal{O}_{-D}$. Hinweis: Reduziere auf den Fall $X = U \subset \mathbb{C}$.

Übungsaufgabe: Die Abbildung $Div(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, welche D auf die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}_{-D}$ abbildet, wird induziert von der Randabbildung

$$\delta : Div(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

$$\delta(D) = \mathcal{O}_{-D}$$

der langen Kohomologiesequenz gebildet zur kurzen exakten Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{M}_X^* \to Div_X \to 0 \ .$$

Die Klassengruppe $Cl(X)$

Die **Klassengruppe** $Cl(X)$ einer kompakten Riemannschen Fläche X ist definiert als die Quotientengruppe von $Div(X)$ modulo der Untergruppe der Hauptdivisoren. Man hat eine offensichtliche Gradabbildung

$$deg : Cl(X) \to \mathbb{Z} \ ,$$

welche einer Divisorklasse $D/\sim$ den Grad $deg(D)$ zuordnet. Dies definiert eine exakte Sequenz

$$0 \to Cl^0(X) \to Cl(X) \to \mathbb{Z} \to 0 \ .$$

Lemma: *Die Zuordnung*

$$D \mapsto \mathcal{O}_{-D}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\boxed{\delta : Cl(X) \ \cong \ H^1(X, \mathcal{O}_X^*)}$$

zwischen der Klassengruppe $Cl(X)$ und der Picardgruppe $Pic(X)$.

Beweis: Beachte $\mathcal{O}_{-D-(f)} \cong \mathcal{O}_{-D}$. Somit ist die Abbildung

$$Cl(X) \to \{\text{Linienbündel}\}/\sim \ \cong \ H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

<u>Injektivität</u>: Ist $D/\sim$ im Kern, dann gilt $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_X$. ObdA $deg(D) \leq 0$ durch die Ersetzung $D \mapsto -D$. Aus $h^0(X, \mathcal{O}_D) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ folgt dann die Existenz eines Schnittes $f \neq 0$ mit $D + (f) \geq 0$. Aus Gradgründen folgt daraus $D + (f) = 0$. Das heißt D ist ein Hauptdivisor $D = (f^{-1})$.

<u>Surjektivität</u>: Wir benutzen den **Endlichkeitssatz**

$$h^1(X, \mathcal{L}) = dim_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{L}) < \infty$$

für beliebige Linienbündel (siehe Forster ...). Vollkommen analog wie beim Beweis des Satzes von Riemann-Roch zeigt man damit

$$h^0(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_D) \geq deg(D) + const(\mathcal{L}) \ .$$

Also existiert ein Divisor D und ein Schnitt $f \neq 0$ in $H^0(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_D)$. Die Zuordnung $1 \mapsto f$ kann zu einer nichttrivialen $\mathcal{O}_X$-linearen Garbenabbildung

$$\mathcal{O}_X \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_D$$

fortgesetzt werden. Tensorprodukt mit $\mathcal{O}_{-D}$ und Dualisieren liefert eine nichttriviale $\mathcal{O}_X$-lineare Abbildung

$$\mathcal{L}^* \to (\mathcal{O}_{-D})^* = \mathcal{O}_D \ .$$

<u>Jede solche Abbildung ist eine Injektion</u>: Es genügt dies zu zeigen auf zusammenhängenden offenen Teilmengen U einer trivialisierenden Überdeckung. Jede nichttriviale $\mathcal{O}(U)$-lineare Abbildung $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ ist dann gegeben durch Multiplikation mit einer holomorphen Funktion g_U und die Behauptung folgt aus der Nullteilerfreiheit von $\mathcal{O}(U)$. Benutzt man eine endliche Trivialisierung $\mathcal{U}$ (X ist kompakt) und die Diskretheit der Nullstellen von holomorphen Funktionen folgt die Verschärfung:

$$\mathcal{L}^* \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$$

ist (lokal auf U) eine $\mathcal{O}_X$-Idealgarbe; die Nullstellen der Funktionen g_U definieren einen Divisor $D' \geq 0$ auf X und es gilt $\mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_{D-D'}$ und somit

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{D'-D} \ .$$

Logarithmische Stammfunktionen

Wir haben bereits gesehen, daß Differentialformen $\omega \in \Omega^1_{3rd}(X)$ dritter Gattung in der Regel keine meromorphe Stammfunktionen in $\mathcal{M}(X)$ besitzen. Das klassische Beispiel ist die Form $\omega = \frac{dz}{z}$, deren Stammfunktion die mehrdeutige Funktion $log(z)$ ist

$$\partial log(z) = \frac{dz}{z} \ .$$

Es liegt dann aber nahe zu fragen, ob jedes Differential dritter Gattung eine logarithmische Stammfunktion besitzt? Hierbei heißt eine meromorphe Funktion $G(z)$ eine **logarithmische Stammfunktion** von $\omega = g(z)dz$, falls gilt

$$\partial log(G) := \frac{G'(z)}{G(z)} dz = g(z)dz \ .$$

Lokal existiert eine logarithmische Stammfunktion genau dann, wenn die Residuen von ω ganzzahlig sind (obdA Reduktion auf den Fall $\omega = \frac{dz}{z}$). Dies ist also eine notwendige Bedingung. Sei daher

$$\Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}} \subset \Omega^1_{3rd}$$

die Untergarbe der Garbe der Differentialformen dritter Gattung, welche aus Formen mit ganzzahligen Residuen bestehen. Dann erhält man aus der lokalen Existenz von logarithmischen Stammfunktionen eine exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathbb{C}^*_X \to \mathcal{M}^*_X \to \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}} \to 0 \ .$$

Die

Frage: Welche globalen Differentialformen dritter Gattung auf einer kompakten Riemannschen Fläche besitzen eine meromorphe logarithmische Stammfunktion?

beantwortet das folgende

Lemma: *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Die* **Obstruktion** *$\delta(\omega)$ für die Existenz einer meromorphen logarithmischen Stammfunktion G einer Differentialform $\omega \in \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ liegt in der abelsche Gruppe $H^1(X, \mathbb{C}^*)$*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*(X) \xrightarrow{\partial log} \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C}^*) \longrightarrow 0$$

Beweis: Dazu genügt es $H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0$ zu zeigen.

