

# **Analysis für Physiker**

Prof. Dr. Rainer Weissauer

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
Mathematisches Institut

Vorlesungsskriptum SS/WS 2011/12

Bearbeitungsstand: 28. März 2014

**Adresse des Dozenten:**

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg  
Mathematisches Institut  
Im Neuenheimer Feld 288  
D-69120 Heidelberg, Deutschland  
Raum 205

`weissaue@mathi.uni-heidelberg.de`  
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weissaue/`

# Vorwort

Dieses Skript richtet sich als Begleitmaterial der Vorlesung *Höhere Mathematik für Physiker II+III* vorrangig an die Studenten der Fachrichtung Physik. In dem zwei-semesterigen Zyklus wird versucht, die für Physikstudenten relevanten Methoden der Analysis darzustellen.

Die Vorlesung deckt dabei in zwei Semestern mathematische Inhalte ab, die normalerweise in den drei Vorlesungen *Analysis I–III* dargestellt werden. Dabei wurden notgedrungen einige wichtige Dinge ausgelassen, da auf die mathematische Strenge der Darstellung nicht verzichtet werden sollte. Kenntnisse aus der Vorlesung *Lineare Algebra* werden wesentlich vorausgesetzt. Das heißt, die Vorlesung baut auf der Grundvorlesung *Lineare Algebra I* auf.

Begleitend zu der Vorlesung und dem Übungsbetrieb wurden einmal wöchentlich in einer zusätzlichen Großübung Beispiele behandelt, die in der Vorlesung selbst nicht diskutiert werden konnten.

Das vorliegende Skript folgt in seinem Aufbau keineswegs konsequent der Vorlesung. Auch innerhalb der einzelnen Kapitel wurden in der Vorlesung Teile des Stoffes manchmal geringfügig umgestellt, um vom Timing die Übungsaufgaben so effizient wie möglich mit der Vorlesung abzustimmen.

Kapitel V hat einen sehr speziellen Charakter. Hier wurden an einer Stelle des Skriptes spezifische Anwendungen der Analysis gebündelt, die in der Vorlesung und zum Teil in der Großübung gestreut vorgestellt wurden. Ähnliches gilt für Kapitel X. Kapitel XI wurde in der Vorlesung nicht behandelt und ist noch ziemlich unvollständig. Es ist gedacht für interessierte Leser und gibt einen kleinen Ausblick.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>1 Der Konvergenzbegriff</b>	<b>3</b>
1.1 Angeordnete Körper . . . . .	3
1.2 Die Euklidsche Norm . . . . .	6
1.3 Metrische Räume . . . . .	8
1.4 Folgen in metrischen Räumen . . . . .	9
1.5 Die geometrische Reihe . . . . .	11
1.6 Vollständige metrische Räume . . . . .	12
1.7 Der Banachsche Fixpunktsatz . . . . .	13
1.8 Quaderschachtelung . . . . .	15
1.9 Reelle Zahlen . . . . .	18
1.10 Infimum und Supremum . . . . .	19
<b>2 Stetige Abbildungen</b>	<b>23</b>
2.1 Stetigkeit . . . . .	23
2.2 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	25
2.3 Der Zwischenwertsatz . . . . .	26
2.4 Das $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium . . . . .	27
2.5 Gleichmässige Stetigkeit . . . . .	28
2.6 Reellwertige stetige Funktionen . . . . .	29
2.7 Gleichmässige Konvergenz . . . . .	31
2.8 Vollständigkeit von $C(X)$ . . . . .	32
2.9 Monotone Folgen stetiger Funktionen . . . . .	32
<b>3 Integration</b>	<b>35</b>
3.1 Vorbemerkungen . . . . .	35
3.2 Treppenfunktionen . . . . .	36
3.3 Das reelle Standardintegral . . . . .	38
3.4 Eigenschaften des Standardintegrals . . . . .	39
3.5 Der Logarithmus . . . . .	40
3.6 Das mehrdimensionale Standardintegral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ . . . . .	41
3.7 Monotone Hüllen . . . . .	43
3.8 Abstrakte Integrale . . . . .	44

3.9	Fortsetzung von Integralen . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Differentiation</b>	<b>47</b>
4.1	Das Landausymbol . . . . .	47
4.2	Differenzierbarkeit . . . . .	48
4.3	Die Jacobi-Matrix . . . . .	51
4.4	Extremwerte . . . . .	52
4.5	Symmetrie der Hessematrix . . . . .	54
4.6	Lokale Maxima . . . . .	55
4.7	Der Hauptsatz . . . . .	56
4.8	Differentialgleichungen . . . . .	57
4.9	Stetig partiell differenzierbare Funktionen . . . . .	61
4.10	Der Umkehrsatz . . . . .	63
4.11	Substitutionsregel . . . . .	66
4.12	Differentialformen . . . . .	69
4.13	Beweis des Poincare Lemmas . . . . .	73
4.14	Satz von Stokes für Quader . . . . .	75
4.15	Analytische Funktionen . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Ausgewählte Themen I</b>	<b>81</b>
5.1	Wegintegrale . . . . .	81
5.2	Holomorphe Funktionen . . . . .	83
5.3	Vektorfelder . . . . .	84
5.4	Orthogonale Gruppen . . . . .	86
5.5	Harmonische Funktionen . . . . .	88
5.6	Taylor Koeffizienten . . . . .	89
5.7	Harmonische Polynome . . . . .	90
5.8	Drehimpuls Operatoren . . . . .	92
5.9	Fourier Transformation (antikommutativ) . . . . .	93
5.10	Laplace Operatoren . . . . .	94
5.11	Maxwell Gleichungen . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Lebesgue Integration</b>	<b>97</b>
6.1	Übersicht . . . . .	97
6.2	Das Lebesgue Integral . . . . .	98
6.3	Der Verband $L(X)$ . . . . .	99
6.4	Vertauschungssätze . . . . .	100
6.5	Anwendungen . . . . .	102
6.6	Nullmengen . . . . .	103
6.7	Messbare Funktionen . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>107</b>
7.1	Vorbemerkung . . . . .	107
7.2	$L^2$ -Räume . . . . .	109

7.3	Satz von Fischer-Riesz . . . . .	110
7.4	$C_c(X, \mathbb{C})$ liegt dicht . . . . .	110
7.5	Der Folgenraum $L^2(\mathbb{Z})$ . . . . .	111
7.6	Orthonormalbasen . . . . .	112
7.7	Fourier Reihen . . . . .	113
7.8	Stone-Weierstraß . . . . .	115
7.9	Reelle Fourier Transformation . . . . .	116
7.10	Der harmonische Oszillator . . . . .	120
<b>8</b>	<b>Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>121</b>
8.1	Partitionen der Eins . . . . .	121
8.2	Untermannigfaltigkeiten mit Rand . . . . .	122
8.3	Randintegrale . . . . .	123
8.4	Der Satz von Stokes . . . . .	124
8.5	Drehinvarianz . . . . .	125
8.6	Standardintegral auf der Kugeloberfläche . . . . .	126
8.7	Die Kugelflächenform . . . . .	128
8.8	Greensche Formel . . . . .	130
<b>9</b>	<b>Harmonische Analysis</b>	<b>131</b>
9.1	Der Hilbertraum $L^2(S)$ . . . . .	131
9.2	Poisson Kern . . . . .	132
9.3	Orthogonalität . . . . .	134
9.4	Harmonische Funktionen sind analytisch . . . . .	136
9.5	Entwicklung auf Kugelschalen . . . . .	137
9.6	Die Potential Gleichung $-\Delta U = \rho$ . . . . .	139
<b>10</b>	<b>Ausgewählte Themen II</b>	<b>143</b>
10.1	Kugelvolumen . . . . .	143
10.2	Überdeckungskompaktheit . . . . .	144
10.3	Residuensatz . . . . .	145
10.4	Wärmeleitungskern . . . . .	146
10.5	Spinordarstellung . . . . .	147
10.6	Oszillatordarstellung . . . . .	149
10.7	$\gamma$ -Matrizen . . . . .	150
10.8	Heisenberggruppe . . . . .	151

Die Anwendungen in Kapitel V benötigen gewisse Voraussetzungen über die Differentiation. Die Abhängigkeiten sind wie folgt:

**Leitfaden für Kapitel V.**

- $4.5 \implies 5.3 \implies 5.4$
- $4.9 \implies 5.5 \implies 5.6 \implies 5.7 \implies 5.8$
- $4.12 \implies 5.9 \implies 5.10$
- $4.14 \implies 5.1 \implies 5.2$
- $4.13 + 4.14 + 5.10 \implies 5.11$

Im ersten Semester habe ich Kapitel I-IV behandelt (ausschließlich der Sektionen 4.13 bis 4.15, die ich zu Beginn des zweiten Teils nach Kapitel VI bewiesen habe, da in diesen Abschnitten der Satz von der dominierten Konvergenz benutzt wird; man könnte natürlich hier die benutzten Vertauschungssätze auch erst einmal annehmen) und die Anwendungen 5.3-5.11. Die Behandlung der Abschnitte aus Kapitel V in der Vorlesung wurde meistens durch Übungsaufgaben vorbereitet und in der großen Übung vertieft.

Das Kapitel X bestand zum Teil aus Übungsmaterial, Themen der Großübung und der Vorlesung. Kapitel XI und Teile von Kapitel X wurden nicht in der Vorlesung behandelt, und sind gedacht als Lesestoff zur Anregung und weiteren Vertiefung.

**Leitfaden für Kapitel X.**

- $(8.4 \implies 8.7) + 4.11 \implies 10.1$
- $10.2 \implies 7.8 + 8.1$
- $9.5 \implies 10.3$
- $5.9 \implies 10.5 \implies 10.7$
- $7.9 \implies 10.4$
- $7.9 \implies 10.6 \implies 10.8$

In der ersten Vorlesung habe ich Kapitel I-IV behandelt (ausschließlich Abschnitt 4.13 und 4.14) sowie Kapitel V (ausschließlich Abschnitt 4.13 und 4.14). In den Abschnitten 4.13 und 4.14 wird die Vertauschung von Limesprozessen benötigt. Deshalb habe ich sie erst im Wintersemester nach dem Kapitel VI diskutiert, da die benötigten Vertauschungssätze sich dann unmittelbar aus dem Satz von der dominierten Konvergenz ergeben. Die erste Hälfte von Abschnitt 4.12 hatte ich in der Vorlesung bereits im unmittelbaren Anschluß an Abschnitt 4.9 dargestellt, die zweite Hälfte dann nach Abschnitt 4.11 um in der Zwischenzeit das Kalkül in der Großübung und in den Übungsaufgaben etwas vertrauter zu machen.

## Ein kurzer Überblick

In Kapitel I studieren wir den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen zusammen mit den Euklidischen Räumen  $\mathbb{R}^n$ . Eine naive Definition der reellen Zahlen mit Hilfe von Dezimalbruchentwicklungen wird vermieden. Daß man reelle Zahlen durch ein Dezimalbruchentwicklung beschreiben kann, ergibt sich erst am Ende und eher beiläufig. Einer der Gründe für diese Vorgehensweise ist, daß eine reelle Zahl mehrere Dezimalbruchentwicklungen besitzen kann wegen

$$0,999\dots = 1.$$

Deshalb wird der Körper der reellen Zahlen wie in Mathematikvorlesungen üblich axiomatisch eingeführt als ein *archimedisch angeordneter Cauchy vollständiger* (pythagoräischer) Körper. Dieser Zugang ist sehr natürlich, denn es wird dabei automatisch der Begriff der *konvergenten* beziehungsweise *Cauchy konvergenten* Folgen in metrischen Räumen eingeführt. Diese zentralen Begriffsbildungen sind unverzichtbar und erweisen sich als grundlegend für alle weiteren Aussagen. Die wichtigsten Resultate des Kapitels, neben der Einführung der reellen Zahlen, sind die Sätze über *geometrische Folgen und Reihen* mit dem *Banachschen Fixpunktsatz*, dem Satz von *Bolzano-Weierstraß* und das *Prinzip der monotonen Konvergenz*. Alle hier genannten Resultate sind ihrer Natur nach Konvergenzaussagen. Der Banachsche Fixpunktsatz ist nützlich zur Bestimmung von Umkehrfunktionen und zur Lösung von Differentialgleichungen, der Satz von Bolzano-Weierstraß hängt eng zusammen mit Extremwertproblemen. Diese Sätze werden soweit möglich in der Sprache der *metrischen Räume* behandelt, so daß sie dann sowohl für  $\mathbb{R}$  als auch für Euklidische Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  gelten. Das Prinzip der monotonen Konvergenz erweist sich später als das eigentliche Fundament der Integrationstheorie.

Im Kapitel II untersuchen wir *stetige Funktionen*, also Funktionen die anschaulich gesprochen keine Sprünge machen. Dies macht man am einfachsten präzise mit Hilfe der Folgendefinition der Stetigkeit, die am Anfang des Kapitels II eingeführt wird

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right) \implies \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \right).$$

Wir formulieren diesen Stetigkeitsbegriff später mit Hilfe des sogenannten  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriteriums um. Ein Hauptgrund dafür, daß sich dadurch erst der Begriff der *gleichmässigen Stetigkeit* motiviert. Dieser ist viel subtiler als der Begriff der Stetigkeit und wird erst in der  $\epsilon$ - $\delta$  Formulierung richtig begreifbar. Gleichmässige Stetigkeit ist von grundlegender Bedeutung in vielen Bereichen der Mathematik. Ein zentrales Resultat ist der Satz von Heine, daß eine stetige reellwertige Funktion auf einem folgenkompakten metrischen Raum automatisch gleichmässig stetig ist. Daraus leitet sich später die Integrierbarkeit stetiger Funktionen ab ebenso wie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Am Ende von Kapitel II beschäftigen wir uns mit (den für diesen Zeitpunkt) recht abstrakt wirkenden Aussagen über gleichmässige oder monotone Konvergenz von Funktionenfolgen auf einem (kompakten) metrischen Raum. Diese abstrakten Sätze werden die spätere Grundlage zur Lösung von Differentialgleichungen (gleichmässige Konvergenz) sein beziehungsweise für die spätere Begründung der *Lebesgueschen Integrationstheorie* (monotone Konvergenz). Der Leser sollte daher diese Dinge zu diesem frühen Zeitpunkt einfach geduldig zur Kenntnis nehmen.

Im Kapitel III wird das *Euklidische Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

definiert für eine stetige Funktion  $f(x)$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit kompaktem (d.h. beschränktem) Träger. Die Bedeutung des Integralbegriffes muß sicherlich nicht erläutert werden. Die grundlegende Idee ist, daß man stetige (oder allgemeinere) Funktionen durch *Treppenfunktionen* approximiert um deren Integral zu definieren. Die explizite Berechnung von Integralen ist ein generell schwieriges Problem, und die wichtigste Methode dafür ist der später zu beweisende *Hauptsatz*. Im Kapitel III beschränken wir uns daher auf die Diskussion des *logarithmischen Integrals*  $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ . Am Ende des Kapitels diskutieren wir eine Erweiterung des Integrationsbegriffs, welche auf dem *Prinzip der monotonen Konvergenz* beruht. Dies bereitet einerseits die spätere Einführung der Lebesgue Integration vor, erlaubt es andererseits Integrale

$$\int_A f(x) dx$$

für nichtnegative stetige Funktionen  $f$  zu definieren, deren Definitionsbereich eine beliebige (!) kompakte Teilmenge  $A$  im  $\mathbb{R}^n$  ist. Diese Überlegungen zeigen insbesondere, daß jede kompakte Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein wohldefiniertes Volumen  $\text{vol}(A) = \int_A dx$  besitzt. Dies wird im Kapitel IV beim Beweis der allgemeinen  $n$ -dimensionalen *Substitutionsformel für Integrale* benötigt.

Kapitel IV ist dann der *Differentialrechnung* gewidmet. Der Begriff einer differenzierbaren Funktion wird am Anfang gleich für beliebige Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m ,$$

oder allgemeinere  $f$  definiert auf gewissen zulässigen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , eingeführt. Aus der Vorstellung, daß für das Differential

$$Df(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

einer solchen Funktion  $f$  in einem Punkt  $\xi$  des Definitionsbereiches  $f(\xi) + Df(\xi)(x - \xi)$  eine optimale affin lineare Approximation an die Funktion  $f$  darstellt ergeben sich rasch die wichtigsten Sätze. Wir diskutieren die *Kettenregel*, *Extremwertprobleme*, beweisen den *Hauptsatz* und wenden diesen auf die Theorie der Differentialgleichungen einer Variable an. Im Anschluß diskutieren wir schwierigere Sätze der Analysis mehrerer Variablen, den *Satz von der Umkehrfunktion* und die *Substitutionsregel* für mehrdimensionale Integrale. Unser Ziel ist es dabei so schnell wie möglich den Begriff der *Differentialformen* einzuführen und zu motivieren. Erst mit Hilfe dieser Differentialformen kann man die höherdimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Analysis überhaupt formulieren. Ein Teil dieses allgemeinen Hauptsatzes ist das Poincare Lemma (eine weitreichende Verallgemeinerung der *Hauptsätze der klassischen Vektoranalysis*), ein anderer Teil der *Satz von Stokes*

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_Q d\omega ,$$

der am Ende von Kapitel IV zuerst einmal nur für Quader  $Q$  bewiesen wird. Für die meisten lokalen Anwendungen reicht dies bereits aus.

Im Kapitel V wird die *Lebesgue Integrationstheorie* dann vollständig entwickelt. Diese Resultate, allem voran der *Satz von der dominierten Konvergenz* und der *Satz von Beppo Levi*, sind die Grundlage für das nachfolgende Kapitel über Hilberträume. Beide Sätze sind Vertauschungssätze, die garantieren daß unter gewissen Voraussetzungen Limiten mit der Integration vertauschen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx .$$

Nur mit Hilfe dieser Sätze sind die später wichtigen  $L^2(X)$ -Hilberträume definierbar. Kapitel V ist zum Teil sehr technisch, aber eigentlich auch sehr einfach. Zum Verständnis ist hier vor allem Geduld erforderlich. Einige Beweise von Kapitel IV (Beweis des Poincare Lemmas und die Diskussion analytischer Funktionen) hängen bei unserem Zugang vom Satz der dominierten Konvergenz ab. Der abschliessende Abschnitt über *messbare Funktionen* enthält in kondensierter Form eigentlich alle wesentlichen Resultate von Kapitel V.

Das Kapitel VII ist von Bedeutung für die *Quantentheorie*. Aus diesem Grund geben wir einen kurzen Überblick über die Querverbindungen am Anfang des Kapitels. Im Kapitel VII definieren wir den Begriff des (separablen) Hilbertraumes und beweisen in diesem Kontext die Sätze über *Fourierzerlegung*. Ein besonderer Augenmerk wurde dabei auf eine vollständige und ausführliche Diskussion der *reellen Fourier Transformation* gelegt, da diese ein wesentliches Werkzeug der *klassischen Quantentheorie* darstellt (Stichwort *harmonischer Oszillator*).

Im Kapitel VIII betreiben wir Analysis auf eingebetteten *Mannigfaltigkeiten* und beweisen in diesem Kontext den allgemeinen *Satz von Stokes* (und damit insbesondere den Satz von *Gauß*) in der Sprache der Differentialformen. Das für uns wichtigste Beispiel einer eingebetteten Mannigfaltigkeit ist die  $(n - 1)$ -dimensionale *Sphäre*  $S^{n-1}$  im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Dieses Beispiel behandeln wir ausführlich. Insbesondere definieren wir das rotationsinvariante Standardintegral<sup>1</sup> auf der Sphäre und diskutieren die *Greenschen Formeln*.

Im Kapitel IX wenden wir die Ergebnisse aus Kapitel VIII und betreiben Analysis auf der Sphäre unter Berücksichtigung der Operation der Drehgruppe. Wir finden in den *sphärischen Kugelfunktionen* eine Hilbertraum Basis von  $L^2(S^{n-1})$  in beliebiger Dimension  $n$  und beweisen die *Poissonformel*. Als Anwendung erhalten wir die *Laurent-Entwicklung* von harmonischen Funktionen mit punktförmiger Singularität (*Multipolentwicklungen*) mit genauer Diskussion von Konvergenzfragen, und beweisen damit als Spezialfall die *Analytizität harmonischer Funktionen*. Dies umfaßt im Spezialfall  $n = 2$  die Grundlagen der *komplexen Funktionentheorie*. Zum Abschluß diskutieren wir das verallgemeinerte *Coulomb/Newton Potential* im  $n$ -dimensionalen Raum und lösen die zugehörige Laplace Potentialgleichung  $-\Delta U = \rho$ .

---

<sup>1</sup>Die Sphäre  $S^{n-1}$  ist eine kompakte Teilmenge im  $\mathbb{R}^n$ . Das Standardintegral auf der Sphäre  $A = S^{n-1}$  ist nicht das in Kapitel III diskutierte Euklidische Integral  $\int_A f(x) dx$ , denn dieses ist identisch Null (die Sphäre ist eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^n$ ). Das Standardintegral auf der Sphäre schreiben wird deshalb  $\int_{S^{n-1}} f(x) \sigma_{n-1}(x)$ .



# 1 Der Konvergenzbegriff

## 1.1 Angeordnete Körper

Wir wiederholen an dieser Stelle den aus der Linearen Algebra bekannten Begriff des *Körpers*. Es handelt sich dabei um einen Rechenbereich mit Multiplikation und Addition.

Genauer gilt: Ein Körper ist ein Tupel  $(K, +, \cdot, 0, 1)$  bestehend aus einer Menge  $K$ , zwei Verknüpfungen  $+: K \times K \rightarrow K$ , genannt *Addition*, und  $\cdot: K \times K \rightarrow K$ , genannt *Multiplikation*, sowie zwei verschiedenen Elementen 0 (Nullelement) und 1 (Einselement) mit gewissen Eigenschaften. So soll zum einen das Tupel  $(K, +, 0)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 sein. D. h. man kann beliebige Elemente  $a, b \in K$  addieren, das heißt durch  $+$  verknüpfen, so daß gilt  $a + b = b + a \in K$  sowie  $a + 0 = a$ , und jede Gleichung

$$x + a = b$$

hat für gegebenes  $a, b \in K$  eine eindeutige Lösung  $x$ . Wir schreiben diese in der Form  $x = b - a$ .

Zum anderen soll die Menge der von Null verschiedenen Elemente  $K^* \subseteq K$  eine abelsche Gruppe  $(K^*, \cdot, 1)$  definieren. Insbesondere ist daher für alle  $a, b \in K$  mit  $a \neq 0, b \neq 0$  die Gleichung

$$x \cdot a = b$$

eindeutig lösbar. Deren Lösung schreiben wir als  $x = a/b = b \cdot a^{-1}$ . Für gewöhnlich lassen wir den Punkt für die Multiplikation meist weg und schreiben kurz  $ab$  statt  $a \cdot b$ . Ist  $b = 0$  und  $a \neq 0$ , dann ist übrigens  $x = 0$  die einzige Lösung der Gleichung  $x \cdot a = b$ . Dies folgt aus dem *Distributivgesetz*, das in einem Körper erfüllt sein soll. Im Distributivgesetz wird  $a(b + c) = ab + ac$  gefordert für alle  $a, b, c \in K$  und es impliziert  $a \cdot 0 = 0$  für alle  $a \in K$ .

Der Begriff des Körpers ist bereits aus der Linearen Algebra bekannt. Typische Beispiele sind: der Körper  $\mathbb{Q}$  der *rationalen Zahlen*, der Körper  $\mathbb{R}$  der *reellen Zahlen* sowie der Körper  $\mathbb{C}$  der *komplexen Zahlen*. Für die Analysis spielt der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen eine fundamentale Rolle. Seine Elemente stellen wir uns intuitiv vor als die Punkte auf einer lückenlosen Geraden. Wir sind von der Schule gewohnt in diesem Körper zu rechnen.

Eine sehr wichtige Eigenschaft des Körpers der reellen Zahlen besteht darin, daß dieser Körper eine *Anordnung* besitzt. Eine Anordnung ist eine Relation  $x < y$ : Alle  $x$  und  $y$  aus einem Körper  $K$  lassen sich also in Bezug auf diese Anordnung vergleichen. Man setzt formal  $y > x \Leftrightarrow x < y$  und schreibt

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oder } x = y.$$

Der Begriff der Anordnung ist auch in der Physik sehr wesentlich, wenn es um die Parametrisierung der Zeit geht. Das Vorher und Nachher von Ereignissen spielt eine fundamentale Rolle bei der Kausalität und dem physikalischen Begriff der Entropie.

Der Begriff eines angeordneten Körpers lässt sich mathematisch in axiomatischer Weise definieren. Ein angeordneter Körper  $(K, <)$  ist ein Körper  $K$  zusammen mit einer ausgezeichneten Teilmenge  $P \subseteq K^*$ . Man nennt dann  $P$  den „Kegel der positiven Zahlen“ des angeordneten Körpers. Dies ist ein eindimensionales Analogon des in der Physik auftretenden vorderen Lichtkegels im Minkowskiraum. Eine Zahl  $x \in K$  nennt man negativ oder man schreibt  $x \in -P$ , wenn ihr negatives  $-x$  in  $P$  liegt.

**Definition 1.1.** Ein Tupel  $(K, P)$  bestehend aus einem Körper  $K$  und einer Teilmenge  $P$  von  $K^*$  heißt **angeordneter Körper**, wenn

- (1)  $K = P \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} -P$ , d. h.  $K$  zerlegt sich disjunkt in  $P$ ,  $-P$  und Null.
- (2)  $P + P \subseteq P$ , d. h. die Summe zweier Zahlen aus  $P$  ist wiederum in  $P$
- (3)  $P \cdot P \subseteq P$ , d. h. das Produkt zweier Zahlen aus  $P$  ist wieder in  $P$ ; also  $1 \in P$  gilt und wir schreiben  $x < y$  genau dann wenn  $y - x \in P$  gilt.

Die Menge  $P$  definiert damit eine Relation  $<$  auf  $K$  und wir schreiben auch  $(K, <)$  anstelle von  $(K, P)$ . Insbesondere gilt per Definition

$$P = \{x \in K \mid 0 < x\}.$$

Aus dem ersten Axiom angeordneter Körper folgt für zwei Zahlen  $x, y \in K$  entweder  $x < y$  oder  $x = y$  oder  $y < x$  im ausschliesslichen Sinn. Für  $y = 0$  folgt unmittelbar  $-P = \{x \in K \mid x < 0\}$ . Wir bemerken folgende Eigenschaft:

- Jedes Quadrat  $x^2$  einer Zahl  $x$  aus  $K^*$  ist positiv, kurz:  $x^2 \in P$ .

Dies ist klar für  $x \in P$  nach dem dritten Axiom. Ist  $x$  nicht in  $P$ , dann ist  $-x \in P$  und damit  $(-x)^2 \in P$  nach dem ersten Axiom. Also  $x^2 \in P$  wegen  $x^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = (-x)^2 \in P$ . Hier haben wir benutzt  $-x = (-1) \cdot x$  und  $(-1) \cdot (-1) = 1$ . Diese Eigenschaften gelten in jedem Körper [benutze dazu das Distributivgesetz].

Man sieht daher, daß der Körper der komplexen Zahlen keine Anordnung besitzen kann, denn  $-1 = i^2$  ist ein Quadrat in  $\mathbb{C}^*$ , aber liegt nicht in  $P$  wegen  $1 \in P$ .

**Bemerkung 1.2.** Sei  $(K, <)$  ein angeordneter Körper. Dann gelten wegen Definition 1.1 folgende Eigenschaften:

- (1) Es gilt entweder  $x < y$  oder  $x = y$  oder  $x > y$  (im ausschließlichen Sinn)
- (2) Ist  $x < y$  und  $y < z$ , dann ist  $x < z$ .
- (3) Ist  $x < y$ , dann gilt  $x + z < y + z$  für alle  $z \in K$ .

**Beweis.** (1) ist klar. Zu (2) beachte: Aus  $y - x \in P$  und  $z - y \in P$  folgt  $z - x = (z - y) + (y - x) \in P + P \subseteq P$ . Zu (3) beachte: Aus  $y - x > 0$  folgt  $(y + z) - (x + z) = y - x > 0$ . Also folgt  $x + z < y + z$  aus  $x < y$ . □

In einem angeordneten Körper definiert man den Betrag  $|x|$  eines Element  $x \in K$  wie folgt:  $|x| = 0$  gilt genau dann wenn  $x = 0$ ; und für  $x \neq 0$  sei per Definition  $|x| = x$  resp.  $-x$  je nachdem ob  $x \in P$  oder  $x \notin P$ . Dann gilt nach Definition  $|x| \in P$  für  $x \neq 0$ , und man sieht sofort

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

**Natürliche Zahlen.** Jeder angeordnete Körper enthält die natürlichen Zahlen in der Form

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} := \{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\}.$$

Beachte nämlich  $0 < 1$ , und wegen Eigenschaft (1) folgt dann durch Addition  $1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 2$  und dann analog  $2 = 1 + 1 < 3 := 1 + 1 + 1$  und so weiter. Insbesondere sind die Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots$  damit paarweise verschieden. Die so definierte Teilmenge  $\mathbb{N} \subseteq K$  ist unter Multiplikation und Addition abgeschlossen, wie man sofort mit Hilfe des Distributivgesetzes in  $K$  zeigt, und kann mit den natürlichen Zahlen identifiziert werden.

Wegen der Körperaxiome liegen daher die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  als paarweise verschiedenen Zahlen in einem angeordneten Körper, und damit auch die Quotienten  $a/b$  ganzer Zahlen  $a$  und  $b \neq 0$ . Also ist der Körper der rationalen Zahlen ein Teilkörper jedes angeordneten Körpers:  $\mathbb{Q} \subseteq K$ . Insbesondere enthält  $K$  unendlich viele Elemente. Endliche Körper besitzen daher keine Anordnung.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Anordnung die charakteristischen Eigenschaften der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bereits vollständig beschreibt. Das ist nicht der Fall, denn der Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist auch ein angeordneter Körper, aber verschieden vom Körper der reellen Zahlen. Wir wollen daher weitere Eigenschaften suchen, die  $\mathbb{R}$  charakterisieren.

**Definition 1.3.** Ein angeordneter Körper  $(K, <)$  heißt **archimedisch**, wenn gilt: Für jedes  $x \in K$  existiert eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft  $x < n$ .

**Definition 1.4.** Ein archimedischer Körper  $(K, <)$  heißt **pythagoräisch**, wenn gilt: Jede Zahl aus  $P$  ist ein Quadrat in  $K$ .

Der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist archimedisch, aber nicht pythagoräisch. 2 ist positiv aber kein Quadrat in  $\mathbb{Q}$ , weil die Gleichung  $n^2 = 2m^2$  keine ganzzahligen Lösungen  $m, n$  besitzt [Benutze die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung].

Sei  $K$  ein archimedischer Körper. Zu jeder Zahl  $y \in P$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft  $0 < 4y < n^2$  oder  $0 < \eta < 1/4$  für  $\eta := y/n^2$ . Ist die positive Zahl  $\eta < 1/4$  ein Quadrat  $\eta = \xi^2$ , dann auch  $y = (n \cdot \xi)^2$ . Diese Bemerkung zeigt uns später in Lemma 1.24, daß ein vollständiger archimedischer Körper automatisch pythagoräisch ist.

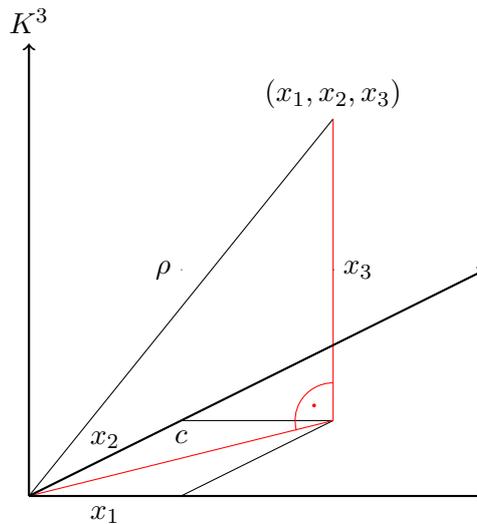
In einem pythagoräischen Körper besitzt jede nicht negative Zahl  $y \in K$  eine eindeutig bestimmte nicht negative Quadratwurzel  $x_1 = \sqrt{y}$ , d.h. eine eindeutig bestimmte nicht negative Lösung  $y_1$  der Gleichung  $x^2 - y = 0$ . [ObdA  $y \in P$  und es gibt eine Lösung  $x_1 > 0$  nach Annahme. Dann ist auch  $x_2 = -x_1$  eine Lösung mit  $x_2 \neq x_1$  wegen  $x_2 \in -P$ . In einem beliebigen Körper hat aber die Gleichung  $x^2 - y = (x - x_1)(x - x_2) = 0$  höchstens die Lösungen  $x_1, x_2$ .] Der **Absolutbetrag**  $|x|$  einer Zahl  $x \in K^*$  kann daher in der Form  $|x| = \sqrt{x^2}$  geschrieben werden.

## 1.2 Die Euklidische Norm

Wir wollen für einen pythagoräischen Körper  $K$  die **Norm** (oder auch Länge) eines Vektors im  $r$ -dimensionalen Vektorraum  $K^r$  definieren. Betrachte den  $r$ -dimensionalen Standardvektorraum

$$K^r = \{(x_1, \dots, x_r) \mid x_1, \dots, x_r \in K\}$$

für einen pythagoräischen Körper  $K$ . Motivation: Für einen beliebigen Punkt  $x = (x_1, x_2, x_3)$  im Anschauungsraum  $K^3$  würde der Satz von Pythagoras den Abstand  $\rho$  von  $x$  zum Nullpunkt liefern durch die Formel  $\rho^2 = c^2 + x_3^2 = (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$



Dadurch motiviert definiert man die **Standardnorm** oder **Euklidische Norm** für  $x = (x_1, \dots, x_r)$  aus  $K^r$  entsprechend als

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_r^2}.$$

unter Benutzung von Satz 1.5. Dies macht  $\|x\|$  wohldefiniert als Zahl in  $P \cup \{0\} \subseteq K$ . Man beachte hierbei: Ist  $(K, <)$  pythagoräisch und  $x^2 = y$ , dann gilt  $y \in P \cup \{0\}$ . Ist umgekehrt  $y \in P \cup \{0\}$ , dann gilt  $x = 0$ , falls  $y = 0$  und  $x, -x$  sind die einzigen Lösungen, falls  $y \neq 0$ . Genau eine davon liegt in  $P$ . Offensichtlich gilt  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  für alle Skalare  $\lambda$  aus  $K$ . Im eindimensionalen Fall  $r = 1$  ist  $\|x\| = |x|$ .

**Satz 1.5.** Sei  $K$  pythagoräisch und ein Vektor  $x = (x_1, \dots, x_r) \in K^r$  gegeben. Dann gilt:  $x_1^2 + \dots + x_r^2 \in P$  oder  $x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$ . Letzteres gilt genau dann, wenn

$$x_1 = \dots = x_r = 0.$$

**Beweis.** Den Beweis reduziert man durch Induktion nach  $r$  auf den Fall  $r = 2$ . Dieser Fall sei als Übungsaufgabe gestellt.  $\square$

**Definition 1.6.** Sei  $K$  pythagoräisch. Für  $x, y \in K^r$  nennt man

$$(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r$$

das **Standard-Skalarprodukt** von  $x$  und  $y$ .

Insbesondere gilt  $\|x\|^2 = x \cdot x$  für  $x = (x_1, \dots, x_r) \in K^r$ .

**Satz 1.7 (Ungleichung von Schwarz).** Seien  $x, y \in K^r$ . Dann ist

$$\boxed{|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x$  und  $y$  proportional sind.

**Beweis.** ObdA sei  $x - t \cdot y \neq 0$  für alle  $t \in K$  (d. h.  $x$  und  $y$  seien nicht proportional). Dann gilt

$$0 < \|x - ty\|^2,$$

d. h.

$$0 < (x - ty, x - ty) = \sum_{i=1}^r (x_i - ty_i)^2 = \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2,$$

wegen  $(x_i - ty_i)^2 = x_i^2 - 2tx_i y_i + t^2 y_i^2$ . Sei nun o. B. d. A.  $y \neq 0$ . Dann folgt

$$t^2 - \frac{2t(x, y)}{\|y\|^2} + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} > 0$$

$$t^2 - \frac{2t(x, y)}{\|y\|^2} + \left(\frac{(x, y)}{\|y\|^2}\right)^2 > \frac{(x, y)^2}{\|y\|^4} - \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2}$$

$$\left(t - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}\right)^2 > \frac{(x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2}{\|y\|^4}.$$

Setzt man  $t := \|y\|^{-2}(x, y)$ , dann folgt  $(x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 < 0$ . □

**Satz 1.8 (Dreiecksungleichung im  $K^r$ ).** Sei  $K$  pythagoräisch und seien  $x, y \in K^r$  und  $\lambda \in K$ . Dann gilt  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , sowie  $\|x\| = 0 \iff x = 0$  und

$$\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|}.$$

**Beweis.** Nach dem Übungsblatt 1 genügt es  $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$  zu zeigen. Die linke Seite ist

$$(x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2,$$

und die rechte Seite ist  $(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$ . Die Behauptung folgt daher aus  $2|(x, y)| \leq 2\|x\|\|y\|$  und der Schwarzischen Ungleichung

$$2|(x, y)| \leq 2\|x\|\|y\|.$$

□

**Folgerung.** Die Funktion  $\|\cdot\| : V \rightarrow K$  definiert eine **Norm** auf dem  $K$ -Vektorraum  $V$ , d.h. es gilt: a)  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ , b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  für alle  $\lambda \in K$  und alle  $x \in V$ , c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in V$ .

## 1.3 Metrische Räume

Im Folgenden sei  $(K, <)$  ein fest gewählter archimedischer Körper (später dann immer der Körper der reellen Zahlen).

**Definition 1.9.** Sei  $X$  eine beliebige Menge. Ein Tupel  $(X, d)$  mit einer Abbildung

$$d: X \times X \rightarrow K, (x, y) \mapsto d(x, y)$$

heißt **metrischer Raum** (bezüglich  $K$ ), falls für die Abbildung  $d$  gilt:

- (1)  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$  und  $d(x, y) = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = y$  ist (Positivität).
- (2) Für alle  $x, y \in X$  ist  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie).
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  gilt für alle  $x, y, z \in X$  (Dreiecksungleichung).

Man nennt  $d(x, y)$  die **Abstandsfunktion** oder **Metrik** des metrischen Raumes  $(X, d)$ . In einem metrischen Raum gilt automatisch die folgende **untere Dreiecksungleichung**

$$|d(x, z) - d(x', z)| \leq d(x, x'),$$

denn die Dreiecksungleichung  $d(x, z) \leq d(x, x') + d(x', z)$  impliziert  $d(x, z) - d(x', z) \leq d(x, x')$ , und durch Vertauschung von  $x$  und  $x'$  folgt daraus die Behauptung.

Ist  $\|\cdot\| : V \rightarrow K$  eine **Norm** auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$ , dann definiert  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine **Metrik** auf  $V$ . [Beachte  $d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$  sowie  $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ .]

Das für uns wichtigste Beispiel eines metrischen Raumes ist der archimedische Körper  $K$  selbst mit seiner Metrik  $d(x, y) = |x - y|$ . Ist  $K$  ein pythagoräischer Körper und ist  $\|\cdot\|$  die **Euklidische Norm** auf dem  $r$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $K^r$ , dann definiert

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

die sogenannte **Standardmetrik** auf  $V = K^r$ . Den so definierten metrischen Raum nennt man den  $r$ -dimensionalen **Euklidischen Raum**.

## 1.4 Folgen in metrischen Räumen

Fast alle Aussagen der Analysis bauen auf den in diesem Abschnitt erläuterten Konzepten auf. Wir beginnen mit dem Begriff einer Folge:

**Definition 1.10.** Sei  $X$  eine beliebige Menge. Eine **Folge in  $X$**  ist eine Abbildung

$$x: \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \rightarrow X.$$

Anschaulich läßt sich eine Folge als eine unendliche „Durchnumerierung“ von Elementen interpretieren. Dies wirkt sich auch auf die Notation aus: Statt einer Abbildungsbeziehung, also einer Auflistung der Art

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto x(0), \\ 1 &\mapsto x(1), \\ 2 &\mapsto x(2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

verwenden wir Indizierungen zur Numerierung der betroffenen Elemente von  $X$ , um die Folge zu beschreiben:

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Die Elemente  $x_0, x_1, x_2$ , etc. heißen die *Folglieder*, bzw. kurz die *Glieder* von  $x$ .

Bisher haben wir keine näheren Anforderungen an die Menge  $X$  gestellt. Wir nehmen jetzt an, daß  $X$  ein metrischer Raum ist. Wir wollen uns daher mit den Abständen zwischen Folgegliedern befassen und durch folgende Definition insbesondere ganz bestimmte Folgen behandeln:

**Definition 1.11.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  in  $(X, d)$  heißt **Cauchyfolge**, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  aus  $K$  eine natürliche Zahl  $N = N(\varepsilon)$  existiert, so daß für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$n, m \geq N \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

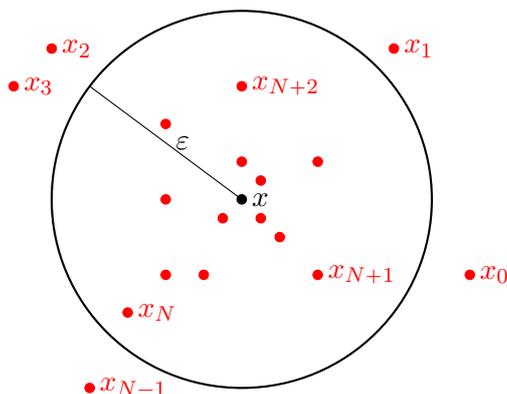
Zur anschaulichen Bedeutung. Zunächst taucht hierbei die Zahl  $\varepsilon$  auf. Diese steht intuitiv gesprochen für etwas „beliebig Kleines“. Man stellt sich dabei vor, dass egal wie klein  $\varepsilon$  gewählt wird, man trotzdem noch davon abhängende Zahlen  $N(\varepsilon)$  wie behauptet finden kann. Man kann, wenn man nur weit genug mit dem Index geht, den Abstand zwischen Folgegliedern unter jede noch so kleine Schranke drücken. Anschaulich besteht das Wesen einer Cauchyfolge also darin, daß die Abstände zwischen den Gliedern immer enger werden. Dies hängt substantiell von der gewählten Abstandsfunktion  $d$  ab.