Diese Aussage folgt aus einem Vergleich der beiden horizontalen exakten Garbensequenzen des Diagrams

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Omega^1 \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}_X^* \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}_X^* \arrow[r, "\partial log"] \arrow[d, equal] & \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{R}es"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X^* \arrow[r] & \mathcal{M}_X^* \arrow[r, "(.)"] & Div_X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\mathcal{R}es(\omega) = \sum_{x \in X} res_x(\omega) \cdot [x]$. Für $f \in \mathcal{M}^*(X)$ gilt $\mathcal{R}es(\partial log f) = \sum_x ord_x(f) \cdot [x] = (f)$ in $Div(X)$. Für die Garbe Div_X der Divisoren auf X gilt

$$H^1(X, Div_X) = 0 \ .$$

Benutze zum Nachweis dieser Aussage das kofinale System aller endlichen Überdeckungen von X, um diese Aussage auf das Verschwinden $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ für einzelne Wolkenkratzergarben $\mathcal{G}$ mit Werten in A im Punkt $x \in X$ zurückzuführen!

Die langen exakten Sequenzen liefern daher

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^*(X)/\mathbb{C}^* \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X, \mathbb{C}_X^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{M}^*(X)/\mathbb{C}^* \arrow[r, hook] & Div(X) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da $Cl(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ folgt aus der unteren Sequenz $H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Wir fassen zusammen: Die **Basisformen**

$$\omega_{P,Q} \in \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$$

mit den Residuen -1 resp. 1 in P resp. Q bilden für festes $Q \in X$ und variables $P \in X$ eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $\Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$. Wegen

$$H^1(X, \mathcal{M}^*) = 0$$

ist außerdem die Abbildung $\Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \to H^1(X, \mathbb{C}^*)$ surjektiv

$$\begin{tikzcd}
\omega_{P,Q} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{R}es"] & \delta(\omega_{P,Q}) \arrow[d, mapsto] \\
Q - P \arrow[r, mapsto] & \mathcal{O}_{P-Q}/\sim
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}} \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[d, "\mathcal{R}es"] & H^1(X, \mathbb{C}^*_X) \arrow[d] \\
Div(X) \arrow[r, two heads, "\delta"] & H^1(X, \mathcal{O}^*_X)
\end{tikzcd}$$

Da die Divisoren $Q - P$ gerade $Div^0(X)$ erzeugen, folgt

Korollar: *Die Garbeninklusion $\mathbb{C}^*_X \hookrightarrow \mathcal{O}^*_X$ induziert eine Surjektion*

$$H^1(X, \mathbb{C}^*_X) \twoheadrightarrow \delta(Cl^0(X)) \subset H^1(X, \mathcal{O}^*_X) \ .$$

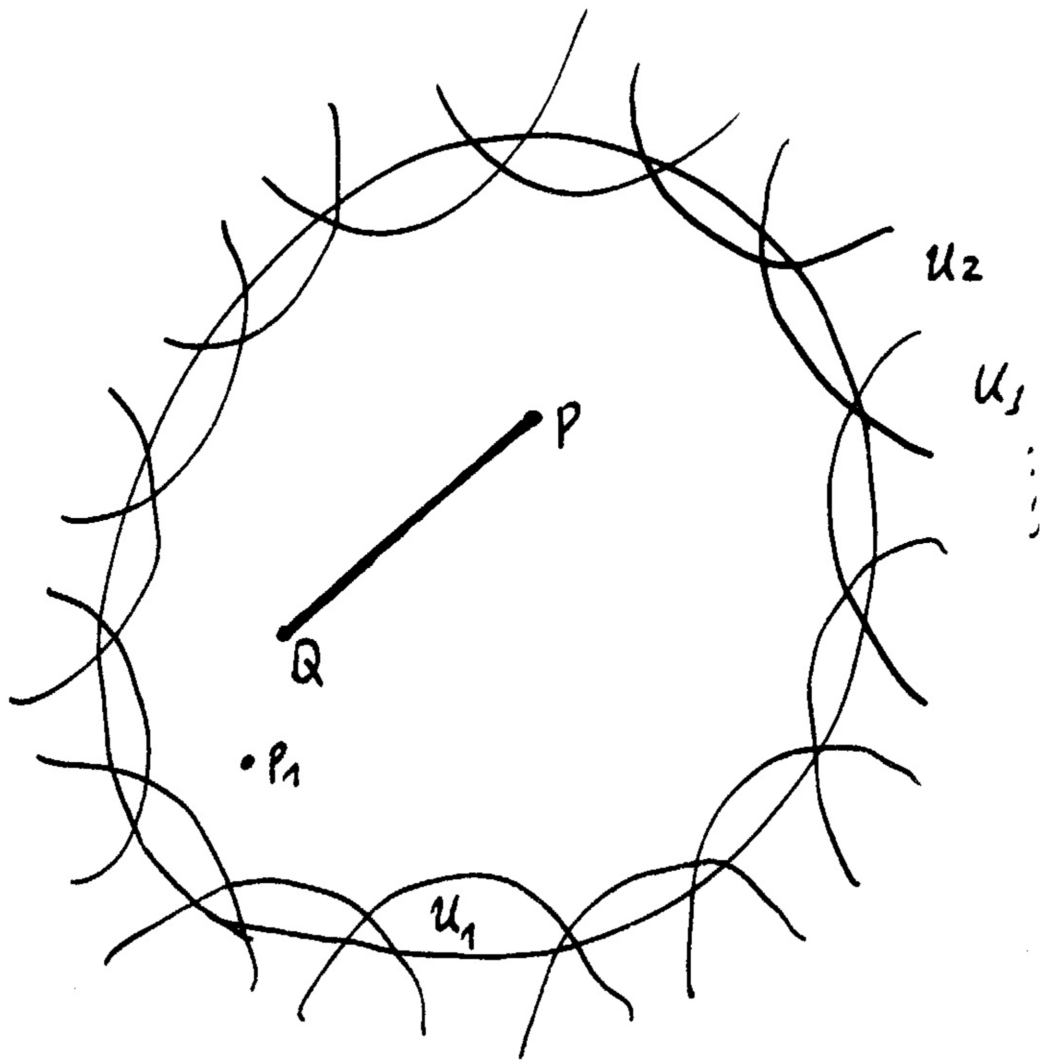
Hierbei ist $\delta(Cl^0(X))$ das Bild der Untergruppe $Cl^0(X) \subset Cl(X)$ unter der Abbildung

$$\delta : Cl(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*_X) \ .$$

Appendix (lokale Beschreibung der Obstruktion)

Ist P nahe genug bei Q, kann die Obstruktionsklasse – d. h. $\delta(\omega_{P,Q})$ – explizit beschrieben werden:

Sei U_1 eine kreisförmigen Kartenumgebung um Q. Wir identifizieren U_1 mit dem Bildkreis in $\mathbb{C}$. Wir nehmen an, U_1 enthalte P und damit die Gerade $\overline{QP}$. Wir überdecken X durch U_1 und endlich viele weitere Karten einfach zusammenhängende Karten $U_j, j = 2, 3, ...$ wie im nachfolgenden Bild:



Wir wählen Stützpunkte $P_j \in U_j$ mit $P_1 \notin \overline{QP}$. Dann existieren nach dem **Satz von Cauchy** (für $j \geq 2$) bzw. dem **Residuensatz** (für $j = 1$) **holomorphe** Funktionen

$$g_j(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{P_j}^{x} \omega_{P,Q} \quad , \quad j = 1, 2, ..$$

mit $g_j \in \mathcal{O}(U_j \cap (X - \overline{PQ}))$.

<u>Beachte</u>: $\omega_{P,Q}$ ist holomorph auf $X - \{P, Q\}$. Bis auf den Faktor $2\pi i$ ist g_j eine Stammfunktion von $\omega_{P,Q} \in \Omega^1(X - \overline{PQ})$ auf der geschlitzten Riemannschen Fläche $X - \overline{PQ}$, d.h. $2\pi i \cdot \partial g_j = \omega_{P,Q}$. Insbesondere definieren die Funktionen G_j

$$G_j(x) = exp(2\pi i \cdot g_j(x)) \xmapsto{\partial log} \omega_{PQ}$$

dann logarithmische Stammfunktionen von ω_{PQ} auf der geschlitzten Riemannschen Fläche $X - \overline{PQ}$. Auf Grund der Wahl der Überdeckung sind die Funktionen $res_{U_j}^{U_j \cap U_{j'}}(G_j)$ holomorph auf ganz $U_j \cap U_{j'}$ für <u>alle</u> Paare $j \neq j'$. Die Gerade $\overline{PQ}$ ist nämlich in keinem der Durchschnitte enthalten!

Folgerung: $\delta(\omega_{P,Q}) \in H^1_{\mathcal{U}}(X, \mathbb{C}^*)$ *wird nach Definition der Randabbildung* δ *represeniert durch den folgenden Cechkozykel*

$$\delta(\omega_{P,Q})(U_j \cap U_{j'}) = G_j(x)/G_{j'}(x) \quad \in \mathbb{C}^*_X(U_j \cap U_{j'}) \ .$$

Beachte: Zwei logarithmische Stammfunktionen unterscheiden sich lokal nur um eine Konstante in $\mathbb{C}^*$.

Additive versus Multiplikative Theorie

In den vorangestellten Paragraphen haben wir die additive Theorie – das Stammfunktionenproblem – und die multiplikative Theorie – die Beschreibung von $Cl(X)$ und das logarithmische Stammfunktionenproblem – beschrieben. Die Obstruktionen für die Existenz von (logarithmischen) Stammfunktionen wurden genau durch die Gruppen $H^1(X, \mathbb{C}_X)$ (resp. $H^1(X, \mathbb{C}_X^*)$) gegeben. Die Exponentialsequenz stellt eine Verbindung her und ein Vergleich beider Ansätze liefert verfeinerte Resultate und impliziert das Abel-Jacobi Theorem. Die Grundlagen dazu sollen in diesem Abschnitt erläutert werden. Insbesondere werden wir zeigen

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ .$$

Dies ist eigentlich eine topologische Aussage, wird aber hier direkt mit Argumenten der Funktionentheorie abgeleitet. Genauer wird gezeigt

Theorem: *Man hat ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} Cl(X) \arrow[r, "\delta", "\sim"'] \arrow[d, "deg"] & Pic(X) \arrow[d, "c_1"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] & H^2(X, \mathbb{Z}) \end{tikzcd} \quad .$$

Insbesondere gilt daher

$$\boxed{Cl^0(X) \cong Pic^0(X)} \ .$$

Wir betrachten das folgende Diagram mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{C}_X \arrow[r, "exp(2\pi i -)"] \arrow[d] & \mathbb{C}_X^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_X \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "exp(2\pi i -)"] \arrow[d, "\partial"] & \mathcal{O}_X^* \arrow[r] \arrow[d, "\partial log"] & 0 \\ & & \Omega^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega^1 \arrow[d] & \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Man erhält daraus das folgende Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
H^1(X,\mathbb{C}_X) \arrow[r, "exp(2\pi i-)"] \arrow[d] & H^1(X,\mathbb{C}_X^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X,\mathbb{Z}_X) \arrow[d, equal] \\
H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r, "exp(2\pi i-)"] \arrow[d, "\partial"] & H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\partial log"] & H^2(X,\mathbb{Z}_X) \\
H^1(X,\Omega^1) \arrow[r, equal] & H^1(X,\Omega^1) &
\end{tikzcd}
$$

Die Chernklassenabbildung $c_1 : H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X,\mathbb{Z}_X)$ ist surjektiv, da $H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$ verschwindet (Dolbeaut Lemma).

Zum Beweis des letzten Satzes genügt es die Surjektivität $(*)$

$$H^1(X,\mathbb{C}_X) \twoheadrightarrow H^1(X,\mathbb{C}_X^*)$$

zu zeigen. Dann nämlich definieren $Pic^0(X) = H^1(X,\mathcal{O}_X)$ und $\delta(Cl^0(X))$ dieselbe Untergruppe von $Pic(X) = H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$, erzeugt vom Bild von $H^1(X,\mathbb{C}_X)$ (wir benutzen dabei das Korollar des letzen Abschnitts).

Die Differentiale $\omega_{P,Q}$ für beliebige Paare $P,Q \in X$ (nahe beieinander) erzeugen $\Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)/\Omega^1(X)$. Wie im letzen Abschnitt diskutiert erzeugen die Obstruktionsklassen $\delta(\omega_{P,Q})$ dann $H^1(X,\mathbb{C}_X^*)$, denn die Randabbildung $\delta : \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X) \to H^1(X,\mathbb{C}_X^*)$ ist surjektiv! Zum Beweis von $(*)$ genügt daher die **Liftbarkeit** der Erzeuger $\delta(\omega_{P,Q})$ zu einem Element $\eta_{P,Q}$

$$
\begin{tikzcd}
H^1(X,\mathbb{C}_X) \arrow[rr, "exp(2\pi i-)"] & & H^1(X,\mathbb{C}_X^*) \ni \delta(\omega_{P,Q}) \\
& \mathrm{H}^1_{dR}(X) = \mathcal{A}^1_{closed}(X)/d\mathcal{A}^0(X) \ni \eta_{PQ} \arrow[ul, "\delta"', "\sim"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Ansatz: Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Obstruktionsklasse $\delta(\omega_{P,Q})$ repräsentiert wird durch den Cechlozykel