**Definition 1.12.** Eine Folge  $x_0, x_1, \dots$  in  $(X, d)$  heißt **konvergent** gegen einen Grenzwert  $x \in X$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$  existiert, so daß für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  gilt  $d(x_n, x) < \varepsilon$ .

Zur Veranschaulichung. Wir fixieren ein  $\varepsilon > 0$  und betrachten die offene Kugel

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

um  $x$  mit dem Radius  $\varepsilon$ . Für eine gegen  $x$  konvergierende Folge  $x_k$  liegen alle  $x_k$  mit  $k \geq N(\varepsilon)$  innerhalb von  $B_\varepsilon(x)$ . Dies sind fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder der Folge, insbesondere immer unendlich viele. Dass immer nur endlich viele außerhalb einer beliebigen offenen  $\varepsilon$ -Kugel, also in  $X \setminus B_\varepsilon(x)$  liegen können, soll die folgende Graphik veranschaulichen:



Die Folgenglieder sammeln sich immer mehr in der Nähe von  $x$ . Egal wie klein  $\varepsilon$  wird, alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder haben einen Abstand zu  $x$ , der kleiner als  $\varepsilon$  ist.

Nun nennen wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  **beschränkt**, wenn es  $y \in X$  und ein  $C \in K$  gibt, so daß für alle  $n$  gilt  $d(x_n, y) \leq C$ . Diesen Begriff wollen wir im Folgenden mit den bekannten Begriffen der Cauchyfolge und der konvergenten Folge verknüpfen:

**Lemma 1.13.** *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

**Beweis.** Zunächst beweisen wir die erste Aussage. Gegeben sei eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit ihrem Grenzwert  $x \in X$ . Dann ist  $d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$  für alle  $n \geq N := N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ . Aus der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

folgt dann  $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$ , also  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , für alle  $n, m \geq N$ . Somit ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge.

Kommen wir nun zum zweiten Teil. Im Falle  $\varepsilon = 1$  gilt  $d(x_n, x_m) < 1$  für  $n, m \geq N$  nach der Cauchy-eigenschaft. Setze nun  $y := x_N$ . Dann ist

$$d(x_n, y) = d(x_n, x_N) < 1$$

für alle  $n \geq N$ . Also ist  $d(x_n, y) \leq C$  für  $C = \max(d(x_0, y), \dots, d(x_{N-1}, y), 1)$ . □

**Lemma 1.14.** *Sei  $x_0, x_1, \dots$  eine Folge in  $(X, d)$ , welche gegen  $x \in X$  und  $y \in X$  konvergiert. Dann ist  $x = y$ .*

**Beweis.** Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wäre  $d(x, y) > 0$ , dann existiert wegen der Konvergenz der Folge  $x_n$  für  $\varepsilon = d(x, y)$  ein  $N = N(\frac{1}{2}\varepsilon)$  aus  $\mathbb{N}_0$  so daß  $d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$  gilt für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ . Analog existiert ein  $M = M(\frac{1}{2}\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_n, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $n \geq M$ . Aufgrund der Dreiecksungleichung  $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$  und der Symmetrie  $d(x, x_n) = d(x_n, x)$  folgt für alle  $n \geq \max(N, M)$  dann

$$d(x, y) < \varepsilon .$$

Wir erhalten einen Widerspruch zu der Annahme  $\varepsilon = d(x, y)$ . Es folgt  $x = y$ .  $\square$

Dieses Lemma rechtfertigt es von dem Grenzwert einer Folge zu sprechen. Daß eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen Grenzwert  $x \in X$  konvergiert, wird häufig durch folgende Schreibweisen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

oder

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$$

angedeutet. Bei letzterer Schreibweise wird der Ausdruck  $n \rightarrow \infty$  teilweise auch über den Pfeil geschrieben oder ganz weggelassen.

Eine *Teilfolge* einer gegebenen Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Auswahl  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die ihrerseits auch wiederum eine Folge ist und deren Glieder allesamt auch in dieser Reihenfolge (jedoch mit beliebig großen Lücken dazwischen) Glieder der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind. Zum Beispiel ist die Folge

$$x_0, x_2, x_4, x_6, \dots$$

eine Teilfolge einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , bei der jedes zweite Glied (immer genau die mit ungeradem Index) herausgenommen wurde. Diesen Begriff wollen wir nun noch mit dem Begriff einer beschränkten Folge verknüpfen. Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent. So hat beispielsweise die Folge  $x_n = (-1)^n$  keinen Grenzwert, ist aber beschränkt.

## 1.5 Die geometrische Reihe

**Lemma 1.15.** *In einem archimedischen Körper  $K$  konvergiert im Fall  $|q| < 1$  jede geometrische Folge  $x_n = C \cdot q^n$  gegen Null.*

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach Annahme gilt  $|q| < 1$  und damit  $|q|^{-1} > 1$ . Somit gilt  $|q|^{-1} = 1 + x$  für ein  $x > 0$ . Die Ungleichung  $d(C \cdot q^n, 0) < \varepsilon$  ist dann äquivalent zu

$$C/\varepsilon < (1 + x)^n .$$

Man zeigt nun leicht die Bernoulli Ungleichung  $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$  mittels Induktion nach  $n$ . Im Fall  $n = 0$  und  $n = 1$  ist dies trivialerweise richtig. Ist  $n \geq 1$ , dann ist  $(1 + x)^n$  größer als  $1 + n \cdot x$  vermöge der Induktionsannahme  $(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot x$  wegen

$$(1 + x) \cdot (1 + x)^{n-1} \geq (1 + x) \cdot (1 + (n-1) \cdot x) = 1 + n \cdot x + (n-1) \cdot x^2 \geq 1 + n \cdot x .$$

Das Archimedische Axiom garantiert die Existenz einer natürlichen Zahl  $N > C/x\varepsilon - 1/x$ . Für alle  $n \geq N$  gilt dann

$$C/\varepsilon < 1 + n \cdot x .$$

Daraus folgt wegen  $1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$  das Lemma.  $\square$

Dies hat die folgende Konsequenz: Die *geometrische Reihe*  $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$  konvergiert für  $|q| < 1$  und hat in diesem Falle den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1}{1-q} .$$

Dies folgt aus der verallgemeinerten Binomialformel

$$(1 - q) \cdot (1 + q + \dots + q^n) = 1 - q^{n+1} ,$$

die man leicht durch Induktion nach  $n$  beweist. Diese Formel zeigt  $s_n - \frac{1}{1-q} = \frac{-q^{n+1}}{1-q}$ . Also

$$d\left(s_n, \frac{1}{1-q}\right) = C \cdot |q|^n$$

für  $C = |q/(1 - q)|$ . Aus dem letzten Lemma folgt daher  $d(s_n, \frac{1}{1-q}) < \varepsilon$  für  $n \geq N(\varepsilon)$ . Das zeigt die Behauptung. Analog zeigt man

**Lemma 1.16.** *In einem archimedischen Körper  $K$  konvergiert im Fall  $|q| < 1$  die geometrische Reihe  $s_n = \sum_{i=0}^n c \cdot q^i$  gegen den Grenzwert  $\frac{c}{1-q}$ .*

## 1.6 Vollständige metrische Räume

**Definition 1.17.** *Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in  $(X, d)$  konvergiert.*

**Definition 1.18.** *Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge aus  $(X, d)$  eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Ein folgenkompakter metrischer Raum ist automatisch vollständig, denn eine Cauchyfolge  $x_n$  konvergiert gegen  $x$  genau dann wenn eine Teilfolge der Cauchyfolge gegen  $x$  konvergiert. [Benutze  $d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m)$  für  $m \geq n$  und geeignete  $x_n$  aus der Teilfolge.]

**Definition 1.19.** *Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  heißt **abgeschlossen**, wenn gilt: Für jede in  $(X, d)$  konvergente Folge  $x_n \in A$  mit Grenzwert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$  gilt  $x \in A$ . Der Abschluß  $\bar{A}$  einer Menge  $A \subseteq X$  ist die kleinste abgeschlossene Menge in  $X$ , welche  $A$  enthält (d.h. der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen  $Y$  mit  $A \subseteq Y \subseteq X$ ).*

**Beispiel 1.20.** Die Intervalle  $[a, b]$ , oder auch  $[a, \infty) = \{x \in K \mid x \geq a\}$  oder  $(-\infty, a] = \{x \in K \mid x \leq a\}$ , sind abgeschlossene Teilmengen in  $K$ .

**Beweis.** Wir zeigen pars pro toto, daß für eine Folge  $x_0, x_1, \dots$  von Zahlen in  $K$  mit dem Grenzwert  $x$  gilt: Aus  $x_n \geq a$  für  $n = 0, 1, \dots$  folgt auch  $x \geq a$ . Dies sieht man wie folgt: Wäre  $x < a$ , dann gilt  $d(x_n, x) < \varepsilon$  für fast alle  $n$  bei Wahl von  $\varepsilon := a - x > 0$ . Andererseits gilt dann aber auch

$$d(x_n, x) = x_n - x = \underbrace{x_n - a}_{\geq 0} + \underbrace{a - x}_{=\varepsilon} \geq \varepsilon$$

für alle  $n$ , und wir erhalten einen Widerspruch. □

Analog sind Quader der Gestalt  $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_r, b_r]$  abgeschlossene Teilmengen des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^r$ .

**Satz 1.21.** Jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  eines vollständigen metrischen Raumes  $(X, d_X)$  versehen mit der eingeschränkten Metrik ist ein vollständiger metrischer Raum  $(A, d_X)$ .

**Beweis.** Sei  $x_n$  eine Cauchyfolge in  $(A, d)$ . Dann ist per Definition  $x_n$  eine Cauchyfolge in  $(X, d_X)$ . Nach Annahme existiert also  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  in  $(X, d_X)$ . Weil  $A$  abgeschlossen ist, gilt  $x \in A$ . Also ist per definitionem  $x \in A$  der Grenzwert von  $x_n$  in  $(A, d_X)$ . □

**Satz 1.22.** Jede folgenkompakte Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $(X, d_X)$  ist beschränkt und abgeschlossen in  $(X, d_X)$ .

**Beweis.** Wäre  $A$  nicht beschränkt, gäbe es eine Folge  $x_1, x_2, \dots$ , aus  $A$  mit  $d_X(x_0, x_n) \geq n$ . Für jede Teilfolge  $\tilde{x}_n$  einer solchen Folge gilt erst recht  $d_X(x_0, \tilde{x}_n) \geq n$ . Somit besäße  $x_n$  keine konvergente (und damit beschränkte) Teilfolge. Ein Widerspruch zur Folgenkompaktheit von  $A$ !

Um zu zeigen, daß  $A$  abgeschlossen ist, betrachten wir eine beliebige Folge  $x_n$  aus  $A$  mit Grenzwert  $x$  in  $(X, d_X)$ . Jede Teilfolge  $\tilde{x}_n$  der Folge  $x_n$  konvergiert gegen den Grenzwert  $x$  in  $(X, d_X)$ . Nach Annahme ist  $(A, d_X)$  folgenkompakt. Somit existiert eine konvergente Teilfolge  $\tilde{x}_n$  der Folge  $x_n$  mit einem Grenzwert  $a$  in  $A$ . Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes (Lemma 1.14) folgt  $x = a$ . Somit ist  $x \in A$ , d.h.  $A$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $(X, d_X)$ . □

## 1.7 Der Banachsche Fixpunktsatz

**Satz 1.23.** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $F: X \rightarrow X$  eine **kontraktive** Abbildung eines metrischen Raumes  $(X, d)$  in sich, d. h. es gebe eine reelle Konstante  $0 < \kappa < 1$  mit

$$d(F(x), F(y)) \leq \kappa \cdot d(x, y)$$

für alle  $x, y \in X$ . Dann besitzt die Abbildung  $F$  einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\xi \in X$ , d. h. einen eindeutig bestimmten Punkt  $x$  mit der Eigenschaft

$$\boxed{F(x) = x}.$$

**Beweis.** Wir müssen die Existenz und die Eindeutigkeit des Fixpunktes  $x \in X$  zeigen. Wir wollen mit der Eindeutigkeit beginnen. Seien  $\xi_1$  und  $\xi_2$  Fixpunkte von  $F$ . Aus der Kontraktivität  $d(F(\xi_1), F(\xi_2)) \leq \kappa \cdot d(\xi_1, \xi_2)$  und der Fixpunkteigenschaft  $F(\xi_i) = \xi_i$  folgt

$$d(\xi_1, \xi_2) \leq \kappa \cdot d(\xi_1, \xi_2).$$

Wäre  $\xi_1 \neq \xi_2$ , könnte man durch  $d(\xi_1, \xi_2) > 0$  teilen und erhielte den Widerspruch  $1 \leq \kappa$ .

Nun zeigen wir die Existenz. Wähle hierzu ein beliebiges  $x_0 \in X$  und setze  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = F^n(x_0)$  als Folge in  $(X, d)$ . Diese Folge ist beschränkt, denn

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= d(x_0, x_1) + d(F(x_0), F(x_1)) + \dots + d(F^{n-1}(x_0), F^{n-1}(x_1)) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \kappa d(x_0, x_1) + \dots + \kappa^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \kappa} = C. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, daß  $x_n$  eine Cauchyfolge ist. Sei hierzu o. B. d. A.  $m \geq n$ . Dann ist

$$d(x_n, x_m) = d(\underbrace{F^n(x_0)}_{=x_n}, \underbrace{F^n(x_{m-n})}_{=x_m}) \leq \kappa^n \underbrace{d(x_0, x_{m-n})}_{\leq C} \leq \kappa^n C.$$

Da  $\kappa^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , folgt daraus wie behauptet  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  falls  $m \geq n \geq N(\varepsilon)$ . Die Cauchyfolge  $x_n$  konvergiert gegen einen Grenzwert  $x \in X$ , denn nach Annahme ist  $(X, d)$  vollständig. Es bleibt die Fixpunkteigenschaft von  $x$  zu zeigen. Hierzu stellen wir fest

$$\begin{aligned} d(x, F(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, F(x)) \leq d(x, x_n) + \kappa d(x_{n-1}, x) \\ &\leq d(x, x_n) + d(x, x_{n-1}) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ , resp.  $n - 1 \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ . Ein solches  $n \in \mathbb{N}$  existiert natürlich. Also gilt  $d(x, F(x)) < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Mit anderen Worten: Es gilt  $d(x, F(x)) = 0$  bzw.  $F(x) = x$ .  $\square$

**Eine Anwendung.** Sei  $0 \leq \eta \leq 1/4$  gegeben in einem archimedischer Körper  $K$ . Wähle ein  $\varepsilon$  in  $K$  mit  $0 < \varepsilon \leq \eta$ . Dann ist

$$X = \left[ -\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]$$

abgeschlossen im metrischen Raum  $(K, d)$ . Versehen mit der Metrik  $d(x, y) = |x - y|$  von  $(K, d)$  ist  $(X, d)$  daher vollständig. Die Abbildung

$$F(x) = x^2 + \frac{1}{4} - \eta$$

ist kontraktiv auf  $X$  wegen  $d(F(x), F(y)) = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot d(x, y) \leq \kappa \cdot d(x, y)$ , denn es gilt  $|x + y| \leq \kappa := 2(\frac{1}{2} - \varepsilon) < 1$ . Weiterhin gilt  $F(x) = F(-x) \geq 0$  und  $F$  ist monoton auf  $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon]$  mit  $F(0) \geq 0$  und  $F(\frac{1}{2} - \varepsilon) = \frac{1}{2} - \varepsilon - (\mu - \varepsilon^2) \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ , denn  $0 < \varepsilon < 1$  impliziert  $\varepsilon^2 \leq \varepsilon \leq \mu$ . Folglich ist

$$F: X \rightarrow X$$

wohldefiniert wegen  $F(X) = F([0, \frac{1}{2} - \varepsilon]) \subseteq X$ . Dies zeigt

**Lemma 1.24.** *Ein vollständiger archimedischer Körper ist pythagoräisch.*

**Beweis.** Nach der Bemerkung auf Seite 5 genügt es zu zeigen: Jedes  $\eta \in (0, \frac{1}{4})$  ist ein Quadrat in  $K$ . Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz eines Fixpunktes  $x \in X$  von  $F$ . Wegen  $F(x) = x \implies (x - \frac{1}{2})^2 = \eta$  gilt daher  $\eta = \xi^2$  für ein  $\xi$  in  $K$ .  $\square$

## 1.8 Quaderschachtelung

Sei  $K$  ein pythagoräischer Körper. Im Euklidischen Standardraum  $K^r$  der Dimension  $r$  gelten die **Schachtelungs-Ungleichungen**

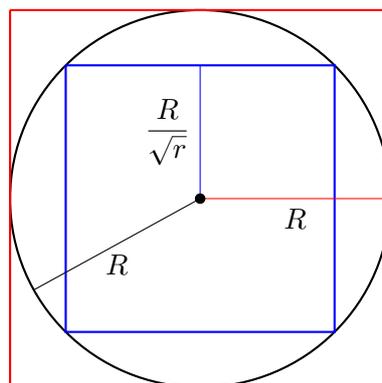
$$\max_{i=1, \dots, r} |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{r} \cdot \max_{i=1, \dots, r} |x_i|$$

für einen Vektor  $x = (x_1, \dots, x_r) \in K^r$ . Beachte:  $\max_{i=1, \dots, r} |x_i|$  definiert auch eine Norm auf  $K^r$ , die sogenannte **Quadernorm**. Die Formel läßt sich durch Quadrieren beweisen, denn

$$\max_{i=1, \dots, r} |x_i|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_r|^2 \leq r \cdot \max_{i=1, \dots, r} |x_i|^2$$

gilt aus offensichtlichen Gründen.

Was bedeutet dies anschaulich? Die Norm  $\|\cdot\|$  gibt den Abstand eines Punktes von Null an. Wir betrachten die „Kugel“ aller Punkte mit Abstand kleinergleich  $R$  vom Ursprung. Diese Kugel  $B$  liegt in einem Quader mit der Seitenlänge  $2R$  eingrenzen. Umgekehrt liegt der Quader mit der Seitenlänge  $\sqrt{r}^{-1} \cdot 2R$  in der Kugel  $B$



Sei nun

$$Q = [c, d]^r = \underbrace{[c, d] \times \cdots \times [c, d]}_{r \text{ mal}}$$

ein würfelförmiger Quader im  $K^r$  mit der Seitenlänge  $l(Q) = |d - c|$ .

**Lemma 1.25.** Für beliebige Punkte  $\xi, \eta$  aus einem Quader  $Q$  mit der Seitenlänge  $l(Q)$  gilt

$$d(\xi, \eta) \leq l(Q)^r \sqrt{r}.$$

**Beweis.** Durch Verschieben des Quaders kann man o. B. d. A. annehmen  $\eta = 0$ . Dann gilt  $d(\xi, \eta) = \|\xi\| \leq \sqrt{r} \cdot \max_{i=1, \dots, r} |\xi_i|$  und es genügt zu zeigen  $|\xi_i| \leq |d - c|$ . Wegen  $c \leq \xi_i \leq d$  und  $c \leq 0 \leq d$  folgt aber  $|\xi_i| \leq \max(d, -c) \leq d - c = |d - c|$ .  $\square$

**Satz 1.26 (Bolzano-Weierstraß).** Jede beschränkte Folge im Euklidischen Raum  $(K^r, \|\cdot\|)$  besitzt eine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist.

**Beweis.** Ist die Folge  $x_0, x_1, \dots$  beschränkt in  $K^r$ , so liegt sie in einer Kugel und damit auf Grund der Schachtelungsungleichungen in einem geeigneten Quader

$$Q = [a, b]^r = \underbrace{[a, b] \times \cdots \times [a, b]}_{r \text{ mal}}$$

Hierbei ist  $[a, b] = \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$  ein geeignetes Intervall in  $K$ . Man teilt nun den Quader in  $2^r$  Teilquader, indem man jedes der Intervalle  $[a, b]$  in zwei gleich lange Teile unterteilt. In mindestens einem der Teilquader müssen unendlich viele Folgenglieder sein. Dies liefert eine Teilfolge  $x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, \dots$ , die vollständig in einem der Teilquader liegt. Dieses Verfahren setzt man iterativ fort und erhält eine absteigende Folge von Quadern:

$$Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \cdots$$

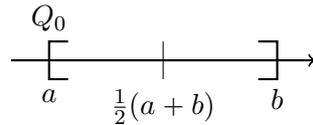
Hierbei ist  $Q = Q_0$ .

In jedem Quader  $Q_k$  liegt jeweils vollständig die Folge  $x_{k,0}, x_{k,1}, x_{k,2}, \dots$  (wobei  $x_{0,k} = x_k$ ). Diese ordnet man nun in einer Tabelle an:

$$\begin{array}{cccc} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \cdots \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

*Diagonalfolgentrick.* Man bildet jetzt die Diagonalfolge  $\xi_k := x_{k,k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und betrachtet die dadurch neu entstandene Folge  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ . Dies ist eine Teilfolge der ursprünglichen Folge  $x_0, x_1, \dots$ , und es gilt  $\xi_i \in Q_n$  für alle  $i \geq n$ . Aus  $i, j \geq n$  folgt daher  $\xi_i, \xi_j \in Q_n$ .

Die Seitenlänge der Quader  $Q_n$  halbiert sich mit jeder Unterteilung. Wir zeigen dies obdA im Fall  $n = 0$ . Es gilt  $l(Q_0) = |b - a|$ .



Wie in der Zeichnung angedeutet sei  $Q_1$  eine der beiden Teilhälften von  $Q_0$ . Wegen

$$l(Q_0) = \begin{cases} |b - \frac{a+b}{2}| = |b - a|/2, & \text{falls } Q_1 = [\frac{a+b}{2}, b] \\ |\frac{a+b}{2} - a| = |b - a|/2, & \text{falls } Q_1 = [a, \frac{a+b}{2}] \end{cases}$$

ist die Länge von  $Q_1$  in beiden möglichen Fällen  $l(Q_1) = l(Q_0)/2$ , halbiert sich also bei der Teilung. Durch Induktion folgt daher  $l(Q_n) = 2^{-n} \cdot l(Q_0) = 2^{-n} \cdot |b - a|$ .

Aus Lemma 1.25 folgt für beliebige Punkte  $\xi_i, \xi_j \in Q_n$  dann die Ungleichung

$$d(\xi_i, \xi_j) \leq \frac{C}{2^n}.$$

für die Konstante  $C = |b - a|^r \sqrt{r}$ .

Wir erstellen ein vorläufiges Resümee: Wir haben eine Teilfolge  $\xi_0, \xi_1, \dots$  der gegebenen Folge  $x_0, x_1, \dots$  konstruiert, so daß für eine feste positive Konstante  $C$  in  $K$  gilt

$$d(\xi_i, \xi_j) \leq \frac{C}{2^n},$$

für alle  $i, j \geq n$ . Wir wollen daraus ableiten, daß  $\xi_i$  eine Cauchyfolge ist. Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  müssen wir zeigen, daß ein  $N = N(\varepsilon)$  existiert mit

$$d(\xi_i, \xi_j) < \varepsilon$$

für  $i, j \geq N(\varepsilon)$ . Dazu genügt es  $N \in \mathbb{N}$  wählen zu können mit der Eigenschaft

$$\frac{C}{2^n} < \varepsilon$$

für  $n \geq N$ . Damit folgt der Satz aus dem Lemma 1.15 in dem man  $q = 1/2$  setzt.  $\square$

**Satz 1.27.** *In einem pythagoräischen Körper ist jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge eine Cauchyfolge. Ebenso gilt dies für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen.*

**Beweis.** Wir betrachten nur den Fall der monoton wachsenden, nach oben durch eine Konstante  $C$  beschränkten Folgen. Der umgekehrte Fall ist völlig analog. Aus der Monotonie

$$x_n \leq x_{n+1}$$

der Folge folgt  $x_n \in [x_0, C]$  für alle  $n$ . Also ist die Folge  $x_n$  beschränkt. Nach Satz 1.26 existiert also eine Teilfolge  $\tilde{x}_n$ , welche eine Cauchyfolge ist. Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert also ein  $\tilde{N}(\varepsilon)$  mit

$$d(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \tilde{x}_i - \tilde{x}_j < \varepsilon$$

für  $i, j \geq \tilde{N}(\varepsilon)$ , wobei o. B. d. A.  $i \geq j$  angenommen werden kann. Wähle nun  $N = N(\varepsilon) \geq \tilde{N}(\varepsilon)$  so groß, daß

$$x_j \geq \tilde{x}_{\tilde{N}(\varepsilon)}$$

gilt für alle  $j \geq N = N(\varepsilon)$ . Die Existenz von  $N$  folgt aus der Monotonie der Folge  $x_j$  und der Tatsache, daß  $\tilde{x}_i$  eine Teilfolge von  $x_i$  ist. Dies impliziert ausserdem

$$x_i \leq \tilde{x}_i$$

für alle  $i$ . Für  $i \geq j \geq N(\varepsilon)$  gilt daher

$$d(x_i, x_j) = x_i - x_j \leq \tilde{x}_i - \tilde{x}_{\tilde{N}(\varepsilon)} < \varepsilon$$

nach Wahl von  $N(\varepsilon)$  und der Cauchy-eigenschaft der Teilfolge  $\tilde{x}_i$ . □

## 1.9 Reelle Zahlen

Konvergente Folgen sind immer Cauchyfolgen, wie wir gesehen haben, aber nicht jede Cauchyfolge ist konvergent. So ist  $\mathbb{Q}$  ein archimedischer Körper, aber nicht vollständig. Das nun der Zeitpunkt, an dem wir zu den reellen Zahlen übergehen wollen.

**Definition 1.28.** *Wir fixieren einen archimedischen vollständigen Körper und nennen ihn **Körper der reellen Zahlen**. Wir bezeichnen diesen Körper mit  $\mathbb{R}$ . Folgen in  $\mathbb{R}$  nennen wir **reelle Folgen**.*

Als vollständiger archimedischer Körper ist  $\mathbb{R}$  pythagoräisch. Da  $\mathbb{R}$  per Definition vollständig ist, sind in  $\mathbb{R}$  also die Begriffe der Cauchyfolge und der konvergenten Folge äquivalent. Eine solche Folge ist immer beschränkt und hat einen eindeutigen Grenzwert. Liegt die Folge in einem abgeschlossenen Intervall  $I$ , so ist auch ihr Grenzwert in  $I$  enthalten. Weiterhin enthält jede reelle beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge und jede monoton beschränkte Folge konvergiert. Zuletzt besitzt noch jede nach oben beschränkte Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}$  eine kleinste obere Schranke  $\sup(X)$ . Für den Beweis der letzten Aussage sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen. Aus den Sätzen Satz 1.22, Satz 1.21 und Satz 1.26 folgt schliesslich die fundamentale Aussage

**Satz 1.29.** *Eine Teilmenge  $A$  des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^r$  ist folgenkompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Wir wollen nun die Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche betrachten. Nach dem Archimedischen Axiom ist jede nicht negative reelle Zahl  $y$  kleiner als eine geeignete natürliche Zahl  $n$ . Da nur endlich viele natürliche Zahlen vor  $n$  liegen, kann man obdA  $n - 1 \leq y < n$  annehmen. Dann liegt  $x = y - (n - 1)$  im Intervall  $I_0 = [0, 1)$ . Teilt man  $I$  in 10 Teilintervalle, folgt analog

$$x \in I_1 = \left[ \frac{a_0}{10}, \frac{a_0 + 1}{10} \right)$$

für ein  $a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Unterteilt man  $I_1$  wieder in 10 Teilintervalle und fährt so fort, erhält man eine Approximation von  $x$  durch Zahlen

$$x_n := \frac{a_0}{10} + \frac{a_1}{100} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^n}$$

mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$  und

$$x_n \leq x \leq x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Es folgt  $d(x, x_n) \leq \frac{1}{10^n}$ . Die Folge der  $x_n$  konvergiert also gegen die gegebene Zahl  $x$ . Man nennt dies die **Dezimalbruchentwicklung** von  $x$  und schreibt bekanntlich

$$x \text{ „}=\text{“ } 0, a_0 a_1 a_2 \dots$$

Umgekehrt definiert jede solche Dezimalbruchentwicklung eine reelle Zahl im Intervall  $[0, 1]$ , denn die dadurch definierte Folge rationaler Zahlen

$$x_n := \frac{a_0}{10} + \frac{a_1}{100} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^n}$$

ist monoton wachsend

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Es gilt  $x_n \in [0, 1]$ , denn  $x_n \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1 - 10^{-n} \leq 1$ . Da die Folge  $x_n$  monoton wachsend und nach oben beschränkt ist (hier durch 1), konvergiert sie nach Satz 1.27 und ihr Grenzwert  $x$  liegt im Intervall  $I = [0, 1]$ . Beachte  $x \in [0, 1)$  außer im Fall  $0, 9999\dots$

## 1.10 Infimum und Supremum

**Definition 1.30.** Sei  $X \subseteq \mathbb{R}$  eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge. Man nennt

$$Y := \{y \in \mathbb{R} \mid x \leq y \text{ für alle } x \in X\}$$

die Menge der **oberen Schranken** von  $X$ . Analog ist im Falle einer nach unten beschränkten Menge die Menge ihrer **unteren Schranken** definiert.

Es bezeichne  $Y^c := \mathbb{R} \setminus Y$  das Komplement einer Teilmenge  $Y$  von  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 1.31.** Für die Menge  $Y$  der oberen Schranken einer nach oben beschränkten nicht leeren Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  gelten folgende Eigenschaften:

(1)  $Y \neq \emptyset$

(2)  $Y$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ .

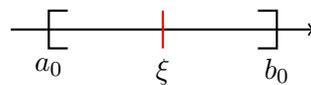
(3) Für  $\xi \in Y^c$  gilt  $\xi \leq y$  für alle  $y \in Y$ . Insbesondere gilt für konvergente Folgen  $a_n \in Y^c$  mit Limes  $a$  daher  $a \leq y$  für alle  $y \in Y$  (denn  $(-\infty, y]$  ist abgeschlossen).

**Beweis.** (1) gilt nach Annahme. Zum Beweis von (2) sei eine Folge  $y_n \in Y$  gegeben mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Für  $x \in X$  gilt  $x \geq y_n \in [x, \infty)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich ist  $y \in [x, \infty)$  und damit  $y \in Y$  (denn  $y \geq x$  gilt für alle  $x \in X$ ). (3)  $\xi \in Y^c$  bedeutet  $\xi \notin Y$ . Daraus folgt nach Definition von  $Y$ , daß es ein  $x \in X$  gibt mit  $\xi < x$ . Ebenfalls nach Definition von  $Y$  gilt aber  $x \leq y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Es folgt  $\xi \leq x < y$  und damit  $\xi \leq y$ .  $\square$

Betrachte nun ein  $a_0 \notin Y$  und ein  $b_0 \in Y$ . Ein solches  $b_0$  existiert nach (1) und  $a_0$  existiert wegen  $X \neq \emptyset$  (wähle z. B.  $a_0 = x - 1$  für ein  $x \in X$ ):



Setze nun durch Halbieren des Intervalls  $\xi := \frac{a_0 + b_0}{2}$



und führe eine Fallunterscheidung durch: Im Falle  $\xi \in Y$  setze  $b_1 := \xi$  und  $a_1 := a_0$ , sonst  $a_1 := \xi$  und  $b_1 := a_0$ . Iteriert man dies für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so erhält man

$$Y^c \ni a_n \leq b_n \in Y$$

und nach Konstruktion gilt

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0.$$

Somit ist  $a_0, a_1, \dots$  eine monoton steigende, nach oben beschränkte Folge und analog  $b_0, b_1, \dots$  eine monoton fallende nach unten beschränkte Folge. Beide Folgen konvergieren also nach Satz 1.27. Setze nun  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Dann gilt

$$a_0 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a \leq b \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_0$$

wegen  $a_j < b_k$  für alle  $j, k \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $a \leq b_k$  für alle  $k$ , und im Limes  $k \rightarrow \infty$  schliesslich  $a \leq b$ . Wir behaupten nun  $a = b$ . Zum Beweis fixieren wir uns ein  $\varepsilon > 0$ . Es gilt

$$0 \leq b - a \leq \underbrace{|b - b_n|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|b_n - a_n|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \varepsilon$$

für  $n \geq N(\varepsilon)$ . Dies folgt aus den Konvergenzaussagen  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ ,  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$  sowie  $|b_n - a_n| = 2^{-n}|b_0 - a_0| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . wie im Beweis von Satz 1.26. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt werden kann, folgt daraus  $a = b$ .

Auf Grund der obigen Intervall Schachtelungen gilt weiterhin

$$(4) \quad a \leq y \text{ für alle } y \in Y,$$

denn  $a_n \in Y^c$  impliziert  $a_n \leq y$  für alle  $y \in Y$ , und somit  $a \leq y$  nach (3). Aus (2) folgt wegen  $b_n \in Y$  dann

$$(5) \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in Y.$$

Schliesslich gilt

(6) Es gibt keinen Punkt  $\eta \in Y$  mit  $\eta < b$ ,

denn anderenfalls wäre  $a \leq \eta < b$  nach (4). Dies würde implizieren  $a < b$ , also einen Widerspruch zu  $a = b$ . Dies zeigt (6), und damit ist  $b$  die kleinste obere Schranke von  $X$  nach (5) und (6). Dies zeigt

**Satz 1.32.** *Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}$  besitzt eine kleinste obere Schranke. Diese nennt man das **Supremum**  $\sup(X)$  der Menge  $X$ .*

Für die Punkte  $a_n$  gilt nach Konstruktion  $a_n < a$ , und daher wegen  $a = \sup(X)$  also  $a_n \notin Y$ . Da  $a_n$  somit keine obere Schranke von  $X$  ist, gibt es ein  $x_n \in X$  mit  $a_n \leq x_n$ . Aus der Ungleichung  $a_n \leq x_n \leq a = \sup(X)$  folgt wegen  $a_n \rightarrow a$  dann recht einfach  $x_n \rightarrow a$ . Es folgt

**Zusatz.** *Es gibt eine Folge in  $X$ , welche gegen  $a = \sup(X)$  konvergiert.*

Oft wird das Supremum formal auch für den Fall einer nach oben unbeschränkten Menge definiert. In diesem Falle schreibt man

$$\sup(X) = +\infty$$

für den Fall, daß die Menge  $X$  nach oben nicht beschränkt ist.

Völlig analog zum Supremum einer nach oben beschränkten Menge, existiert das **Infimum** einer nach unten beschränkten Menge  $\inf(X) = -\sup(-X)$ .

**Satz 1.33.** *Jede nach unten beschränkte nichtleere Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  besitzt ein Infimum  $\inf(X)$ , eine größte untere Schranke von  $X$ .*

Sei nun  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$  eine beliebige monoton steigende Folge reeller Zahlen. Dann ist entweder  $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  nach oben beschränkt und die Folge  $x_n$  konvergiert monoton gegen  $\sup(X) \in \mathbb{R}$ . Oder die Menge  $X$  ist nicht nach oben beschränkt und  $\sup(X) = +\infty$ . In diesem Fall konvergiert die Folge gegen  $+\infty$  in folgendem Sinn: *Für alle  $C > 0$  existiert ein  $N = N(C)$  so daß für alle  $n \geq N$  gilt  $x_n > C$ .*

**Prinzip der monotonen Konvergenz.** Diese Betrachtung kann man wie folgt zusammen fassen. Für  $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  gilt: *Jede (!) monoton steigende Folge  $x_n$  mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  besitzt einen Grenzwert  $x$  in  $\mathbb{R}^+$  im obigen Sinne.* Wir schreiben auch

$$x_n \nearrow x$$

oder benutzen häufig die Schreibweise  $x = \sup_n x_n = \sup x_n$  für diesen Grenzwert im erweiterten Sinn. Analog existiert immer ein Grenzwert  $\inf x_n$  in  $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  für eine monoton fallende Folge  $x_n \in \mathbb{R}^-$ .



# 2 Stetige Abbildungen

## 2.1 Stetigkeit

**Definition 2.1.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung

$$f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$$

heißt **stetig**, wenn für jede Folge  $x_n$  in  $X$  gilt:

$$\boxed{x_n \rightarrow \xi \implies f(x_n) \rightarrow f(\xi)} .$$

Anders formuliert:  $f$  führt konvergente Folgen in konvergente Folgen über und vertauscht mit Limesbildung, d.h.

$$\boxed{f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)} .$$

Ein Spezialfall. Gibt es für  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine feste Konstante  $C > 0$  mit

$$d_Y(f(x), f(\xi)) \leq C \cdot d_X(x, \xi) \quad , \quad \forall x, \xi \in X ,$$

nennt man  $f$  **Lipschitz-stetig** und  $C$  nennt man **Lipschitz-Konstante**. Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist stetig, denn für  $x_n \rightarrow \xi$  gilt  $d_X(x_n, \xi) < \varepsilon/C$  für genügend großes  $n$  und damit  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon$ . Jede kontraktive Abbildung ist Lipschitz-stetig für  $C = \kappa < 1$ . Weitere Beispiele für Lipschitz-stetige Abbildungen sind:

**Beispiel 2.2.** (1) Die identische Abbildung  $\text{id}_X: (X, d_X) \rightarrow (X, d_X)$  definiert als  $\text{id}_X(x) = x$  ( $C$  ist hier 1).

(2) Die konstante Funktion  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  definiert durch  $f(x) = y_0$  für einen festen Punkt  $y_0 \in Y$  ( $C$  ist hier beliebig).

(3) Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge. Sei  $f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} (d(x, a))$  die **Abstandsfunktion**  $f: (X, d_X) \rightarrow Y = \mathbb{R}$  zu  $A$ . Beachte  $d(x, A) = 0 \iff x \in A$ , da  $A$  abgeschlossen ist. Es gilt  $d_Y(f(x), f(\xi)) \leq C \cdot d_X(x, \xi)$  für  $C = 1$ . [Für  $\xi \in X$  und reelles  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $d(\xi, a) < d(\xi, A) + \varepsilon$ . Für alle  $x \in X$  gilt  $d(x, a) \geq d(x, A)$ , also  $f(x) - f(\xi) \leq d_X(x, a) - d_X(\xi, a) + \varepsilon \leq d_X(x, \xi) + \varepsilon$  wegen der unteren Dreiecksungleichung des metrischen Raumes  $(X, d_X)$ . Aus der Symmetrie in  $x, \xi$  folgt  $d_Y(f(x), f(\xi)) = |f(x) - f(\xi)| \leq d_X(x, \xi) + \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  und damit die Behauptung.]

(4) Jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$  zwischen Euklidischen Räumen.

(5) Insbesondere also der Spezialfall von (4) einer Koordinatenprojektionen

$$p_i: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_i(x_1, \dots, x_r) = x_i$$

für  $i = 1, \dots, r$ .

*Beweis der Lipschitz-Stetigkeit im Fall (4).* Es gilt  $d_{\mathbb{R}^s}(L(x), L(\xi)) = \|L(x) - L(\xi)\|_{\mathbb{R}^s} = \|L(x - \xi)\|_{\mathbb{R}^s}$  für lineare Abbildungen  $L(y) = (\sum_{j=1}^r L_{ij}y_j)_{i=1, \dots, s}$ . Wir suchen eine Konstante  $C$  mit der Eigenschaft

$$\|L(y)\|_{\mathbb{R}^s} \leq C \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^r} .$$

Es gilt  $\|L(y)\|_{\mathbb{R}^s} \leq \sqrt{s} \cdot \max_{i=1, \dots, s} |L(y)_i|$  wegen der Quaderungleichung. Es folgt  $\|L(y)\|_{\mathbb{R}^s} \leq r\sqrt{s} \cdot \max_{i=1, \dots, s; j=1, \dots, r} |L_{ij}| \cdot \max_{j=1, \dots, r} |y_j| \leq C \|y\|_{\mathbb{R}^r}$  für  $C = r\sqrt{s} \cdot \max_{i,j} |L_{ij}|$ . Diese Wahl von  $C$  ist nicht optimal, aber offensichtlich gilt

**Lemma 2.3.** Für  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen  $L: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$  ist die reelle Zahl

$$\|L\| = \sup_{v \neq 0} \left( \frac{\|L(v)\|_{\mathbb{R}^s}}{\|v\|_{\mathbb{R}^r}} \right) \leq C < \infty$$

wohldefiniert und  $\geq 0$ , und es gilt

$$\|L(v)\| \leq \|L\| \cdot \|v\|$$

mit  $\|L\| = 0$  genau dann wenn  $L = 0$ .