$$G_j/G_{j'} \quad , \quad G_j = exp(2\pi i \cdot g_j) \ .$$

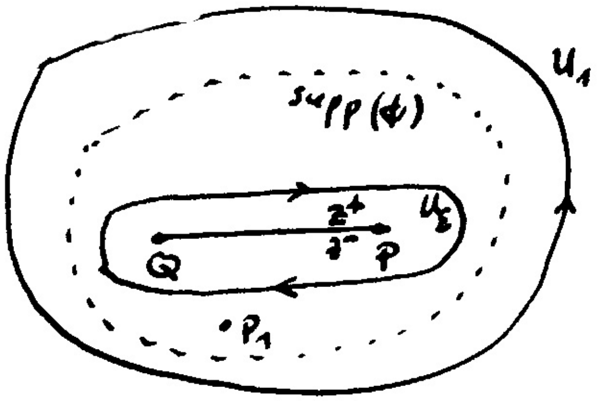
Die g_j waren holomorphe Funktionen auf der geschlitzten Riemannschen Ebene $X - \overline{PQ}$. Wähle eine Abschneidefunktion $1-\phi(x)$ mit $\phi \in C_c^\infty(U_1)$, welche Werte ≥ 0 hat, welche in den $U_j, j \geq 2$ verschwindet und auf dem Schlitz $\overline{PQ}$ identisch 1 ist. setze $f_1 = (1-\phi)g_1 \in C^\infty(U_1)$ und $f_j = g_j, j \geq 2$. Dann verheftet sich

$$\eta_{PQ}|U_j \ = \ 2\pi i \cdot d(f_j(x)) \in \mathcal{A}^1_{closed}(U_j)$$

zu einer geschlossenen globalen 1-Form auf X so daß gilt

$$\eta_{PQ} = \omega_{PQ} \quad \text{auf} \bigsqcup_{j\geq 2} U_j \ .$$

Da der Träger der Abschneidefunktion disjunkt zu den Durchschnitten $U_j \cap U_{j'}$ ist für $j \neq j'$ gilt für den Cechkozykel $\delta(\eta_{PQ})_{jj'} = (f_j(x) - f_{j'}(x))_{jj'} = (g_j(x) - g_{j'}(x))_{jj'} \in \mathbb{C}$ (auf $U_j \cap U_{j'}$). Bild:



Es folgt

$$\begin{tikzcd}
(g_j(x) - g_{j'}(x))_{jj'} \arrow[rr, mapsto, "exp(2\pi i -)"] & & \delta(\omega_{PQ})_{jj'} \\
& \eta_{P,Q} \arrow[ul, mapsto, "\delta", "\sim"'] \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten

Korollar: *Die Glättung $\eta_{PQ} \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$ der meromorphen Differentialform ω_{PQ} (für zwei nahe gelegene Punkte P, Q) definiert eine de Rham Kohomologieklasse in $H^1_{dR}(X)$, welche den Obstruktionskozykel $\delta(\omega_{PQ})$ liftet.*

Das Abel-Jacobi Theorem

Zur Erinnerung: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist die Klassengruppe $Cl(X)$ kanonisch isomorph zur Picardgruppe via

$$\boxed{\delta : \ Cl^0(X) \ \cong \ Pic^0(X)} \ .$$

Die Klasse eines Divisors D vom Grad Null wird auf das Linienbündel $\mathcal{O}_{-D}$ abgebildet. Die Picard Varietät ist $Pic^0(X) = \Omega^1(X) \setminus H^1(X,\mathbb{C})/H^1(X,\mathbb{Z})$.

Die Abbildung α: Sei $\omega_1, ...\omega_g$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\Omega^1(X)$. Wir benutzen den de Rham Isomorphismus $H^1(X,\mathbb{C}) \cong \mathrm{H}^1_{dR}(X)$. Die alternierende Paarung $\langle .,. \rangle$ auf der de Rham Kohomologie definiert die folgende Abbildung

$$\alpha(\eta) \ = \ \Big(\langle \eta, \omega_1 \rangle, ..., \langle \eta, \omega_1 \rangle\Big) \in \mathbb{C}^g$$

$$0 \to \Omega^1(X) \longrightarrow H^1_{dR}(X) \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathbb{C}^g \to 0 \ \ .$$

$\Omega^1(X)$ ist maximal isotrop. Also ist $\Omega^1(X)$ der Kern von α. Die Paarung $\langle .,. \rangle$ ist nichtausgeartet. Also ist α surjektiv. Man erhält somit einen induzierten Isomorphismus auf die **Jacobi Varietät** $J(X)$

$$Pic^0(X) \xrightarrow[\sim]{\ \alpha\ } J(X) = \mathbb{C}^g/\alpha(H^1(X,\mathbb{Z})) \ \ .$$

Problem: Berechne den zusammengesetzten Isomorphismus $\beta = \alpha \circ \delta$

$$\boxed{Cl^0(X) \ \xrightarrow[\sim]{\ \beta\ } \ J(X)}$$

und bestimme das Gitter $\alpha(H^1(X,\mathbb{Z}))$, welches $J(X)$ definiert.

Bemerkung: Es genügt dazu das Bild von den erzeugenden Divisorklassen $D = Q - P$ anzugeben für Punktepaare P, Q in X. Das zugehörige Linienbündel ist $\mathcal{O}_{P-Q}$. Für nahe beieinander liegende Punktepaare P, Q haben wir im letzten Abschnitt eine geschlossene 1-Form $\eta = \eta_{P,Q}$ konstruiert, deren Klasse $[\eta_{P,Q}]$ in der de Rham Kohomologie $H^1_{dR}(X)$ beziehungsweise im Quotient

$$Pic^0(X) = \Omega^1(X) \setminus H^1_{dR}(X)/H^1(X,\mathbb{Z})$$

auf die Klasse des Linienbündels $\mathcal{O}_{P-Q}$ abgebildet wird. Zur Lösung des Problems muß man also die Integrale $\alpha(\eta_{P,Q})$ berechnen.

Satz von Abel-Jacobi: (erste Version) *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und Q ein beliebiger Punkt auf X. Dann gilt:*

(i) Jede Divisorklasse in $Cl^0(X)$ besitzt einen Repräsentant der Form

$$(P_1 - Q) + ... + (P_g - Q)$$

für g Punkte $P_1, ..., P_g$ aus X.

(ii) Der Isomorphismus

$$\beta : Cl^0(X) \longrightarrow J(X)$$

ist gegeben durch

$$(Q - P) \mapsto \Big(\int_Q^P \omega_1, ..., \int_Q^P \omega_g \Big) \quad mod\ \alpha(H^1(X, \mathbb{Z})) \ .$$

Die Integrale hängen modulo $\alpha(H^1(X,\mathbb{Z}))$ nicht von der Wahl des Integrationsweges auf X ab.

Beweis: Teil (i) folgt aus dem Satz von Riemann-Roch. Für einen Divisor D vom Grad Null gilt $h^0(X, \mathcal{O}_{D+gQ}) = 1 - g + deg(D + gQ) + h^1 = 1 + h^1 \geq 1$. Somit existiert ein nichttrivialer Schnitt f mit $D + gQ + (f) \geq 0$ beziehungsweise

$$D + gQ + (f) = Q_1 + ... + Q_g \ ,$$

da der Grad der linken Seite gleich g ist. Dies zeigt (i).

Aussage (ii) genügt es – durch additive Fortsetzung – für nahe beieinander liegende Punktepaare P, Q zu zeigen. Für solche kann man $\alpha(\eta_{P,Q})$ berechnen. Wir zeigen nämlich im folgenden

$$\langle \eta_{P,Q}, \omega \rangle \ = \ \int_Q^P \omega$$

für alle $\omega \in \Omega^1(X)$. Dies beweist dann die Aussage (ii).

Sei $X - \overline{PQ}$ die geschlitzte Riemannsche Fläche. Sei U_ε eine geeignete kleine offene Umgebung der Schlitzgerade $\overline{PQ}$ und sei $\omega \in \Omega^1(X)$ eine holomorphe 1-Form. Dann gilt für $\eta = \eta_{PQ}$

$$\langle \eta_{PQ}, \omega \rangle \; = \; \int_X \eta \wedge \omega \; = \; lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X - U_\varepsilon} \eta \wedge \omega \; .$$

<u>Zur Erinnerung</u>: Außerhalb einer Umgebung U_1 der Gerade $\overline{PQ}$ stimmt $\eta = \eta_{PQ}$ mit der meromorphen 1-Form $\omega_{P,Q} \in \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ überein. Wegen $\omega_{P,Q} \wedge \omega = 0$ trägt nur das Integral über die Karte U_1 bei, welche die Schlitzumgebungen U_ε enthalten soll. Auf dieser Karte war η_{PQ} ein Rand, definiert wie folgt (siehe voriger Paragraph)

$$\eta(z) = d\left[(1-\phi)(x,y) \cdot g_1(z)\right] \, ,$$

$$g_1(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{P_1}^z \omega_{PQ} \quad \in \quad \mathcal{O}(U_1 - U_\varepsilon) \; .$$

Somit ist das Integral

$$\int_{X - U_\varepsilon} \eta \wedge \omega \; = \; \int_{U_1 - U_\varepsilon} d[-\phi(x,y) \cdot g_1(z) \cdot \omega(z)] \; .$$

Da ϕ kompakten Träger in U_1 hat ergibt der Satz von **Stokes**

$$-\oint_\varepsilon \phi(x,y) g_1(z) \omega(z) \; .$$

Integration erfolgt über den Rand von U_ε in X im Uhrzeigersinn! Ist ε klein genug, wird $\phi(x,y) = 1$ auf dieser Kontur und im Limes $\varepsilon \to 0$ strebt das Konturintegral gegen

$$-\int_Q^P g_1(z^+)\omega(z) + \int_Q^P g_1(z^-)\omega(z) \ .$$

$\omega(z)$ ist holomorph auf U_1, aber $g_1(z)$ ist nur holomorph auf dem Komplement der Schlitzgerade $\overline{PQ}$. Nähert man sich einem Punkt z des Schlitzes von "oben"beziehungsweise von "unten", so gilt im Limes

$$g_1(z^+) = g_1(z^-) + res_{z=P}\frac{-dz}{(z-P)}$$

also $g_1(z^+) = g_1(z^-) - 1$. Daraus folgt wie behauptet $\langle \eta_{P,Q}, \omega \rangle \ = \ \int_Q^P \omega$.

0.6 Perioden

Die Albanese Varietät

Es bezeichne $\Omega^1(X)^*$ den Dualraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums der holomorphen Differentiale auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Wir fixieren einen Basisdpunkt Q auf X. Jeder geschlossene Weg γ auf X mit Anfangs und Endpunkt in Q definiert ein Element in $\Omega^1(X)^*$

$$\gamma \mapsto \oint_\gamma \omega \quad , \quad \omega \in \Omega^1(X) \ .$$

Dies definiert einen Homomorphismus von $\pi_1(X,Q)$ nach $\Omega^1(X)^*$, dessen Bild wir mit $H_1(X)$ bezeichnen. Wir definieren die **Albanese Varietät** durch

$$\boxed{Alb(X) \ = \ \Omega^1(X)^*/H_1(X)} \ .$$

Wir definieren nun die folgende **Perioden Abbildung**

$$alb : X^g \to Alb(X) \ ,$$

welche den Punkt $(Q_1,..,Q_g)$ in X^g auf die Linearform

$$\omega \mapsto \sum_{i=1}^{g} \int_Q^{Q_i} \omega \bmod H_1(X)$$

abbildet. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da die Definition unabhängig von der Wahl der Wege von Q nach Q_i ist!

Wahl einer Basis $\omega_1,...,\omega_g$ von $\Omega^1(X)$ liefert einen Isomorphismus von $\Omega^1(X)^*$ nach $\mathbb{C}^g$. Das Bild der Untergruppe $H_1(Z)$ nennen wir die **Periodengruppe**

$$\langle \ (\oint_\gamma \omega_1, ..., \oint_\gamma \omega_g) \ \text{ für } \gamma \in \pi_1(X,Q) \ \rangle \ .$$

Als eine unmittelbare Folgerung des Abel-Jacobi Theorems ist diese Periodengruppe eine Untergruppe des Gitters $\alpha(H^1(X,\mathbb{Z}))$, welches die Jacobi Varietät $J(X)$ definiert. Dies definiert die rechte vertikale Abbildung des folgenden kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
X^g \arrow[r, "alb"] \arrow[d, "cl"] \arrow[dr] & Alb(X) \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
Cl^0(X) \arrow[r, two heads, "\beta", "\sim"'] & J(X)
\end{tikzcd} \ .$$

Die linke vertikale Abbildung schickt $(Q_1,..,Q_g)$ auf die Klasse des Divisors $\sum_{i=1}^g(Q_i - Q)$. Wir nennen die diagonale Abbildung die **Abel-Jacobi Abbildung**. Die Kommutativität des Diagramms ist äquivalent zum **Abel-Jacobi Theorem**.