**Bemerkung 2.4.** Eine beliebige Funktion  $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^r$  schreibt sich in der Form

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_r(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r.$$

Die reellwertigen Funktionen  $f_i = p_i \circ f$  sind wegen (5) als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig (siehe Korollar 2.7). Umgekehrt definieren je  $r$  stetige reellwertige Funktionen  $f_1(x), \dots, f_r(x)$  auf  $(X, d)$  eine stetige Funktion  $(X, d) \rightarrow \mathbb{R}^r$ , denn  $x_n \rightarrow x$  impliziert  $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$  in  $\mathbb{R}$ , und wegen  $d(f(x_n), f(x)) \leq \sqrt{r} \cdot \max_{i=1, \dots, r} |f_i(x_n) - f_i(x)|$  auch  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  in  $\mathbb{R}^r$ .

**Definition 2.5.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

heißt **stetig im Punkt**  $\xi$  von  $X$ , wenn für jede Folge  $x_n$ , die in  $(X, d_X)$  gegen  $\xi$  konvergiert, die Bildfolge  $f(x_n)$  in  $(Y, d_Y)$  gegen  $f(\xi)$  konvergiert.

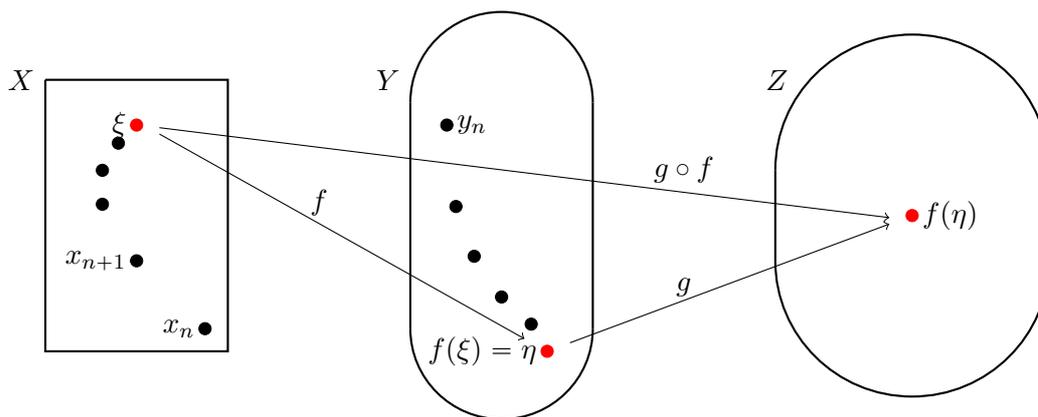
Offensichtlich ist  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  stetig genau dann, wenn  $f$  in jedem Punkt  $\xi$  von  $X$  stetig ist.

**Satz 2.6.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  stetig im Punkt  $\xi \in X$  und sei  $g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$  stetig im Punkt  $\eta = f(\xi) \in Y$ . Dann ist die Komposition

$$(g \circ f): (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$$

stetig im Punkt  $\xi \in X$ .

**Beweis.** Zunächst eine Veranschaulichung



Nach Voraussetzung ist  $f$  stetig, also gilt für gegen  $\xi$  konvergente Folgen  $x_n$

$$y_n := f(x_n) \rightarrow \eta = f(\xi).$$

Da  $g$  stetig ist, gilt wegen der Konvergenz von  $y_n$  gegen  $\eta$

$$g(y_n) = (g \circ f)(x_n) \rightarrow g(\eta) = (g \circ f)(\xi).$$

Es folgt  $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(\xi)$ , und damit ist  $g \circ f$  stetig im Punkt  $\xi$ . □

**Korollar 2.7.** Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

## 2.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Lemma 2.8.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine stetige Abbildung. Ist  $A$  abgeschlossen in  $(Y, d_Y)$ , dann ist das Urbild  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $(X, d_X)$ .

**Beweis.** Sei  $x_n \rightarrow x$  eine in  $(X, d_X)$  konvergente Folge mit  $x_n \in f^{-1}(A)$ . Zu zeigen ist  $x \in f^{-1}(A)$ . Da  $f$  stetig ist, konvergiert die Bildfolge  $y_n = f(x_n) \rightarrow y = f(x)$ . Wegen  $y_n = f(x_n) \in A$ , und da  $A$  abgeschlossen ist, folgt  $y \in A$  und damit  $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(A)$ . □

**Lemma 2.9.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  eine stetige Abbildung. Ist  $(X, d_X)$  folgenkompakt, dann ist auch das Bild  $f(X)$  versehen mit der Einschränkung der Metrik  $d_Y$  folgenkompakt.

**Beweis.** Sei  $y_n$  eine Folge in  $f(X)$ . Dann gilt  $y_n = f(x_n)$  für eine Urbildfolge  $x_n \in X$ . Nach Annahme gibt es eine in  $(X, d_X)$  konvergente Teilfolge  $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt, daß die Teilbildfolge  $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n)$  in  $(f(X), d_Y)$  gegen  $f(\tilde{x})$  konvergiert.  $\square$

**Satz 2.10.** Auf einem folgenkompakten metrischen Raum  $(X, d_X)$  hat jede stetige reellwertige Funktion

$$f: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$$

ein beschränktes Bild, und das Maximum und das Minimum von  $f$  werden auf  $X$  als Funktionswerte angenommen.

**Beweis.** Das Bild  $f(X)$  ist folgenkompakt in  $\mathbb{R}$  bezüglich der Euklidischen Metrik wegen Lemma 2.9. Nach Satz 1.22 ist dann  $f(X)$  beschränkt und abgeschlossen. Insbesondere gilt daher

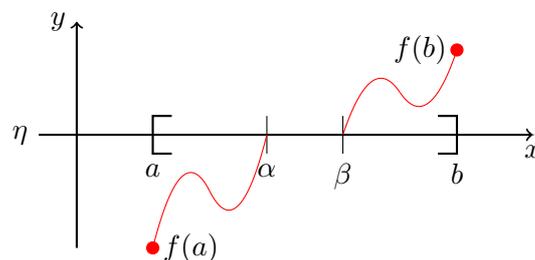
$$\sup(f(X)) = \max(f(X))$$

und analog  $\inf(f(X)) = \min(f(X))$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.3 Der Zwischenwertsatz

**Satz 2.11.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) \leq f(b)$ . Dann gibt es für jedes  $\eta \in [f(a), f(b)]$  ein  $\alpha \in [a, b]$  mit  $f(\alpha) = \eta$ .

**Beweis.** Betrachte die nichtleere beschränkte Menge  $A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \eta\}$ . Sei  $\alpha := \sup(A)$  und oBdA  $\alpha \neq b$ . Dann gilt  $x > \alpha \implies f(x) > \eta$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt  $f(\alpha) \geq \eta$ , da eine monoton fallend gegen  $\alpha$  konvergente Folge von Punkten  $x \in [a, b]$  existiert mit  $f(x) > \eta$ . Andererseits gibt es eine monoton steigende Folge von Punkten aus  $A$ , welche gegen das Supremum  $\alpha$  von  $A$  konvergiert. Aus Stetigkeitsgründen und der Definition von  $A$  folgt damit  $f(\alpha) \leq \eta$ . Beides zusammen ergibt  $f(\alpha) = \eta$ .



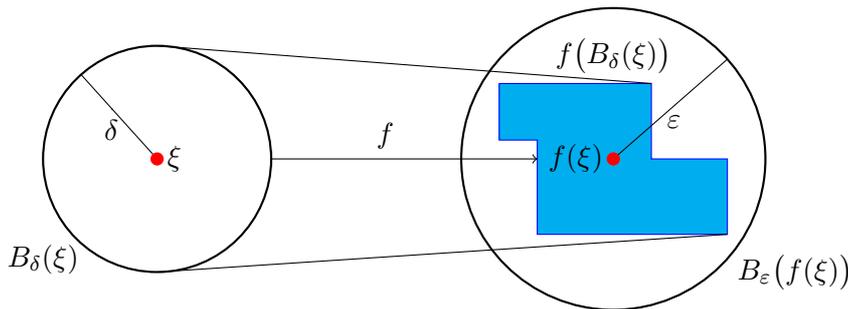
$\square$

## 2.4 Das $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium

**Satz 2.12.** Gegeben sei eine Funktion  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  und ein  $\xi \in X$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig in  $\xi$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so daß gilt<sup>1</sup>

$$d_X(x, \xi) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon.$$

**Veranschaulichung.** Betrachte die Kugeln  $B_\delta(x) = \{x \in X \mid d_X(x, \xi) < \delta\}$ . Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  soll es ein  $\delta > 0$  geben, so daß zu jedem  $x \in X$ , dessen Abstand zu  $\xi$  kleiner als  $\delta$  ist, der Abstand von  $f(x)$  zu  $f(\xi)$  kleiner als  $\varepsilon$  ist.  $f$  soll also die Kugel  $B_\delta(\xi)$  um  $\xi$  vom Radius  $< \delta$  in die Kugel  $B_\varepsilon(f(\xi))$  um  $f(\xi)$  vom Radius  $< \varepsilon$  abbilden



**Beweis.** Zunächst zeigen wir, daß das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium die Stetigkeit impliziert. Ist  $x_n$  eine Folge in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \xi$ , dann existiert zu jedem  $\tilde{\varepsilon} > 0$  ein  $N = N(\tilde{\varepsilon})$  mit  $d_X(x_n, \xi) < \tilde{\varepsilon}$  für  $n \geq N$ . Für  $d_X(x_n, \xi) < \delta = \delta(\varepsilon)$  gilt nach Annahme

$$d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon.$$

Wählt man  $\tilde{\varepsilon}$  gleich  $\delta$ , folgt  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon$  für  $n \geq N(\delta)$ . Das heißt  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

Zum Beweis der Gegenrichtung nehmen wir an  $f$  sei stetig im Punkt  $\xi$  und das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium wäre nicht erfüllt im Punkt  $\xi$ . Dann würde gelten

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad (d_X(x, \xi) < \delta \text{ und } d_Y(f(x), f(\xi)) \geq \varepsilon_0).$$

Wähle nun  $\delta = 1/n$ . Dann existiert ein  $x_n$  mit  $d_X(x_n, \xi) < 1/n$  und  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon_0$ . Aus  $d_X(x_n, \xi) < 1/n$  folgt  $x_n \rightarrow \xi$ . Die Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $\xi$  zeigt  $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$  im Widerspruch zu  $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon_0$ .  $\square$

**Folgerung.** Eine Funktion  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  ist stetig genau dann, wenn gilt

$$\boxed{\forall \xi \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad (d_X(x, \xi) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon)}.$$

<sup>1</sup>Intuitiv besagt dies: Kleine Änderungen verursachen unter  $f$  nur kleine Wirkungen. Ändert man  $\xi$  nur wenig ab, dann variiert auch  $f(\xi)$  nur wenig.

## 2.5 Gleichmässige Stetigkeit

**Definition 2.13.** Eine Abbildung  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  heisst **gleichmässig stetig** auf  $(X, d_X)$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass für alle  $\xi, x \in X$  gilt:

$$d_X(x, \xi) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon.$$

oder

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \xi \in X \forall x \in X (d_X(x, \xi) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon)}.$$

**Satz 2.14 (Satz von Heine).** Ist  $(X, d_X)$  folgenkompakt, dann gilt: Jede stetige Funktion auf  $(X, d_X)$  ist gleichmässig stetig.

**Beweis.** Wäre die Aussage falsch, dann würde gelten<sup>2</sup>

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists \xi \in X \exists x \in X (d_X(x, \xi) < \delta \text{ und } d_Y(f(x), f(\xi)) \geq \varepsilon_0).$$

Fixiere ein solches  $\varepsilon_0 > 0$ . Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  und  $\delta := n^{-1}$  existieren daher  $\xi_n, x_n \in X$  mit  $d_X(\xi_n, x_n) < n^{-1}$  und  $d_Y(f(\xi_n), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$ . Bei sorgfältiger Auswahl von Teilfolgen kann man dann durch Übergang zu Teilfolgen zusätzlich die Konvergenz annehmen

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

(Man geht dazu zu einer konvergenten Teilfolge  $\tilde{\xi}_n$  über, und streicht die entsprechenden Folgenglieder auch in der Folge  $x_n$ . In dieser Teilfolge geht man nochmals durch durch Streichen von Folgengliedern zu einer konvergenten Teilfolge  $\tilde{x}_n$  über. Die entsprechenden Glieder streicht man auch aus der Teilfolge  $\tilde{\xi}_n$ .  $d_X(\xi_n, x_n) < n^{-1}$  gilt dann auch für die Teilfolgen.) Wegen  $d_X(\xi_n, x_n) < n^{-1}$  und

$$0 \leq d_X(x, \xi) \leq \underbrace{d_X(x, x_n)}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{d_X(x_n, \xi_n)}_{< n^{-1} < \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{d_X(\xi_n, \xi)}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

für  $n \geq N(\varepsilon)$  und gegebenes  $\varepsilon > 0$  folgt  $d_X(x, \xi) = 0$  im Limes  $n \rightarrow \infty$ . Also  $x = \xi$ . Damit folgt wegen  $f(x) = f(\xi)$  aus der Dreiecksungleichung

$$0 < \varepsilon_0 \leq d_Y(f(\xi_n), f(x_n)) \leq \underbrace{d_Y(f(\xi_n), f(\xi))}_{< \frac{1}{2}\varepsilon_0} + \underbrace{d_Y(f(x_n), f(x))}_{< \frac{1}{2}\varepsilon_0} < \varepsilon_0.$$

Ein Widerspruch! [Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist die rechte Seite  $< \varepsilon_0$ , falls  $n \geq N_1(\frac{1}{2}\varepsilon_0)$  resp.  $n \geq N_2(\frac{1}{2}\varepsilon_0)$  wegen der Konvergenz der Folgen  $f(\xi_n) \rightarrow f(\xi)$  und  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .]  $\square$

<sup>2</sup>Negiert man eine Aussage, vertauschen sich die Quantoren  $\forall$  und  $\exists$ . Die Negierung der Implikation  $(A \implies B)$  liefert die Aussage  $(A$  gilt und ebenso die Negierung von  $B)$ .

## 2.6 Reellwertige stetige Funktionen

**Definition 2.15.** Für einen metrischen Raum  $(X, d_X)$  bezeichne

$$C(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } (X, d_X)\}$$

den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $X$ .

**Lemma 2.16.** Seien  $f, g \in C(X)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $f + g, \lambda \cdot g, f \cdot g$  stetig auf  $X$ , d.h.  $C(X)$  bildet eine  $\mathbb{R}$ -Algebra.

**Beweis.** Wir beweisen das Lemma lediglich für das Produkt  $f \cdot g$ , da die anderen Rechnungen analog durchführbar sind. Sei  $\xi \in X$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(\xi)g(\xi)| \\ &\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq c_1} \cdot \underbrace{|g(x) - g(\xi)|}_{< \varepsilon/c_1} + \underbrace{|g(\xi)|}_{\leq c_2} \cdot \underbrace{|f(\xi) - f(x)|}_{< \varepsilon/c_2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  [denn  $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon/c_1$  gilt für  $d_X(x, \xi) < \delta_1$ ;  $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon/c_2$  gilt für  $d_X(x, \xi) < \delta_2$ ;  $|f(x) - f(\xi)| < 1$  gilt für  $d_X(x, \xi) < \delta_3$ . Für  $d_X(x, \xi) < \delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  ist damit also  $|f(x)| \leq 1 + |f(\xi)| =: c_1$ .] Alles zusammen zeigt, daß  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$  stetig im Punkt  $\xi$  ist.  $\square$

**Korollar 2.17.** Polynome sind stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 2.18.** Sei  $f: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{f(x)}: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist definiert und stetig auf  $(X, d_X)$ .

**Beweis.** Für gegebenes  $\xi \in X$  und  $\varepsilon > 0$  gilt

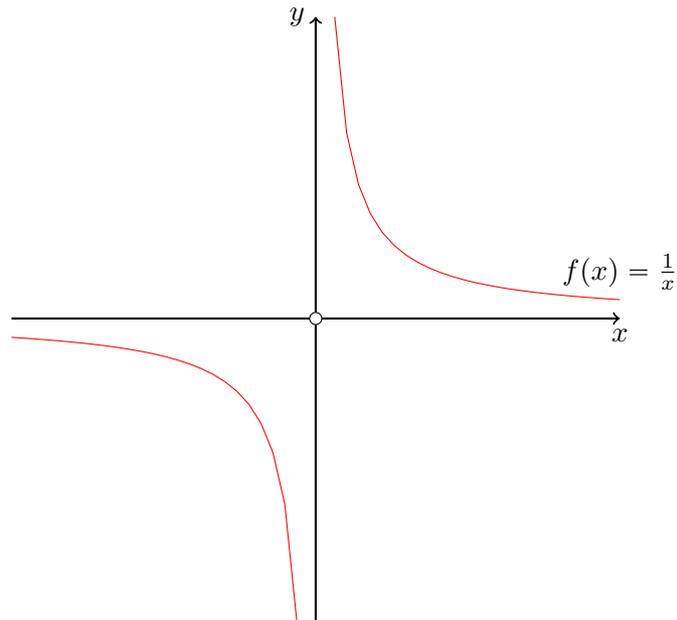
$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(\xi)} \right| = \left| \frac{f(\xi) - f(x)}{f(x)f(\xi)} \right|.$$

Aus  $|f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{3}|f(\xi)| =: \varepsilon_1 > 0$  für  $d(X, \xi) < \delta_1$  (Stetigkeit von  $f$ ) folgt  $|f(x)| > \frac{2}{3}|f(\xi)|$  vermöge der unteren Dreiecksungleichung, oder  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \left| \frac{3}{2f(\xi)} \right|$ . Also

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(\xi)} \right| < \varepsilon,$$

falls  $|f(x) - f(\xi)| < \frac{2}{3}|f(\xi)|^2 \cdot \varepsilon$ . Letzteres gilt aber, falls  $d_X(x, \xi)$  klein genug ist.  $\square$

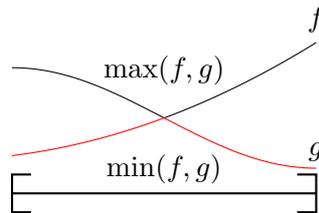
**Beispiel 2.19.**  $f(x) = \frac{1}{x}$  erfüllt diese Bedingung für  $X = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und definiert damit eine stetige (allerdings nicht gleichmäßig stetige) Funktion auf  $\mathbb{R}^*$



Wir wollen uns nun mit dem Minimum und Maximum von Funktionen auseinandersetzen. Seien also  $f, g: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen auf einem metrischen Raum  $(X, d_X)$ . Hierzu definieren wir

$$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$$

und analog für das Minimum.



Die stetigen Funktionen aus  $C(X)$  definieren einen **Funktionsverband** auf  $X$ , d.h.  $C(X)$  ist ein reeller Vektorraum von Funktionen auf  $X$  und es gilt

**Satz 2.20.**  $\min(f, g)$  und  $\max(f, g)$  sind in  $C(X)$  für  $f, g \in C(X)$ .

**Beweis.** Es genügt, daß mit  $f$  auch  $|f|$  (als Komposition der stetiger Abbildungen  $f$  und  $|\cdot|$ ) stetig ist, denn  $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$  und  $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$ .  $\square$

## 2.7 Gleichmässige Konvergenz

**Definition 2.21.** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reellwertiger Funktionen  $f_n: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  **konvergiert punktweise** gegen eine Grenzfunktion  $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für jedes  $x \in X$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

**Definition 2.22.** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_n: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  **konvergiert gleichmässig** gegen eine Grenzfunktion  $f: (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so daß für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in X$  gilt<sup>3</sup>

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt nicht. Wir geben später Beispiele im Zusammenhang mit dem Satz von Dini.

**Die Supremumsnorm.** Für beschränkte reellwertige Funktionen  $f$  auf  $X$  definiert man

$$\|f\| := \sup_{\xi \in X} |f(\xi)|.$$

Offensichtlich gilt  $\|f\| = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  gilt. Ebenso trivial ist die Eigenschaft  $\|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$  für reelle Konstanten  $\lambda$ . Für zwei beschränkte reellwertige Funktionen  $f, g$  auf  $X$  ist aber auch  $f + g$  beschränkt auf  $X$  und es gilt

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

denn  $|f(\xi) + g(\xi)| \leq |f(\xi)| + |g(\xi)| \leq \|f\| + \|g\|$  gilt für alle  $\xi \in X$ . Somit definiert  $\|\cdot\|$  eine **Norm**, und  $d(f, g) = \|f - g\|$  dann eine Metrik auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller beschränkten Funktionen auf  $X$ .

Ist  $(X, d_X)$  ein folgenkompakter metrischer Raum, dann ist jede stetige Funktion beschränkt auf  $X$ . Für stetige Funktionen  $f \in C(X)$  gilt sogar

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

und  $d(f, g) = \|f - g\|$  sei die eingeschränkte Metrik auf  $C(X)$ . Offensichtlich gilt dann

**Korollar 2.23.**  $(C(X), d)$  ist mit  $d(f, g) := \|f - g\|$  ein metrischer Raum. Eine Folge von Funktionen  $f_n \in C(X)$  konvergiert gegen  $f \in C(X)$  in  $(X, d)$  genau dann, wenn  $f_n(x)$  gleichmässig auf  $(X, d_X)$  gegen die Grenzfunktion  $f(x)$  konvergiert.

<sup>3</sup>Das bedeutet  $\|f - f_n\| < \varepsilon$  für die nachfolgend definierte Supremumsnorm.

## 2.8 Vollständigkeit von $C(X)$

**Satz 2.24.** Sei  $(X, d_X)$  folgenkompakt. Dann ist  $(C(X), d)$  versehen mit der Supremums-Metrik  $d(f, g) = \|f - g\|$  ein vollständiger metrischer Raum<sup>4</sup>.

**Beweis.** Sei  $f_n$  eine Cauchyfolge in  $C(X)$ . Dann gilt  $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$  für  $n, m \geq N(\varepsilon)$ . Wir konstruieren eine Grenzfunktion  $f$ . Für jeden fixierten Punkt  $x \in X$  betrachten wir dazu die reelle Folge  $y_n = f_n(x)$ . Wegen  $|y_n - y_m| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$  für  $n, m \geq N(\varepsilon)$  ist  $y_n$  eine reelle Cauchyfolge. Ihr Limes  $y_n \rightarrow y$  existiert und wir setzen  $f(x) := y \in \mathbb{R}$ .

1) Wir behaupten:

$$\|f - f_n\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq N(\tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Ist nämlich  $x \in X$  ein beliebiger Punkt, dann gibt es ein von  $x$  abhängiges  $m_0 = m_0(\frac{1}{2}\varepsilon, x)$  mit  $|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $m \geq m_0(\frac{1}{2}\varepsilon, x)$  wegen  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Dies liefert für  $n, m \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$  und  $m \geq m_0(\varepsilon, x)$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \underbrace{\|f_m - f_n\|}_{< \frac{1}{2}\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Das gewählte  $m$  ist aber beliebig, und kann daher (angepasst an das jeweilige  $x$ ) beliebig groß gewählt werden! Es folgt damit wie behauptet  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$ .

2) Wir behaupten:  $f \in C(X)$ . Betrachte hierzu  $x_1, x_2 \in X$ . Dann gilt für geeignetes  $n$  und  $\delta$  sowie  $d_X(x_1, x_2) < \delta$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \underbrace{|f(x_1) - f_n(x_1)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_1) - f_n(x_2)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_2) - f(x_2)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \varepsilon.$$

[Ist  $d_X(x_1, x_2) < \delta = \delta(\frac{1}{3}\varepsilon, f_n)$ , dann gilt  $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ , da  $f_n$  stetig und damit gleichmäßig stetig auf  $(X, d_X)$  ist. Ausserdem haben wir für beliebiges  $x$  (insbesondere also für  $x = x_1, x_2$ ) gezeigt  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$  für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon/3)$ . Wählt man daher ein  $n \geq N(\varepsilon/6)$ , dann folgt für alle  $x_1, x_2$  mit  $d_X(x_1, x_2) < \delta$ , wobei  $\delta$  jetzt nur noch von  $\varepsilon$  abhängt, die Ungleichung  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .] Das heißt  $f$  ist stetig auf  $X$ . Wegen  $\|f - f_n\| < \varepsilon$  für  $n \geq N(\frac{1}{2}\varepsilon)$  konvergiert die Funktionenfolge  $f_n(x)$  gleichmäßig gegen  $f(x)$ . Dies zeigt die Cauchy-Vollständigkeit von  $C(X)$ .  $\square$

## 2.9 Monotone Folgen stetiger Funktionen

Sei  $X$  eine Menge und  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Die **charakteristische** Funktion  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch  $\chi_A(x) = 1$  für  $x \in A$  und  $\chi_A(x) = 0$  für  $x \notin A$ . Man sagt, eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  hat **Träger** in  $A$ , falls für alle  $x \notin A$  gilt  $f(x) = 0$ . Für jede Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Funktion  $\chi_A \cdot f$  Träger in  $A$ .

<sup>4</sup>Dies überträgt sich verbatim auf den Raum  $C(X, \mathbb{R}^N)$  aller Funktionen auf  $X$  mit Werten in  $\mathbb{R}^N$ .

Sei nun  $A \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raumes  $(X, d)$ . Dann ist die Abstandsfunktion  $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$  aus Beispiel 2.2(3) eine stetige Funktion auf  $(X, d)$  mit  $d(x, A) = 0 \iff x \in A$ .

**Beispiel 2.25.** Sei  $f(x) \geq 0$  eine nichtnegative stetige Funktionen auf  $X$ . Nach Satz 2.20 sind dann auch die Funktionen

$$f_n(x) = \max(0, 1 - d(x, A))^n \cdot f(x)$$

stetig auf  $X$ . Wegen  $f(x) \geq 0$  definieren die  $f_n(x)$  eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen auf  $X$ , welche daher gegen eine Grenzfunktion  $g(x) \geq 0$  auf  $X$  konvergiert. Wegen  $0 \leq \max(0, 1 - d(x, A)) < 1$  für  $x \notin A$  und  $0 \leq \max(0, 1 - d(x, A)) = 1$  für  $x \in A$  konvergiert diese Folge wegen Lemma 1.15 punktweise gegen die Grenzfunktion  $g = \chi_A \cdot f$

$$C(X) \ni f_n(x) \searrow \chi_A(x) \cdot f(x) \quad , \quad A \text{ abgeschlossen in } X, f \geq 0 \text{ in } C(X) .$$

**Bemerkung.** Ein gleichmässiger Limes von stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum  $(X, d)$  definiert eine stetige Grenzfunktion (Satz 2.24). Das obige Beispiel 2.25 zeigt, daß die *analoge Aussage für monotone Limiten stetiger Funktionen falsch ist*. [Sei dazu  $X = [0, 1]$ ,  $f = 1$  sowie  $A = [c, 1] \subset X$  für  $0 < c \leq 1$ . Dann ist der Grenzwert  $\chi_A$  keine stetige Funktion auf  $X$ , denn der Limes  $\lim_n \chi_A(x_n) = 0$  für eine linksseitige Folge  $x_n \rightarrow c$  (d.h. mit  $x_n < c$ ) und ist verschieden von  $\chi_A(c) = 1$ ]. Der folgende Satz von Dini zeigt, daß eine monotone Folge stetiger Funktion  $f_n$  auf einem kompakten metrischen Raum  $X$  genau dann eine stetige Grenzfunktion  $f$  besitzt, wenn die Folge  $f_n$  gleichmässig auf  $X$  gegen  $f$  konvergiert.

**Satz 2.26 (Satz von Dini).** Sei  $(X, d)$  folgenkompakt. Sei  $f_n \searrow f$  eine monoton fallende punktweise konvergente Folge von reellwertigen Funktionen  $f_n$  auf  $X$ . Ist die Grenzfunktion  $f$  stetig auf  $X$ , konvergieren die  $f_n$  gleichmässig auf  $X$  gegen  $f$ .

**Beweis.** Ersetzt man  $f_n$  durch  $f_n - f$ , kann oBdA  $f = 0$  angenommen werden. Wir nehmen an die Folge  $f_n$  sei monoton fallend. Wäre die Konvergenz nicht gleichmässig, gäbe es ein  $\varepsilon_0 > 0$  so daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in X$  existiert mit

$$0 < \varepsilon_0 \leq f_n(x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

a) Da  $X$  folgenkompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge oBdA annehmen  $x_n \rightarrow \xi$ . Wegen  $f_n(\xi) \rightarrow f(\xi) = 0$  gibt es dann ein  $n_0$  mit

$$0 \leq f_{n_0}(\xi) < \varepsilon_0/2 .$$

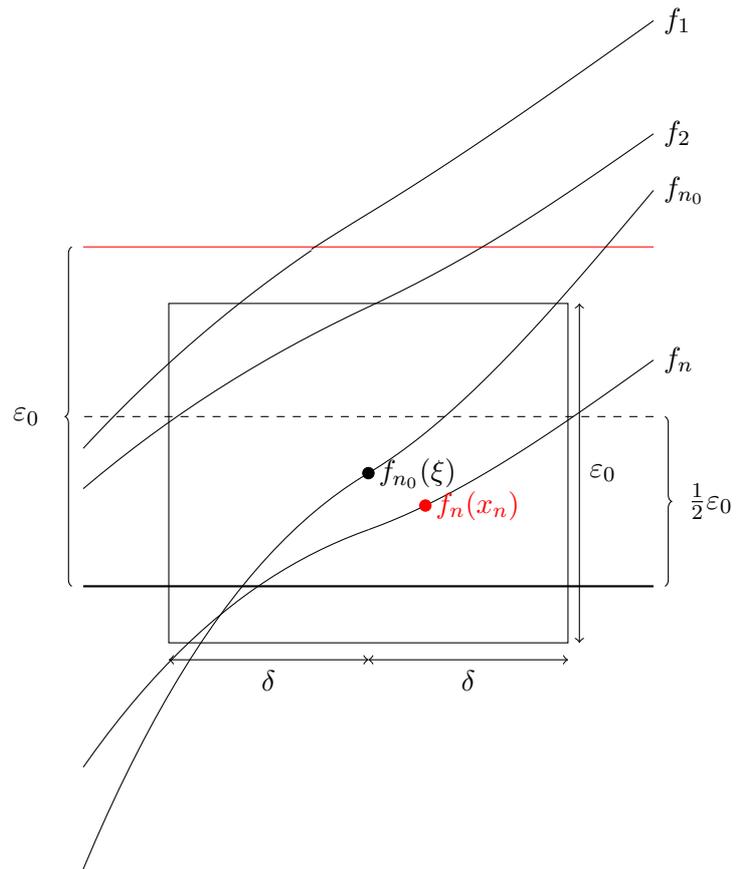
b) Wegen der Stetigkeit von  $f_{n_0}(x)$  im Punkt  $\xi$  gilt  $f_{n_0}(x_n) - f_{n_0}(\xi) < \varepsilon_0/2$  für alle  $n \geq n_1$ , bei geeigneter Wahl von  $n_1 > n_0$  wegen  $x_n \rightarrow \xi$ . Also

$$0 \leq f_{n_0}(x_n) = (f_{n_0}(x_n) - f_{n_0}(\xi)) + f_{n_0}(\xi) < \varepsilon_0, \quad (\forall n \geq n_1) .$$

c) Aus der Monotonie der Folge  $f_m(x)$  ergibt sich dann

$$0 \leq f_m(x_n) \leq f_{n_0}(x_n) < \varepsilon_0, \quad (\forall m \geq n_1) .$$

Für  $m = n$  und beliebiges  $n \geq n_1$  steht dies im Widerspruch zu  $\varepsilon_0 \leq f_n(x_n)$ . □



# 3 Integration

## 3.1 Vorbemerkungen

Es ein klassisches Problem der Mathematik für eine reellwertige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $X = \mathbb{R}$  die Fläche zwischen der gegebenen Funktion  $f$  und der  $x$ -Achse, das sogenannte Integral  $\int_X f(x)dx$ , zu bestimmen. Dies setzt voraus, daß dieser Flächenbegriff überhaupt sinnvoll für die Funktion  $f$  definiert werden kann; und wenn er definiert werden kann, ist zu klären ob diese Definition eindeutig ist. Dazu machen wir gewisse Einschränkungen an die Menge  $B(X)$  der zugelassenen Funktionen  $f$  und diskutieren zuerst axiomatische Eigenschaften, die ein solches Integral besitzen sollte.

Wir nehmen dazu an,  $B(X)$  sei ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum reellwertiger Funktionen auf  $X = \mathbb{R}$ , d.h. es gelte  $f + g \in B(X)$  und  $\lambda \cdot f \in B(X)$  für alle  $f, g \in B(X)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Das gesuchte Integral

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

fassen wir auf als eine Abbildung  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  auf und erwarten folgende Eigenschaften

1.  **$\mathbb{R}$ -Linearität:**  $I(f + g) = I(f) + I(g)$  und  $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. **Monotonie:**  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
3. **Normierung:** Es gilt  $I(\chi_A) = 1$  für das Intervall  $A = [0, 1]$ .
4. **Translationsinvarianz:** Für  $f \in B(X)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist das Translat  $g(x) = f(x + x_0)$  in  $B(X)$  und es gilt  $I(f) = I(g)$ .

Die erste Eigenschaft impliziert  $I(0) = 0$ . Man sollte berücksichtigen, daß im allgemeinen  $f$  keine positive Funktion sein wird. Hat  $f$  negative Werte, zerlegt man  $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$  in die **positive** Funktion  $f_+ = \max(f, 0)$  und die **negative** Funktion  $f_- = \min(f, 0)$  mit  $I(f) = I(f_+) - I(-f_-)$ . Der Wert  $I(f)$  wird im allgemeinen verschieden sein von  $I(|f|) = I(f_+) + I(-f_-)$ . In der Tat, aus  $-f_-(x) \geq 0$  und der Monotonie folgt  $I(-f_-) \geq 0$ . Wegen der Linearität ist dann aber  $I(f_-) = -I(-f_-)$  eine negative Zahl. Das heisst, die Fläche unter der  $x$ -Achse wird negativ sein. Bei dem gesuchten Begriff des Flächeninhaltes handelt es sich daher um den Begriff einer **orientierten Fläche**. Für Funktionen mit positiven Werten sollte das gesuchte Integral positive Werte besitzen. Dies erklärt Eigenschaft 2, denn  $g - f \geq 0$  impliziert  $I(g) - I(f) = I(g - f) \geq 0$  und damit die Monotonie  $I(g) \geq I(f)$ . Aus der Tatsache,

daß die Eigenschaft 1 und 2 das Integral höchstens bis auf eine Normierungskonstante festlegen können, erklärt sich das Axiom 3. Aber die ersten drei Eigenschaften können  $I$  nicht eindeutig festlegen, wie man sofort an einem Beispiel sieht. Für jeden beliebigen Punkt  $x_0 \in [0, 1]$  ist die Abbildung  $f \mapsto I(f) := f(x_0)$  linear, monoton und erfüllt  $I(\chi_{[0,1]}) = 1$ , dagegen nicht die Eigenschaft 4. Dies erklärt das letzte Axiom als weitere natürliche und vor allem geometrisch plausible Annahme.

Besitzt  $f$  keinen kompakten Träger, kann nicht erwartet werden, daß das Integral  $I(f)$  definiert ist. Fixiert man ein kompaktes Intervall  $A \subset \mathbb{R}$  und betrachtet nur Funktionen  $f$  im Unterraum  $B_A(X) \subseteq B(X)$  der Funktionen mit Träger in  $A$ , liefert Eigenschaft 1 und 2 sowie die triviale Abschätzung  $-\|f\| \cdot \chi_A \leq f \leq \|f\| \cdot \chi_A$  dann  $-\|f\| \cdot I(\chi_A) \leq I(f) \leq \|f\| \cdot I(\chi_A)$ . d.h. die **Boxungleichung**<sup>1</sup> für die **Supremumsnorm**  $\|f\|$  von  $f$  auf  $A$

$$\boxed{|I(f)| \leq I(\chi_A) \cdot \|f\|} \quad \text{für alle } f \in B_A(X).$$

Es folgt

**Lemma 3.1.** *Sind alle Funktionen in  $B_A(X)$  beschränkt, definiert die Einschränkung eines Integrals  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  mit den obigen Eigenschaften 1.-4. eine **stetige**  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung*

$$I : B_A(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

wenn  $B_A(X)$  mit der Supremums-Metrik  $d(f, g) = \|f - g\|$  versehen wird.

## 3.2 Treppenfunktionen

**Definition 3.2.** *Ein **Verband** auf  $X$  ist ein Raum  $B(X)$  von Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgender Eigenschaft: Für alle  $f, g \in B(X)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  sind auch  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$  und  $|f|$  in  $B(X)$ . D.h.  $B(X)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und es gilt  $f, g \in B(X) \implies \min(f, g) \in B(X)$  und  $\max(f, g) \in B(X)$  (siehe den Beweis von Satz 2.20).*

Ist  $B(X)$  ein Verband auf  $X$ , dann definiert für  $A \subseteq X$  der Unterraum  $B_A(X) \subseteq B(X)$  aller Funktionen  $f \in B(X)$  mit Träger in  $A \subseteq X$  erneut einen Verband auf  $X$ .

**Definition 3.3.** *Eine reellwertige Funktion  $f$  auf  $X = \mathbb{R}$  nennt man **Treppenfunktion**, wenn es endliche viele reelle Zahlen  $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_m$  gibt mit 1) Die Funktion hat Träger im Intervall  $[\xi_0, \xi_m]$  und 2) Die Einschränkung  $f|_{(\xi_{i-1}, \xi_i)}$  von  $f$  auf die offenen Teilintervalle  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$  ist eine konstante Funktion für alle  $i = 1, \dots, m$ .*

Jede solche Treppenfunktion ist eine endliche  $\mathbb{R}$ -Linearkombination von charakteristischen Funktionen von **abgeschlossenen** Intervallen (\*)

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x) + \sum_{j=0}^m d_j \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_j]}(x)$$

<sup>1</sup>Ist  $f$  nicht beschränkt, gilt  $\|f\| = +\infty$ . Die Box-Ungleichung bleibt richtig in  $\mathbb{R}^+$  unter der Annahme  $I(\chi_A) > 0$ .

für gewisse reelle Konstanten  $c_i, d_j$ . Die Umkehrung gilt natürlich auch. Jede solche Linearkombination ist eine Treppenfunktion. Die Menge der Stützstellen  $\xi_0, \dots, \xi_m$  einer gegebenen Treppenfunktion  $f$  ist natürlich dahingehend willkürlich, daß man jederzeit  $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$  durch eine beliebige grössere endliche Menge von Stützstellen ersetzen kann.

**Lemma 3.4.** *Der Raum  $T(\mathbb{R})$  aller Treppenfunktionen auf  $X = \mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum<sup>2</sup> und wird erzeugt von den charakteristischen Funktionen der kompakten Intervalle  $A \subset \mathbb{R}$ . Der Raum  $T(\mathbb{R})$  definiert einen Verband auf  $\mathbb{R}$ .*

**Beweis.** Offensichtlich ist jedes skalare Vielfache einer Treppenfunktionen wieder eine Treppenfunktion. Seien  $f, g \in T(\mathbb{R})$  Treppenfunktion. Durch Vergrössern der Menge der Stützstellen kann man oBdA annehmen, daß sowohl  $f$  als auch  $g$  Träger in  $[\xi_0, \xi_m]$  haben und konstant sind auf den Teilintervallen  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$  für  $i = 1, \dots, m$ . Dann ist natürlich klar, daß auch  $f + g$  eine Treppenfunktion ist mit Träger in  $[\xi_0, \xi_m]$  und Stützstellen  $\xi_0, \dots, \xi_m$ . Dies zeigt,  $T(\mathbb{R})$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wegen (\*) bilden die charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  aller kompakten Intervalle  $A \subset \mathbb{R}$  ein Erzeugendensystem des Vektorraums  $T(\mathbb{R})$ . Um zu sehen daß  $T(\mathbb{R})$  ein Verband ist, beachte daß für Treppenfunktionen wie in (\*) gilt

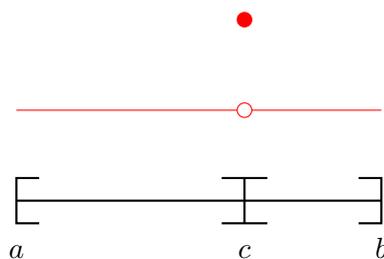
$$|f(x)| = \sum_{i=1}^m |c_i| \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x) + \sum_{j=0}^m b_j \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_j]}(x)$$

für die Konstanten  $b_j := |d_j + c_{i-1} + c_i| - |c_{i-1}| - |c_i|$ . □

**Achtung.** Die charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  bilden zwar ein Erzeugendensystem von  $T(\mathbb{R})$ , aber keine Basis. Beispiele für lineare Abhängigkeiten zwischen den erzeugenden charakteristischen Funktionen sind etwa

$$\chi_{[a,b]} = \chi_{[a,c]} + \chi_{[c,b]} - \chi_{[c,c]}.$$

für  $a \leq c \leq b$ . Beachte auch  $\chi_{(c,d)} = \chi_{[c,d]} - \chi_{[c,c]} - \chi_{[d,d]}$ .



Die im vorigen Abschnitt erläuterten Eigenschaften 1.-4. legen nun auf  $T(\mathbb{R})$  ein eindeutig bestimmtes Integral  $I$  fest:

**Lemma 3.5.** *Es gibt eine eindeutig bestimmte  $\mathbb{R}$ -lineare monotone normierte und translationsinvariante Abbildung  $I : T(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Verband der Treppenfunktion  $T(\mathbb{R})$ .*

<sup>2</sup>Wie man leicht sieht ist  $T(\mathbb{R})$  unendlich dimensional.