Sowohl die Albanese Abbildung als auch von der Abel-Jacobi Abbildung sind **holomorphe** Funktionen in g Variablen. Die Jacobimatrix beider Abbildungen im Punkt $(Q_1,...,Q_g) \in X^g$ (im holomorphen Sinne bezüglich lokaler Koordinaten $z_1,..,z_g$ nahe bei $Q_1,..,Q_g$) ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \omega_1(Q_1) & ... & \omega_1(Q_g) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \omega_g(Q_1) & ... & \omega_g(Q_g) \end{pmatrix}$$

Definition: *Ein Punkt $(Q_1,...,Q_g)$ in X^g heißt* **regulär**, *falls die Determinante dieser Matrix nicht verschwindet.*

Lemma: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $(Q_1,..,Q_g)$ *ist regulär.*

(ii) $h^0(X, \Omega^1_{-Q_1-..-Q_g}) = 0$

(iii) $h^1(X, \mathcal{O}_{Q_1+...+Q_g}) = 0$

(iv) Für $(P_1,..,P_g) \in X^g$ *gilt in* $Cl^0(X)$

$$\sum_{i=1}^g (P_i - Q) \equiv \sum_{i=1}^g (Q_i - Q)$$

genau dann, wenn gilt (im Sinn von Multimengen)

$$\{P_1,..,P_g\} = \{Q_1,..,Q_g\} \ .$$

Beweis: $(i) \iff (ii)$ lineare Algebra. $(ii) \iff (iii)$ Serre Dualität. Es bleibt $(iii) \iff (iv)$: Aussage (iv) ist äquivalent zu $h^0(\mathcal{O}_{\sum Q_i - \sum P_i}) = 0$ im

Falle daß in der Divisorengruppe $Div(X)$ gilt $\sum_{i=1}^g Q_i \neq \sum_{i=1}^g P_i$. Nach Riemann-Roch

$$0 \leq h^0(X, \mathcal{O}_{\sum(Q_i - P_i)}) \leq h^0(X, \mathcal{O}_{Q_1+...+Q_g}) = (1-g) + g + h^1(X, \mathcal{O}_{Q_1+...+Q_g}) \ .$$

Aus (iii) folgt daher $H^0(X, \mathcal{O}_{Q_1+...+Q_g}) = \mathbb{C}$ und somit $h^0(X, \mathcal{O}_{\sum(Q_i-P_i)}) = 0$, falls $\sum_i Q_i \neq \sum_i P_i$ in $Div(X)$. Umgekehrt folgt aus (iv) die Aussage (ii). $\square$

Existenz regulärer Punkte: Aus $dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X)) = g$ folgt (ii) für jedes generisch gewählte Tupel $Q_1, .., Q_g$. Dies zeigt die Existenz regulärer Punkte $(Q_1, .., Q_g)$ in X^g. Das Argument zeigt sogar, daß diese Punkte **dicht** liegen in X^g. Die regulären Punkte bilden außerdem eine offene Teilmenge von X^g.

Das Additions Theorem

Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beweisen wir in diesem Abschnitt das folgende

Theorem: *Die Perioden Abbildung* $alb : X^g \to Alb(X)$ *ist surjektiv.*

Beweis: Das Bild $alb(X^g)$ ist kompakt, also abgeschlossen in $Alb(X)$. Es genügt zu zeigen, daß das Bild auch offen ist in $Alb(X)$. Dazu genügt, daß das Bild unter Subtraktion abgeschlossen ist in der Gruppe $Alb(X)$. Beachte: Für reguläre Punkte ist eine volle Umgebung des Bildpunktes x im Bild von alb. Somit liegt dann eine volle Umgebung von Null im Bild. Da $Alb(X)$ als Gruppe von jeder Umgebung der Null erzeugt, muß daher alb surjektiv sein.

Für je zwei Punkte $(Q_1, .., Q_g)$ und $(P_1, .., P_g)$ in X^g gibt es einen Punkt $(R_1, .., R_g) \in X^g$ mit $\sum_{i=1}^g R_i \equiv g{\cdot}Q + \sum_{i=1}^g (Q_i - P_i) + (f)$ für ein $f \in \mathcal{M}^*(X)$. Dies folgt aus dem Abel-Jacobi Theorem.

Wir zeigen nun unter diesen Vorraussetzungen das folgende

Additions Theorem:

$$\boxed{alb(Q_1, .., Q_g) - alb(P_1, .., P_g) = alb(R_1, .., R_g)}\ .$$

Zum Beweis genügt zu wissen

$$\int_C \omega = 0 \ \text{ modulo } H_1(X)$$

für jeden stückweise glatten eindimensionalen Zykel C, dessen Rand als Zykel durch den Hauptdivisor (f) gegeben ist

$$\partial C = (f)\ .$$

Wir benutzen dazu, daß eine moromorphe Funktion f auf X als holomorphe Funktion

$$f : X \to S$$

auf die Riemannsche Zahlenkugel aufgefaßt werden kann (Übungsaufgabe!). Somit gilt modulo einer gewissen Periode in $H_1(X)$

$$\int_C \omega \equiv \int_{f^*(\overline{0\infty})} \omega \ \text{ modulo } \ H_1(X)\ .$$

Die holomorphe Differentialform $f_*(\omega)$ verschwindet, da es keine holomorphen Differentiale auf der Riemannschen Zahlenkugel S gibt: $g(S) = 0$. Es folgt

$$\int_{f^*(\overline{0\infty})} \omega = \int_{\overline{0\infty}} f_*(\omega) = 0 \ .$$

□

Bemerkung: Die Konstruktion der Spur $f_*(\omega)$ von ω mit den Nachweis der letzen Integralidentität überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe!

Die Periodengruppe

Im vorigen Paragraph haben wir die **Albanese Varietät** definiert

$$Alb(X) = \Omega^1(X)^*/H_1(X) \ .$$

Dies definiert einen **kovarianten** Funktor: Jede holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ zwischen kompakten Riemannschen Flächen induziert eine holomorphe Abbildung $f_* : Alb(X) \to Alb(Y)$.

Analog definiert die **Jacobi Varietät**

$$J(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z}) = Pic^0(X)$$

einen **kontravarianten** Funktor. Jede holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ kompakter Riemannschen Flächen induziert eine holomorphe Abbildung $f^* : J(Y) \to J(X)$.

Wir zeigen nun mit den Bezeichnungen des letzen Parapraphen den folgenden Satz

Theorem: *Die Abbildung*

$$\boxed{\pi : Alb(X) \xrightarrow{\sim} J(X)}$$

ist ein Isomorphismus komplexer Tori.

Zur Erinnerung: Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X^g \arrow[r, "alb"] \arrow[d, "cl"] \arrow[dr] & Alb(X) \arrow[d, "\pi"] \\ Cl^0(X) \arrow[r, "\beta", "\sim"', two heads] & J(X) \end{tikzcd} \ .$$

Die symmetrische Gruppe S_g: Sie operiert auf X^g durch Vertauschen der Koordinaten. Zwei Punkte in X^g liegen im selben S_g-Orbit genau dann, wenn die zugeordneten Multimengen übereinstimmen.

Beweis des Theorems: Da π ein Gruppenhomomorphismus ist, genügt es ein $x \in J(X)$ zu finden mit Faserkardinalität $|\pi^{-1}(x)| = 1$.

Die betrachteten Abbildungen cl, die Albanese und die Abel-Jacobi Abbilding hängen nur vom S_g-Orbit der Punkte in X^g ab. Wegen Punkt (iv) des Lemmas im letzen Paragraphen ist daher die cl-Faser über dem Bildpunkt eines regulären Punktes von X^g so klein wie möglich, also gerade die Symmetrisierung des Punktes in X^g unter der Gruppe S_g.

Da β ein Isomorphismus ist, gilt dasselbe für die Abel-Jacobi Abbildung. Da wegen des Additionstheorems die Abbildung *alb* surjektiv ist(!), hat somit auch die Faser $\pi^{-1}(x)$ die Kardinalität 1 für jeden Bildpunkt $x \in J(X)$ eines regulären Punktes in X^g (unter der Abel-Jacobi Abbildung). Damit ist das Theorem bewiesen.

Korollar: *Die Gruppe $\alpha(H^1(X,\mathbb{Z}))$ stimmt mit dem* **Periodengitter** *überein*

$$\boxed{\alpha(H^1(X,\mathbb{Z})) \;=\; \langle\ (\oint_\gamma \omega_1, ..., \oint_\gamma \omega_g)\ \ \textit{für } \gamma \in H_1(X)\ \rangle} \ .$$

Genauer: Es gibt einen Gruppenisomorphismus

$$H_1(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X,\mathbb{Z})$$

$$\gamma \longmapsto \eta_\gamma$$

so daß für alle $\eta \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$ gilt

$$\oint_\gamma \eta = \int_X \eta_\gamma \wedge \eta \ .$$

Hierbei fassen wir η_γ via $H^1(X,\mathbb{Z}) \subset H^1(X,\mathbb{C}) \cong H^1_{dR}(X)$ als geschlossene Einsform auf X auf modulo Rändern in $d(\mathcal{A}^0(X))$.

Beweis: Die erste Aussage folgt direkt aus dem vorherigen Theorem ebenso wie $\oint_\gamma \omega = \int_X \eta_\gamma \wedge \omega$ für alle $\omega \in \Omega^1(X)$. $\eta_\gamma \in H^1(X,\mathbb{Z})$ ist invariant unter Konjugation. Daraus folgt $\oint_\gamma \omega = \int_X \eta_\gamma \wedge \omega$ auch für alle $\omega \in \overline{\Omega}^1(X)$. Für Formen $\omega \in d(\mathcal{A}^0(X))$ sind beide Seiten Null (Satz von Stokes). Wegen $\mathcal{A}^1_{closed}(X) = \Omega^1(X) + \overline{\Omega}^1(X) + d(\mathcal{A}^0(X))$ folgt damit auch die zweite Aussage des Korollars für alle $\eta \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$. $\square$

Poincare Dualität

Für eine kompakte Riemannsche Fläche X haben wir im letzten Abschnitt gezeigt, daß jede für de Rham Kohomologieklasse $\eta \in H^1(X,\mathbb{Z})$ eine geschlossene Kurve γ existiert, der Art daß für $\eta = \eta_\gamma$ gilt

$$\oint_\gamma \omega = \int_X \eta_{\gamma\wedge\omega}$$

(für alle $\omega \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$).

Andererseits haben die nichtausgeartete alternierende Paarung

$$\langle \eta, \omega\rangle = \int_X \eta \wedge \omega$$

auf der de Rham Kohomologie $H^1_{dR}(X)$ und damit auch auf $H^1(X,\mathbb{C})$.

Wir zeigen nun, daß die alternierende Paarung auf $H^1(X,\mathbb{Z})$ ganzzahlige Werte annimmt. Genauer: Wir zeigen die Existenz einer Gitterbasis von $H^1(X,\mathbb{Z})$, für die das Cupproduct durch die standard Matrix (**Prinzipale Polarisierung**)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = E_{g,g}$$

beschrieben wird. Für die Existenz einer solche Gitterbasis ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß die Paarung als $\mathbb{Z}$-Paarung nicht ausgeartet ist.

Lemma: *Die Einschränkung der alternierenden Cuppprodukt Paarung von $H^1(X,\mathbb{C})$ auf $H^1(X,\mathbb{Z})$ ist ganzzahlig.*

Beweis: Es genügt $\int_X \eta_\gamma \wedge \eta_{\gamma'} \in \mathbb{Z}$ oder äquivalent

$$\oint_\gamma \eta_{\gamma'} \in \mathbb{Z}\ .$$

Für die Kurve $\gamma : S^1 \to X$ gilt aber

$$\oint_\gamma \eta_{\gamma'} = \int_{S^1} \gamma^*(\eta_{\gamma'})\ .$$

Aus der 2.Bemerkung des Kapitels über de Rham Kohomologie folgt die Funktorialität des de Rham Isomorphismus. Also gilt

$$\gamma^*(\eta_{\gamma'}) \in \gamma^*(H^1(X,\mathbb{Z})) \subset H^1(S^1,\mathbb{Z}) \ .$$

Aus dem Beispiel in loc. cit. folgt dann weiterhin $\int_{S^1} \rho \in \mathbb{Z}$ für alle $\rho \in H^1(S^1,\mathbb{Z}) \subset H^1_{dR}(S^1)$.

Poincare Dualität: *Die Cupprodukt Paarung definiert eine nicht ausgeartete ganzzahlige alternierende Paarung auf $H^1(X,\mathbb{Z})$*

$$\boxed{\langle .,. \rangle : \quad H^1(X,\mathbb{Z}) \times H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}} \ .$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für jeden primitiven Gittervektor ξ in $H^1(X,\mathbb{Z})$ eine geschlossene Kurve γ in X existiert mit $\int_{S^1} \gamma^*(\xi) = 1$.