**Beweis.** Da  $T(\mathbb{R})$  als Vektorraum von den Funktionen  $\chi_A$ ,  $A = [a, b]$  erzeugt wird, genügt zum Beweis der *Eindeutigkeit* zu zeigen

$$I(\chi_A) = |b - a| \quad , \quad A = [a, b] .$$

Wegen der Translationsinvarianz von  $I$  ist oBdA  $a = 0$ , zu zeigen ist dann  $I(\chi_{[0,b]}) = b$ . Für  $b = 1$  ist dies klar. Für  $b = 0$  beachte  $0 \leq \sum_{i=1}^n \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i}{n}]} \leq \chi_{[0,1]}$ . Aus der Translationsinvarianz  $I(\chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i}{n}]}) = I(\chi_{[0,0]})$  und der Monotonie folgt daher  $0 \leq I(\chi_{[0,0]}) \leq 1/n$  für alle  $n$ , also  $I(\chi_{[a,a]}) = I(\chi_{[0,0]}) = 0$  für alle  $a$ . Aus  $\sum_{i=1}^n \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} = \chi_{[0,1]} + \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i}{n}]}$  und der Translationsinvarianz folgt damit  $I(\chi_{[0, \frac{1}{n}]}) = 1/n$ . Analog zeigt man  $I(\chi_{[0,b]}) = b$  für alle rationalen Zahlen  $m = \frac{m}{n} \geq 0$ . Jede reelle Zahl  $b > 0$  kann durch rationale Zahlen  $\nu, \mu$  beliebig gut angenähert werden mit  $\nu < b < \mu$  (Dezimalbruchentwicklung von  $b$ ). Die Monotonie von  $I$  liefert die Abschätzung  $\nu \leq I(\chi_{[0,b]}) \leq \mu$ , und im Limes  $\nu \rightarrow b, \mu \rightarrow b$  folgt  $I(\chi_{[0,b]}) = b$ .

Die *Existenz* von  $I$  zeigt man durch den Ansatz

$$I(f) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot |\xi_i - \xi_{i-1}|$$

für  $f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x) + \sum_{j=0}^m d_j \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_j]}(x)$  in  $T(\mathbb{R})$ . Offensichtlich ändert sich dieser Wert nicht bei Hinzunahme von weiteren Stützstellen  $\xi_i$ . Damit ist  $I(f)$  wohldefiniert und hängt nur von der Funktion  $f \in T(\mathbb{R})$  ab. Man zeigt durch Hinzunahme von Stützstellen sofort die behaupteten Eigenschaften 1.-4.  $\square$

### 3.3 Das reelle Standardintegral

**Definition 3.6.** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **stückweise stetig**, wenn es endlich viele reelle Stützpunkte  $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_m$  gibt mit: 1)  $f$  hat Träger im Intervall  $[\xi_0, \xi_m]$  und 2) die Einschränkungen  $f|_{(\xi_{i-1}, \xi_i)}$  von  $f$  auf die offenen Teilintervalle  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$  lassen sich zu stetigen Funktionen  $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}$  der abgeschlossenen Intervalle  $A_i = [\xi_{i-1}, \xi_i]$  fortsetzen.

Können die Funktionen  $f_i$  konstant gewählt werden, ist  $f$  eine Treppenfunktion. Also ist der Raum der Treppenfunktion  $T(\mathbb{R})$  ein Unterraum des Raumes  $CT(\mathbb{R})$  aller stückweise stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Wie im Beweis von Lemma 3.4 zeigt man, daß  $CT(\mathbb{R})$  einen Verband auf  $\mathbb{R}$  definiert. Dieser Verband enthält ausser  $T(\mathbb{R})$  auch den Verband  $C_c(\mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  mit kompaktem Träger. Wir verallgemeinern nun Lemma 3.5 auf stückweise stetige Funktionen.

**Satz 3.7.** Es gibt eine eindeutig bestimmte  $\mathbb{R}$ -lineare monotone translationsinvariante normierte Funktion

$$I: CT(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Verband  $CT(\mathbb{R})$  der stückweise stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

Dieses  $I$  nennen wir das **Euklidische Standardintegral** und schreiben dafür  $I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ . Da für jede Treppenfunktionen  $f \in CT(\mathbb{R})$  auch die Funktion  $\chi_{[a,b]} \cdot f$  in  $CT(\mathbb{R})$  ist, benutzen wir folgende Schreibweise

$$\int_{[a,b]} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) \cdot f(x) dx .$$

Ganz wesentlich für den Beweis von Satz 3.7 ist das folgende

**Lemma 3.8.** Für jedes  $f \in CT(\mathbb{R})$  und jede reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $g \in T(\mathbb{R})$  mit  $\|f - g\| < \varepsilon$  (Supremumsnorm auf  $CT(\mathbb{R})$ ). Hat  $f$  Träger im Intervall  $A$ , dann oBdA auch  $g$ .

**Beweis.** Man reduziert dies sofort auf den Fall  $f \in C(A)$  und  $g \in T_A(\mathbb{R})$  für ein Intervall  $A = [a, b]$ . Es existiert dann ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  für alle  $x, y \in A$ ,  $|x - y| < \delta$  (Satz von Heine 2.14). Zerlegt man  $A$  äquidistant in Teilintervalle  $[\xi_{i-1}, \xi_i]$  der Länge  $|\xi_i - \xi_{i-1}| < \delta$  und setzt  $g(x) = f(\xi_i)$  für  $x \in (\xi_{i-1}, \xi_i]$ , dann gilt  $g \in T_A(\mathbb{R})$  und  $\|f - g\| < \varepsilon$ .  $\square$

*Beweis von Satz 3.7.* Für die Existenz von  $I(f)$  benutzt man die Methode des Beweises von Satz 2.24: Für gegebenes  $f \in CT_A(\mathbb{R})$  wähle eine Folge  $g_n \in T_A(\mathbb{R})$  mit  $\|f - g_n\| \rightarrow 0$  vermöge Lemma 3.8. Bezüglich der Supremumsnorm ist dann  $g_n$  eine Cauchyfolge in  $T_A(\mathbb{R})$ . Nach Lemma 3.1 ist damit  $I(g_n)$  (definiert in Lemma 3.5) eine reelle Cauchyfolge. Diese konvergiert gegen einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$  und wir setzen

$$I(f) := \lim_n I(g_n) .$$

Durch Mischen von Folgen in  $T(\mathbb{R})$  zeigt man nun leicht, daß  $I(f)$  nur von  $f$  und nicht von der Wahl der Hilfsfolge  $g_n \in T(\mathbb{R})$  abhängt. Man zeigt damit leicht die Linearität von  $I$  und die Translationsinvarianz mit Hilfe von Lemma 3.5. Ist  $f \geq 0$ , kann man oBdA die  $g_n \in T(\mathbb{R})$  durch die Treppenfunktionen  $\max(g_n, 0)$  ersetzen und damit  $g_n \geq 0$  und  $I(g_n) \geq 0$  annehmen. Dies beweist  $I(f) \geq 0$  für  $f \geq 0$ . Die Normierungseigenschaft ist trivial.

*Eindeutigkeit.* Seien  $I_1, I_2$  verschiedene Lösungen. Dann ist  $J = I_1 - I_2$  eine stetige  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung auf  $CT(\mathbb{R})$  und es gilt  $J(g) = 0$  für alle  $g \in T(\mathbb{R})$  wegen Lemma 3.5. Nach Definition gilt daher  $J(f) = \lim_n J(g_n) = 0$  für alle  $f \in CT(\mathbb{R})$ .  $\square$

## 3.4 Eigenschaften des Standardintegrals

Es gilt die folgende elementare **Substitutionsregel** für das Standardintegral

**Lemma 3.9.** Für reelle  $a, b$  und  $\lambda > 0$  und Funktionen  $f \in CT_{[a,b]}(\mathbb{R}) \subset CT(\mathbb{R})$  gilt

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} \int_{[\lambda a, \lambda b]} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx,}$$

**Beweis.** Für  $f \in CT(\mathbb{R})$  ist auch  $h_f(x) := \frac{1}{\lambda}f(\frac{x}{\lambda})$  in  $CT(\mathbb{R})$  und  $J(f) := \int_{\mathbb{R}} h_f(x)dx$  definiert dann eine zweite  $\mathbb{R}$ -lineare monotone und translationsinvariante normierte Abbildung  $CT(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . [Wegen  $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(\frac{x}{\lambda})dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\lambda]}(x)dx = \lambda$  ist  $J$  normiert]. Aus Satz 3.7 folgt  $J(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ . Dies zeigt  $\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f(\frac{x}{\lambda}) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  für  $f \in CT(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Lemma 3.10.** Für alle  $f \in CT(\mathbb{R})$  und alle reellen Zahlen  $a \leq c \leq b$  gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,c]} f(x) dx + \int_{[c,b]} f(x) dx .$$

**Beweis.** Benutze  $\chi_{[a,b]} = \chi_{[a,c]} + \chi_{[c,b]} - \chi_{[c,c]}$  und  $\int_{[c,c]} f(x)dx = f(c)I(\chi_{[c,c]}) = 0$ .  $\square$

### 3.5 Der Logarithmus

Für  $0 < a \leq b$  ist  $f(t) = \frac{1}{t}$  eine stetige Funktion auf  $[a, b]$ . Wegen  $C([a, b]) \subset CT(\mathbb{R})$  ist daher nach Satz 3.7 das Integral  $\int_{[a,b]} \frac{dt}{t}$  erklärt. Dies definiert für  $x \geq 1$  den natürlichen **Logarithmus**

$$\log(x) := \int_{[1,x]} \frac{dt}{t} .$$

Beachte  $\log(1) = 0$ . Wir setzen  $\log(x) := -\log(1/x)$  für  $x \in (0, 1)$ . Aus Lemma 3.9 für  $\lambda = y$  folgt  $\int_{[y,xy]} \frac{dt}{t} = \int_{[1,x]} \frac{dt}{t}$ . Im Fall  $x, y \geq 1$  kann man diese Beziehung mittels Lemma 3.10

$$\int_{[1,y]} \frac{dt}{t} + \int_{[y,xy]} \frac{dt}{t} = \int_{[1,xy]} \frac{dt}{t}$$

wie folgt schreiben

$$\log(x) + \log(y) = \log(xy) .$$

Man zeigt nun ohne Mühe, daß diese Formel für alle  $x, y > 0$  gilt. Somit gilt  $\log(b) - \log(a) = \log(b/a) > 0$  für alle  $b > a > 0$  wegen  $a/b > 1$  [Beachte  $\log(x) > 0$  für  $x > 1$ , denn auf  $[1, x]$  folgt  $\log(x) \geq l([1, x])/x = 1 - 1/x > 0$  aus  $1/t \geq 1/x$ ]. Es folgt

**Satz 3.11.** Der Logarithmus  $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine streng monoton wachsende Funktion, und definiert einen Gruppenhomomorphismus von der multiplikativen Gruppe in die additive Gruppe

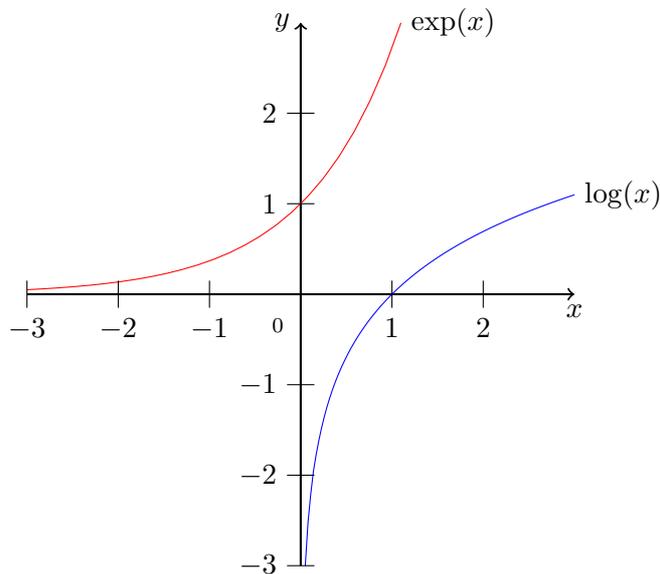
$$\log: (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +) .$$

Nun ist es nicht mehr schwer einzusehen, daß der Logarithmus sogar einen Isomorphismus definiert

$$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +) .$$

Die Injektivität folgt sofort aus der strengen Monotonie. Für die Surjektivität genügt, daß jede Zahl  $\geq 0$  im Bild liegt. Wegen  $\log(2^n) = n \cdot \log(2)$  und  $\log(2) > 0$  nimmt  $\log(x)$  beliebig große

Werte an. Andererseits gilt  $\log(x) - \log(y) \leq \frac{1}{a}|x - y|$  für  $x, y \in [a, b]$  wegen  $\max_{t \in [a, b]} (\frac{1}{t}) = \frac{1}{a}$ . Also ist  $\log(x)$  eine Lipschitz-stetige Funktion auf  $[1, b]$ . Aus dem Zwischenwertsatz folgt daher, daß jede reelle Zahl  $\geq 0$  im Bild des Logarithmus liegt.



Die dadurch eindeutig bestimmte monotone Umkehrfunktion des Logarithmus ist die sogenannte **Exponentialfunktion**, die einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$$

definiert. Also gilt für alle reellen Zahlen  $x, y$  die folgende **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)}$$

Insbesondere ist  $\exp(0) = 1$ .

**Notation.** Für beliebige reelle Zahlen  $\alpha$  und  $x > 0$  ist daher die  $\alpha$ -Potenz

$$\boxed{x^\alpha := \exp(\alpha \cdot \log(x))}$$

wohldefiniert. Es gilt  $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$  und  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$  für alle reellen Zahlen  $x > 0$  und  $y > 0$ . Beachte daß für natürliche Zahlen  $\alpha$  der Wert  $x^\alpha$  die übliche Potenz von  $x$  ist wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

### 3.6 Das mehrdimensionale Standardintegral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Wir behandeln jetzt die Verallgemeinerung des Standardintegrals auf den Fall des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes. Die Betrachtungen sind sehr ähnlich zum Fall  $n = 1$ . Der Hauptaugenmerk liegt auf der richtigen Verallgemeinerung  $T(\mathbb{R}^n)$  des Raumes der Treppenfunktionen.

**Definition.** Wir definieren  $T(\mathbb{R}^n)$  induktiv, d.h. wir nehmen an die  $T(\mathbb{R}^m)$  seien für  $m < n$  bereits definierte Verbände auf  $\mathbb{R}^m$ . Per Definition ist dann eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $T(\mathbb{R}^n)$ , wenn  $f(x)$  sich für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  in der Form schreiben lässt

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \chi_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}(x_n) + \sum_{j=0}^m d_j(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot \chi_{[\xi_j, \xi_{j+1}]}(x_n)$$

für gewisse Funktionen  $c_i, d_j \in T(\mathbb{R}^{n-1})$  und gewisse reelle Zahlen  $\xi_0, \dots, \xi_m$ . Wie in Lemma 3.4 folgt daraus sofort, daß  $T(\mathbb{R}^n)$  einen **Verband** auf  $\mathbb{R}^n$  definiert.

**Quader.** Sei  $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  ein beschränkter **Euklidischer Quader** im  $\mathbb{R}^n$ . Wir nehmen  $a_i \leq b_i$  an, lassen aber auch *degenerierte* Quader mit der Eigenschaft  $a_i = b_i$  zu. Durch Induktion nach  $n$  zeigt man dann leicht  $\chi_A \in T(\mathbb{R}^n)$  sowie:  $T(\mathbb{R}^n)$  wird als Vektorraum von den charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  der kompakten Quader  $A \subset \mathbb{R}^n$  erzeugt (Übungsaufgabe). Dies liefert sofort die Eindeutigkeitsaussage im nächsten

**Lemma 3.12.** *Es gibt eine eindeutig bestimmte  $\mathbb{R}$ -lineare monotone Abbildung*

$$I : T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft  $I(\chi_A) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$  für kompakte Quader  $A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

**Beweis.** Die Existenz von  $I$  folgt induktiv aus der Existenz einer  $\mathbb{R}$ -linearen monotonen Abbildung  $T(\mathbb{R}^n) \rightarrow T(\mathbb{R}^{n-1})$ , welche  $\chi_A$  auf  $|b_n - a_n| \cdot \chi_{A'}$  abbildet für  $A' = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i]$ . Diese relative Abbildung ist

$$f(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt.$$

Sie ist offensichtlich  $\mathbb{R}$ -linear und monoton. Daß  $T(\mathbb{R}^n)$  auf  $T(\mathbb{R}^{n-1})$  abgebildet wird, ist klar. Es genügt daher für die Erzeuger  $\chi_A$  des Vektorraums  $T(\mathbb{R}^n)$  die einfache Formel

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt = \chi_{A'}(x_1, \dots, x_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_n, b_n]}(t) dt = |b_n - a_n| \cdot \chi_{A'}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

□

Lemma 3.8 überträgt sich auf den  $n$ -dimensionalen Fall. Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Quader. Ist  $f \in C(A)$  und  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $g \in T_A(\mathbb{R})$  mit  $\|f - g\| < \varepsilon$  (Supremumsnorm auf  $\mathbb{R}$ ). Siehe auch das spätere allgemeine Resultat 7.11. Es folgt dann wie im Beweis von Satz 3.7

**Satz 3.13.** *Das Integral  $I : T_A(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  aus Lemma 3.12 setzt sich auf eindeutige Weise fort zu einer monotonen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung  $I : C(A) \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $I : C_A(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Wegen  $C_c(\mathbb{R}^n) = \bigcup_A C_A(\mathbb{R}^n)$ , die Vereinigung läuft dabei über die kompakten Quader  $A \subset \mathbb{R}^n$ , verheften sich die Abbildungen  $I : C_A(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  auf Grund der Eindeutigkeit zu einer monotonen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung

$$C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx,$$

dem **Euklidischen Standardintegral** auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Die Vereinigung zweier folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt. Somit ist  $C_c(\mathbb{R}^n)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und sogar ein Verband.

**Bemerkung.** Für *degenerierte* abgeschlossene Quader  $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt

$$A \text{ degeneriert und } f \in C(X) \implies \int_A f(x) dx_1 \dots dx_r = 0.$$

In der Tat ist  $f$  beschränkt auf  $A$ . Wegen  $I(\chi_A) = 0$  folgt daher die Behauptung aus der Boxungleichung von Abschnitt 3.1.

**Translationsinvarianz.** Aus Lemma 3.12 folgt sehr einfach für alle  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx}.$$

### 3.7 Monotone Hüllen

Sei  $X$  eine Menge, später meist ein metrischer Raum. Wir betrachten jetzt die Funktionen auf  $X$  mit Werten in

$$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \infty \quad \text{oder} \quad \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup -\infty.$$

Im Gegensatz zu den reellwertigen Funktionen auf  $X$ , die in natürlicher Weise einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bilden, ist dieser Funktionenraum im allgemeinen nur unter Addition und unter Multiplikation mit positiven Skalaren  $\lambda \geq 0$  abgeschlossen (Konvention:  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ ).

**Definition 3.14.** Eine Teilmenge  $B(X)$  der  $\mathbb{R}^+$ - (oder  $\mathbb{R}^-$ )-wertigen Funktionen auf  $X$  heisst **Halbverband**, wenn  $B(X)$  unter den Bildungen

$$\min(f(x), g(x)) \quad \text{und} \quad \max(f(x), g(x))$$

sowie unter Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren  $\lambda \geq 0$  abgeschlossen ist.

Das einfachste Beispiel für einen Halbverband ist  $\mathbb{R}^+$ ; hier sei  $X$  ein Punkt. Jeder Verband ist ein Halbverband. Ist  $B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^\pm$ , dann ist  $-B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^\mp$  wegen  $\max(-f, -g) = -\min(f, g)$  etc.

**Lemma 3.15.** Ein Halbverband  $B(X)$  ist ein Verband  $\iff B(X) = -B(X)$ .

**Beweis.** Offensichtlich ist ein Verband  $B(X)$  ein Halbverband und erfüllt  $B(X) = -B(X)$ . Umgekehrt, in einem Halbverband mit  $B(X) = -B(X)$  haben alle Funktionen  $f \in B(X)$  Werte in  $\mathbb{R}$ . Aus den Axiomen eines Halbverbandes und  $B(X) = -B(X)$  folgt, daß  $B(X)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist. Für  $f \in B(X)$  gilt  $f = f^+ + f^-$  für  $f^+ = \max(f, 0) \geq 0$  und  $f^- = \min(f, 0) \leq 0$  in  $B(X)$ . Nach Annahme gilt  $-f^- \in B(X)$ ; es folgt  $|f| = f^+ + (-f^-) \in B(X)$ . Also ist  $B(X)$  ein Verband.  $\square$

Die **monotone Hülle**  $B^+(X)$  eines Halbverbandes  $B(X)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  besteht aus allen Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  für die eine punktweise monotone aufsteigende Folge  $f_n \in B(X)$  existiert, d.h.  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$  für alle  $x \in X$ , mit  $f(x) = \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$  oder kurz

$$f = \sup_n f_n = \sup f_n .$$

Wir schreiben symbolisch  $f_n \nearrow f$ , wenn  $f$  in diesem Sinne als punktweise ‘monotoner Limes’ von Funktionen  $f_n$  definiert ist.

Ist  $B(X)$  ein Verband oder ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^-$ , definiert man analog  $f_n \searrow f$  und  $B^-(X)$  mittels monoton fallender Limiten. Funktionen in  $B^-(X)$  haben dann Werte in  $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup -\infty$ . Alle Aussagen sind analog, so daß wir uns im Folgenden meist auf den Fall von Halbverbänden mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  beschränken. Für einen Verband  $B(X)$  gilt offensichtlich

$$B^-(X) = -B^+(X) .$$

**Lemma 3.16.** *Ist  $B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ , dann ist auch  $B^+(X) \supseteq B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ . Der Halbverband  $B^+(X)$  ist unter monoton wachsenden Limiten abgeschlossen: Aus  $f_i \nearrow f$  für  $f_i \in B^+(X)$  folgt  $f \in B^+(X)$ .*

**Beweis.**  $B(X) \subseteq B^+(X)$ , denn für die konstante Folge  $f_n = f \in B(X)$  gilt  $f_n \nearrow f$ .

Für  $f_n, g_n \in B(X)$  mit  $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$  und  $\lambda > 0$  gilt  $f_n + g_n \nearrow f + g$  und  $\lambda f_n \nearrow \lambda f$ . Zum Nachweis von  $\max(f_n, g_n) \nearrow \max(f, g)$  beachte

$$\max(f_n, g_n) \leq \max(f_{n+1}, g_n) \leq \max(f_{n+1}, g_{n+1}) ,$$

da  $h \leq g$  die Ungleichungen  $\max(h, f) \leq \max(g, f)$  und  $\min(h, f) \leq \min(g, f)$  impliziert. Für  $\min(f_n, g_n) \nearrow \min(f, g)$  benutze  $\min(f_n, g_n) \leq \min(f_{n+1}, g_n) \leq \min(f_{n+1}, g_{n+1})$ .

Für den Beweis der letzten Aussage wähle  $f_{ij} \nearrow f_i$  mit  $f_{ij} \in B(X)$ . Wegen  $f_{ij} \leq f_{i,j+1}$  für alle  $i + j = n$  gilt dann  $F_n := \max_{i+j=n}(f_{ij}) \nearrow f$  sowie  $F_n \in B(X)$ , also  $f \in B^+(X)$ .  $\square$

## 3.8 Abstrakte Integrale

**Lemma 3.17.** *Sei nun  $B(X) = C_c(X)$  der Verband der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  und sei  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und  $\mathbb{R}$ -linear. Dann ist  $I$  **halbstetig**, d.h. für eine monotone Folge  $f_n \in B(X)$  mit Grenzfunktion  $f \in B(X)$  konvergiert  $\lim_n I(f_n)$  monoton gegen  $I(f)$ .*

**Beweis.** Ersetzt man  $f_n$  durch  $f_n - f$  kann man oBdA  $f = 0$  annehmen. Ersetzt man  $f_n$  durch  $-f_n$  kann man obdA annehmen,  $f_n$  ist monoton fallend. Der Träger aller  $f_n$  ist somit im kompakten Träger von  $f_1$  enthalten. Aus Satz 2.26 folgt daher die gleichmässige Konvergenz der Folge  $f_n$  auf  $X$ . Aus der Monotonie von  $I$  und Lemma 3.1 folgt damit die Behauptung.  $\square$

Sei  $B(X)$  ein Halbverband (obdA) mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ . Für eine Abbildung  $I$  von  $B(X)$  in einen anderen Halbverband betrachten wir folgende Eigenschaften

1. **Semilinearität:**  $I(f + g) = I(f) + I(g)$ . und  $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$  für reelles  $\lambda \geq 0$ .
2. **Monotonie:**  $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
3. **Halbstetigkeit:**  $I(f_n) \nearrow I(f)$  für  $f_n \nearrow f$  und  $f, f_n \in B(X)$ .

**Definition 3.18.** Ein **abstraktes Integral** (Daniell-Integral) auf  $B(X)$  ist eine semilineare monotone halbstetige Abbildung (Eigenschaften 1,2 und 3)

$$I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ .$$

**Lemma 3.19.** Ist  $g_n \in B(X)$  eine monoton wachsende Folge  $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \dots$  von Funktionen eines Halbverbandes  $B(X)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ , und  $I$  ein abstraktes Integral auf  $B(X)$ . Dann gilt

$$B(X) \ni f \leq \sup_n g_n \implies I(f) \leq \sup_n I(g_n) .$$

**Beweis.** Ist  $f \leq \sup_n g_n$ , dann gilt  $f_n \nearrow f \in B(X)$  für die Folge  $f_n := \min(f, g_n) \in B(X)$ . Also  $I(f) = \sup I(f_n)$  wegen Eigenschaft 3). Aus der Monotonie folgt  $I(f_n) \leq I(g_n)$ , denn  $f_n \leq g_n$ . Dies zeigt  $\sup_n I(f_n) \leq \sup_n I(g_n)$ .  $\square$

*Integrale auf Verbänden.* Aus 1) für  $\lambda = 0$  folgt  $0 \in B(X)$  und aus 1) Additivität folgt  $I(0) = 0$ . Ist  $B(X)$  sogar ein Verband, gilt  $f \in B(X) \implies -f \in B(X)$ . Aus 1) folgt dann  $I(-f) = -I(f)$  und insbesondere ist  $I(f) < \infty$  reell. Die Semilinearität von  $I$  ist damit auf Verbänden äquivalent zur  **$\mathbb{R}$ -Linearität** der Abbildung  $I$ . Ist  $B(X)$  ein Verband, folgt die Monotonie (Eigenschaft 2) bereits aus der schwächeren Bedingung  $f \geq 0 \implies I(f) \geq 0$ , indem man die Hilfsfunktion  $g - f \geq 0$  betrachtet.

**Beispiel 3.20.** Wegen Lemma 3.17 ist das durch  $I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$  definierte Euklidische Standardintegral  $I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ein abstraktes Integral. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, wie sich deshalb das Standardintegral zu abstrakten Integralen  $I^\pm$  der monotonen Hüllen  $C_c^\pm(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen lässt.

## 3.9 Fortsetzung von Integralen

**Lemma 3.21.** Sei  $B(X)$  ein Halbverband mit Werten in  $\mathbb{R}^+$  und  $I$  ein abstraktes Integral<sup>3</sup> auf  $B(X)$ . Dann setzt sich  $I$  auf eindeutige Weise zu einem abstrakten Integral  $I^+$  der monotonen Hülle  $B^+(X)$  fort

$$I^+ : B^+(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ .$$

<sup>3</sup>oder allgemeiner eine beliebige semilineare monotone halbstetige Abbildung zwischen zwei Halbverbänden mit Werten jeweils in  $\mathbb{R}^+$  setzt sich eindeutig auf die monotonen Hüllen fort.

**Beweis. Eindeutigkeit.** Für  $g \in B^+(X) = B^+$  wähle  $g_n \in B(X) = B$  mit  $g_n \nearrow g$ . Ein abstraktes Integral  $I^+$  auf  $B^+$ , das  $I$  fortsetzt, ist durch die Halbstetigkeit eindeutig festgelegt

$$I^+(g) = \sup I^+(g_n) = \sup I(g_n) .$$

*Existenz.* Für  $g_n \nearrow g$  und  $g_n \in B$  definieren wir daher  $I^+(g) := \sup I(g_n)$ . Dies hängt nicht von der Wahl der Folge  $f_n \nearrow g$  mit  $f_n \in B$  ab. [Benutze  $I(f_n) \leq \sup I(g_n)$  (Lemma 3.19) und damit  $\sup I(f_n) \leq \sup I(g_n)$  im Limes. Vertauscht man die Rollen von  $f_n$  und  $g_n$ , folgt  $\sup I(f_n) = \sup I(g_n)$ ]. Die Semi-Linearität der Fortsetzung  $I^+$  folgt unmittelbar durch Limesbildung aus der Semilinearität von  $I$ .

*Monotonie:*  $f \leq g \implies I^+(f) \leq I^+(g)$ . [Für  $f, g \in B^+$  wähle  $f_n \nearrow f$  mit  $f_n \in B$ ; aus Lemma 3.19 folgt  $I(f_n) \leq I^+(g)$  und damit  $I^+(f) \leq I^+(g)$  im Limes  $n \rightarrow \infty$ ].

*Halbstetigkeit.* Für  $f_n \in B^+$  mit  $f_n \nearrow f \in (B^+)^+ = B^+$  gilt  $\sup I^+(f_n) = I^+(f)$ . Benutze dazu die Hilfsfolge  $F_n \nearrow f$  definiert durch  $F_n = \max_{i+j=n} f_{ij} \in B$  wie in Lemma 3.16. Wegen  $F_n \leq f_n \leq f$  gilt  $I^+(f) := \sup I(F_n) \leq \sup I^+(f_n) \leq I^+(f)$ . Also  $\sup I^+(f_n) = I^+(f)$  (Halbstetigkeit).  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $B(X)$  sogar ein Verband und  $I$  ein abstraktes Integral auf  $B(X)$ , kann  $I$  nicht nur zu einem abstrakten Integral  $I^+ : B^+(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , sondern auch zu einem abstrakten Integral  $I^- : B^-(X) \rightarrow \mathbb{R}^-$  fortgesetzt werden. [Beachte  $I^-(h) = \liminf_n I(h_n)$  für  $h_n \searrow h$  und  $h_n \in B(X)$  sowie  $-h \in B^+(X)$  für  $h \in B^-(X)$ ]. Aus den Definitionen folgt sofort

$$\boxed{I^-(h) = -I^+(-h)} .$$

Sei nun  $B(X)$  ein Verband.

**Lemma 3.22.** Für  $h$  in  $B^-(X)$  und  $g$  in  $B^+(X)$  gilt dann  $\boxed{h \leq g \implies I^-(h) \leq I^+(g)}$ .

**Beweis.** Für  $h_n \searrow h$  und  $g_n \nearrow g$  mit  $h_n, g_n \in B(X)$  gilt  $f_n := g_n - h_n \in B(X)$  sowie  $f_n \nearrow f := g - h \geq 0$ . Aus Lemma 3.19 und  $0 \leq \sup f_n$  folgt daher  $0 = I(0) \leq I^+(f) := \sup_n I(f_n)$ . Aus  $I^+(f) = I^+(g) + I^+(-h) = I^+(g) - I^-(h)$  folgt daher  $0 \leq I^+(g) - I^-(h)$ .  $\square$

**Folgerung.** Das Euklidische Standardintegral

$$\int_{\mathbb{R}^n} : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

läßt sich zu einem abstrakten Integral  $I^- : B^- \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen, wobei  $B^- = C_c^-(\mathbb{R}^n)$  die monotone Hülle aller monoton fallenden Folgen von Funktion  $f$  in  $B = C_c(\mathbb{R}^n)$  ist.  $C_c^-(\mathbb{R}^n)$  enthält wegen Beispiel 2.25 alle Funktionen der Gestalt  $\chi_A(x) \cdot f(x)$  für abgeschlossene Teilmengen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und nichtnegative Funktionen  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ . Dies wird später bei dem Beweis der Substitutionsregel (Satz 4.27) ganz wesentlich benutzt.

## 4 Differentiation

Eine Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  heisst **zulässig**, wenn für jeden Punkt  $\xi$  aus  $X$  ein abgeschlossener nicht degenerierter Quader  $Q$  existiert mit  $\xi \in Q \subset X$ .

Eine Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  (oder allgemeiner eine Teilmenge  $X$  eines metrischen Raumes) heisst **offen**, wenn für jeden Punkt  $\xi \in X$  eine Kugel  $B_r(\xi) = \{x \mid d(x, \xi) < r\}$  vom Radius  $r > 0$  existiert mit  $\xi \in B_r(\xi) \subset X$ .

Jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist zulässig. Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen ist wieder offen. Dies gilt jedoch nicht für zulässige Mengen.

### 4.1 Das Landausymbol

Wir erklären in diesem Abschnitt, was es bedeuten soll, daß eine Funktion  $f$  *schneller in einem Punkt  $\xi$  gegen Null geht als jede von Null verschiedene lineare Funktion*. Man schreibt in diesem Fall nach Landau:  $f(x) = o(x - \xi)$ . Dies soll mit Lemma 4.1 präzise gemacht werden.

Sei dazu  $X$  eine Teilmenge des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  und  $\xi \in X$  ein gegebener Punkt. Für eine Funktion

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

schreiben wir

$$\boxed{f(x) = o(x - \xi)},$$

wenn eine Funktion  $H : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  existiert, die stetig im Punkt  $\xi$  ist mit  $H(\xi) = 0$ , so daß gilt

$$\boxed{f(x) = \|x - \xi\|_{\mathbb{R}^n} \cdot H(x)}.$$

**Bemerkung.** Man sieht sofort, daß für Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  auf  $X$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  gilt:  $f_i(x) = o(x - \xi) \implies \alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x) = o(x - \xi)$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Lemma 4.1.** Sei  $X \subset \mathbb{R}^m$  eine zulässige Teilmenge. Sei  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung und  $\xi$  aus  $X$ . Gilt  $L(x - \xi) = o(x - \xi)$  auf  $X$ , dann ist  $L = 0$ .

**Beweis.** ObdA ist  $X$  ein Quader und durch eine Translation ist obdA  $\xi = 0$ . Für  $x \in X$  gilt

$$L(x) = \|x\| \cdot H(x)$$

sowie:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  mit  $\|x\| < \delta \implies \|H(x)\| < \varepsilon$ . Mit  $x$  liegt auch  $x/n$  im Quader  $X$  für alle  $n \geq 1$  in  $\mathbb{N}$ . Da  $L$  linear ist, gilt  $L(x/n) = L(x)/n$  und damit  $H(x) = H(x/n)$  wegen  $\|x/n\| = \|x\|/n$ . Für große  $n$  gilt  $\|x/n\| < \delta(\varepsilon)$  und damit  $\|H(x/n)\| < \varepsilon$ . Es folgt  $0 \leq \|H(x)\| < \varepsilon$ . Da dies bei festem  $x \in X$  für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt  $\|H(x)\| = 0$  und damit  $H(x) = 0$  für alle  $x \in X$ .

Dies zeigt  $L(x) = 0$  für alle  $x$  aus dem Quader  $X$ . Da der Quader eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$  enthält, folgt daraus  $L = 0$ .  $\square$

## 4.2 Differenzierbarkeit

Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine zulässige Teilmenge, und sei

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Funktion. Unter dieser Annahme machen wir nun die folgende

**Definition 4.2.**  $f$  heisst **differenzierbar** im Punkt  $\xi \in X$ , wenn es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, so dass gilt (\*)

$$\boxed{f(x) - f(\xi) - L(x - \xi) = o(x - \xi)} .$$

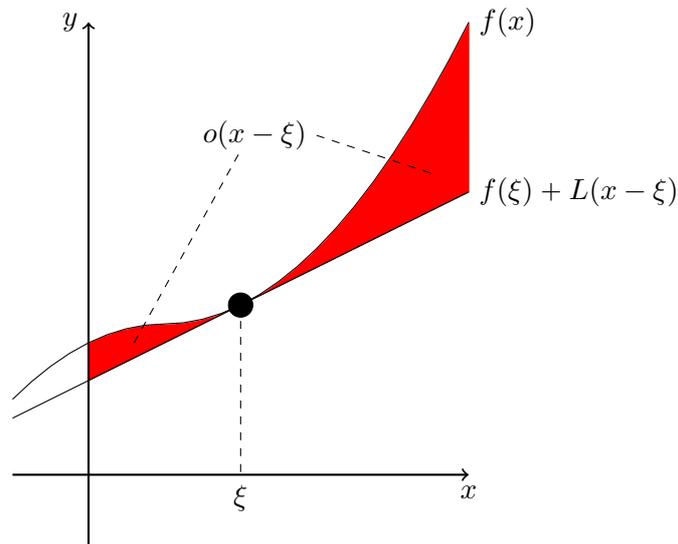
Gilt (\*), ist die stetige lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eindeutig bestimmt durch  $f$  und  $\xi$ , und man nennt  $L$  das Differential der Abbildung  $f$  im Punkt  $\xi$  und schreibt

$$L = Df(\xi) .$$

Ableitung/Tangente im eindimensionalen Fall:



**Beweis.** Angenommen zwei lineare Abbildungen  $L_1, L_2$  erfüllen Eigenschaft (\*). Dann hätte die Differenz  $L = L_1 - L_2$  die Eigenschaft  $L(x - \xi) = o(x - \xi)$  auf  $X$ . Nach Lemma 4.1 folgt daraus  $L = 0$ .  $\square$

**Bemerkung.** Im Fall  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h. im Fall der Dimensionen  $n = m = 1$ , schreibt man  $Df(\xi)x = m \cdot x$  und benutzt für die *Tangentensteigung*  $m$  folgende synonyme Notationen

$$m = \dot{f}(\xi) = f'(\xi) = \frac{d}{dx}f(\xi) = \frac{df}{dx}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi).$$

**Definition 4.3.** Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt  $\xi \in X$  differenzierbar ist.

**Beispiel 4.4.** Seien  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  Euklidische Räume und  $c \in \mathbb{R}^m$  eine Konstante und  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Dann ist die **affin lineare** Abbildung  $f(x) = c + L(x)$  differenzierbar, und hat in jedem Punkt  $\xi \in \mathbb{R}^n$  die Ableitung

$$Df(\xi) = L,$$

denn  $H(x) := f(x) - f(\xi) - L(x - \xi)$  ist Null, also  $H(x) = o(x - \xi)$ .

*Eine Reduktion.* Eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Werten in dem Euklidischen Vektorraum  $\mathbb{R}^m$  wird beschrieben durch  $m$  reellwertige Abbildungen  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, m$  (die sogenannten Komponenten  $f_i$  von  $f$ )

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ f_{m-1}(x) \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

**Lemma 4.5.**  $f(x)$  ist differenzierbar im Punkt  $\xi$  genau dann, wenn jede der Komponenten  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  differenzierbar ist im Punkt  $\xi$ .

**Beweis.** Die durch  $f(x) - f(\xi) - L(x - \xi) = \|x - \xi\| \cdot H(x)$  für  $x \neq \xi$  definierte vektorwertige Funktion  $H(x)$  konvergiert gegen Null für  $x \rightarrow \xi$  genau dann, wenn die Komponenten  $H_1(x), \dots, H_m(x)$  von  $H(x)$  gegen Null konvergieren für  $x \rightarrow \xi$ . Analog ist  $L$  (stetig und  $\mathbb{R}$ -linear genau dann, wenn alle Komponenten  $L_1, \dots, L_m$  (stetige  $\mathbb{R}$ -Linearformen sind).  $\square$

**Lemma 4.6.** Ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$ , dann ist  $f$  stetig im Punkt  $\xi$ .

**Beweis.** Sowohl  $d(x, \xi) = \|x - \xi\|$  als auch  $H(x)$  sind stetig im Punkt  $\xi$ . Summen und Produkte in  $\xi$  stetiger reellwertiger Funktionen sind stetig in  $\xi$ . Daher sind die Komponenten der Funktion  $f(x) = f(\xi) + L(x - \xi) + \|x - \xi\| \cdot H(x)$  stetig im Punkt  $\xi$ . Dasselbe gilt daher auch für  $f(x)$ .  $\square$

**Lemma 4.7 (Kettenregel).** Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$  nicht degenerierte Quader (oder zulässige Mengen) und sei  $Z = \mathbb{R}^k$ . Gegeben seien Abbildungen  $f, g$  sowie  $\xi \in X$  mit

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\xi \xrightarrow{f} \eta = f(\xi)$$

Dann gilt: Ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$  und ist  $g$  differenzierbar im Punkt  $\eta = f(\xi)$ , dann ist die Zusammensetzung  $g \circ f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$  und es gilt für

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{Df(\xi)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{Dg(\eta)} \mathbb{R}^k$$

die **Kettenregel**:  $D(g \circ f)(\xi) = Dg(\eta) \circ Df(\xi)$ .

**Beweis.** Die Differenzierbarkeit von  $f$  im Punkt  $\xi$  zeigt

$$(**) \quad f(x) = f(\xi) + Df(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\|$$

für eine Funktion  $H(x)$  mit  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|H(x)\| = 0$ . Analog gilt

$$(*) \quad g(y) = g(\eta) + Dg(\eta) \cdot (y - \eta) + \tilde{H}(y) \cdot \|y - \eta\|$$

für eine Funktion  $\tilde{H}(y)$  mit  $\lim_{y \rightarrow \eta} \|\tilde{H}(y)\| = 0$ . Setzt man  $(**)$  in  $(*)$  ein, ergibt sich

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \stackrel{(*)}{=} g(\eta) + Dg(\eta) \cdot (f(x) - \eta) + \tilde{H}(f(x)) \cdot \|f(x) - \eta\|$$

$$\stackrel{(**)}{=} g(\eta) + Dg(\eta) \cdot \left( Df(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\| \right) + \tilde{H}(f(x)) \cdot \left\| Df(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\| \right\|$$

$$= (g \circ f)(\xi) + \left( Dg(\eta) \cdot Df(\xi) \right) \cdot (x - \xi) + H_1(x) \cdot \|x - \xi\|$$

für

$$H_1(x) = Dg(\eta) \cdot H(x) + \tilde{H}(f(x)) \cdot \frac{\|Df(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot \|x - \xi\|\|}{\|x - \xi\|}.$$

Zweimalig Anwenden der Dreiecksungleichung sowie die Ungleichung  $\|L(v)\| \leq \|L\| \|v\|$  für  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen  $L$  zeigen

$$\|H_1(x)\| \leq \|Dg(\eta)\| \cdot \|H(x)\| + \|\tilde{H}(f(x))\| \cdot (\|Df(\xi)\| + \|H(x)\|).$$

$f$  ist nach Lemma 4.6 stetig im Punkt  $\xi$ , also  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|\tilde{H}(f(x))\| = \lim_{y \rightarrow \eta} \|\tilde{H}(y)\| = 0$ . Wegen  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|H(x)\| = 0$  folgt insgesamt  $\lim_{x \rightarrow \xi} \|H_1(x)\| = 0$ . Also ist  $g \circ f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$  mit dem Differential  $L = Dg(\eta) \circ Df(\xi)$ .  $\square$

### 4.3 Die Jacobi-Matrix

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine zulässige Teilmenge im Euklidischen Raum und

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine im Punkt  $\xi \in X$  differenzierbare Abbildung.

Für  $t \in (-\varepsilon, 0]$  oder  $[0, \varepsilon)$  liegt  $i_\nu(t) := \xi + t \cdot e_\nu$  in  $X$  für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  (hierbei sei  $e_\nu$  der  $\nu$ -te Basisvektor). Sei  $p_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion auf die  $\mu$ -te Koordinate. Die Zusammensetzung

$$p_\mu \circ f \circ i_\nu(t) = f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n)$$

ist reellwertig und definiert auf einem zulässigen Intervall in  $\mathbb{R}$ , und ist nach der Kettenregel differenzierbar im Punkt  $t = 0$  als Zusammensetzung von  $i_\nu$  (affin linear),  $f$  und  $p_\mu$  (linear). Die Kettenregel berechnet die Ableitung nach  $t$  im Punkt  $t = 0$

$$\left. \frac{d}{dt} f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n) \right|_{t=0} = Dp_\mu(\eta) \circ Df(\xi) \circ Di_\nu(0).$$

Beispiel 4.4 berechnet zwei der Terme der rechten Seite. Dies ergibt für die linke Seite, welche man die **partielle Ableitung** von  $f$  im Punkt  $\xi$  nennt, die Formel

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} f_\mu(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot Df(\xi) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Df(\xi)_{\nu\mu}.$$

Hierbei fassen wir die lineare Abbildung  $Df(\xi)$  als eine  $n \times m$ -Matrix auf. Auf der rechten Seite steht dann der Matrixkoeffizient  $Df(\xi)_{\nu\mu}$  von  $Df(\xi)$  an der  $\nu, \mu$ -ten Stelle.

*Wir fassen zusammen: Differenzierbarkeit im Punkt  $\xi$  impliziert partielle Differenzierbarkeit im Punkt  $\xi$ , und die Ableitung  $Df(\xi)$  wird gegeben durch die Matrix der partiellen Ableitungen (die **Jacobimatrix**)*

$$Df(\xi) = \left( \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(\xi) \right),$$

für  $\nu = 1, \dots, n$  und  $\mu = 1, \dots, m$ .

Die **Kettenregel** (Lemma 4.7) schreibt sich daher alternativ durch Matrixmultiplikation

$$\frac{\partial (g \circ f)_\mu}{\partial x_\nu}(\xi) = \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial g_\mu}{\partial y_\lambda}(f(\xi)) \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu}(\xi).$$

**Notation.** Wir schreiben oft  $\partial_\nu f$  anstelle von  $\frac{\partial}{\partial x_\nu} f$ .

## 4.4 Extremwerte

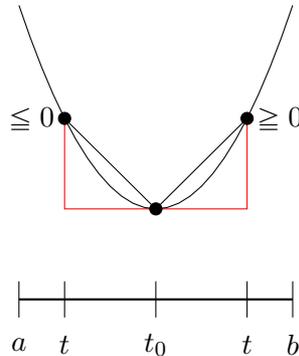
Jede differenzierbare Funktion  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine stetige Funktion (Lemma 4.6) und nimmt damit auf dem Intervall  $[a, b]$  Minimum und Maximum an (Satz 2.10). Sei

$$t_0 \in (a, b)$$

ein *innerer* Punkt, in dem  $h$  sein Minimum annimmt. Wählt man eine Folge  $t \rightarrow t_0$ , deren Glieder alle von  $t_0$  verschieden sind, dann impliziert die Differenzierbarkeit von  $h$  im Punkt  $t_0$

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \longrightarrow h'(t_0) + \lim_{t \rightarrow t_0} \left( H(t) \cdot \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \right) = h'(t_0) .$$

wegen  $\lim_{t \rightarrow t_0} H(t) = 0$ . Der Zähler  $h(t) - h(t_0)$  der linken Seite ist nach Annahme nicht negativ. Wählt man eine Folge von Punkten  $t \in (0, 1)$  für die alle  $t - t_0$  positiv sind, folgt daher im Limes  $h'(t_0) \geq 0$ .



Wählt man eine Folge, deren Glieder  $t - t_0$  negativ sind, folgt  $h'(t_0) \leq 0$ . Wegen  $t_0 \in (0, 1)$  sind beide Möglichkeiten von Folgen realisierbar. Aus  $t_0 \in (a, b)$  folgt somit (\*)

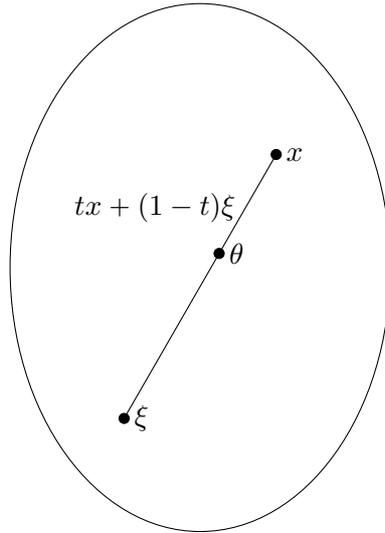
$$\boxed{h'(t_0) = 0} .$$

**Satz 4.8 (Mittelwertsatz).** Sei  $X$  zulässig im  $\mathbb{R}^n$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Seien  $x, \xi \in X$  feste Punkte, für die die Verbindungsgerade  $\{tx + (1 - t)\xi \mid t \in [0, 1]\}$  ganz in  $X$  liegt (z.B. wenn  $X$  ein Quader ist). Dann gibt einen Punkt  $\theta \in X$

$$\theta = tx + (1 - t)\xi \quad , \quad 0 < t < 1$$

mit der Eigenschaft

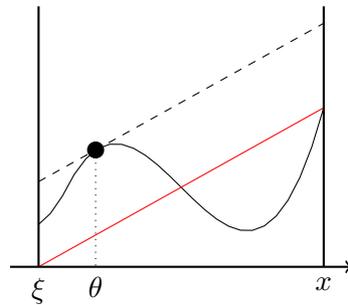
$$\boxed{f(x) - f(\xi) = Df(\theta) \cdot (x - \xi)} .$$



**Beweis.** Ist  $f$  affin linear, gilt diese Aussage für alle  $x$  und  $\theta$ . Daher kann man eine geeignete affin lineare Abbildung von  $f$  subtrahieren und oBdA annehmen

$$f(x) = f(\xi) = 0 .$$

Für  $h(t) = f(tx + (1 - t)\xi)$  liefert die Kettenregel die Formel  $h'(t_0) = Df(\theta) \cdot (x - \xi)$  mit  $\theta = t_0x + (1 - t_0)\xi$ . Dies reduziert auf folgende *Aufgabe*: Suche für die differenzierbare Funktion  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(0) = h(1) = 0$  ein  $0 < t_0 < 1$  mit  $h'(t_0) = 0$ . Die *Lösung*: Für ein Maximum oder Minimum von  $h$  in  $t_0 \in (0, 1)$  gilt  $h'(t_0) = 0$  nach (\*). Beide Extremwerte existieren, da  $h$  stetig und  $[0, 1]$  folgenkompakt ist. Wegen  $h(0) = h(1) = 0$  existiert mindestens ein Extremwert in einem inneren Punkt  $t_0 \in (0, 1)$ .  $\square$



**Folgerung.** Gilt  $Df(\xi) = 0$  für alle  $\xi \in U$  und ist  $U$  offen, dann ist  $f$  lokalkonstant<sup>1</sup> auf  $U$ .

**Lemma 4.9 (Extremwerte).** Sei  $f$  eine differenzierbare reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{R}^n$ . Nimmt  $f$  in  $\xi \in U$  ein Maximum (analog Minimum) an, dann verschwindet die Jacobimatrix im Punkt  $\xi$  (man nennt solche Punkte daher kritische Punkte)

$$\boxed{f(\xi) = \max_{x \in U} f(x) \implies Df(\xi) = 0} .$$

<sup>1</sup>d.h., für jeden Punkt  $x \in U$  gibt es eine offene Kugel um  $x$  in  $U$ , auf der  $f$  konstant ist.

**Beweis.**  $x_i = \xi_i$  ist ein Extremwert der eingeschränkten Funktion  $f(\xi_1, \dots, x_i, \dots, \xi_n)$  für festes  $\xi$ . Daher gilt  $\partial_i f(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n) = \partial_i f(\xi) = 0$  nach (\*) für alle  $i$ , also  $Df(\xi) = 0$ .  $\square$

Die Umkehrung gilt bekanntlich nicht! Die Funktion  $f(x) = -x^3$  hat einen kritischen Punkt bei  $x = 0$ , obwohl an dieser Stelle kein Extremwert vorliegt. Aber es gilt

**Lemma 4.10.** Sei  $h : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Gilt  $h'(0) = 0$  und  $h''(\eta) < 0$  für alle  $\eta \in (0, r)$ , dann gilt  $h(t) < h(0)$  für alle  $0 < t \leq r$ .

**Beweis.** Aus dem Mittelwertsatz folgert man die Existenz von Punkten  $0 < \eta < \theta < t$  mit  $h(t) - h(0) = t \cdot h'(\theta)$  und  $h'(\theta) - h'(0) = \theta \cdot h''(\eta)$ . Aus  $h'(0) = 0$  folgt daher  $h'(\theta) < 0$ , und damit  $h(t) - h(0) < 0$ .  $\square$

## 4.5 Symmetrie der Hessematrix

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  zulässig und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $C^2(U)$ , d.h.  $f$  sei eine zweimal stetig partiell differenzierbare reellwertige Funktion auf  $U$ . Damit sei gemeint, daß  $f$  zweimal partiell differenzierbar auf  $U$  ist in alle Koordinatenrichtungen, und daß diese partiellen Ableitungen stetige Funktionen auf  $U$  definieren. Unter dieser Annahme ist die **Hessematrix**  $H(f)(\xi)$

$$H(f)(\xi) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \right)$$

als reelle  $n \times n$ -Matrix für alle Punkte  $\xi \in U$  definiert. Die Koeffizienten  $H(f)_{ij}(x)$  der Hessematrix sind nach Annahme auf  $U$  stetige reellwertige Funktionen der Variable  $x$ .

**Satz 4.11.** Unter den obigen Annahmen an  $f$  und  $U$  ist die Hessematrix  $H(f)(\xi)$  eine symmetrische reelle  $n \times n$ -Matrix für alle  $\xi \in U$ .

**Beweis.** Es genügt der Fall einer Funktion in zwei Variablen  $f(x, y)$ . Wäre  $f_{xy}(\xi) \neq f_{yx}(\xi)$ , gäbe es aus Stetigkeitsgründen einen nicht degenerierten kleinen Quader  $Q$  um den Punkt  $\xi$  mit

$$\partial_x \partial_y f(\theta) \neq \partial_y \partial_x f(\eta) \quad \text{für alle } \theta, \eta \in Q.$$

Setzt man  $g(x) = f(x, x_2) - f(x, \xi_2)$ , ist  $F := f(x_1, x_2) - f(x_1, \xi_2) - f(\xi_1, x_2) + f(\xi_1, \xi_2)$  gleich  $F = g(x_1) - g(\xi_1)$ . Für  $x = (x_1, x_2) \in Q$  liefert zweimal Anwenden des Mittelwertsatzes

$$F = (x_1 - \xi_1) \cdot g'(\theta_1) = (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \cdot \partial_y \partial_x f(\theta_1, \theta_2).$$

Hierbei weiß man  $\theta_1 \in (x_1, \xi_1)$  und  $\theta_2 \in (x_2, \xi_2)$ , also  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in Q$ . Ebenso gilt auch  $F = h(x_2) - h(\xi_2)$  für  $h(y) = f(x_1, y) - f(\xi_1, y)$ . Dies liefert vollkommen analog

$$F = (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \cdot \partial_x \partial_y f(\eta_1, \eta_2)$$

für ein  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in Q$ . Offensichtlich ein Widerspruch, da  $x_2 \neq \xi_2$  und  $x_1 \neq \xi_1$  gewählt werden kann, und dann die rechten Seiten, die beide  $F$  berechnen, verschieden wären!  $\square$

## 4.6 Lokale Maxima

Eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $H$  mit reellen Koeffizienten  $H_{ij}$  heisst positiv definit und man schreibt  $H > 0$ , wenn für alle Vektoren  $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$  gilt

$${}^T v H v = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i v_j H_{ij} > 0 .$$

Ist  $-H$  positiv definit, nennt man  $H$  negativ definit und schreibt  $H < 0$ .

**Satz 4.12.** Sei  $U$  zulässig im  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in C^2(U)$ . Gilt

$$\boxed{Df(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad H(f)(\xi) < 0 \quad (\text{resp. } H(f)(\xi) > 0) ,}$$

dann ist  $f(\xi)$  ein **lokales striktes Maximum (Minimum)** von  $f$  auf jedem nichtdegenerierten Quader  $Q$  in  $U$ , der  $\xi$  enthält. Insbesondere gibt es eine offene Teilmenge  $V$  von  $U$ , welche  $\xi$  enthält, so dass gilt

$$\boxed{f(\xi) = \max_{x \in V} f(x)}$$

(resp.  $f(\xi) = \min_{x \in V} f(x)$ ).

Setzt man  $H(x) := H(f)(x)$ , gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4.12

**Lemma 4.13.** Ist  $H(\xi) < 0$ , dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  und ein  $r > 0$ , so daß für alle  $x \in Q$  in der offenen Kugel um  $\xi$  vom Radius  $r$  gilt

$$\boxed{{}^T v H(x) v \leq -C \|v\|^2 .}$$

**Beweis.** ObdA genügt es dazu die Menge  $S$  aller Vektoren  $v$  von der Länge 1 zu betrachten, und die  $x$  aus einer abgeschlossenen beschränkten Kugel  $K$  von positivem Radius  $r$  um  $\xi$ . Dann ist  $S \times K$  folgenkompakt und die Aussage folgt aus Satz 2.10, vorausgesetzt  ${}^T v H(x) v < 0$  gilt für alle  $(v, x) \in S \times K$ . Angenommen dies wäre nicht der Fall, egal wie klein man  $r$  wählt. Dann existiert eine Folge  $x_m \rightarrow \xi$  und Vektoren  $v_m \neq 0$  der Länge 1 mit

$${}^T v_m H(x_m) v_m \geq 0 .$$

Da die Einheitskugel  $S$  abgeschlossen und beschränkt und damit folgenkompakt ist, kann man durch Übergang zu einer Teilfolge annehmen  $v_m \rightarrow v$  für einen Vektor  $v$  der Länge 1. Daraus folgt im Limes  $m \rightarrow \infty$

$${}^T v H(\xi) v \geq 0 \quad , \quad v \neq 0$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Zum Beweis des Satzes 4.12 fixiere  $Q \subseteq U$ ,  $r > 0$  und  $v \in S$  mit  $\xi + tv \in Q$  für  $0 \leq t \leq r$ .

**Beweis.** Setze  $h(t) = f(\xi + tv)$ . Aus  $h'(t) = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f(\xi + tv)$  und  $Df(\xi) = 0$  folgt dann  $h'(0) = 0$ . Ein weiteres Anwenden der Kettenregel liefert

$$h''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \partial_j \partial_i f(\xi + tv) = {}^T v H(f)(\xi + tv) v .$$

Lemma 4.13 zeigt  $h''(t) < 0$  für  $v \in S$  und  $t \in (0, r)$ . Der Satz folgt damit aus Lemma 4.10.  $\square$

## 4.7 Der Hauptsatz

**Satz 4.14.** Sei  $a < b$  und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt := I(\chi_{[a,x]} \cdot f)$$

eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$ , und es gilt

$$F'(x) = f(x) .$$

Jede andere differenzierbare Funktion  $G(x)$  auf  $[a, b]$  mit der Eigenschaft  $G'(x) = f(x)$  (solche Funktionen  $G$  nennt man **Stammfunktionen** von  $f$ ) unterscheidet sich von  $F(x)$  um eine reelle additive Konstante  $C$ .

**Beweis.** Sei  $\xi \in [a, b]$ . Für  $h(x) = F(x) - F(\xi) - f(\xi) \cdot (x - \xi)$  ist  $h(x) = o(x - \xi)$  zu zeigen. Dazu genügt, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit der Eigenschaft  $|h(x)| < |x - \xi| \varepsilon$  für alle  $x$  mit der Eigenschaft  $|x - \xi| < \delta$ . Dabei können wir  $h(x)$  durch  $-h(x)$  ersetzen.

Je nachdem ob  $x \geq \xi$  oder  $x \leq \xi$  gilt nach Lemma 3.10

$$\pm h(x) = I(\chi_{[a,x]} \cdot f) - I(\chi_{[a,\xi]} \cdot f) - I(\chi_{[\xi,x]} \cdot f(\xi)) = I\left(\chi_{[\xi,x]} \cdot (f - f(\xi))\right) .$$

Aus der Boxungleichung (siehe Abschnitt 3.1) folgt daher

$$|h(x)| \leq |x - \xi| \sup_{t \in [\xi, x]} |f(t) - f(\xi)| .$$

Die stetige Funktion  $f(x)$  ist gleichmäßig stetig auf dem folgenkompakten Raum  $[a, b]$  nach dem Satz von Heine. Es folgt  $\sup_{t \in [\xi, x]} |f(t) - f(\xi)| < \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$  mit  $|x - \xi| < \delta$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . Dies zeigt die erste Behauptung. Der verbleibende Zusatz folgt aus dem Mittelwertsatz: Die Ableitung von  $F(x) - G(x)$  ist Null auf  $[a, b]$ . Nach Satz 4.8 ist daher  $F(x) - G(x)$  konstant auf  $[a, b]$ .  $\square$

**Konvention.** Man definiert ganz allgemein für eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und beliebige  $x, y \in [a, b]$  das **orientierte Integral**

$$\int_x^y f(t) dt$$

durch  $I(\chi_{[x,y]}f)$  im Fall  $x \leq y$ , bzw. durch  $-I(\chi_{[y,x]}f)$  im Fall  $y \leq x$ . Mit dieser Konvention gilt dann (wegen des Hauptsatzes) für jede Stammfunktion  $G$  von  $f$  auf  $[a, b]$  die Formel

$$\boxed{\int_x^y f(t) dt = G(y) - G(x)}.$$

**Folgerung.**  $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$  ist differenzierbar<sup>2</sup> auf  $\mathbb{R}_{>0}$  mit Ableitung  $\frac{1}{x}$ .

## 4.8 Differentialgleichungen

Gegeben sei eine stetige Funktion  $h = h(x, y)$

$$h : [a, b] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

welche von den Variablen  $x \in [a, b]$  und  $y \in \mathbb{R}^N$  abhängt. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit der Eigenschaft

$$\boxed{f'(x) = h(x, f(x)) \quad \text{und} \quad f(x_0) = y_0}$$

für gegebenes  $x_0 \in [a, b]$  und den **Anfangswert**  $y_0 \in \mathbb{R}^N$ . Hierbei bezeichne  $f'(x)$  die komponentenweise Ableitung von  $f$  nach  $x$ .

**Satz 4.15 (Picard).** Sei  $h(x, y)$  ausserdem Lipschitz-stetig in der Variable  $y$  mit einer nicht von  $x$  abhängigen Lipschitzkonstante  $M$ . Dann existiert auf dem Intervall  $[a, b]$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $f(x) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$  von der Differentialgleichung  $f'(x) = h(x, f(x))$  zu dem gegebenem Anfangswert  $f(x_0) = y_0$ .

Nach Annahme gilt  $\|h(x, y_1) - h(x, y_2)\|_{\mathbb{R}^N} \leq M \cdot \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^N}$  für eine Lipschitz-Konstante  $M$ , welche nicht (!) von der Variable  $x \in [a, b]$  abhängt.

**Beweis.** Die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung ist wegen unserem Hauptsatz 4.14 äquivalent zu einer Integralgleichung:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ ist differenzierbar auf } [a, b] \\ f'(x) = h(x, f(x)), f(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ ist stetig auf } [a, b] \\ f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt \end{array} \right.$$

*Beweis der Äquivalenz von rechts nach links.* Nach Annahme sind  $h(t, y)$  und  $f(t)$ , und daher auch  $h(t, f(t))$ , stetig. Das vektorwertige Integral  $F(x) = \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt$  ist komponentenweise definiert und alle Komponenten sind in der Variable  $x$  differenzierbare Funktionen (Hauptsatz) und für den Vektor der Ableitungen gilt  $F'(x) = h(x, f(x))$ . Aus  $f(x) = y_0 + F(x)$  folgt daher durch Ableiten  $f'(x) = h(x, f(x))$ . Für  $x = x_0$  gilt  $f(x_0) = y_0$  wegen  $F(x_0) = 0$ .

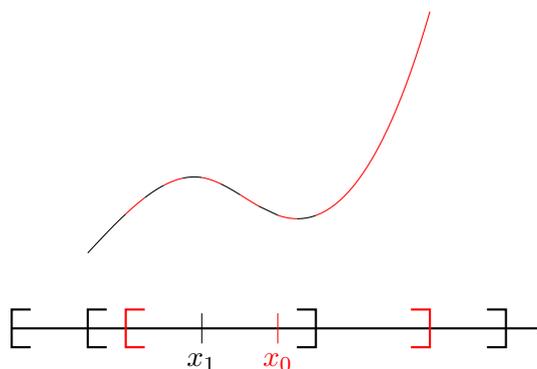
<sup>2</sup>Wegen der Kettenregel gilt daher  $\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + yx)/x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+yx)-0}{x-0} = \log(1+yx)'|_{x=0} = y$ . Anwenden der stetigen Funktion  $\exp$  für  $x_n = \frac{1}{n}$  liefert die nützliche Formel  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{y}{n})^n = e^y$ .

*Beweis der Äquivalenz von links nach rechts.* Ist  $f(x)$  differenzierbar, dann ist  $f(x)$  stetig nach Lemma 4.6. Aus dem Hauptsatz folgt andererseits

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt .$$

Mit Hilfe der gezeigten Äquivalenz genügt es also die entsprechende Integralgleichung auf  $[a, b]$  zu lösen. Wir lösen die Integralgleichung (und damit die Differentialgleichung) dazu zuerst *lokal* auf Teilintervallen genügend kleiner Länge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ .

**Verheftung.** Angenommen die Lösung der Differential-(oder Integral)gleichung existiert und ist lokal eindeutig auf jedem Teilintervall von  $[a, b]$  der Länge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ . Man überdeckt dann das Intervall  $[a, b]$  durch überlappende Teilintervalle der Länge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ , wählt Hilfspunkte  $x_i$  in den Überlappungen und wendet das lokale Resultat sukzessive für alle Hilfspunkte  $x_i$  an. Dies reduziert den allgemeinen Fall auf den Beweis der lokalen Version mit Intervalllänge  $< \frac{1}{M\sqrt{N}}$ .



**Beweis der lokalen Version.** Der Raum  $X = C([a, b], \mathbb{R}^N)$  aller stetigen  $\mathbb{R}^N$ -wertigen Funktionen ist, versehen mit der Supremums-Norm, ein vollständiger metrischer Raum (nach Satz 2.24). Die Selbstabbildung  $F : X \rightarrow X$  gegeben durch

$$F(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt$$

ist wohldefiniert, denn für stetiges  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist auch  $F(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig und sogar komponentenweise differenzierbar. Die Lösung unserer (lokalen) Integralgleichung ist äquivalent zu der Fixpunktgleichung

$$F(f) = f \quad , \quad f \in X .$$

Unsere Behauptung über die *lokale* Existenz und Eindeutigkeit ergibt sich jetzt sofort aus dem **Banachschen Fixpunktsatz**, denn im Fall  $l([a, b]) < \frac{1}{M\sqrt{N}}$  ist  $F : X \rightarrow X$  kontraktiv wegen

$$d_X(F(f), F(g)) = d_X \left( y_0 + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt , y_0 + \int_{x_0}^x h(t, g(t)) dt \right)$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{x \in [a, b]} \left\| \int_{x_0}^x \left( h(t, f(t)) - h(t, g(t)) \right) dt \right\|_{\mathbb{R}^N}$$

Abschätzen des Integralvektors im  $\mathbb{R}^N$  (siehe Seite 15) liefert für  $\kappa = |b - a|M\sqrt{N}$

$$\begin{aligned} d_X(F(f), F(g)) &\leq \sqrt{N} \cdot |b - a| \cdot \sup_{t \in [a, b]} \|h(t, f(t)) - h(t, g(t))\|_{\mathbb{R}^N} \\ &\leq \sqrt{N}|b - a|M \cdot \sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathbb{R}^N} = \kappa \cdot d_X(f, g) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Boxungleichung und der Lipschitzstetigkeit von  $h$ . Aus  $|b - a| < \frac{1}{M \cdot \sqrt{N}}$  folgt die gewünschte Kontraktivität  $\kappa < 1$ .  $\square$

**Beispiel 4.16.** Ist  $h(x, y)$  linear in  $y$

$$h(x, y) = A(x) \cdot y + b(x)$$

mit einer  $N \times N$ -Matrixfunktion  $A(x)$  und einem Vektor  $b(x)$ , welche stetig von  $x$  abhängen, dann sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard erfüllt. [Benutze Satz 2.10 und den Beweis von Beispiel 2.2 (3).]

**Beispiel 4.17.** Um für  $\eta_0, \dots, \eta_{N-1} \in \mathbb{R}$  allgemeinere Differentialgleichungen vom Typ

$$\boxed{g^{(N)}(x) = H(x, g(x), \dots, g^{(N-1)}(x))}$$

mit der Anfangswertbedingung  $g(x_0) = \eta_0, \dots, g^{(N-1)}(x_0) = \eta_{N-1}$  zu behandeln, definiert man eine vektorierte Hilfsfunktion durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \\ \dots \\ \dots \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

und erhält eine äquivalente Differentialgleichung

$$\boxed{f'(x) = h(x, f(x)) \quad , \quad f(x_0) = y_0} \quad , \quad y_0 = (\eta_0, \dots, \eta_{N-1})$$

wobei  $h : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  definiert ist durch

$$(x, y_1, \dots, y_N) \mapsto (y_2, \dots, y_{N-1}, H(x, y_1, \dots, y_{N-1})) .$$

Kombiniert man unsere letzten beiden Beispiele 4.16 und 4.17, erhält man folgende Aussage über lineare Differentialgleichungen auf einem Intervall  $[a, b]$ ,  $a < b$ .

**Satz 4.18.** Seien  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  stetige reellwertige Funktionen auf  $[a, b]$ . Seien  $x_0 \in [a, b]$  und  $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann besitzt die **lineare Differentialgleichung**

$$(*) \quad \boxed{g^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) \cdot g'(x) + a_n(x) \cdot g(x) = a_0(x)}$$

zu gegebenen Anfangsbedingungen

$$g(x_0) = \eta_0, \dots, g^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche  $n$ -mal stetig differenzierbar ist auf  $[a, b]$ .

**Beweis.** Die Methode von Beispiel 4.17 führt auf eine vektorwertige lineare Differentialgleichung  $f'(x) = A(x) \cdot f(x) + b(x)$  wie in Beispiel 4.16, hier für die Matrixfunktion

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \dots & -a_2(x) & -a_1(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Vektors  $b(x)$  sind Null bis auf den letzten Eintrag  $b_n(x) = a_0(x)$ . □

Ist  $b(x) = 0$  oder äquivalent dazu  $a_0(x) = 0$ , nennt man die obige Differentialgleichung **homogen**. Die Lösungen einer homogen linearen Differentialgleichung wie in Satz 4.18 bilden einen reellen Vektorraum  $V$  von Funktionen, wenn man die Forderung von Anfangswertbedingungen weglässt, denn für Lösungen  $g(x)$  und  $\tilde{g}(x)$  und beliebige reelle Konstanten  $\alpha, \beta$  ist dann auch  $\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot \tilde{g}(x)$  eine Lösung, wie man sofort sieht.

**Satz 4.19.** Der Raum  $V$  aller Lösungen einer homogenen Differentialgleichung vom Typ  $(*)$  ist ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ .

**Beweis.** Für  $x_0 \in [a, b]$  ist die Abbildung

$$ev_{x_0} : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g \mapsto (g(x_0), \dots, g^{(n-1)}(x_0))$$

injektiv (Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.18) und surjektiv (Existenzaussage von Satz 4.18), also ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. □

**Beispiel 4.20 (Sinus und Cosinus).** Wir definieren  $\sin(x)$  resp.  $\cos(x)$  als die eindeutig bestimmten (zweimal stetig differenzierbaren) Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , welche in dem zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  der Lösungen der homogenen Differentialgleichung vom Grad  $n = 2$

$$g''(x) + g(x) = 0$$

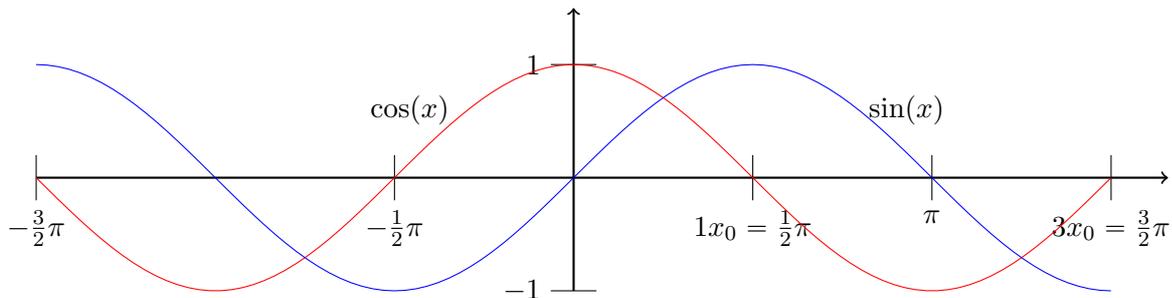
liegen und die Anfangswertbedingungen  $g(0) = 0, g'(0) = 1$  resp.  $g(0) = 1, g'(0) = 0$  erfüllen. Offensichtlich gilt hier  $g \in V \implies g' \in V$ . Es folgt  $\sin(x)' = \cos(x)$  und  $\cos(x)' = -\sin(x)$  und somit durch Ableiten aus dem Mittelwertsatz damit

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Für  $g \in V$  gilt  $g(x) = g(0) \cdot \cos(x) + g'(0) \cdot \sin(x)$ . Wegen  $g(x) \in V \implies g(x + x_0) \in V$  (Kettenregel !) folgt  $\cos(x + x_0) = \cos(x_0)\cos(x) - \sin(x_0)\sin(x)$  sowie  $\sin(x + x_0) = \sin(x_0)\cos(x) + \cos(x_0)\sin(x)$ . Dies beweist das sogenannte

**Lemma 4.21 (Additionstheorem).** Für  $e(x) := \cos(x) + i \cdot \sin(x)$  in  $\mathbb{C}$  und alle  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  gilt

$$e(x + x_0) = e(x) \cdot e(x_0).$$



**Behauptung.** Der Kern  $K$  des so definierten Homomorphismus  $e : \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von  $\mathbb{R}$  und es gilt für eine reelle Zahl  $2\pi > 0$

$$K = 2\pi \cdot \mathbb{Z}.$$

Die Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind daher periodisch mit der genauen Periode  $2\pi$ .

**Beweis.** Aus Stetigkeitsgründen existiert wegen  $\cos(0) = 1$  ein  $\delta > 0$  mit  $\cos(x) > 0$  für  $x \in I = (0, \delta)$ . Für  $0 \leq x_1 < x_2 \leq \delta$  gilt dann nach dem Mittelwertsatz  $\sin(x_2) - \sin(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot \cos(\theta) > 0$ . Also  $K \cap I = \emptyset$ . Ist  $K \neq \{0\}$ , wird daher  $K$  von  $2\pi := \inf(K \cap \mathbb{R}_{>0})$  als Gruppe erzeugt! Zum Nachweis von  $K \neq \{0\}$  genügt ein  $x_0 > 0$  mit  $\cos(x_0) = 0$ . [Dann ist  $\sin(x_0) = \pm 1$ . Es folgt  $e(x_0) = \pm i$  und damit  $e(4x_0) = 1$ , also  $4x_0 \in K$ .]

*Zur Existenz von  $x_0$ .* Wäre  $\cos(x) > 0$  für alle  $x > 0$ , wäre nach dem Mittelwertsatz  $\sin(x)$  strikt monoton steigend auf  $(0, \infty)$ . Also insbesondere wäre  $\sin(x) > 0$ , nach oben beschränkt durch 1 wegen  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ , und  $\cos(x)$  wäre monoton fallend nach unten beschränkt durch 0. Nach Satz 1.27 existiert deshalb der Limes  $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} e(n)$ . Die Monotonie des  $\sin(x)$  impliziert  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . Aus Lemma 4.21 folgt andererseits  $\zeta = \zeta \cdot \zeta$ , also  $\zeta = 0, 1$ . Ein Widerspruch! Daher nimmt  $\cos(x)$  im Bereich  $\mathbb{R}_{>0}$  nicht nur positive Werte an. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle  $x_0 > 0$  von  $\cos(x)$ .  $\square$

## 4.9 Stetig partiell differenzierbare Funktionen

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

in  $C^1(U, \mathbb{R}^m)$ , d.h. eine auf  $U$  einmal stetig partiell differenzierbare Funktion.

**Lemma 4.22.** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine einmal stetig partiell differenzierbare Funktion, dann ist  $f$  differenzierbar auf  $U$ .

**Beweis.** Wegen Lemma 4.5 können wir  $m = 1$  annehmen. Für festes  $\xi \in U$  und alle  $x$  nahe genug bei  $\xi$  ist die folgende Umformung wohldefiniert

$$f(x) - f(\xi) = [f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_1, x_2, \dots, x_n)] + [f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n)] \\ + \dots + [f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)].$$

Betrachtet man die Funktion in der  $i$ -ten Klammer als Funktion der Variable  $x_i$  bei festgehaltenen anderen Variablen, ergibt der eindimensionale Mittelwertsatz 4.8.

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

für gewisse  $\theta_i$  zwischen  $x_i$  und  $\xi_i$ . Es folgt daher

$$f(x) - f(\xi) - \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi) = o(x - \xi),$$

denn rechts steht  $\sum_i (x_i - \xi_i) \cdot [\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi)]$  mit  $|x_i - \xi_i| \leq \|x - \xi\|$  und der Term in eckigen Klammern ist stetig bei  $x = \xi$  mit

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi) \right| = 0,$$

weil die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i} f$  stetig im Punkt  $\xi$  sind. Beachte  $x \rightarrow \xi$  impliziert  $\theta_i \rightarrow \xi_i$ . Also ist  $f$  differenzierbar im Punkt  $\xi$ .  $\square$

**Lemma 4.23 (Kritische Punkte).** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  einmal stetig partiell differenzierbar auf  $U$ . Gilt  $Df(\xi) = 0$  für ein  $\xi \in U$ , dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so daß (für die Euklidische Norm oder die Quadernorm des  $\mathbb{R}^n$ ) gilt

$$\|x - \xi\| < \delta, \|y - \xi\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \cdot \|x - y\|.$$

**Beweis.** ObdA ist  $m = 1$ . Wähle  $\delta > 0$  so klein, daß die Kugel vom Radius  $\delta$  um  $\xi$  ganz in  $U$  enthalten ist. Aus dem Zwischenwertsatz sowie der Kettenregel folgt dann

$$|f(x) - f(y)| = \|Df(\theta) \cdot (x - y)\| \leq n \sup_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\theta) \right| \cdot \|x - y\|$$

für alle  $x, y$  aus dieser Kugel, da die Verbindungsgerade zwischen  $x$  und  $y$  dann auch in dieser Kugel liegt. Aus der Annahme  $\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) = 0$  und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Punkt  $\xi$  folgt aber  $n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\theta) \right| < \varepsilon$  für alle  $\theta$  mit  $\|\theta - \xi\| < \delta$ , wenn  $\delta > 0$  genügend klein gewählt wird.  $\square$

## 4.10 Der Umkehrsatz

Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine einmal stetig partiell differenzierbare, also insbesondere differenzierbare Funktion auf  $U$ . Wegen  $n = m$  ist in jedem Punkt  $\xi \in U$  die Jacobimatrix eine  $n \times n$ -Matrix. Der folgende Satz zeigt, dass die Invertierbarkeit der Jacobimatrix  $Df(\xi)$  im Punkt  $\xi$  eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer lokalen Umkehrfunktion von  $f$  in der Nähe von  $\xi$  resp.  $f(\xi)$  ist:

**Satz 4.24.** Für  $\xi_0 \in U$  mit invertierbarem  $Df(\xi_0)$  gibt es eine offene Teilmenge  $V$  von  $U$ , welche  $\xi_0$  enthält, für die  $f$  eingeschränkt auf  $V$  eine bijektive Abbildung von  $V$  auf  $W = f(V)$  definiert, so daß gilt

$$\boxed{W = f(V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}} .$$

Weiterhin: Die lokale Umkehrfunktion

$$\boxed{f^{-1} : W \rightarrow V}$$

ist einmal stetig partiell differenzierbar, und damit auch differenzierbar auf  $W = f(V)$ .

**Beispiel.** Sei  $U = (0, \infty)$  und  $f(x) = \log(x)$ . Dann ist  $f'(x) = 1/x$  eine auf  $U$  stetige Funktion und die Voraussetzungen des Umkehrsatzes sind erfüllt. Daher ist die Umkehrfunktion  $\exp$  des Logarithmus eine differenzierbare Funktion. Aus  $\log(\exp(x)) = x$  und folgt mit der Kettenregel  $\log'(\exp(x)) \cdot \exp(x)' = x' = 1$ . Also  $\exp(x)' = \exp(x)$ . Dies zeigt<sup>3</sup>

**Korollar 4.25.** Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine (unendlich oft) differenzierbare Funktion mit der Ableitung

$$\boxed{\exp(x)' = \exp(x)} .$$

**Bemerkung.** Die Invertierbarkeit von  $Df(\xi)$  im Umkehrsatz ist andererseits eine notwendige Bedingung für die Existenz einer differenzierbaren lokalen Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  in der Nähe von  $\xi$ . Dies folgt aus der Kettenregel, denn  $g \circ f = id$  impliziert  $Dg(\eta) \circ Df(\xi) = D(id)(\xi) = id$  für  $\eta = f(\xi)$ . Somit ist  $Dg(\eta)$  als Matrix zu  $Df(\xi)$  invers.

**Beweis.** Wir geben zuerst den Beweis im Spezialfall  $\xi_0 = f(\xi_0) = 0$  und  $Df(\xi_0) = id$ .

Die Hilfsfunktion  $F = F_\eta$ :

$$\boxed{F(x) = x - f(x) + \eta}$$

hat für gegebenes konstantes  $\eta \in \mathbb{R}^n$  verschwindende Ableitung im Punkt  $\xi$ . Für  $\varepsilon = 1/2$  gilt dann nach Lemma 4.23 für alle  $x, y$  vom Abstand zu  $\xi_0 = 0$  kleiner als  $\delta = \delta(1/2) > 0$

$$\boxed{\|F(x) - F(y)\| < \frac{1}{2}\|x - y\|} .$$

<sup>3</sup>Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  folgt  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$  wegen  $\exp(\alpha \cdot \log(x))' = \exp(\alpha \cdot \log(x)) \cdot \frac{\alpha}{x}$  sowie  $\frac{1}{x} = \exp(-\log(x))$ .

Der vollständige Raum  $X$ . Wir wählen eine abgeschlossene Kugel<sup>4</sup>  $X$  um  $\xi_0 = 0$  vom Radius  $r$  für ein  $0 < r < \delta$ . Dann ist  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $\frac{1}{2}$ .