Alternativ: Für jede Primzahl p und jedes $\xi \in H^1(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ existiert ein geschlossener Weg γ mit $\gamma^*(\xi) \neq 0$ in $H^1(S^1,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Die Klasse $\xi \in H^1(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ definiert eine Überlagerung $\pi : X_\xi \to X$ mit Deckbewegungsgruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Äquivalent sind: (i) $\xi = 0$ (ii) Es existiert ein Schnitt $s : X \to X_\xi$ mit $\pi \circ s = id$ (iii) $X_\xi \cong X \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ so daß π die Projektion auf den ersten Faktor ist. (iv) Jeder geschlossene Weg $\gamma \in \pi_1(X,Q)$ liftet zu einem geschlossenem Weg in X_ξ.

Wegen $\xi \neq 0$ existiert daher ein geschlossener Weg γ, welcher nicht liftet. Der Pullback $\gamma^*(X_\xi) \to S^1$

$$\begin{tikzcd} \gamma^*(X_\xi) \arrow[r] \arrow[d] & X_\xi \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[r, "\gamma"] & X \end{tikzcd}$$

besitzt daher keinen Schnitt. Als unverzweigte Überlagerung ist aber $\gamma^*(X_\xi) \to S^1$ zu $X_{\gamma^*(\xi)} \to S^1$ isomorph. Also folgt $\gamma^*(\xi) \neq 0$.

Lineare Algebra

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Wähle eine symplektische Basis $e_1, .., e_g, e_{g+1}, .., e_{2g}$ von $H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ bzgl. der die Paarung $\langle .,. \rangle$ durch

$$\begin{pmatrix} o & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Wähle eine Basis $\omega_1, ..., \omega_g$ der holomorphen Differentiale $\Omega^1(X)$.

Basiswechsel Matrix:

$$\omega_i \quad = \quad i\text{-te Spalte von} \qquad \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen Ω_1 und Ω_2 sind hierbei komplexe $g \times g$-Matrizen. Genauer

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{2g} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}_{ji} \cdot e_j \ .$$

Fakt 1: $\Omega^1(X) \subset H^1(X,\mathbb{C})$ ist maximal isotrop. Dies ist gleichbedeutend mit

$$(\Omega_1', \Omega_2') \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega_2'\Omega_1 = \Omega_1'\Omega_2 \ .$$

Fakt 2: Die Matrix $i \cdot \langle \omega_\nu, \omega_\mu \rangle$ ist eine positiv definite hermitesche Matrix. Dies ist gleichbedeutend mit

$$i \cdot (\Omega_1', \Omega_2') \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Omega}_1 \\ \overline{\Omega}_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i \cdot (\Omega_2'\overline{\Omega}_1 - \Omega_1'\overline{\Omega}_2) > 0 \ .$$

Lemma: $det(\Omega_2) \neq 0$.

Beweis: $\Omega_2 v = 0$ impliziert $\overline{\Omega}_2\overline{v} = 0$ und $v'\Omega_2' = 0$. Somit folgt insbesondere $v'(i[\Omega_2'\overline{\Omega}_1 - \Omega_1'\overline{\Omega}_2])\overline{v} = 0$. Also $v = 0$ (Fakt 2).

Folgerung: *Zu jeder fixierten Wahl der symplektischen Gitterbasis von $(H^1(X,\mathbb{Z}), \langle .,. \rangle)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Basis $\omega_1, ..., \omega_g$ von $\Omega^1(X)$, derart daß gilt $\Omega_2 = E_{g,g}$. Das heißt*

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ E \end{pmatrix}$$

und Ω erfüllt die beiden Eigenschaften

$\Omega = \Omega'$ *(Fakt 1)*

$Im(\Omega) > 0$ *(Fakt 2).*

Die Menge der komplexen $g \times g$-Matrizen Ω mit diesen beiden Eigenschaften ist der **Siegelsche obere Halbraum $\mathbf{H}_g$** vom Geschlecht g

$$\Omega \in \mathbf{H}_g \ .$$

Übungsaufgabe: Die symplektische Gruppe $\Gamma = Aut(\mathbb{Z}^{2g}, \langle ., . \rangle)$ operiert auf $\mathbf{H}_g$ via der folgenden Linksoperation

$$\Omega \in \mathbf{H}_g \ , \ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1} \in \mathbf{H}_g \ .$$

Hinweis: Benutze $\mathbf{H}_g = \{ \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \mid \text{mit Fakt 1 und 2 } \} \ / \ Gl(g, \mathbb{C})$.

Satz: *Der Periodenpunkt*

$$\boxed{\Omega \ \in \ \Gamma \setminus \mathbf{H}_g \quad , \quad \Gamma = Sp(2g, \mathbb{Z})}$$

der Riemannschen Fläche ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von den gemachten Basiswahlen.

Die Abbildung $\alpha : C^{2g} \to (\mathbb{C}^g)^*$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad v' \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ E \end{pmatrix} = -x' + y'\Omega$$

definiert das Periodengitter. Hierbei sind $x, y \in \mathbb{Z}^g$.

Korollar: *Das Periodengitter ist* $\{x + \Omega y \mid x, y \in \mathbb{Z}^g\}$. *Insbesondere gilt*

$$\boxed{J(X) = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g} \ .$$

Übungsaufgaben: 1) Zeige für $\omega \in \Omega^1_{2nd}(X)$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche und jeden geschlossenen Weg γ von X, welcher nicht durch die Pole verläuft $\oint_\gamma \omega = \langle \eta_\gamma, \eta_\omega \rangle$. Hierbei ist $\eta_\omega \in \mathcal{A}^1_{closed}(X)$ ein GLättung von ω. Ist für $\omega = \partial(f), f \in \mathcal{M}(X)$ dieses Integral Null?

2) Betrachte für die Differentialform $\omega_{PQ} \in \Omega^1_{3rd,\mathbb{Z}}(X)$ mit Residuen -1 und 1 in P und Q auf einer kompakten Riemannschen Fläche X das Integral

$$F(P) = \int_X \omega_{PQ} \wedge \overline{\omega} \quad , \quad \omega \in \Omega^1(X)$$

in Abhängigkeit vom Punkt P. Suche eine Deutung.

3) Studiere in den Bücher von Gunning oder Griffith-Harris den Beweis des Satzes von **Torelli**. Dieser Satz besagt, daß zwei Riemannsche Flächen X und X' vom Geschlecht g genau dann isomorph sind (bezüglich einer biholomorphen Abbildung), wenn ihre Periodenpunkte in $\Gamma \setminus \mathbf{H}_g$ übereinstimmen.