Bedingung an  $\eta$ .  $F(0) = \eta$  und  $\|F(x)\| \leq \|F(x) - F(0)\| + \|F(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|\eta\|$  implizieren für  $x \in X$  (d.h.  $\|x\| \leq r$ ) sowie gleichzeitig für

$$\|\eta\| < r/2$$

die Ungleichung  $\|F(x)\| \leq r$ . Es folgt

$$\boxed{F : X \rightarrow X}.$$

*Fixpunktsatz.* Der Fixpunktsatz von Banach liefert daher einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $\xi \in X$  der kontraktiven Abbildung  $F : X \rightarrow X$ . Beachte  $F(\xi) = \xi$  ist äquivalent zu  $f(\xi) = \eta$ . Mit anderen Worten  $\xi = f^{-1}(\eta)$ :

$$\exists! \xi \in X \text{ mit } f(\xi) = \eta, \text{ falls } \|\eta\| < r/2.$$

*Konstruktion von  $V$ .* Sei  $W = B_{r/2}(0)$  die offene Kugel um Null aller  $\eta \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\eta\| < r/2$ . Da  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f$  stetig ist, ist das Urbild  $f^{-1}(W)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  (benutze Lemma 4.6 und Satz 2.12). Für  $V = f^{-1}(W) \cap X$  gilt dann wie bereits gezeigt

$$\boxed{f : V \cong f(V) = W}.$$

*Kontroll-Abschätzungen.* Die Kontraktivität  $\|F(x) - F(y)\| < \frac{1}{2}\|x - y\|$  von  $F$  auf  $X$  liefert für  $x, y \in X$  mit Hilfe der unteren und oberen Dreiecksungleichung<sup>5</sup> (s. Seite 8)

$$\boxed{\frac{1}{2}\|x - y\| < \|f(x) - f(y)\| < \frac{3}{2}\|x - y\|}.$$

*$V$  ist offen.*  $\xi \in V \implies \eta = f(\xi) \in W$ . Aus der unteren Kontroll-Abschätzung von  $f$  folgt für  $x = \xi, y = 0$  dann  $\frac{1}{2}\|\xi\| < \|\eta\|$ . Andererseits  $\|\eta\| < \frac{r}{2}$ . Somit  $\|\xi\| < r$ . Also liegt  $\xi$  bereits in der offenen Kugel  $X^0 \subset X$  vom Radius  $r$  um Null. Daher ist  $V = f^{-1}(W) \cap X = f^{-1}(W) \cap X^0$  als Durchschnitt zweier offener Mengen selbst offen.

*Stetigkeit von  $f^{-1} : W \rightarrow V$ .* Eine unmittelbare Konsequenz von

$$\frac{1}{2}\|f^{-1}(\eta_1) - f^{-1}(\eta_2)\| < \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

Dies gilt für alle  $\eta_1, \eta_2 \in W$  wegen der linken Kontrollabschätzung.

*Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  im Punkt 0.* Für  $\eta \neq 0 \iff f^{-1}(\eta) = \xi \neq 0$  gilt

$$\frac{\|f^{-1}(\eta) - f^{-1}(0) - id(\eta - 0)\|}{\|\eta - 0\|} = \frac{\|f^{-1}(\eta) - \eta\|}{\|\eta\|} = \frac{\|\xi - f(\xi)\|}{\|f(\xi)\|}$$

<sup>4</sup>Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , also versehen mit der Euklidischen Metrik nach 2.8 ein vollständiger metrischer Raum.

<sup>5</sup>Benutze  $\|u\| - \|v\| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  für  $u = x - y$  und  $v = F(y) - F(x)$  und  $u + v = f(y) - f(x)$ .

$$= \frac{\|\xi\|}{\|f(\xi)\|} \cdot \frac{\|f(\xi) - f(0) - id(\xi - 0)\|}{\|\xi - 0\|}$$

Da  $f$  nach 4.6 auf  $V$  stetig ist, und  $f^{-1}$  stetig auf  $W$  ist, sind  $\xi \rightarrow 0$  und  $\eta = f(\xi) \rightarrow 0$  zueinander äquivalent. Da rechts der Limes  $\xi \rightarrow 0$  existiert und Null ist ( $f$  ist differenzierbar im Punkt  $\xi = 0$  mit der Ableitung  $id$ , und der Faktor  $\|\xi\|/\|f(\xi)\|$  kann durch 2 abgeschätzt werden wegen der Kontrollabschätzungen) existiert der Limes  $\eta \rightarrow 0$  links, und ist auch Null. Somit ist  $f^{-1}$  differenzierbar im Punkt  $\eta = 0$  mit der Ableitung  $Df^{-1}(0) = id$ .

*Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  auf  $W$ .* Hierzu nehmen wir an, dass der Radius  $r$  obdA so klein gewählt wurde, dass für alle  $\xi \in X$  und damit für alle  $\xi \in V$  die Ableitung von  $f$  im Punkt  $\xi$  invertierbar ist. Dann zeigt unser vorheriges Argument die Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  in allen Punkten  $\eta = f(\xi) \in W$ . Beachte die nachfolgende Reduktion auf den Spezialfall.

*Stetig partielle Differenzierbarkeit von  $f^{-1}$  auf  $W$ .* Wegen der Kettenregel ist  $Df^{-1}(\eta)$  die zu  $Df(\xi)$  inverse Matrix ist. Die Cramersche Regel oder der Laplace Entwicklungssatz liefert daher die Formel

$$Df^{-1}(\eta) = (Df(\xi))^{-1} = \frac{Df(\xi)^{ad}}{\det(Df(\xi))}.$$

Beachte,  $\xi$  hängt stetig von  $\eta$  ab, da  $f^{-1}$  stetig ist. Die Einträge der adjungierten Matrix und die Determinante von  $Df(\xi)$  sind Polynome in den Matrixkoeffizienten von  $Df(\xi)$ , also stetig in  $\xi$ , da  $f$  stetig partiell differenzierbar ist. Andererseits sind die partiellen Ableitungen von  $f^{-1}$  die Koeffizienten der Jacobimatrix  $Df^{-1}(\eta)$ , also nach obigem stetige Funktionen von  $\eta \in W$ .

**Reduktion auf den Spezialfall.** Die zum Beweis des Umkehrsatzes gemachten Annahmen

$$\xi_0 = 0 \text{ und } \eta_0 = f(\xi_0) = 0 \text{ und } Df(\xi_0) = id$$

sind unbedenklich. Dazu modifiziert man ein allgemeines  $f$  mit affin linearen Abbildungen der Gestalt  $\varphi(x) = L(x) + \xi_0, L \in Gl(n, \mathbb{R})$  resp.  $\psi(x) = x - \eta_0$ . Solche Abbildungen haben Jacobimatrix  $L$  resp.  $id$  und sind invertierbar auf ganz  $\mathbb{R}^n$ , und ihre Umkehrabbildungen sind wieder affin linear. Hat die Hilfsfunktion

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi$$

eine lokale Umkehrfunktion bei  $x = 0$ , dann besitzt unsere Funktion  $f$  wie behauptet eine lokale Umkehrfunktion<sup>6</sup> bei  $x = \xi_0$ , nämlich

$$f^{-1} = \varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi.$$

Andererseits<sup>7</sup> gilt  $\tilde{f}(0) = 0$  und  $D\tilde{f}(0) = id$ , falls  $L$  geeignet gewählt wird, nämlich

$$L = Df(\xi_0)^{-1}.$$

Genau an dieser Stelle geht die Invertierbarkeit der Jacobimatrix  $Df(\xi_0)$  ein! □

<sup>6</sup> $f \circ (\varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi) = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi = id$  und  $(\varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi) \circ f = \varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1} = id$ .

<sup>7</sup>Für die Funktion  $\tilde{f}$  folgt die Existenz der lokalen Umkehrfunktion bei  $x = 0$  aus dem vorherigen Abschnitt.

## 4.11 Substitutionsregel

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf  $U$ . Wir nehmen an,  $f$  habe kompakten Träger in  $U$ . Zur Erinnerung: Dies bedeutet, daß eine kompakte Teilmenge  $K$  von  $U$  existiert so daß  $f(x)$  ausserhalb von  $K$  Null ist. Es bezeichne  $C_c(U) \subseteq C(U)$  den Raum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in  $U$ . Funktionen in  $C_c(U)$  können durch Null zu stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  fortgesetzt werden. Dadurch ändert sich der Träger nicht. In diesem Sinn kann man  $C_c(U)$  als Unterraum von  $C_c(\mathbb{R}^n)$  auffassen. Einschränkung des Euklidischen Standardintegrals  $\int_{\mathbb{R}^n} : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Teilraum  $C_c(U)$  definiert

$$I(f) = \int_U f(x) dx \quad , \quad f \in C_c(U)$$

als abstraktes Integral auf dem Verband  $C_c(U)$ .

**Definition 4.26.** Ein **Koordinatenwechsel** ist eine bijektive und einmal stetig partiell differenzierbare Abbildung zwischen offenen Mengen  $U, V$  im  $\mathbb{R}^n$

$$\varphi : U \rightarrow V \quad ,$$

für die gilt:

$$\det D\varphi(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U \quad .$$

Man nennt  $\varphi$  einen **orientierten Koordinatenwechsel**, wenn  $\det D\varphi(x) > 0$  gilt für alle  $x \in U$ .

Nach dem Satz von der Umkehrfunktion gilt: Ist  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Koordinatenwechsel, dann ist auch  $\psi = \varphi^{-1} : V \rightarrow U$  ein Koordinatenwechsel.

**Satz 4.27 (Substitutionsregel).** Sei  $\varphi$  ein Koordinatenwechsel. Dann liegt für jede Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C_c(V)$  die Funktion  $f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$  in  $C_c(U)$ , und es gilt

$$(*) \quad \boxed{\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx} \quad .$$

*Bemerkung.* Durch einen einfachen Limeschluß folgt später die analoge Substitutionsregel für alle Funktionen  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , welche Lebesgue integrierbar sind im Sinne von Kapitel 5.

**Beweis.** 1.Schritt. Die Zerlegung  $f = f^+ - f^-$  mit  $f^+ = \max(f, 0)$  und  $f^- = -\min(f, 0)$  und die  $\mathbb{R}$ -Linearität des Integrals erlaubt es auf den Fall  $f \geq 0$  zu reduzieren. Sei also oBdA  $f \geq 0$ , und damit auch  $g(x) = f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| \geq 0$ .

2.Schritt. Es genügt für alle Koordinatenwechsel  $\varphi : U \rightarrow V$  und alle  $f \in C_c(V)$  (resp.  $L(V)$ ) mit  $f \geq 0$  zu zeigen

$$(**) \quad \boxed{\int_V f(y) dy \leq \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx} \quad ,$$

denn angewandt auf  $\psi : V \rightarrow U$  mit  $\psi = \varphi^{-1}$  und  $g(x) = f(\varphi(x))|det D\varphi(x)|$  gibt (\*\*) die Ungleichung  $\int_U g(x)dx \leq \int_V g(\psi(y))|det D\psi(y)|dy$ . Nun ist  $g(\psi(y))|det D\psi(y)|$  gleich  $f(\varphi(\psi(y)))|det D\varphi(\psi(y))||det D\psi(y)| = f(y)|det D(\varphi \circ \psi)(y)| = f(y)$ . Aus (\*\*) folgt damit

$$\int_U f(\varphi(x)) \cdot |det D\varphi(x)| \leq \int_V f(y)dy \quad ,$$

und damit, durch beide Abschätzungen zusammen, die Substitutionsregel (\*).

**3.Schritt.** Gilt (\*\*) für  $\varphi : U \rightarrow V$  und  $\psi : V \rightarrow W$ , dann gilt (\*\*) für  $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ . [ (\*\*) für die Substitutionen  $y = \varphi(x)$  und  $z = \psi(y)$  liefert  $\int_W g(z)dz \leq \int_V g(\psi(y)) \cdot |det D\psi(y)|dy \leq \int_U g(\psi(\varphi(x))) \cdot |det D(\psi(\varphi(x)))| \cdot |det D\varphi(x)|dx = \int_U g((\psi \circ \varphi)(x))|det D(\psi \circ \varphi)(x)|dx$  vermöge der Kettenregel und der Produktformel für Determinanten. Ditto für (\*).]

**4.Schritt.** Um die Aussage (\*) - oder äquivalent (\*\*) - für die Einschränkung  $\varphi : U \rightarrow V$  von linearen Abbildungen  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu zeigen, kann man sich wegen Schritt 3 auf den Fall von Elementarmatrizen zurückziehen [Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Diagonalmatrizen und oberen und unteren elementaren Dreiecksmatrizen (Scherungen).] Den Fall von Diagonalmatrizen behandelt man wie in Lemma 3.9. Der Fall einer elementaren Scherung ist ein einfacher Spezialfall des späteren Satzes von Fubini<sup>8</sup>, folgt aber auch aus einer simplen Modifikation des Arguments in Schritt 8. Wir wollen daher jetzt annehmen, im Fall von linearen Koordinatenwechseln sei (\*) bereits gezeigt. Ditto für Translationen.

**5.Schritt.** Also angenommen es gäbe einen Fall, wo die Ungleichung (\*\*) tatsächlich falsch wäre, also die linke Seite in (\*\*) etwa um  $\kappa > 0$  grösser wäre als die rechte. Wir legen dann den Träger  $K$  von  $f(\varphi(x))$  in  $U$  in einen Quader  $Q = Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ , sagen wir mit Seitenlänge  $c$ , und halbieren alle Seitenlängen sukzessive (Quaderschachtelung). Für jeden der iterierten Teilquader  $Q_m$  ist die Funktion  $\chi_{\varphi(Q_m)}(y)f(y)$  integrierbar bezüglich eines erweiterten Integrals  $I^-$  (siehe Beispiel 2.25 und 3.20 zusammen mit Lemma 3.21). Dann zeigt<sup>9,10</sup> man leicht durch einen

**Schubfachschluss(!):** Es gibt eine absteigende Folge von Teilquadern  $Q_m \subseteq Q_0$  mit  $vol(Q_m) = 2^{-mn} vol(Q_0)$  sowie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int \chi_{\varphi(Q_m)}(y)f(y)dy}{vol(Q_m)} \geq \frac{\kappa}{vol(Q_0)} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |det D\varphi(x)|dx}{vol(Q_m)}$$

und  $\bigcap Q_m = \{x_0\}$  (Quaderschachtelung; siehe Übungsaufgaben).

**Hinweis.** Lasse den Limes weg und multipliziere mit  $vol(Q_m)$ . Wie findet man wohl den Quader  $Q_m$  in  $Q_{m-1}$ ? Natürlich wie folgt:  $Q_m$  ist einer der Teilquader mit maximaler Abweichung von (\*\*)!

<sup>8</sup>Im Scherungsfall ist obdA  $n = 2$  und die Aussage folgt aus  $\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda \cdot x + y)dy)dx = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy)dx$  wegen der Translationsinvarianz  $\int_{\mathbb{R}} h(y_0 + y)dy = \int_{\mathbb{R}} h(y)dy$  des Integrals.

<sup>9</sup>Schubfachschluss: Gilt  $\kappa \geq \lambda_{Q_{m-1}}/vol(Q_{m-1}) = \sum_{\nu=1}^{2^n} \lambda_{Q_{m,\nu}}/vol(Q_{m-1})$ , und ist  $Q_m$  einer der  $2^n$  Teilquader  $Q_{m,\nu}$  mit maximalem  $\lambda_{Q_{m,\nu}}$ , dann gilt  $\kappa \geq 2^n \cdot \lambda_{Q_m}/vol(Q_{m-1}) = \lambda_{Q_m}/vol(Q_m)$ .

<sup>10</sup>5.Schritt: Eigentlich müsste als Integrationsbereich dastehen  $Q_m \cap U$  respektive  $\varphi(Q_m \cap U)$ . Aber für  $m \gg 0$  gilt  $Q_m \subseteq U$  wegen  $x_0 \in K \subseteq U$ .

6.Schritt. Wegen der Stetigkeit von  $f$  existiert der Limes<sup>11</sup>

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx}{\text{vol}(Q_m)} = f(\varphi(x_0)) \cdot |\det D\varphi(x_0)|.$$

7.Schritt. Durch Komposition mit einer linearen Abbildung (wie in Schritt 2, 3 und 4) kann weiterhin obdA  $D\varphi(x_0) = id_{\mathbb{R}^n}$  angenommen werden. Dann gilt für  $y_0 := \varphi(x_0)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| dx}{\text{vol}(Q_m)} = f(y_0).$$

ObdA sei ausserdem  $x_0 = 0$  und  $y_0 = 0$ .

8.Schritt. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Es gilt  $\|\varphi(x) - y_0 - D\varphi(x_0)(x - x_0)\| < \varepsilon\|x - x_0\|$  für  $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$  nach Lemma 4.23. Wegen Schritt 7 ist  $D\varphi(x_0) = id_{\mathbb{R}^n}$ . Ist daher  $m$  groß genug, gilt wegen dieser Abschätzung<sup>12</sup>:

- $\varphi(Q_m)$  in einem Quader  $Q'_m$  der Seitenlänge  $< (1 + \varepsilon) \frac{c}{2^m}$  enthalten. Zur Erinnerung:  $\frac{c}{2^m}$  war die Seitenlänge von  $Q_m$ . Also  $\text{vol}(Q'_m) < (1 + \varepsilon)^n \text{vol}(Q_m)$ .

Wegen Schritt 1 gilt  $\chi_{Q'_m}(y)f(y) \geq \chi_{\varphi(Q_m)}(y)f(y)$ , und damit ist wegen der Monotonie des abstrakten Integrals  $I^-$  auf  $C_c(\mathbb{R}^n)^-$

$$\frac{\int \chi_{Q'_m}(y)f(y)dy}{\text{vol}(Q_m)} \geq \frac{\int \chi_{\varphi(Q_m)}(y)f(y)dy}{\text{vol}(Q_m)}.$$

Schritt 9. Die Stetigkeit von  $f$  und  $y_0 \in \varphi(Q_m)$  liefert wie in Schritt 6 im Limes  $m \rightarrow \infty$

$$(1 + \varepsilon)^n \cdot f(y_0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int \chi_{Q'_m}(y)f(y)dy}{\text{vol}(Q_m)}.$$

Somit ergibt unser Schubfachschiuß aus Schritt 5 im Limes die Ungleichung

$$(1 + \varepsilon)^n \cdot f(y_0) \geq \frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} + f(y_0),$$

oder  $(1 + \varepsilon)^n \cdot f(y_0) - f(y_0) \geq \frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} > 0$  wegen der Schritt 5, 6, 7 und 8. Wählt man  $\varepsilon > 0$  genügend klein, wird die linke Seite  $f(y_0) \cdot [(1 + \varepsilon)^n - 1]$  kleiner als jede feste positive Zahl im Widerspruch zur Annahme  $\frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} > 0$  von Schritt 5. Dies zeigt (\*\*\*) und damit unsere Behauptung (\*).  $\square$

<sup>11</sup>6.Schritt: Es gilt  $\text{vol}(Q_m) \cdot \min_{x \in Q_m} h(x) \leq \int_{Q_m} h(x)dx \leq \text{vol}(Q_m) \cdot \max_{x \in Q_m} h(x)$ , und somit  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vol}(Q_m)^{-1} \int_{Q_m} h(x)dx = h(x_0)$  für jede stetige Funktion  $h$ .

<sup>12</sup>8.Schritt: Die hier benutzte Norm sei obdA die Norm  $\|x\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$  und obdA  $x_0 = y_0 = 0$ . Dann gilt  $(1 - \varepsilon)x_i < \varphi_i(x) < (1 + \varepsilon)x_i$ . Daraus folgt  $\varphi(Q_m) \subset Q'_m$  für einen Quader  $Q'_m$  wie behauptet.

## 4.12 Differentialformen

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  zulässig. Sei  $C^\infty(U)$  der Raum aller unendlich oft partiell differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf  $U$ . Wir betrachten Teilmengen  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  der festen Kardinalität  $|I| = i$ . Einen formalen Ausdruck der Gestalt

$$\omega(x) = \sum_{I, |I|=i} \omega_I(x) \cdot dx_I,$$

dessen Koeffizienten Funktionen  $\omega_I(x) \in C^\infty(U)$  sind, nennt man  $\omega$  eine (alternierende)  $i$ -Form auf  $U$ . Man nennt  $i$  den Grad von  $\omega$ . Den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller  $i$ -**Formen** auf  $U$  (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation der Koeffizienten) bezeichnen wir mit

$$A^i(U).$$

**Schreibweise.** Sei  $I = \{n_1, \dots, n_i\}$  mit  $n_1 < \dots < n_i$ , dann schreiben wir symbolisch  $dx_I = dx_{n_1} \wedge \dots \wedge dx_{n_i}$  sowie  $dx_\emptyset = 1$ . Für die einelementigen Teilmengen  $I = \{i\}$  schreiben wir meistens  $dx_i$  anstelle von  $dx_{\{i\}}$ . Wir erhalten damit für  $A^\bullet(U) := \bigoplus_{i=0}^n A^i(U)$

- $A^0(U) = C^\infty(U)$
- $A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx_1 \oplus \dots \oplus C^\infty(U) \cdot dx_n$
- $A^2(U) = C^\infty(U) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \oplus \dots \oplus C^\infty(U) \cdot dx_{n-1} \wedge dx_n$
- $\dots$
- $A^n(U) = C^\infty(U) \cdot \omega_n$  für  $\omega_n := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

**Das  $\wedge$ -Produkt.** Wir definieren  $dx_I \wedge dx_J := 0$ , falls  $I \cap J \neq \emptyset$ . Anderenfalls setzen wir  $dx_I \wedge dx_J = \text{sign}(\sigma) dx_{I \cup J}$ , wobei  $\sigma$  die Permutation ist, welche  $n_1, \dots, n_i, m_1, \dots, m_j$  in eine aufsteigende Reihenfolge bringt. Hierbei seien  $n_1 < \dots < n_i$  und  $m_1 < \dots < m_j$  so gewählt, dass  $dx_I = dx_{n_1} \wedge \dots \wedge dx_{n_i}$  und  $dx_J = dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_j}$  gilt. Wir erhalten eine wohldefinierte  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung<sup>13</sup>

$$A^i(U) \times A^j(U) \xrightarrow{\wedge} A^{i+j}(U)$$

$$\left( \sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I, \sum_J \omega_J(x) \cdot dx_J \right) \mapsto \sum_I \sum_J \omega_I(x) \omega_J(x) \cdot dx_I \wedge dx_J.$$

Das  $\wedge$ -Produkt ist per Definition distributiv.

**Beispiel.** Aus der Definition des  $\wedge$ -Produkts folgt unmittelbar

- $dx_i \wedge dx_i = 0$
- $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

<sup>13</sup>Wir zeigen später, dass das  $\wedge$ -Produkt assoziativ ist im Sinne von  $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$ . Da es auch offensichtlich distributiv ist, wird dadurch  $A^\bullet(U)$  zu einem (nichtkommutativen) Ring.

Allgemeiner folgt aus der Definition:  $dx_I \wedge dx_J = (-1)^{|I||J|} dx_J \wedge dx_I$ . Also für beliebige  $\eta \in A^i(U)$  und  $\omega \in A^j(U)$

$$\boxed{\eta \wedge \omega = (-1)^{ij} \cdot \omega \wedge \eta}.$$

**Die Cartanableitungen.** Wir definieren nun durch eine Serie von Ableitungen  $d$  (die Cartan Ableitungen) den sogenannten **Differentialformenkomplex**

$$A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{n-1}(U) \xrightarrow{d} A^n(U) \xrightarrow{d} A^{n+1}(U) = 0$$

wobei die Cartan Ableitungen definiert sind durch

$$d\left(\sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I\right) = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i \wedge dx_I.$$

**Beispiel.** Für eine Funktion  $f(x) \in A^0(U) = C^\infty(U)$  bedeutet dies

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i.$$

Man nennt dann  $df \in A^1(U)$  das **totale Differential** von  $f$  (im Prinzip ist es dasselbe wie die Jacobimatrix von  $f$ , nur etwas anders geschrieben). Die Abbildung

$$d = d_i : A^{i-1}(U) \rightarrow A^i(U)$$

nennt man im Fall  $i = 1$  den **Gradient grad** und im Fall  $i = n$  die **Divergenz div**. Im Fall  $n = 3, i = 2$  (der klassischen Vektoranalysis auf  $\mathbb{R}^3$ ) benutzt man die Bezeichnung **Rotation**.

**Spezialfall.** Sei  $f(x) = x_i$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion, das heisst die Zusammensetzung  $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{pr_i} \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$df = 1 \cdot dx_i = dx_i,$$

oder kurz  $d(x_i) = dx_i$ . Dies (!) rechtfertigt erneut die Schreibweise  $dx_i$ .

**Die Produktformel.** Für  $\eta \in A^i(U)$  und  $\omega \in A^j(U)$  gilt

$$\boxed{d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^i \eta \wedge d\omega}.$$

**Beweis.** Wegen der Bilinearität des  $\wedge$ -Produkts können wir obdA annehmen  $\eta = f(x) \cdot dx_I$  und  $\omega = g(x) \cdot dx_J$  für  $f, g \in C^\infty(U)$ . Dann gilt

$$d(\eta \wedge \omega) = d(fg \cdot dx_I \wedge dx_J) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J$$

nach der Definition der Cartanableitung. Die übliche Produktformel für die partiellen Ableitungen einer Funktion liefert

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

Also  $d(\eta \wedge \omega) = (gd(f) + fd(g)) \wedge (dx_I \wedge dx_J) = d(f)dx_I \wedge gdx_J + (-1)^i f dx_I \wedge (d(g) \wedge dx_J) = d\eta \wedge \omega + (-1)^i \eta \wedge d\omega$ . Hierbei wurde benutzt  $dx_i \wedge (dx_I \wedge dx_J) = (dx_i \wedge dx_I) \wedge dx_J =$

$(-1)^i(dx_I \wedge dx_i) \wedge dx_J = (-1)^i dx_I \wedge (dx_i \wedge dx_J)$  vermöge des Assoziativgesetzes, welches hier als Übungsaufgabe verbleibt<sup>14</sup>.  $\square$

**Integration.** Sei  $\omega = f(x) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  eine Form **höchsten Grades** mit kompaktem Träger, d.h.  $f \in C_c^\infty(U)$  oder kurz  $\omega \in A_c^n(U) := C_c^\infty(U) \cdot \omega_n$ . Dann wird per Definition das Integral  $\int_U \omega$  erklärt durch das  $n$ -dimensionale Standardintegral der Funktion  $f(x)$

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx_1 dx_2 \cdots dx_n .$$

**Der Pullback  $\varphi^*$ .** Sei  $\varphi : U \rightarrow V$  eine unendlich oft differenzierbare Abbildung für zulässige Mengen  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Dann gibt es eine graderhaltende Abbildung

$$\varphi^* : A^\bullet(V) \rightarrow A^\bullet(U)$$

eindeutig bestimmt durch die folgenden vier Eigenschaften

1.  $\varphi^*$  ist  $\mathbb{R}$ -linear
2.  $\varphi^*$  ist multiplikativ  $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$  für alle  $\omega, \eta \in A^\bullet(V)$
3.  $\varphi^*$  vertauscht mit der Cartan Ableitung:  $\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$  für alle  $\omega \in A^\bullet(V)$
4. Für Nullformen  $\omega = f(y)$  aus  $A^0(V)$ , d.h. Funktionen, gilt

$$\boxed{\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))} .$$

Beachte  $\varphi^*(\sum_I \omega_I(y) dy_I) = \sum_I \omega_I(\varphi(x)) \varphi^*(dy_I)$  und  $\varphi^*(dy_I) = \varphi^*(dy_{m_1} \wedge \cdots \wedge dy_{m_i}) = \varphi^*(dy_{m_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy_{m_i})$  sowie  $\varphi^*(dy_k) = d\varphi^*(y_k)$  für alle  $k = 1, \dots, m$ . Also

$$\boxed{\varphi^*(dy_k) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}(x) dx_l} \quad , \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}(x) = (D\varphi(x))_{kl} .$$

Aus der **Leibniz Formel** für die Determinante der Matrix  $D\varphi(x)$  folgt daher im Spezialfall  $n = m$  für Formen  $\omega = f(y) \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m \in A^m(V)$

$$\boxed{\varphi^*(f(y) \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m) = f(\varphi(x)) \cdot \det D\varphi(x) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} .$$

Aus der Substitutionsformel (Satz 4.27) folgt daher sofort

<sup>14</sup>Für  $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$  benutze Induktion nach  $i+j+k$  und bei festem  $i+j+k$  Induktion nach  $\max(i, j, k)$ . Der Induktionsanfang  $i = j = k = 1$  ist trivial. Sei  $j > 1$ , also  $dx_J = dx_U \wedge dx_V$ . Dann gilt  $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = (dx_I \wedge (dx_U \wedge dx_V)) \wedge dx_K = ((dx_I \wedge dx_U) \wedge dx_V) \wedge dx_K = (dx_I \wedge dx_U) \wedge (dx_V \wedge dx_K) = dx_I \wedge (dx_U \wedge (dx_V \wedge dx_K)) = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$ . Ist  $k > 1$  und  $dx_K = dx_U \wedge dx_V$ , dann  $dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) = dx_I \wedge (dx_J \wedge (dx_U \wedge dx_V)) = dx_I \wedge ((dx_J \wedge dx_U) \wedge dx_V) = (dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_U)) \wedge dx_V = ((dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_U) \wedge dx_V = (dx_I \wedge dx_J) \wedge (dx_U \wedge dx_V) = (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K$ . Analog für  $i > 1$ .

**Korollar 4.28.** Für orientierungserhaltende Koordinatenwechsel<sup>15</sup>  $\varphi : U \rightarrow V$  und Formen  $\omega = f(y) \cdot \omega_n$  in  $A_c(V)$  gilt

$$\boxed{\int_U \varphi^*(\omega) = \int_V \omega}.$$

**Lemma 4.29.** Zweimaliges Anwenden der Cartanableitung  $d^2 : A^i(U) \rightarrow A^{i+2}(U)$  gibt die Nullabbildung

$$\boxed{d^2 = 0}.$$

**Beweis.** Im Spezialfall  $i = 0$  ist wegen  $d^2(f) = d(\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(x) \cdot dx_\mu)$

$$d^2(f) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x) \cdot dx_\nu \wedge dx_\mu.$$

Da  $dx_\nu \wedge dx_\mu$  alternierend in  $\nu$  und  $\mu$  ist, und andererseits wegen Satz 4.11 die zweiten partiellen Ableitungen symmetrisch in  $\nu$  und  $\mu$  sind, verschwindet dieser Ausdruck. Damit ist der Fall  $i = 0$  gezeigt. Für  $i > 0$  ist oBdA  $\omega = f(x) \cdot dx_I$  für  $f \in C^\infty(X)$ , und wir benutzen die Produktformel: Damit ist  $d^2\omega = d(df \wedge dx_I + (-1)^0 f d(dx_I)) = d(df \wedge dx_I) = d(df) \wedge dx_I + (-1)^1 df \wedge d(dx_I) = 0$  wegen  $d(df) = 0$  (der Fall  $i = 0$ ) und wegen  $d(dx_I) = d(1 \cdot dx_I) = 0$  (Definition der Cartanableitung).  $\square$

Dies zeigt, dass alle **exakten** Formen  $\omega = d\eta$  **geschlossene** Formen sind, d.h.  $d\omega (= d^2\eta) = 0$ . Für Differentialformen vom Grad  $> 0$  gilt auch die Umkehrung.

**Satz 4.30 (Poincare Lemma).** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und **sternförmig**<sup>16</sup> und sei  $\omega \in A^j(U)$ . Dann gilt

- $d\omega = 0$  für  $j > 0 \implies \exists \eta \in A^{j-1}(U)$  mit  $\omega = d\eta$ .
- $d\omega = 0$  im Fall  $j = 0 \implies \omega \in A^0(U)$  ist lokalkonstant.

**Der eindimensionale Fall.** Für eine zulässige Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}$  reduziert sich der allgemeine Differentialformenkomplex auf die Grade 0 und 1. Es bleibt also nur

$$A^0(U) = C^\infty(U) \xrightarrow{d} A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx,$$

und für  $f(x) \in C^\infty(U)$  ist die Cartan Ableitung gegeben durch

$$f(x) \mapsto df(x) = f'(x) \cdot dx.$$

Das **Poincare Lemma** im eindimensionalen Fall ist damit fast der **Hauptsatz** der Differential- und Integralrechnung. Im Grad  $j = 1$  besagt es nämlich, daß jede Funktion  $g(x) \in C^\infty(U)$  eine

<sup>15</sup>zwischen offenen Teilmengen  $U, V$  im  $\mathbb{R}^n$  im Sinne von Abschnitt 4.11. Orientierungserhaltend bedeutet hierbei  $\text{sign}(\det D\varphi(x)) > 0$ .

<sup>16</sup>Das bedeutet, es gibt einen Punkt  $x_0 \in U$ , so dass für alle  $x \in U$  der Verbindungsweg  $x_0 + \{t(x - x_0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$  auch in  $U$  liegt.

Stammfunktion besitzt, da im letzten Grad  $j = n$  (hier ist  $n = 1$ ) automatisch  $d\omega = 0$  gilt für jede Differentialform. Im Grad 0 besagt das Poincare Lemma, daß Stammfunktionen eindeutig sind bis auf eine lokalkonstante Funktion. Allerdings gibt es zwei Einschränkungen. Erstens, wir beschränken uns hier auf  $C^\infty$ -Funktionen anstelle von stetigen Funktionen. Zweitens, erst der Satz von Stokes wird die noch fehlende Verbindung zur Integrationstheorie herstellen. Die höherdimensionale Integrationstheorie werden wir dazu noch verfeinern müssen.

## 4.13 Beweis des Poincare Lemmas

**Lemma 4.31.**  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sei offen und sternförmig<sup>17</sup>. Dann ist für  $f(x) \in C^\infty(U)$  das Integral

$$I^{(j)}(f) = \int_0^1 t^j f(tx) dt, \quad (\text{für } j \in \mathbb{N})$$

als Funktion von  $x \in U$  definiert, und als solche wieder eine Funktion in  $C^\infty(U)$ .

Wir formulieren nun, unter Vorgriff auf das Kapitel 5, einen allgemeinen Satz aus der Theorie Lebesgue integrierbarer Funktionen, welcher in unserem Fall  $Y = [0, 1]$  wegen  $C(Y) \subset L(Y)$  unmittelbar anwendbar ist. Die Behauptung von Lemma 4.31 folgt unmittelbar aus diesem später bewiesenen **Vertauschungssatz** (Beweis siehe Abschnitt 6.5).

**Satz 4.32.** Sei  $Y = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{Z}$  oder  $Y = \mathbb{N}$ . Sei  $f(x, y) : [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar nach  $x$ . Ist  $f(x, y)$  für feste  $x$  in  $L(Y)$ , und gilt unabhängig von  $x$  die Abschätzung  $|\partial_x f(x, y)| \leq F(y)$  für ein  $F \in L(Y)$ , dann ist

$$g(x) = \int_Y f(x, y) dy$$

differenzierbar auf  $[a, b]$  als Funktion von  $x$  und es gilt  $g'(x) = \int_Y \partial_x f(x, y) dy$ .

Für  $f(x) \in C^\infty(U)$  sei  $f_\alpha := \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f(x)$ . Wegen  $f(x) = t^j f(tx)|_0^1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^j f(tx)) dt$  und  $\frac{d}{dt} f(tx) = \sum_\alpha x_\alpha f_\alpha(tx)$  folgt dann

**Lemma 4.33.**  $f(x) = j \cdot I^{(j-1)}(f)(x) + \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha)(x)$  für alle  $j > 0$ .

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Poincare Lemmas.

**Beweis.** Für  $\beta \in \{1, \dots, n\}$  und  $J \subset \{1, \dots, n\}$  setze

$$\boxed{dx_\beta \vee dx_J = 0} \quad (\text{im Fall } \beta \notin J) \quad \boxed{dx_\beta \vee dx_J = \varepsilon \cdot dx_{J \cup \{\beta\}}} \quad (\text{im Fall } \beta \in J)$$

mit dem eindeutig bestimmten Vorzeichen  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  so daß  $dx_\beta \wedge \varepsilon \cdot dx_{J \cup \{\beta\}} = dx_J$ .

<sup>17</sup>Wir nehmen zur Vereinfachung der Notation  $x_0 = 0$  für den Sternmittelpunkt an.

**Der Operator  $I$ .** Wir definieren nun für alle  $j > 0$  den  $\mathbb{R}$ -linearen Operator

$$I : A^j(U) \longrightarrow A^{j-1}(U) ,$$

durch  $I(\sum_J \omega_J(x) \cdot dx_J) = \sum_J I^{(j-1)}(\omega_J(x))E(dx_J)$  mit  $E(dx_J) = \sum_{\beta=1}^n x_\beta \cdot dx_\beta \vee dx_J$ .

Für  $j = 0$  folgt das Poincare Lemma aus dem Mittelwertsatz 4.8. Genauer gilt

**Bemerkung:** Im Grad  $j = 0$  gilt  $\boxed{(I \circ d)f(x) = f(x) - f(0)}$  wie man leicht zeigt.

Im Fall  $j > 0$  setze  $\eta = I(\omega) \in A^{j-1}(U)$ . Aus  $d\omega = 0$  folgt dann das Poincare Lemma mittels  $\omega = (d \circ I + I \circ d)\omega = d(I(\omega)) + 0 = d\eta$  wegen der folgenden

**Homotopieformel:** Für  $\omega \in A^j(U)$  und  $j > 0$  gilt

$$\boxed{\omega = (d \circ I + I \circ d) \omega} .$$

Da diese Formel linear in  $\omega$  ist, kann man für ihren Beweis  $\omega = f(x) \cdot dx_J$  annehmen:

*1.Schritt.* Es gilt  $I(\omega) = I^{(j-1)}(f) \cdot \sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)$ . Wegen der Produktformel für die Cartanableitung ist daher  $(d \circ I)(\omega)$  gleich

$$d\left(I^{(j-1)}(f)\right) \wedge \left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right) + I^{(j-1)}(f) \cdot d\left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right) .$$

Es gilt  $d(I^{(j-1)}(f)) = \sum_\alpha (\partial_\alpha \int_0^1 t^{j-1} f(tx) dt) dx_\alpha = \sum_\alpha (\int_0^1 t^{j-1} \partial_\alpha f(tx) dt) dx_\alpha$  wegen dem Vertauschungssatz 4.32. Also  $d(I^{(j-1)}(f)) = \sum_\alpha (\int_0^1 t^j f_\alpha(tx) dt) dx_\alpha = \sum_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) dx_\alpha$ . Ausserdem ist  $d(\sum_{\beta \in J} x_\beta (dx_\beta \vee dx_J)) = \sum_{\beta \in J} dx_\beta \wedge (dx_\beta \vee dx_J) = |J| \cdot dx_J$ . Deshalb ist  $(d \circ I)(\omega)$  gleich

$$\left(\sum_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_\alpha\right) \wedge \left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right) + |J| \cdot I^{(j-1)}(f) \cdot dx_J$$

oder gleich

$$\begin{aligned} (d \circ I)(\omega) &= \left(\sum_{\alpha \notin J} I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_\alpha\right) \wedge \left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right) \\ &+ \left(\sum_{\alpha = \beta \in J} x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_J\right) + |J| \cdot I^{(j-1)}(f) \cdot dx_J . \end{aligned}$$

*2.Schritt.* Andererseits ist  $(I \circ d)(\omega) = I(\sum_{\alpha \notin J} f_\alpha \cdot dx_\alpha \wedge dx_J)$  gleich

$$\sum_{\alpha \notin J} I^{(j)}(f_\alpha) \sum_{\beta \in \{\alpha\} \cup J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee (dx_\alpha \wedge dx_J))$$

und damit gleich

$$(I \circ d)(\omega) = \left(\sum_{\alpha \notin J} I^{(j)}(f_\alpha) \sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee (dx_\alpha \wedge dx_J))\right) + \sum_{\alpha = \beta \notin J} x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_J .$$

3.Schritt. Die jeweils ersten Terme in beiden Formeln unterscheiden sich nur um ein Vorzeichen<sup>18</sup> und heben sich deshalb bei der Addition der beiden Formeln weg. Die Addition der Formeln in Schritt 1 und 2 liefert für  $j > 0$  dank Lemma 4.33 daher die Homotopieformel

$$(dI + Id)(\omega) = |J| \cdot I^{(j-1)}(f) \cdot dx_J + \left( \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \right) \cdot dx_J = f(x) \cdot dx_J = \omega .$$

□

**Bemerkung.** Die Sternförmigkeit von  $U$  ist wesentlich für das Poincare Lemma. Die gelochte Ebene  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist nicht sternförmig! Die 1-Form  $\omega = \text{Im}\left(\frac{dz}{z}\right)$ , in reellen Koordinaten

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} ,$$

hat eine Singularität im Ursprung. Aber es gilt  $\omega \in A^1(U)$  und man zeigt leicht  $d\omega = 0$  auf  $U$ . Für die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow U$  definiert durch  $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$  gilt

$$\varphi^*(\omega) = \frac{\cos(t) \sin(t)' - \sin(t) \cos(t)'}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} dt = dt .$$

Hätte  $\omega$  eine Stammfunktion  $\eta$  auf  $U$ , d.h. würde  $d\eta = \omega$  gelten für ein  $\eta \in A^0(U)$ , wäre

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\eta)(t) = d\varphi^*(\eta)(t) = d(\eta(\varphi(t))) = \eta(\varphi(t))' \cdot dt .$$

Ein Vergleich ergäbe  $\eta(\varphi(t))' dt = dt$ ; nach dem Hauptsatz wäre daher für eine Integrationskonstante  $C$

$$\eta(\varphi(t)) = t + C .$$

Ein Widerspruch, denn  $\eta(\varphi(t))$  ist periodisch in  $t$  (mit Periode  $2\pi$ ), während die Funktion  $t + C$  für kein  $C$  in  $t$  periodisch ist. Das Poincare Lemma gilt also nicht für  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

## 4.14 Satz von Stokes für Quader

Sei  $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  ein nichtdegenerierter Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Wir betrachten orientierte Quader  $\varepsilon \cdot Q$  für eine **Orientierung**  $\varepsilon = \pm 1$ . Der Rand  $\partial Q$  eines Quaders  $Q$  ist in natürlicher Weise die Vereinigung von  $2n$  nicht degenerierten orientierten Quadern im  $\mathbb{R}^{n-1}$  (aber degeneriert im  $\mathbb{R}^n$ ). Wir erläutern dies obdA im Fall  $n = 2$  des Quaders  $Q = +[a, b] \times [c, d]$  (positiv orientiert). Hier ist

$$\partial(Q) := +[a, b] \times [c, c] + [b, b] \times [c, d] - [a, b] \times [d, d] - [a, a] \times [c, d] .$$

Es gilt

<sup>18</sup> $dx_\alpha \wedge (dx_\beta \vee dx_J) = -dx_\beta \vee (dx_\alpha \wedge dx_J)$  falls  $\beta \in J$  und  $\alpha \notin J$

**Satz 4.34.** (Baby Stokes) Für jede Differentialform  $\omega \in A^{n-1}(Q)$  gilt

$$\boxed{\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q}}.$$

**Beweis.** Per Definition ist  $\omega|_{\partial Q} := i^*(\omega)$  für  $i : \partial(Q) \hookrightarrow Q$  der Pullback von  $\omega$  auf die  $2n$  Randflächen von  $Q$  für die offensichtlichen linearen Inklusionen  $i$ . Man definiert dann für

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot dx_i \vee (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

das Integral (die  $i$ -te Integration wird jetzt jeweils weggelassen)

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} &:= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n. \end{aligned}$$

Die Aussage des Satzes ist additiv in  $\omega$ , daher obdA  $\omega = f_i(x) \cdot dx_i \vee (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$  für ein festes  $i$  und  $d\omega = \partial_i f_i(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Die Aussage des Satzes lautet dann: Das Integral  $\int_Q d\omega$ , nach Korollar 6.11 gegeben durch

$$\int_Q d\omega = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \partial_i f_i(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

stimmt überein mit  $\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q}$ , definiert durch

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \left( f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \Big|_{x=a_i}^{x=b_i} \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Diese Übereinstimmung ist sichtlich eine Folge des Hauptsatzes (Satz 4.14). □

**Satz 4.35.** Sei  $U$  offen im  $\mathbb{R}^n$  und  $\omega \in A^{n-1}(U)$ . Verschwindet  $\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q}$  für jeden Quader  $Q$  in  $U$ , dann gilt  $d\omega = 0$ .

**Beweis.** Sei  $d\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Da  $f$  gleichmässig stetig ist auf  $Q$ , gibt es für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$  für  $\|x - \xi\| < \delta$ . Für  $Q \subset K_\delta(\xi)$  folgt daher aus der Boxungleichung

$$-\varepsilon < f(\xi) - \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q d\omega < \varepsilon.$$

Unsere Annahme und Satz 4.34 zeigen  $\frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q d\omega = \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} = 0$ . Es folgt  $|f(\xi)| < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ , also  $f(\xi) = 0$  für alle  $\xi \in U$ . □

## 4.15 Analytische Funktionen

**Beispiel 4.36.** Im metrischen Raum  $Y = \mathbb{Z}$  (mit der Euklidischen Metrik) sind die folgenkompakten Teilmengen die endlichen Teilmengen von  $Y$  und jede (!) Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig. Die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf  $Y = \mathbb{Z}$  sind daher die Funktionen mit endlichem Träger. Der Raum  $C_c(\mathbb{Z})$  kann also identifiziert werden mit dem Raum der Folgen  $\mathbb{Z} \ni n \mapsto f(n) \in \mathbb{R}$ , für die fast alle Folgenglieder  $f(n)$  Null sind. Daher definiert die endliche (!) Summe  $I(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$  ein abstraktes Integral  $I : B(\mathbb{Z}) := C_c(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  im Sinne von Abschnitt 3.18. Analoges gilt für die Teilmenge  $\mathbb{N}$  anstelle von  $\mathbb{Z}$ . Man überlegt sich nun leicht: Eine Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist in der monotonen Hülle  $B^+(\mathbb{Z})$  genau dann, wenn  $f(n) < 0$  nur für endlich viele  $n \in \mathbb{Z}$  gilt. In diesem Abschnitt wenden wir den späteren Satz 4.32 im Fall  $Y = \mathbb{Z}$  oder genauer  $Y = \mathbb{N}$  an um zu zeigen, daß die im folgenden betrachteten Potenzreihen gliedweise abgeleitet werden dürfen.

Gegeben sei eine Folge  $a_l$  reeller (oder komplexer) Zahlen. Dann kann man die formale **Potenzreihe**  $\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$  betrachten und sich fragen, für welche Werte von  $x = x_0 \in \mathbb{R}$  (oder  $x = x_0 \in \mathbb{C}$ ) der Limes

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^N a_l \cdot x^l =: \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot x^l$$

existiert. Wenn dieser Limes existiert, nennt man die Potenzreihe konvergent im Punkt  $x = x_0$ . Allgemeiner kann man anstatt der Monome  $P_l(x) = a_l x^l$  auch homogene Polynome  $P_l(x)$  vom Grad  $l$  in mehreren Variablen betrachten.

Seien  $P_l(x)$  für  $l = 0, 1, 2, \dots$  homogene Polynome  $P_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $l$ , dann gilt  $P_l(t \cdot x) = t^l \cdot P_l(x)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Wie man leicht aus der Homogenität folgert, nimmt ein homogenes Polynom  $P_l(x)$  auf einer Kugel  $\|x\| \leq \rho$  ihr Maximum auf dem Rand  $\|x\| = \rho$  an. Zur Untersuchung der Konvergenz von  $\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)$  definiert man den **Konvergenzradius**

$$R := \sup \left\{ \rho \mid \exists C_\rho > 0 \text{ mit } \max_{\|y\|=\rho} (|P_l(y)|) \leq C_\rho \text{ für alle } l \right\}.$$

Der Konvergenzradius  $R$  ist eine Zahl in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ . Nach Definition gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft  $\|x\| \leq \rho < R$  wegen der Homogenität von  $P_l(x)$

$$|P_l(x)| \leq C_\rho \cdot \frac{\|x\|^l}{\rho^l}.$$

**Satz 4.37.** Ist der Konvergenzradius  $R > 0$ , so ist die offene Kugel  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$  nichtleer und

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)$$

konvergiert absolut für  $x \in X$ . Für  $\rho' \in [0, R)$  ist die Konvergenz absolut und gleichmäßig auf der folgenkompakten Teilmenge  $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \rho'\}$  von  $X$ . Die Grenzfunktion  $f(x)$  ist daher eine stetige Funktion der Variable  $x$  auf  $K$ , und definiert durch Variation von  $\rho'$  eine stetige Funktion auf  $X$ .

**Beweis.** Für gegebenes  $x \in X$  sei  $\rho < R$  und  $0 \leq q < 1$ , so daß  $x$  in der kompakten Kugel  $K$  vom Radius  $\rho' = q\rho$  enthalten ist. Wir wollen  $|P_l(x)|$  auf  $K$  abschätzen. Aus  $\|x\| \leq \rho' = q\rho$  folgt  $\|x\|^l / \rho^l = q^l$  und damit

$$|P_l(x)| \leq C_\rho \cdot q^l \quad , \quad x \in K.$$

Für die Partialsummen  $f_n(x) := \sum_{l=0}^n P_l(x)$  gilt dann wegen Lemma 1.16 für alle  $m \geq n$

$$\|f_m - f_n\|_K = \max_{x \in K} |f_m(x) - f_n(x)| = \max_{x \in K} \left| \sum_{l=n+1}^m P_l(x) \right| \leq \sum_{l=n+1}^m C_\rho q^l \leq C_\rho \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Wegen  $|q| < 1$  geht  $C_\rho \frac{q^{n+1}}{1-q}$  gegen Null für  $n \rightarrow \infty$  (mit Schranken unabhängig von  $x$ ). Die stetigen Polynome  $f_n(x)$  bilden daher eine Cauchyfolge im Raum  $C(K)$  der stetigen Funktionen auf  $K$ . Wegen Satz 2.24 ist  $C(K)$  vollständig. Daher konvergieren die  $f_n(x)$  gleichmäßig auf  $K$  gegen eine auf  $K$  stetige Grenzfunktion  $f(x)$ . Da  $\{x \mid \|x\| < R\}$  die Vereinigung solcher  $K$  ist für geeignete  $\rho < R$  und  $q < 1$ , folgt unsere Behauptung.  $\square$

Wir betrachten jetzt den eindimensionalen Fall. Seien  $q, \rho$  wie im obigen Beweis. Wähle  $\varepsilon > 0$  genügend klein, so daß  $\tilde{q} := q(1 + \varepsilon) < 1$ . Für  $\tilde{C} := 1/\varepsilon$  gilt dann  $l < \tilde{C}(1 + \varepsilon)^l$ . Wir wollen nun den **Vertauschungssatz** 4.32 (für  $Y = \mathbb{N}$ ) auf die Funktionen  $f_l(x) = a_l x^l$  anwenden:

Sei  $f_l(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge auf  $[a, b]$  differenzierbarer Funktionen. Ist die reelle Folge  $f_l(x)$  in  $L(\mathbb{Z})$  für jedes feste  $x \in [a, b]$ , und gilt unabhängig von  $x$  für die Ableitungen eine Abschätzung  $|f'_l(x)| \leq F_l$  für eine reelle Folge  $F_l \in L(\mathbb{Z})$ . Dann ist

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n f_l(x) =: \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x)$$

wohldefiniert und differenzierbar auf  $[a, b]$  mit der Ableitung  $f'(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f'_l(x)$ .

$|f_l(x)| = |a_l x^l|$  lässt sich durch  $C_\rho q^l$ ,  $|q| < 1$  abschätzen, und  $|f'_l(x)| = |l a_l x^{l-1}|$  lässt sich durch  $F_l = C \tilde{q}^{l-1}$ ,  $|\tilde{q}| < 1$  abschätzen für alle  $|x| \leq \rho q$ ; letzteres obdA für  $|x| = q\rho$  wegen

$$|f'_l(x)| = |l a_l x^{l-1}| = |a_l x^l| \frac{l}{|x|} \leq C_\rho q^l \frac{l}{|x|} \leq C_\rho \tilde{C} (1 + \varepsilon)^l q^l / \rho q = C \cdot \tilde{q}^{l-1}.$$

Wegen Lemma 1.16 gilt damit  $f_l, F_l \in L(\mathbb{Z})$ . Daher sind die Voraussetzungen für den Vertauschungssatz 4.32 erfüllt. Wendet man ihn an, erhält man:  $f(x)$  differenzierbar im Intervall  $[-q\rho, q\rho]$  und die Potenzreihe kann dort gliedweise abgeleitet werden, und die abgeleitete Potenzreihe besitzt (mindestens) denselben Konvergenzradius  $R$ . Iteriert man schließlich diesen Schluß, und betrachtet anschliessend den Limes  $q \rightarrow 1$  und  $\rho \rightarrow R$ , so folgt

**Satz 4.38.** Ist der Konvergenzradius  $R$  der Potenzreihe  $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$  echt grösser als 0, dann ist im Bereich  $\|x\| < R$  die Funktion  $f(x)$  unendlich oft differenzierbar und die Potenzreihe ist gliedweise ableitbar, d.h. es gilt

$$f'(x) = \sum_{l=0}^{\infty} l a_l x^{l-1}$$

und der Konvergenzradius der abgeleiteten Potenzreihe ist wieder  $R$ .

Ist der Konvergenzradius  $R > 0$ , folgt aus Satz 4.38 durch  $n$ -faches Ableiten der Potenzreihe  $f(x)$  die Formel  $f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + \sum_{l>n} a_l (x^l)^{(n)}$ . Setzt man  $x = 0$ , wird die Restsumme über alle Summanden  $l > n$  gleich Null. Es folgt

**Lemma 4.39.** *Ist der Konvergenzradius der Potenzreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  echt größer als 0, dann gilt*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

*Insbesondere sind alle Koeffizienten  $a_n$  durch die Funktion  $f(x)$  eindeutig bestimmt.*

Nun einige einfache, aber fundamentale **Beispiele für Potenzreihen:**

Die Funktion  $f(t) = (1+t)^\alpha$  ist auf dem Intervall  $(-1, \infty)$  differenzierbar und die eindeutig bestimmte Lösung der linearen Differentialgleichung  $(1+t)f'(t) = \alpha \cdot f(t)$  zum Anfangswert  $f(0) = 1$ . Es folgt für  $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (\alpha + 1 - i)$

**Lemma 4.40.** *Für alle  $t \in (-1, 1)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt<sup>19</sup>*

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot t^n.$$

**Beweis.** Beide Seiten erfüllen auf  $(-1, 1)$  dieselbe Differentialgleichung, auf der rechten Seite wegen  $n \cdot \binom{\alpha}{n} + (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} = \alpha \cdot \binom{\alpha}{n}$  und  $\binom{\alpha}{0} = 1$  vermöge gliedweisen Ableitens.  $\square$

Im ganzzahligen Fall  $\alpha = m \in \mathbb{N}$  reduziert sich Lemma 4.40 auf das klassische **Binomial Theorem**, denn  $\binom{m}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (m+1-i)$  wird dann Null für alle  $n \geq m+1$ . Man erhält immerhin noch folgende nützliche Formel für die **Binomialkoeffizienten**  $\binom{m}{n}$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad 0 \leq n \leq m.$$

Analog zeigt man

**Lemma 4.41.** *Für alle  $t \in (-1, 1)$  gilt  $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ .*

**Satz 4.42.** *Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt<sup>20</sup>*

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Allgemeiner ist für eine  $m \times m$ -Matrix  $X$  die **Matrix Exponentialfunktion**

$$f(t) = \exp(tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} t^n$$

<sup>19</sup>Für  $0 < \rho := |x| < 1$  gilt  $|\binom{\alpha}{l} \rho^l| \leq C \rho^l \prod_{i=l_0}^l |1 - \frac{\alpha+1}{i}| \leq C$  für alle  $l \geq l_0$ , wenn  $l_0$  so groß ist daß  $|\frac{\alpha+1}{l_0}| < 1$ . Hierbei ist  $C$  eine geeignet gewählte von  $l$  unabhängige Konstante. Für  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot t^n$  ist damit der Konvergenzradius  $R \geq 1$ .

<sup>20</sup>Für beliebiges  $\rho$  gilt  $|\frac{\rho^l}{l!}| \leq C \cdot |\frac{\rho}{l_0}|^l \leq C$  für alle  $l \geq l_0$ , falls  $l_0$  so groß ist daß  $|\frac{\rho}{l_0}| < 1$ . Hierbei ist obdA  $C = \prod_{1 \leq i < l_0} \frac{l_0}{i}$ . Für  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$  ist daher der Konvergenzradius  $R = +\infty$ .

erklärt als matrixwertige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow M_{m,m}(\mathbb{R})$ , und ist dabei eindeutig bestimmt durch die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}f(t) = X \circ f(t) \quad , \quad f(0) = id .$$

Für  $t, s \in \mathbb{R}$  gilt die **Matrix-Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(tX) \circ \exp(sX) = \exp((t+s)X)} .$$

Insbesondere ist  $\exp(tX)$  eine invertierbare Matrix

$$\exp(tX) \in Gl(m, \mathbb{R})$$

mit Umkehrmatrix  $\exp(-tX)$ . Zum Beweis der Funktionalgleichung genügt, daß beide Seiten dieselbe Differentialgleichung  $\frac{d}{dt}F(t) = X \circ F(t) \circ \exp(sX)$  erfüllen mit  $F(0) = \exp(sX)$ .

Ähnlich gilt  $\exp(tX) \in Gl(m, \mathbb{C})$  für komplexe Matrizen  $X \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ . Eine komplexe Matrix  $M \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  nennt man **unitär**, wenn  $M^\dagger \circ M = id$  gilt. Hierbei ist  $M^\dagger = {}^T \bar{M}$  die hermitesch transponierte Matrix. Gilt

$$X^\dagger = -X ,$$

nennt man eine Matrix  $X \in M_{m,m}$  **antihermitesch**. Die antihermiteschen Matrizen bilden eine **Lie Algebra**, denn für antihermitesche Matrizen  $X, Y$  gilt

$$[X, Y]^\dagger = (XY - YX)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = -(XY - YX) = -[X, Y] .$$

Die hermiteschen Matrizen dagegen bilden keine Lie Algebra!

**Lemma 4.43.** Für  $M \in M_{m,m}(\mathbb{C})$  gilt:  $\exp(tX)$  ist unitär für alle  $t \in \mathbb{R}$  genau dann wenn  $X$  antihermitesch ist

$$\boxed{\exp(tX) \text{ ist unitär } \forall t \in \mathbb{R} \iff X \text{ ist antihermitesch} \iff \frac{X}{2\pi i} \text{ ist hermitesch}} .$$

**Beweis.** Ist  $\exp(tX)$  unitär für alle  $t \in \mathbb{R}$ , gilt  $\exp(tX)^\dagger \circ \exp(tX) = id$ . Durch Ableiten folgt aus der Produktregel  $(X \exp(tX))^\dagger \circ \exp(tX) + \exp(tX)^\dagger \circ X \exp(tX) = 0$ . Setzt man  $t = 0$ , folgt  $X^\dagger + X = 0$ .

Ist umgekehrt  $X$  antihermitesch, dann gilt  $\exp(tX)^\dagger \circ \exp(tX) = \exp(tX^\dagger) \circ \exp(tX) = \exp(-tX) \circ \exp(tX) = \exp(0) = id$ . Im ersten Schritt wurde die Stetigkeit der Abbildung  $X \mapsto X^\dagger$  benutzt, im zweiten Schritt die Annahme  $X^\dagger = -X$  und im letzten Schritt die Matrix-Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.  $\square$

**Übungsaufgabe.** Zeige für reelles  $t$  die Aussage

$$\boxed{\exp(it) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)} .$$

# 5 Ausgewählte Themen I

## 5.1 Wegintegrale

Sei  $U$  eine offene Teilmenge im  $\mathbb{R}^n$  und

$$\omega = \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i$$

eine 1-Form  $\omega \in A^1(U)$  auf  $U$ . Ein **Weg**  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ist eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf  $[a, b]$  (mit Stützstellen  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{r-1} \leq t_r = b$ ); d.h.  $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  ist stetig differenzierbar auf jedem der Teilintervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ . Wir definieren dann das **Wegintegral**

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma^*(\omega)$$

Beachte  $\gamma^*(dx_i) = d\gamma^*(x_i) = d\gamma_i(t) = \dot{\gamma}_i(t)dt$  (Ableitung nach  $t$ ), also

$$\gamma^*(\omega)(t) = \sum_i \gamma^*(F_i(x)dx_i) = \left( \sum_i F_i(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t) \right) dt = (F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \cdot dt$$

bis auf  $dt$  das Skalarprodukt  $(F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))$  von  $F(\gamma(t))$  mit dem Tangentenvektor  $\dot{\gamma}(t)$ . Besitzt  $\omega$  eine Stammfunktion  $\phi$ , d.h. gilt  $\omega = d\phi$  für ein  $\phi \in A^0(U)$ , dann gilt

$$\int_{\gamma} d\phi = \phi(B) - \phi(A)$$

für  $P = \gamma(a)$  (Anfangspunkt) und  $B = \gamma(b)$  (Endpunkt des Weges). Insbesondere hängt dann das Wegintegral nur vom Anfangspunkt  $A$  und vom Endpunkt  $B$  des Weges ab. Zum Beweis:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma^*(\omega) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma^*(d\phi) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} d(\phi(\gamma(t))) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} \phi(\gamma(t)) dt = \phi(\gamma(t_i)) - \phi(\gamma(t_{i-1})).$$

Also ist  $\int_{\gamma} d\phi$  als teleskopierende Summe gleich  $\phi(\gamma(t_r)) - \phi(\gamma(t_0))$ .

In der klassischen Mechanik (speziell im Fall  $n = 3$ ) kann eine 1-Form  $\omega$  im  $\mathbb{R}^n$  als **Kraft** aufgefaßt werden representiert durch den Vektor  $F = (F_1, \dots, F_n)$ , und  $\int_{\gamma} \omega$  als **Arbeit** entlang des Weges  $\gamma$ . Ist die Kraft von der Form  $\omega = d\phi$ , nennt man  $\phi$  ein **Potential**. Eine Kraft heißt **konservativ**, wenn die Arbeit nicht vom Weg  $\gamma$ , sondern nur von dem Anfangspunkt  $P = \gamma(a)$  und vom Endpunkt  $B = \gamma(b)$  des Weges abhängt. Offensichtlich äquivalent dazu ist, daß das Wegintegral  $\int_{\gamma} \omega$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ , d.h mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , verschwindet.

**Satz 5.1.** Sei  $\omega \in A^1(U)$ . Verschwindet für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$  das Wegintegral  $\int_{\gamma} \omega = 0$ , dann gilt  $d\omega = 0$ .

**Beweis.** Für  $\xi \in U$  wählen wir ein kleines Quadrat  $Q$  (in der  $x_i, x_j$ -Ebene) um  $\xi$  in  $U$ . Nach Annahme gilt  $\int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} = 0$ . Also  $\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega|_{\partial Q} = 0$  (Satz von Stokes). Sei  $d\omega = \sum_{\nu < \mu} f_{\nu\mu}(x) dx_{\nu} \wedge dx_{\mu}$ , dann ist  $\int_Q d\omega = \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} f_{ij}(\xi_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, \xi_n) dx_i dx_j$  also Null. Lässt man das Quadrat schrumpfen, konvergiert  $\int_Q d\omega / \text{vol}(Q)$  gegen  $f_{ij}(\xi)$ . Es folgt  $f_{ij}(\xi) = 0$  für alle  $i, j$  aus der Stetigkeit von  $d\omega$ , und damit  $d\omega = 0$ .  $\square$

Aus dem Poincare Lemma und dem letzten Satz folgt daher

**Satz 5.2.** Sei  $U$  sternförmig. Dann ist eine Form  $\omega \in A^1(U)$  konservativ (mit Potential  $\phi$ ) genau dann, wenn  $d\omega = 0$  gilt. Das Potential  $\phi$  ist eindeutig durch  $\omega$  bestimmt bis auf eine Konstante.

**Bemerkung.** Sei  $x_0 = 0$  ein Sternmittelpunkt von  $U$ . Aus der Homotopie Formel  $dI + Id = id$  (siehe Sektion 4.13) und  $d\omega = 0$  ergibt sich  $\phi(x) = I(\omega)(x) + \text{const.}$ , also

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i F_i(tx) dt$$

in Übereinstimmung mit der obigen Formel  $\phi(x) - \phi(0) = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) \cdot dt$ , bei Wahl des speziellen geraden Weges  $\gamma(t) = tx$ .

**Satz 5.3.** Eine Form  $\omega \in A^1(U)$  ist konservativ genau dann, wenn ein Potential  $\phi \in A^0(U)$  existiert mit  $d\phi = \omega$ .

**Beweis.** Existiert ein Potential  $\phi$ , dann ist die Kraft konservativ. Die Umkehrung: Obda  $U$  wegzusammenhängend, und man kann dann jeden Punkt in  $U$  mit einem fixierten Punkt  $x_0$  durch einen Weg verbinden. Dann setzt man  $\phi(x) := \int_{\gamma} \omega$  für einen beliebigen Weg  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $x_0$  und Endpunkt  $x$ . Um  $d\phi = \omega$  in einem beliebigen Punkt  $\xi \in U$  zu zeigen, kann man  $U$  durch eine offene nichtleere Kreisscheibe  $V = K_{\varepsilon}(\xi) \subset U$  ersetzen wegen  $\phi(x) = \phi(\xi) + \int_{\gamma} \omega$  (für einen Weg  $\gamma$  in  $V$  von  $\xi$  nach  $x$ ). Die Behauptung folgt dann, in der sternförmigen Menge  $V$ , aus Satz 5.2 und der nach diesem Satz folgenden Bemerkung.  $\square$

**Beispiel.** Sei

$$\omega = \frac{dz}{z} = \frac{(x - iy) \cdot (dx + idy)}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{r^2} + i \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d \log(r) + i \cdot \text{Im}(\omega).$$

Dies ist eine komplexwertige  $C^{\infty}$ -Form auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Ihr Realteil  $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$  ist konservativ mit Potential  $\log(r)$  in  $U$ . Ihr Imaginärteil  $\text{Im}(\omega) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$  ist nicht konservativ, denn nach Sektion 4.13 gilt  $\int_{\gamma} \text{Im}(\omega) = 2\pi$  für den geschlossenen Kreisweg  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$  definiert durch  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Dies liefert für den Kreisweg  $\gamma$  das Wegintegral

$$\boxed{\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i}.$$

## 5.2 Holomorphe Funktionen

Eine Differentialform mit komplexen Koeffizienten  $\omega = \alpha + i\beta$  wird definiert durch zwei reelle Differentialformen  $\alpha$  und  $\beta$ , die man den Real- bzw. Imaginärteil von  $\omega$  nennt. Für komplexwertige 1-Formen erklärt man das Wegintegral durch

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} \alpha + i \cdot \int_{\gamma} \beta.$$

Sei nun  $U$  eine offene Teilmenge der komplexen Ebene  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . Für Funktionen  $f$  auf  $U$  schreiben wir dann häufig  $f(z) = f(x, y)$ , falls  $z = x + iy \in U$ . Sei  $\beta \in A^1(U)$  eine reelle 1-Form auf  $U$ . Diese lässt sich schreiben in der Gestalt  $\beta = v(x, y)dx + u(x, y)dy$  für Funktionen  $u, v \in C^\infty(U)$ . Diese reelle 1-Form lässt sich interpretieren als Imaginärteil der komplexen 1-Form auf  $U$

$$\omega = \left( u(x, y)dx - v(x, y)dy \right) + i \cdot \left( v(x, y)dx + u(x, y)dy \right).$$

Für die komplexwertige  $C^\infty$ -Funktion  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  auf  $U$  und die komplexwertige 1-Form  $dz := dx + idy$  gilt dann (durch Ausmultiplizieren)

$$\boxed{\omega = f(z) \cdot dz = (u + iv)(dx + idy)}.$$

**Lemma 5.4.** *Mit den obigen Annahmen und Bezeichnungen sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

1. Auf  $U$  gilt  $d\omega = 0$ .
2. Auf  $U$  gelten die **Cauchy-Riemann** Differentialgleichungen  $\partial_y v = \partial_x u$  und  $\partial_x v = -\partial_y u$ , oder kurz:  $(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = 0$ .
3. Die Jacobimatrix  $Df(z)$  der Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  hat für alle  $z \in U$  die Gestalt

$$Df(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -b(z) & a(z) \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Dies folgt unmittelbar aus  $d\omega = -(\partial_y u + \partial_x v)dx \wedge dy - i(\partial_y v - \partial_x u)dx \wedge dy$ .  $\square$

**Definition 5.5.** *Eine komplexwertige Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  der Gestalt  $f(z) = u(z) + iv(z)$  mit  $u, v \in C^\infty(U)$  heißt **holomorph** auf  $U$ , wenn die drei äquivalenten Bedingungen des letzten Lemmas für  $f$  erfüllt sind.*

**Beispiel.** Die Funktion  $f(z) = z$  ist offensichtlich holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wegen  $u(z) = x$  und  $v(z) = y$  verifiziert man sofort die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.

**Lemma 5.6.** *Die auf  $U$  holomorphen Funktionen bilden einen Unterring  $\mathcal{O}(U)$  des Rings  $C^\infty(U, \mathbb{C})$ . Für  $f, g \in \mathcal{O}(U)$  mit  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  ist auch  $f(z)/g(z)$  holomorph auf  $U$ .*

**Lemma 5.7.** Sind  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  holomorphe Funktionen und  $U, V, W$  offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$ , dann ist auch  $g \circ f : U \rightarrow W$  holomorph.

**Lemma 5.8.** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann sind Realteil  $u(x, y)$  und Imaginärteil  $v(x, y)$  reelle **harmonische**<sup>1</sup> Funktionen auf  $U$ , ebenso  $\log(|f(z)|)$  im Komplement der Nullstellen.

Das erste der drei letzten Lemmata folgt sofort aus der Produktregel mit Hilfe der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen  $D(fg) = D(f)g + fD(g) = 0$  für  $D = \partial_x + i\partial_y$  und  $f, g \in \mathcal{O}(U)$ . Das zweite folgt aus der Kettenregel mit Hilfe von Lemma 5.4(3). Das dritte folgt aus  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)$ , d.h.  $(\partial_x + i\partial_y)f = 0 \Rightarrow \Delta f = 0$ .

## 5.3 Vektorfelder

Sei  $U$  eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ein Vektorfeld  $X$  auf  $U$  ist ein Differentialoperator

$$X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot \partial_i$$

mit Koeffizienten  $a_i(x) \in C^\infty(U)$ . Hierbei faßt man die  $\partial_i$  als Differentialoperatoren auf. Das heißt, man kann ein Vektorfeld  $X$  auf eine Funktion  $f \in C^\infty(U)$  anwenden in der Form  $(Xf)(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot \partial_i(f)(x)$ , und erhält wieder eine Funktion  $Xf \in C^\infty(U)$ . Auf diese Weise definiert ein Vektorfeld  $X$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

mit der **Derivationseigenschaft**

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$$

die sich unmittelbar aus der Definition ergibt.

Sind  $X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot \partial_i$  und  $Y = \sum_{i=1}^n b_i(x) \cdot \partial_i$  Vektorfelder, dann ist auch der **Kommutator**

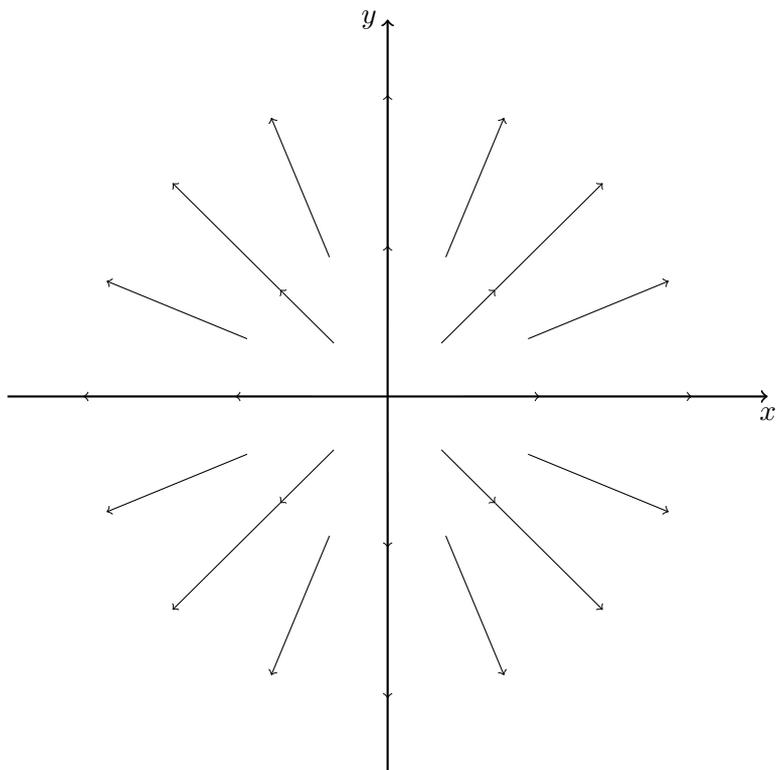
$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

wieder ein Vektorfeld. In der Tat ist  $[X, Y]$  a priori ein Differentialoperator zweiter Ordnung, aber die zweiten Ableitungen  $\sum_{i,j} a_i(x)b_j(x)(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)$  kürzen sich wegen Satz 4.11 weg. Die genaue Rechnung zeigt  $(X \circ Y - Y \circ X)f(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \cdot \partial_i(f)(x)$  mit den Koeffizienten  $c_i(x) = \sum_j a_j(x)\partial_j(b_i)(x) - b_j(x)\partial_j(a_i(x))$  in  $C^\infty(U)$ .

Ein Vektorfeld  $X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot \partial_i$  lässt sich visualisieren, indem man an jedem Punkt  $\xi \in U$  den Vektor  $(a_1(\xi), \dots, a_n(\xi)) \in \mathbb{R}^n$  anfügt.

<sup>1</sup>d.h. wird von  $\partial_x^2 + \partial_y^2$  annulliert; siehe Abschnitt 5.5.

**Beispiel.** Das Eulerfeld  $E = \sum_i x_i \partial_i = x \partial_x + y \partial_y$



Eine nicht identisch verschwindende Funktion  $f(x)$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  heisst **homogen** vom Grad  $\alpha$ , wenn für alle reellen  $t > 0$  gilt

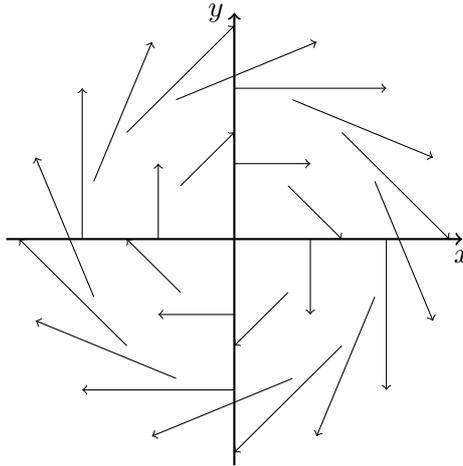
$$f(t \cdot x) = t^\alpha \cdot f(x) .$$

Der Grad  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist dann eindeutig bestimmt. Eine homogene Funktionen ist durch ihre Werte auf der Sphäre  $X$  vom Radius  $\|x\| = 1$  eindeutig bestimmt. Ist  $f(x)$  ein Polynom, dann ist  $\alpha = l$  notwendiger Weise eine natürliche Zahl  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Lemma 5.9.** Sei  $f(x)$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dann ist  $f(x)$  homogen vom Grad  $\alpha$  genau dann, wenn für den **Euler Operator**  $E = \sum_i x_i \partial_i$  gilt  $Ef = \alpha \cdot f$ .

**Beweis.** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  fixiert. Im Fall  $Ef = \alpha f$  ist  $g(t) = f(tx)$  wegen  $\alpha f(tx) = (Ef)(tx) = \sum_\nu x_\nu \partial_\nu f(tx) = t \sum_\nu x_\nu (\partial_\nu f)(tx) = t \frac{d}{dt} f(tx)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\frac{d}{dt} g(t) = \frac{\alpha}{t} \cdot g(t)$  mit  $g(1) = f(x)$ . Also  $g(t) = t^\alpha \cdot f(x)$  wegen Satz 4.18. Die Umkehrung ist trivial.  $\square$

Ein anderes Beispiel liefert das **Drehfeld**  $L_{21} = -L_{12} = y \partial_x - x \partial_y$



Ist  $f(x)$  homogen vom Grad  $\lambda$ , dann sind die partiellen Ableitungen  $\partial_\nu f$  homogen vom Grad  $\lambda - 1$ . Die Differentialoperatoren  $E = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \partial_\nu$  und  $L_{\nu\mu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu$  erhalten daher den Homogenitätsgrad. Beachte  $L_{\nu\mu} = -L_{\mu\nu}$ . Wir nehmen daher immer  $\nu \neq \mu$  an. Dann ist<sup>2</sup>

$$\boxed{[L_{\alpha\beta}, L_{\beta\gamma}] = L_{\alpha\gamma}}$$

für  $\alpha \neq \gamma$  und ist Null sonst. Ebenso  $[L_{\alpha\beta}, L_{\gamma\delta}] = 0$ , falls  $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$ . Also ist  $\sum_{\nu < \mu} \mathbb{R} \cdot L_{\nu\mu}$  eine **Lie Algebra**, d.h. abgeschlossen unter Kommutatorbildung.

**Lemma 5.10.** Der Operator  $L^2 := \sum_{\alpha < \beta} (L_{\alpha\beta})^2$  vertauscht mit allen  $L_{\nu\mu}$

$$\boxed{[L^2, L_{\nu\mu}] = 0}.$$

**Beweis.** Sei obdA  $L_{\nu\mu} = L_{12}$ . Dann vertauscht  $L_{12}$  mit  $L_{\alpha\beta}^2$  ausser wenn genau einer der beiden Indizes  $\alpha, \beta$  in  $\{1, 2\}$  liegt. Es gilt  $[L_{12}, L_{1\alpha}^2] = (L_{12}L_{1\alpha} - L_{1\alpha}L_{12})L_{1\alpha} + L_{1\alpha}(L_{12}L_{1\alpha} - L_{1\alpha}L_{12}) = [L_{12}, L_{1\alpha}]L_{1\alpha} + L_{1\alpha}[L_{12}, L_{1\alpha}] = -L_{2\alpha}L_{1\alpha} - L_{1\alpha}L_{2\alpha}$  für  $\alpha \neq 1, 2$ . Analog  $[L_{12}, L_{2\alpha}^2] = [L_{12}, L_{2\alpha}]L_{2\alpha} + L_{2\alpha}[L_{12}, L_{2\alpha}] = L_{1\alpha}L_{2\alpha} + L_{2\alpha}L_{1\alpha}$ . Aufsummation über alle  $\alpha \geq 3$  gibt Null.  $\square$

Es gilt  $L_{\nu\mu}(r^2) = 0$  für  $r^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$ . Umgekehrt gilt für  $n \geq 2$ : Jedes Polynom  $P(x_1, \dots, x_n)$  mit  $L_{\nu\mu}P = 0$  für alle  $\nu, \mu$  ist ein Polynom in  $r^2$ . [Benutze Induktion nach  $n$ .]

## 5.4 Orthogonale Gruppen

Für eine reelle symmetrische invertierbare  $n \times n$ -Matrix  $S$  bilden die Matrizen  $X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  mit der Eigenschaft<sup>3</sup> ( ${}^T X$  bezeichne die transponierte Matrix von  $X$ )

$$\boxed{{}^T X = -SXS^{-1}}$$

<sup>2</sup> $L_{\alpha\beta}L_{\beta\gamma} - L_{\beta\gamma}L_{\alpha\beta} = (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)(x_\beta \partial_\gamma - x_\gamma \partial_\beta) - (x_\beta \partial_\gamma - x_\gamma \partial_\beta)(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha) = x_\alpha \partial_\gamma - x_\gamma \partial_\alpha = L_{\alpha\gamma}$ .

<sup>3</sup>Beachte  ${}^T [X, Y] = {}^T (XY - YX) = {}^T Y^T X - {}^T X^T Y = (-SY S^{-1})(-SXS^{-1}) - (-SXS^{-1})(-SY S^{-1}) = -S(XY - YX)S^{-1} = -S[X, Y]S^{-1}$  für  $X, Y \in so(S)$ .

die **orthogonale Lie Algebra**  $so(S)$ . Die zugehörige **orthogonale Gruppe**  $O(S, \mathbb{R})$  besteht aus allen reellen  $r \times r$ -Matrizen  $M$  mit der Eigenschaft

$$\boxed{^T M S M = S}.$$

Beachte  $M, N \in O(S, \mathbb{R}) \Rightarrow M \circ N \in O(S, \mathbb{R})$ . Für  $M$  in  $O(S, \mathbb{R})$  gilt  $\det(M)^2 = 1$  und die Matrizen  $M \in O(S, \mathbb{R})$  mit der Eigenschaft  $\det(M) = 1$  definieren eine Untergruppe  $SO(S, \mathbb{R})$ , die **spezielle orthogonale Gruppe** zur quadratischen Form  $q_S(x) = ^T x S x$ . Eine Matrix  $M \in Gl(n, \mathbb{R})$  liegt genau dann in  $O(S, \mathbb{R})$ , wenn gilt

$$q_S(M(x)) = q_S(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, .$$

[Es gilt  $q_S(M(x)) = ^T (Mx) S (Mx) = ^T x (^T M S M) x = ^T x S x = q_S(x)$  für  $M \in O(S, \mathbb{R})$ . Wegen  $2^T y S x = q_S(x + y) - q_S(x) - q_S(y)$  folgt umgekehrt aus  $q_S(M(v)) = q_S(v)$  für alle  $v$  sofort  $^T y (^T M S M) x = ^T y S x$ . Wählt man für  $x, y$  die Standardbasisvektoren, ergibt sich  $^T M S M = S$ ]. Wie in Lemma 4.43 zeigt man für reelle Matrizen  $X \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$$X \in so(S) \iff \exp(tX) \in O(S, \mathbb{R}) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Sei  $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_\nu \in \{\pm 1\}$ . Wir schreiben dann  $x^\nu := \lambda_\nu x_\nu$  und  $\partial^\nu := \lambda_\nu^{-1} \partial_\nu$ . Die quadratische Form  $q(x) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu x_\nu^2$  schreibt sich dadurch kurz  $q(x) = \sum_{\nu=1}^n x_\nu x^\nu$ .

Ist  $S$  die Einheitsmatrix  $S = E$ , schreibt man  $so(n)$  anstatt  $so(E)$ , und  $so(n)$  besteht dann aus den antisymmetrischen  $n \times n$ -Matrizen. Eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $so(n)$  bilden die Matrizen  $E_{\nu\mu}$  für  $1 \leq \nu < \mu \leq n$ , die den Eintrag  $+1$  bei  $(\nu, \mu)$  und den Eintrag  $-1$  bei  $(\mu, \nu)$  haben und sonst nur Nulleinträge. Man zeigt leicht  $[E_{\alpha\beta}, E_{\beta\gamma}] = E_{\alpha\gamma}$ . Also kann  $so(n)$  mit der Lie Algebra der **Drehfelder**  $L_{\nu\mu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu$  (siehe Abschnitt 5.3) identifiziert werden

$$so(n) \cong \bigoplus_{\nu < \mu} \mathbb{R} \cdot L_{\nu\mu} ,$$

da die  $L_{\nu\mu}$  dieselben Kommutator-Relationen erfüllen wie die  $E_{\nu\mu}$ . Im allgemeinen wird  $so(S)$  von den Operatoren  $L_\nu^\mu = x_\nu \partial^\mu - x_\mu \partial^\nu$  erzeugt. Wichtige Spezialfälle sind die Gruppen  $O(r, s)$  und die Lie Algebren  $so(r, s) := so(S)$  für  $S = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1)$  mit  $r$  mal  $+1$  und  $s = n - r$  mal  $-1$  als Eintrag. Im Fall  $r = 3, s = 1$  erhält man die **Lorentzgruppe** und ihre Lie Algebra  $so(3, 1)$ . Die affin linearen Abbildungen  $f = f(M, b)$  der Gestalt

$$f(x) = M \cdot x + b \quad , \quad M \in O(3, 1) \quad , \quad b \in \mathbb{R}^4$$

$$f(M_1, b_1) \circ f(M_2, b_2) = f(M_1 M_2, M_1(b_2) + b_1)$$

bilden eine Gruppe, die **Poincaregruppe**. Die Liealgebra der Poincaregruppe ist die direkte Summe von  $so(3, 1)$  und der Liegruppe der Translationen  $\bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{R} \cdot \partial_i$

$$so(3, 1) \oplus \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{R} \cdot \partial_i .$$

## 5.5 Harmonische Funktionen

### Der Laplace Operator

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$$

bildet homogene Funktionen vom Grad  $\alpha$  auf homogene Funktionen vom Grad  $\alpha - 2$  ab und es gilt (Übungsaufgabe und obdA  $n = 2$ )

$$\boxed{[\Delta, L_{\nu\mu}] = 0}.$$

Für  $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  erhält der Operator  $r^2\Delta$  den Grad  $\alpha$  und es gilt  $[r^2\Delta, E] = 0$  für  $E = \sum_i x_i \partial_i$ . **Beispiel.** Für  $r \neq 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  die Formel

$$\boxed{\Delta r^\alpha = \alpha(\alpha + n - 2) \cdot r^{\alpha-2}}.$$

[Aus  $2r\partial_i(r) = 2x_i$  folgt  $\partial_i(r) = \frac{x_i}{r}$ . Deshalb gilt  $\Delta(r^\alpha) = \alpha \sum_i \partial_i(x_i r^{\alpha-2}) = n\alpha r^{\alpha-2} + \alpha(\alpha - 2)r^2 r^{\alpha-4}$ . Analog zeigt man  $\Delta \log(r) = (n - 2)r^{-2}$ .

**Definition.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Funktion  $f \in C^\infty(U)$  heisst **harmonisch**, wenn für den Laplace Operator  $\Delta$  gilt

$$\Delta f = 0.$$

Konstante Funktionen und lineare Polynome sind harmonische Funktionen. Wie wir oben gezeigt haben ist für  $n \geq 3$  die homogene Funktion

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{r^{n-2}}}, \quad \kappa := n - 2$$

auf  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  harmonisch. Diese Funktion besitzt eine Singularität<sup>4</sup> im Ursprung in den Dimensionen  $n \geq 3$ . Der Fall  $n = 2$  ist exzeptionell. Man hat hier nur die singuläre harmonische Funktion  $f(x) = \log(r)$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , welche aber nicht homogen vom Grad Null ist: Es gilt  $f(tx) = \log(t) + f(x)$  mit einer Konstante  $\log(t)$ .

**Inversion am Kreis.** Sei  $f^0(x) := f(\frac{x}{\|x\|^2})$  oder  $f^0(x_1, \dots, x_n) := f(\frac{x_1}{r^2}, \dots, \frac{x_n}{r^2})$  für eine Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Ist  $f$  homogen vom Grad  $\alpha$ , so ist  $f^0$  homogen vom Grad  $-\alpha$ .

Sei nun  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , und  $\kappa := n - 2$ . Wir betrachten die **Kelvin Transformation** (Achtung:  $f^*$  nicht verwechseln mit dem Pullback)

$$\boxed{f^*(x) := r^{-\kappa} f(\frac{x}{\|x\|^2})}.$$

Dann ist  $f^*(x) \in C^2(U)$  falls  $f \in C^2(U)$ , und es gilt  $f^{**} = f$ . Ist  $f$  homogen vom Grad  $\alpha$ , dann ist  $f^*$  homogen vom Grad  $-\kappa - \alpha$ .

<sup>4</sup>Im Fall  $n = 3$  ist dies bis auf eine Konstante das Coulomb Potential.

**Lemma 5.11 (Kelvin).** Für  $n \neq 2$  und  $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  gilt

$$\boxed{r^2 \Delta(f^*(x)) = (r^2 \Delta f)^*(x)}.$$

Insbesondere ist  $f^*(x)$  harmonisch, wenn  $f(x)$  harmonisch ist.

**Beweis.** Der Beweis beruht auf einer expliziten Rechnung<sup>5</sup> und benutzt die Fußnote<sup>6</sup>  $\square$

## 5.6 Taylor Koeffizienten

Sei  $x_0 = 0$  und  $U$  eine offene Kugel um  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  sowie  $f \in C^r(U)$ . Für  $l \leq r$  ist dann der  $l$ -te **Taylor Koeffizient**  $T_l(f)(x)$  von  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  definiert durch (für 'kleine'  $t \in \mathbb{R}$  bei festem  $x \in \mathbb{R}^n$ )

$$T_l(f)(x) := \frac{\partial_t^l f(tx)_{t=0}}{l!}.$$

Die so definierte Funktion ist ein homogenes Polynom in  $x$  vom Grad  $l$ , dessen Koeffizienten bis auf universelle Konstanten<sup>7</sup> partielle Ableitungen von  $f$  im Punkt  $x_0$  sind. Dies zeigt man leicht mit Hilfe der Kettenregel und Induktion nach  $l$ .

**Beispiel 1.** Ist  $f(x)$  ein homogenes Polynom vom Grad  $m$ , d.h. gilt  $f(tx) = t^m f(x)$ , dann ist  $T_l(f)(x) = 0$  für  $l \neq m$  und  $T_l(f)(x) = f(x)$  für  $l = m$ .

**Beispiel 2.** Aus Beispiel 1 folgt für die Funktion  $g(x) = f(x) - \sum_{l=0}^r T_l(f)(x)$  sofort  $T_l(g)(x) = 0$  für  $l = 0, \dots, r$  für beliebiges  $f \in C^r(U)$ .

<sup>5</sup>Für  $f^0(x) = f(\frac{x}{\|x\|^2})$  gilt  $\Delta(\frac{f^0}{r^\kappa}) = \Delta(\frac{1}{r^\kappa})f + 2 \sum_i \partial_i(r^{-\kappa})\partial_i(f^0) + r^{-\kappa} \Delta(f^0)$  mit  $\Delta(\frac{1}{r^\kappa}) = 0$ . Wegen Formel 1 und 4 ist der Term  $2 \sum_i \partial_i(r^{-\kappa})\partial_i(f^0)$  gleich

$$-\frac{2\kappa}{r^{\kappa+2}} \sum_i \sum_j x_i (f_j)^0 T_{ij} = \frac{2\kappa}{r^{\kappa+4}} \sum_j x_j (f_j)^0.$$

Wegen Formel 1 ist  $r^{-\kappa} \Delta(f^0)$  gleich  $\frac{1}{r^\kappa} \sum_i \sum_j \partial_i((f_j)^0 T_{ij})$ , und aus Formel 2 und 3 folgt daher die Behauptung  $\Delta(f^*) = r^{-4}(\Delta(f))^*$  vermöge

$$\frac{1}{r^\kappa} \sum_i \sum_j \sum_k (f_{kj})^0 T_{ik} T_{ij} + \frac{1}{r^\kappa} \sum_j \sum_i (f_j)^0 \partial_i(T_{ij}) = \frac{(\Delta f)^0}{r^{\kappa+4}} - \frac{2\kappa}{r^{\kappa+4}} \sum_j x_j (f_j)^0.$$

<sup>6</sup>Formeln. Beachte  $\partial_i(r^\alpha) = \alpha x_i r^{\alpha-2}$ . Für  $T_{ij} := \partial_j(x_i r^{-2}) = (\delta_{ij} r^2 - 2x_i x_j) r^{-4}$  und  $f_j := \partial_j f$  gilt

1.  $\partial_i(f^0) = \sum_j (f_j)^0 T_{ij}$  (Kettenregel)
2.  $\sum_i T_{ij} T_{ik} = \delta_{jk} r^{-4}$
3.  $\sum_i \partial_i(T_{ij}) = -2\kappa x_j r^{-4}$
4.  $\sum_i x_i T_{ij} = -x_j r^{-2}$ .

wegen  $\sum_i (\delta_{ij} r^2 - 2x_i x_j)(\delta_{ik} r^2 - 2x_i x_k) = \delta_{jk} r^4 - 2x_j x_k r^2 - 2x_j x_k r^2 + 4r^2 x_j x_k = \delta_{jk} r^4$  und  $\sum_i \partial_i(T_{ij}) = \partial_j(1/r^2) - 2n x_j / r^4 - 2E(x_j / r^4) = (-2 - 2n - 2(-3))x_j / r^4 = -2\kappa x_j / r^4$ .

<sup>7</sup>Durch Reduktion auf  $f(x) = \prod_i x_i^{m_i}$  folgt dann  $T_l(f)(x) = \sum_{m_1+\dots+m_n=l} (\frac{\partial^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\partial^{m_n}}{m_n!} f)(0) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{m_i}$ .

**Beispiel 3.** Ist  $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)$  eine Potenzreihe mit homogenen Polynomen  $P_l(x)$  vom Grad  $l$  und Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $f(tx) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$  für  $|t| < 1$ , und aus Lemma 4.39 folgt  $T_l(f)(x) = P_l(x)$ .

**Beispiel 4.** Ist  $f(x)$  eine harmonische Funktion, dann sind die  $T_l(f)(x)$  harmonische Polynome, denn es gilt  $\Delta T_l(f)(x) = \Delta \frac{\partial_t^m}{m!} f(tx)_{t=0} = \frac{\partial_t^m}{m!} t^2 (\Delta f)(tx)_{t=0} = 0$ . (Analog zeigt man: Ist  $f(z)$  holomorph, dann sind alle  $T_l(f)(z)$  holomorph).

Die Funktion  $H(x) = \frac{f(x)}{\|x\|^r}$  liegt in  $C^r(U \setminus \{x_0\})$ . Gilt  $T_l(f)(x) = 0$  für  $l = 0, \dots, r$ , lässt sich  $H(x)$  zu einer stetigen Funktion auf  $U$  fortsetzen mit  $H(0) = 0$ . [Sei  $x = t \cdot v$  und  $\|v\| = 1$ . Wie im Beweis von Lemma 4.10 existieren Punkte  $0 < \theta_r < \dots < \theta_1 < t$  mit  $h(t) = t \cdot h'(\theta_1) = \dots = t^r h^{(r)}(\theta_r)$  für  $h(t) := f(tv)$ . Also lässt sich  $H(x) = h^{(r)}(\theta_r) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = r} \left( \frac{\partial_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{\partial_n^{m_n}}{m_n!} f \right) (\theta_r v) \cdot \frac{\prod_{i=1}^n v_i^{m_i}}{\|v\|^r}$  bis auf Konstanten durch die  $|\partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n} f(\theta_r v)|$  für  $m_1 + \dots + m_n = r$  abschätzen. Diese Terme sind  $< \varepsilon$  für  $|t| < \delta = \delta(\varepsilon)$  wegen der Stetigkeit von  $\partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n} f(x)$  und  $T_r(f) = 0$ , d.h.  $\partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n} f(0) = 0$  für  $m_1 + \dots + m_n = r$ . Wegen Beispiel 2 folgt daraus die folgende **Taylor Approximation** im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

**Lemma 5.12.** Für  $f \in C^r(U)$  gibt es eine stetige Funktion  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H(0) = 0$  und

$$f(x) = \sum_{l=0}^r T_l(f)(x) + \|x\|^r \cdot H(x).$$

## 5.7 Harmonische Polynome

Sei  $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Polynome  $P(x)$  in  $n$  Variablen, welche homogen vom Grad  $l$  sind. Sei  $\mathcal{H}_l = \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$  der Unterraum aller **harmonischen Polynome**.

**Satz 5.13.**  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = \binom{n+l-1}{l} - \binom{n+l-3}{l-2}$  und für  $n \geq 3$  auch  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = \frac{n-2+2l}{n-2} \binom{n+l-3}{l}$ .

**Beispiel.** Im Fall  $n = 1$  ist  $\mathcal{H}_l = 0$  für  $l > 1$ . Im Fall  $n = 2$  gilt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = 2$  für  $l \geq 1$ , und  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_0) = 1$ . Als Vektorraum wird  $\mathcal{H}_l$  von  $Re(z^l)$  und  $Im(z^l)$  aufgespannt ( $z = x_1 + ix_2$ ).

**Beispiel.** Im Fall  $n = 3$  folgt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l) = 2l + 1$  für alle  $l \geq 0$ .

**Lemma 5.14.**  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l) = \binom{n+l-1}{l}$ .

**Beweis.** Induktion nach der Variablenzahl  $n$ . Ersetzt man die Variable  $x_n$  durch 1, ergibt dies genau die Polynome in  $x_1, \dots, x_{n-1}$  vom Grad  $\leq l$ . Also

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^n)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1})),$$

wie die Rekursionsformeln  $\binom{n+l-1}{l} - \binom{n+(l-1)-1}{(l-1)} = \binom{(n-1)+l-1}{l}$  der **Binomialkoeffizienten**.  $\square$

**Beispiel.** Im Fall  $n = 1$  ist  $\mathcal{P}_l = \mathbb{R} \cdot x^l$ . Im Fall  $n = 2$  ist  $\mathcal{P}_l = \mathbb{R}x^l + \mathbb{R}x^{l-1}y + \dots + \mathbb{R}y^l$  von der Dimension  $l + 1$ , und für  $n = 3$  gilt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l) = (l + 1)(l + 2)/2$ .

**Beweis von Satz 5.13.** Wir entwickeln  $P \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  nach der letzten Variable

$$P(x_1, \dots, x_n) = Q_l(x_1, \dots, x_{n-1}) + Q_{l-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + \dots$$

Sei  $\Delta = \Delta_{n-1} + \partial_n^2$ . Wegen  $(\Delta_{n-1} + \partial_n^2)P = 0$  bestimmen die Polynome  $Q_l \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1})$  und  $Q_{l-1} \in \mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  das harmonische Polynom  $P$  eindeutig, und  $Q_l$  und  $Q_{l-1}$  vom Grad  $l$  resp.  $l-1$  können dabei beliebig vorgegeben (!) werden. Also  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1})) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^{n-1})) = \binom{n-1+l-1}{l} + \binom{n-1+l-2}{l-1} = \frac{n-2+2l}{n-2} \binom{n+l-3}{l}$  für  $n \geq 3$ .  $\square$

Ein Polynom  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  definiert  $f(\partial) := f(\partial_1, \dots, \partial_n)$  als Differentialoperator auf  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  (wohldefiniert wegen der Symmetrie der Hessematrix). Die Bilinearform  $\mathcal{P}_l \times \mathcal{P}_l \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\langle f, g \rangle = f(\partial)g(x),$$

ist  $\mathbb{R}$ -bilinear und wegen  $\langle \prod_{\nu=1}^n x_\nu^{m_\nu}, \prod_{\nu=1}^n x_\nu^{k_\nu} \rangle = \prod_{\nu=1}^n (m_\nu! \delta_{m_\nu, k_\nu})$  symmetrisch positiv definit. Sei nun  $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

**Lemma 5.15.** *Bezüglich obiger Paarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  existiert eine orthogonale Zerlegung*

$$\mathcal{P}_l = r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2} \oplus^\perp \mathcal{H}_l, \quad \mathcal{P}_l = \bigoplus_{i \geq 0} r^{2i} \cdot \mathcal{H}_{l-2i}.$$

Die Teilräume  $r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2}$  und  $\mathcal{H}_l$  (resp.  $r^{2i} \cdot \mathcal{H}_{l-2i}$ ) sind invariant unter den Operatoren  $L_{\nu\mu}$ .

**Beweis.** Nach Lemma 5.14 und Satz 5.13 gilt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}_l) = \dim_{\mathbb{R}}(r^2 \mathcal{P}_{l-2}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l)$ . Es genügt also für  $g(x) = r^2 \cdot f(x)$  im Durchschnitt  $r^2 \mathcal{P}_{l-2} \cap \mathcal{H}_l$  zu zeigen:  $g(x) = 0$ . Dies folgt wegen  $\Delta g(x) = 0$  aus  $\langle g(x), g(x) \rangle = \langle r^2 f(x), g(x) \rangle = \Delta f(\partial)g(x) = f(\partial)\Delta g(x) = \langle f(x), \Delta g(x) \rangle = 0$ .

Wegen  $L_{\nu\mu}(r^2) = x_\nu \cdot 2x_\mu - x_\mu \cdot 2x_\nu = 0$  gilt  $L_{\nu\mu}(r^2 f(x)) = L_{\nu\mu}(r^2)f(x) + r^2 L_{\nu\mu}(f(x)) = r^2 L_{\nu\mu}(f(x))$ , also  $L_{\nu\mu}(r^2 \mathcal{P}_{l-2}) \subseteq r^2 \mathcal{P}_{l-2}$ . Aus  $\Delta L_{\nu\mu}g = L_{\nu\mu}\Delta g = 0$  für  $g \in \mathcal{H}_l$  folgt  $L_{\nu\mu}(\mathcal{H}_l) \subseteq \mathcal{H}_l$ .  $\square$

Sei  $n \geq 2$ . Das Bild des Monoms  $(x_1)^l = x_1^l \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$  unter der harmonischen Projektion

$$\mathcal{P}_l(\mathbb{R}) = r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{pr} \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$$

(die orthogonale Projektion des letzten Lemmas) ist das **zonale sphärische Polynom**

$$P_{l,0}(x) := pr(x_1^l).$$

Das Monom  $x_1^l$ , und damit auch  $P_{l,0}(x)$ , ist invariant unter orthogonalen Substitutionen, welche den Vektor  $(1, 0, \dots, 0)$  fest lassen.  $P_{l,0}(x)$  ist nicht trivial und wird von den  $L_{\nu\mu}$  mit  $\nu \neq 1, \mu \neq 1$  annulliert, und ist folglich (siehe Abschnitt 5.3) als Polynom

$$P_{l,0}(x) = \sum_{i=0}^l a_i \cdot x_1^i r^{l-i}$$

nur abhängig von den Variablen  $x_1$  und  $r^2$  mit  $P_{l,0}(-x) = (-1)^l P_{l,0}(x)$ .

**Lemma 5.16 (Rodrigues Formel).** Für  $r = 1$  und  $n \geq 2$  gilt für eine Konstante<sup>8</sup>  $const(l, n)$

$$\boxed{const(l, n) \cdot P_{l,0}(x) = (t^2 - 1)^{-\frac{n-3}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^l (t^2 - 1)^{l+\frac{n-3}{2}} \Big|_{t=x_1}}.$$

**Beweis.** Nach Satz 4.18 ist der Lösungsraum der Gleichungen

$$(t^2 - 1)f''(t) + (n - 1)tf'(t) - l(l + n - 2)f(t) = 0$$

und  $f(-t) = (-1)^l f(t)$  eindimensional. Die Funktion  $f(t) = \sum_{i=0}^l a_i t^i$  erfüllt diese Bedingungen<sup>9</sup> und die rechte Seite im Lemma ebenfalls (letzteres ist sehr diffizil).  $\square$

**Lemma 5.17.** Der Operator  $L^2$  ist auf  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  ein Vielfaches der Identität

$$\boxed{L^2 = -l(l + n - 2) \cdot id_{\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)}}.$$

**Beweis.** Der Raum der Polynome  $P \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$ , in denen die letzte Variable  $x_n$  höchstens linear vorkommt, bildet ein Komplement  $V \cong \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus x_n \cdot \mathcal{P}_{l-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  von  $W = r^2 \cdot \mathcal{P}_{l-2}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$ . [ $V \cap W$  ist Null und  $\dim(V) = \binom{n+l-2}{l} + \binom{n+l-3}{l-1} = \binom{n+l-1}{l} - \binom{n+l-3}{l-2} = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l)$ .] Also  $\mathcal{H}_l = pr(V)$  nach Lemma 5.15. Aber jedes Monom in  $V$  lässt sich linear kombinieren durch Polynome, die durch sukzessives Anwenden von Operatoren  $L_{\nu\mu}$  auf das Monom  $P(x) = (x_1)^l$  entstehen (Übungsaufgabe). Wendet man daher sukzessive die Operatoren  $L_{\nu\mu}$  auf die Funktion  $P_{l,0}$  an, erhält man ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{H}_l$ .

Für  $1 < \alpha < \beta$  gilt  $L_{\alpha\beta}x_1^l = 0$ . Wegen  $L_{1\alpha}^2(x_1^l) = (x_1\partial_\alpha - x_\alpha\partial_1)(-x_\alpha l x_1^{l-1}) = -lx_1^l + x_\alpha^2 l(l-1)x_1^{l-2}$  liefert Summation über  $\alpha \geq 2$  daher  $L^2(x_1^l) = -l(n-1)x_1^l - l(l-1)x_1^l + l(l-1)r^2 x_1^{l-2} = -l(l+n-2)x_1^l + l(l-1)r^2 x_1^{l-2}$ . Da  $L^2$  mit der harmonischen Projektion vertauscht, folgt aus  $pr(l(l-1)r^2 x_1^{l-2}) = 0$  dann  $L^2(P_{l,0}) = -l(l+n-2)P_{l,0}$  für  $P_{l,0} = pr(x_1^l)$ . Da  $\mathcal{H}_l$  aus  $P_{l,0}$  durch sukzessives Anwenden der  $L_{\nu\mu}$  erzeugt wird, die Operatoren  $L_{\nu\mu}$  aber mit  $L^2$  vertauschen, folgt die Behauptung.  $\square$

## 5.8 Drehimpuls Operatoren

Im dreidimensionalen Fall  $n = 3$  benutzen wir folgende Abkürzungen:  $L_1 := L_{32} = z\partial_y - y\partial_z$ ,  $L_2 := L_{13} = x\partial_z - z\partial_x$  und  $L_3 := L_{21} = y\partial_x - x\partial_y$ . Dann gilt

$$[L_1, L_2] = L_3 \quad , \quad [L_3, L_1] = L_2 \quad , \quad [L_2, L_3] = L_1 .$$

Die Operatoren  $L_1, L_2, L_3$  vertauschen mit dem Differentialoperator  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$  und es gilt  $L^2 = -l(l+1)$  auf  $\mathcal{H}_l$  wegen Lemma 5.17.

<sup>8</sup>Es gilt  $const(l, n) = l!(\binom{2l+n-3}{l})$ .

<sup>9</sup>Wir schreiben  $t$  oder  $x$  anstatt  $x_1$ . Dann ist  $\Delta(x^i r^{l-i}) = r^{l-i} \partial_x^2(x^i) + 2\partial_x(x^i) \partial_x(r^{l-i}) + x^i \Delta(r^{l-i})$ . Die Summe von  $x^i \Delta(r^{l-i}) = (l-i)(n-2+l-i)x^i r^{l-i-2}$  und  $2\partial_x(x^i) \partial_x(r^{l-i}) = 2i(l-i)x^i r^{l-i-2}$  ist  $-(i^2 + (n-2)i - l(l+n-2)) \cdot x^i r^{l-i-2}$ . Also annulliert  $\partial_t^2 - (t\partial_t)^2 - (n-2) \cdot t\partial_t + l(l+n-2)$  das Polynom  $f(t)$ .

Aus  $L_1 x^l = 0$  und Lemma 5.15 folgt  $L_1 P_{l,0} = 0$ . Die zonale Eigenfunktion  $P_{l,0}$  von  $L_1$  liefert neue Eigenfunktionen  $P_{l,k}$  von  $L_1$ . Setze dazu  $L_{\pm} = L_2 \mp i \cdot L_3$  für  $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ . Sei  $P_{l,k} := (L_+)^k P_{l,0}$  für  $k > 0$  bzw.  $P_{l,-k} = \overline{P_{l,k}}$  das konjugiert komplexe. Für Eigenvektoren  $L_1 v = mi \cdot v$  gilt wegen  $[L_1, L_{\pm}] = \pm i L_{\pm}$  dann  $L_1(L_{\pm} v) = L_{\pm}(L_1 v) \pm i L_{\pm} v = (m \pm 1)i \cdot L_{\pm} v$ . Also hat  $L_{\pm} v$  den  $L_1$ -Eigenwert  $(m \pm 1) \cdot i$ , wenn  $L_{\pm} v$  nicht verschwindet. Dies zeigt

$$\boxed{L_1 P_{l,k} = ki \cdot P_{l,k}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen  $L^2 = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2 = -(iL_1)^2 + (iL_1) + L_- L_+$  folgt aus  $L_+(P) = 0$  für einen Eigenvektor  $P \in \mathcal{H}_l$  von  $L_1$  zum Eigenwert  $ki$  dann  $L^2(P) = -k(k+1) \cdot P$ . Andererseits ist  $L^2$  gleich  $-l(l+1) \cdot id$  auf  $\mathcal{H}_l$ . Aus  $P_{l,k} \neq 0$  und  $P_{l,k+1} = L_+ P_{l,k} = 0$  für  $k \geq 0$  folgt daher  $l(l+1) = k(k+1)$ , und damit  $k = l$ . Also sind die Funktionen  $P_{l,k}$  für  $k = -l, \dots, 0, \dots, l$  von Null verschieden.

**Korollar 5.18.** Die  $2l + 1$  linear unabhängigen **Kugelflächenfunktionen**  $P_{l,k}$  (für  $k = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$ ) definieren wegen  $\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)) = 2l + 1$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis des Vektorraums  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)$  der  $\mathbb{C}$ -wertigen harmonischen Polynome, bestehend aus Eigenvektoren von  $L_1$  und  $L^2$ .

In der Physik sind  $L_1, L_2, L_3$  (bis auf Normierung) die **Drehimpuls Operatoren**. In der Quantenmechanik ist  $l = 0, 1, 2, \dots$  der **Spin**. In der Elektrodynamik spielen die Funktionen  $P_{l,k}$  eine Rolle bei Radialentwicklungen von Monopolen ( $l = 0$ ), Dipolen ( $l = 1$ ), ... etc. Die Einschränkungen der  $P_{l,k}(x, y, z)$  auf die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$  heißen **Kugelflächenfunktionen** vom Grad  $l$ . Man faßt diese oft auf als homogene Funktionen  $Y(x, y, z) = P(x, y, z)/r^l$  vom Grad Null (für  $P \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)$ ). Sie treten auf bei der **Radialentwicklung** von elektrostatischen Potentialen  $U(x, y, z)$  auf Kugelschalen (siehe Abschnitt 9.5)

$$\boxed{U(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l (a_{lk} r^l + b_{lk} r^{-l-1}) \cdot Y_{l,k}(x, y, z)}.$$

Hierbei sind  $a_{lk}, b_{lk} \in \mathbb{C}$  geeignete Konstanten. Die Polynome  $r^l Y_{l,k} = P_{l,k}$  und ihre **Kelvin Transformierten**  $r^{-l-1} Y_{l,k} = (P_{l,k})^*$  sind harmonisch. Die Funktionen  $r^{-l-1} Y_{l,k} = (P_{l,k})^*$  erhält man auch durch partielles Ableiten der homogenen harmonischen Funktion  $\frac{1}{r}$ . Diese sind singular bei 0 und klingen im Unendlichen ab im Gegensatz zu den Polynomen  $P_{l,k}$ . Dies lässt sich (ebenso wie Korollar 5.18) auf Dimensionen  $n \geq 3$  verallgemeinern (siehe Kapitel 9).

## 5.9 Fourier Transformation (antikommutativ)

Sei  $\mathcal{S}_n$  der 'Polynomring' in  $n$  antikommutierenden Variablen  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Elemente  $f(\theta) \in \mathcal{S}_n$  schreiben sich wegen  $\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$  (somit  $\theta_i^2 = 0$ ) auf eindeutige Weise in der Form

$$f(\theta) = \sum_I \theta^I \cdot c_I \quad , \quad \theta^I := \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_r}$$

für  $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$  mit  $i_1 < \dots < i_r$  und Koeffizienten  $c_I$  in einem Körper  $K \subset \mathbb{C}$ . Für  $\varepsilon_r := (-1)^{r(r-1)/2}$  definiert  $(\theta^I)^* = \varepsilon_r \cdot \theta^I$ ,  $r = |I|$  eine  $K$ -lineare Involution des Ringes  $\mathcal{S}_n$ , d.h. es gilt

$$(f \cdot g)^* = g^* \cdot f^* \quad \text{mit} \quad \theta_i^* = \theta_i.$$

**Berezin Integral.** Jedes  $f(\theta) \in \mathcal{S}_n$  ist ein Produkt  $f(\theta) = f_n(\theta_n) \cdots f_1(\theta_1)$  mit  $f_i(\theta_i) = a_i + \theta_i b_i$  und Konstanten  $a_i, b_i$  in  $K$ . Wir erklären formal

$$\int f(\theta) d\theta := \int (\cdots (\int f(\theta) d\theta_1) \cdots) d\theta_n := \prod_{i=1}^n b_i,$$

etwa  $\int \theta_1 \cdots \theta_n d\theta = \varepsilon_n$ . Für  $f(\theta) = q(\theta_2, \dots, \theta_n) + r(\theta_2, \dots, \theta_n)\theta_1$  gilt  $\int f(\theta) d\theta_1 = r(\theta_2, \dots, \theta_n)$ .

**Hodge \*-Operator.** Sei  $*\theta^I = \varepsilon_I \theta^{I^c}$  mit  $\varepsilon_I \in \{\pm 1\}$  definiert durch  $\theta^I \cdot *\theta^I = \theta_1 \cdots \theta_n$ . Hierbei bezeichne  $I^c$  die Komplementärmenge von  $I$  in  $\{1, \dots, n\}$ . Ist  $q_I(x) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \cdot x_\nu^2$  eine quadratische Form<sup>10</sup> mit  $\lambda_\nu \neq 0$  für alle  $\nu$ , dann definiert man allgemeiner  $*_L \theta^I = \pm \theta^{I^c}$  mittels  $\theta^I \cdot *_L \theta^I = \sqrt{\prod_{\nu=1}^n |\lambda_\nu|} (\prod_{\nu \in I} \lambda_\nu)^{-1} \cdot \theta_1 \cdots \theta_n$ . Setze  $\varepsilon_L := \text{sign}(\prod_{\nu=1}^n \lambda_\nu)$ .

**Fourier Transformation.** Für weitere (auch mit den  $\theta_i$ ) antikommutierende Variable  $\eta_1, \dots, \eta_n$  und  $\eta \cdot \theta = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \eta_\nu \theta_\nu$  ist  $\exp(\eta \cdot \theta) = \sum_{m=0}^n (\eta \cdot \theta)^m / m!$  wohldefiniert und kommutiert mit allen  $f \in \mathcal{S}_n$ . Man erklärt die Fourier Transformation<sup>11</sup> durch

$$\boxed{(\mathcal{F}_L f)(\eta) = |\prod_{\nu=1}^n \lambda_\nu|^{-1/2} \int f(\theta) \cdot e^{\eta \cdot \theta} d\theta}.$$

*Beispiel  $n = 1$ .* Für  $f(\theta) = a_1 + b_1 \theta_1$  ist  $\mathcal{F}f(\eta) = \int (a_1 + b_1 \theta_1)(1 + \eta_1 \theta_1) d\theta_1 = b_1 + a_1 \eta_1$ .

**Lemma 5.19.** *Es gilt  $\mathcal{F}_L(f^*) = \varepsilon_L \cdot *_L f$  für den Hodge \*-Operator  $f \mapsto *_L f$ .*

**Beweis.** OBdA  $\lambda_\nu = 1$  für  $\nu = 1, \dots, n$ . Für  $f(\theta) = \theta^I$  mit  $|I| = r$  ist  $\mathcal{F}(f^*) = \varepsilon_r \mathcal{F}(\theta^I)$  gleich  $\varepsilon_r \int \frac{(\eta \cdot \theta)^{n-r}}{(n-r)!} \cdot \theta^I d\theta = \varepsilon_r \int (\eta_{j_1} \theta_{j_1}) \cdots (\eta_{j_{n-r}} \theta_{j_{n-r}}) \cdot \theta^I d\theta$  für  $j_1 < \cdots < j_{n-r}$  und  $I^c = \{j_1, \dots, j_{n-r}\}$ . Dies gibt  $\varepsilon_r \varepsilon_{n-r} \int \eta^{I^c} \theta^{I^c} \theta^I d\theta = \varepsilon_r \varepsilon_{n-r} (-1)^{r(n-r)} \varepsilon_I \varepsilon_n \eta^{I^c} = \varepsilon_I \eta^{I^c} = *f$  wie behauptet, wegen der trivialen binomischen Formel  $\varepsilon_r \varepsilon_{n-r} \varepsilon_n (-1)^{r(n-r)} = 1$ .  $\square$

**Bemerkung.**  $**\eta^I = (-1)^{n(n-r)} \varepsilon_I^2 \eta^I$  für  $r = |I|$  sowie  $\varepsilon_I^2 = 1$  und Lemma 5.19 implizieren  $\mathcal{F}^* \mathcal{F}^* = (-1)^{r(n-r)} \cdot id$  auf Elementen vom Grad  $r$ . Auf solchen Elementen ist  $\mathcal{F}^* \mathcal{F}^*$  gleich  $\varepsilon_{n-r} \varepsilon_r \mathcal{F}^2$ , da  $\mathcal{F}$  homogene Elemente vom Grad  $r$  in homogene Elemente vom Grad  $n - r$  abbildet. Es folgt  $\mathcal{F}^2 = \varepsilon_{n-r} \varepsilon_r (-1)^{r(n-r)} \cdot id$  und damit  $\boxed{\mathcal{F}^2 = \varepsilon_n \cdot id}$ . Wir erhalten analog

**Satz 5.20 (Fourier Inversion).**  $\boxed{f = \varepsilon_L \varepsilon_n \cdot \mathcal{F}_L(g)}$  für  $\boxed{g = \mathcal{F}_L(f)}$ .

## 5.10 Laplace Operatoren

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Formen  $\omega = \sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I$  in  $A^r(U)$  können als  $C^\infty$ -Funktionen  $\omega : U \rightarrow \mathcal{S}_n$  der Gestalt  $\sum_I \omega_I(x) \cdot \theta^I$  mit Werten in  $\mathcal{S}_n$  aufgefasst werden. Die Cartan Ableitung  $d : A^r(U) \rightarrow A^{r+1}(U)$  ist dann  $d = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} \theta_\nu$ . Für gegebenes  $q_L(x) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \cdot x_\nu^2$  definiert die Fourier Transformation  $\mathcal{F}_L : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  (Fußnote 3) die assoziierte **Koableitung**

$$\boxed{\delta_L = (\mathcal{F}_L)^{-1} \circ d \circ \mathcal{F}_L}.$$

<sup>10</sup>Diese definiert eine verallgemeinerte Metrik mit  $g^{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} \cdot \lambda_\nu$ .

<sup>11</sup>Wir schreiben  $\mathcal{F}$  im Euklidischen Fall  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ .

Offensichtlich ist  $\delta_L \circ \delta_L = 0$ , und in der Sprache der Differentialformen gilt

$$\delta_L : A^r(U) \rightarrow A^{r-1}(U)$$

wegen  $\mathcal{F}_L : A^{n-r+1}(U) \rightarrow A^{r-1}(U)$  sowie  $\mathcal{F}_L : A^r(U) \rightarrow A^{n-r}(U)$  nach Lemma 5.19. Für  $D_L := d + \delta_L$  erhält dann  $D_L^2 : A^r(U) \rightarrow A^r(U)$  den Raum der  $r$ -Formen wegen

$$\boxed{D_L^2 = (d + \delta_L)^2 = d \circ \delta_L + \delta_L \circ d}.$$

**Lemma 5.21.** *Es gilt  $D_L^2 \left( \sum_I \omega_I(x) \cdot dx_I \right) = \sum_I \Delta_L(\omega_I(x)) \cdot dx_I$ , d.h. es gilt*

$$\boxed{D_L^2 = \Delta_L}$$

für den klassischen Laplace Operator  $\Delta_L = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$ .

**Beweis.**  $D_L^2$  ist  $\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} (\theta_\nu \circ (\mathcal{F}_L)^{-1} \circ \theta_\mu \circ \mathcal{F}_L + (\mathcal{F}_L)^{-1} \circ \theta_\nu \circ \mathcal{F}_L \circ \theta_\mu)$ . Wegen  $(\mathcal{F}_L)^{-1} \circ \theta_\nu \circ \mathcal{F}_L = \lambda_\nu^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_\nu}$  reduziert<sup>12</sup> sich die Aussage vermöge der Symmetrie der Hessematrix auf die Antikommutator-Identität  $\theta_\nu \circ \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} + \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \circ \theta_\nu = \delta_{\nu\mu}$ .  $\square$

Die **Hodge**-Operator  $d^* := (-1)^r \cdot (*_L)^{-1} \circ d \circ (*_L)$  auf  $A^r(U)$ , mit dem **\***-Operator  $*_L$  von Abschnitt 5.11, definiert die **deRham** Operatoren  $d^*d + dd^*$ , und es gilt<sup>13</sup> auf  $A^r(U)$

$$\boxed{d^*d + dd^* = -D_L^2}.$$

## 5.11 Maxwell Gleichungen

Der **Minkowski Raum**  $(\mathbb{R}^4, q_L)$  ist der  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der quadratischen Lorentz Form

$$q_L(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2;$$

hierbei sei die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  und  $(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Die zugehörige orthogonale Gruppe  $O(3, 1)$  ist die **Lorentzgruppe**. Der zugehörige Laplace Operator  $\Delta_L$  ist der **D'Alembert Operator**

$$\boxed{\square = -\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 + \partial_4^2}.$$

Für die Lorentz Form  $q_L(x) = \sum_{\nu=1}^4 \lambda_\nu x_\nu^2$  ist dann  $*_L dx_I = \pm dx_{I^c}$  und das Vorzeichen ist definiert durch  $dx_I \wedge *_L dx_I = \left( \prod_{\nu \in I} \lambda_\nu \right)^{-1} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

**Notation:**  $dx_{13} = -dx_{31} = -dx_3 \wedge dx_1$  oder  $dx_{134} = -dx_{314}$ , etc. Es gilt  $dx_{12} \wedge dx_{34} = dx_{31} \wedge dx_{24} = dx_{23} \wedge dx_{14} = dx_{1234}$  sowie  $dx_1 \wedge dx_{234} = dx_2 \wedge dx_{314} = dx_3 \wedge dx_{124} = dx_{1234}$ , aber beachte  $dx_4 \wedge dx_{123} = -dx_{1234}$ .

<sup>12</sup>für Details siehe Abschnitt 10.5.

<sup>13</sup> $d^*d + dd^* = -D_L^2$  folgt aus  $d^*d + dd^* = d \circ (-1)^r \cdot (*_L)^{-1} d(*_L) + (-1)^{r+1} \cdot (*_L)^{-1} d(*_L) \circ d$  wegen Lemma 5.19 und  $(-1)^r \varepsilon_r \varepsilon_{r-1} \varepsilon_{n-r} = (-1)^{r+1} \varepsilon_{r+1} \varepsilon_r = -1$ .

Die **Strom/Ladungsdichte** ist eine **3-Form** (mit  $j_4 =: -\rho$ )

$$J = j_1 \cdot dx_{234} + j_2 \cdot dx_{314} + j_3 \cdot dx_{124} - \rho \cdot dx_{123} .$$

Die Einsform  $j = *_L J = -j_1 dx_1 - j_2 dx_2 - j_3 dx_3 + \rho dx_4$  ist der **Strom** (der Einfachheit werde angenommen<sup>14</sup> die Permeabilitätskonstante  $\mu$  sei 1). **Ladungserhaltung** zeigt dann wegen Satz 4.35 die **erste Maxwell Gleichung**  $dJ = (\partial_1 j_1 + \partial_2 j_2 + \partial_3 j_3 + \partial_4 \rho) \cdot dx_{1234} = 0$ , also

$$dJ = 0 .$$

Sind idealisiert alle Ströme  $j_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ , d.h.  $J \in A^3(\mathbb{R}^4)$  ist glatt, folgt aus dem Poincare Lemma (Satz 4.30) die Existenz einer 2-Form  $\omega \in A^2(\mathbb{R}^4)$  mit

$$d\omega = J .$$

Schreibt man  $\omega = -E_1 \cdot dx_{23} - E_2 \cdot dx_{31} - E_3 \cdot dx_{12} + B_1 \cdot dx_{14} + B_2 \cdot dx_{24} + B_3 \cdot dx_{34}$ , so definiert  $\omega = *_L F$  oder  $F = - *_L \omega$  die sogenannte **Faraday 2-Form**  $F$

$$F = B_1 \cdot dx_{23} + B_2 \cdot dx_{31} + B_3 \cdot dx_{12} + E_1 \cdot dx_{14} + E_2 \cdot dx_{24} + E_3 \cdot dx_{34} .$$

Man nennt  $(E_1, E_2, E_3)$  und  $(B_1, B_2, B_3)$  das **elektrische** respektive **magnetische Feld**. Die **zweite Maxwell Gleichung** lautet  $dF = 0$ . Wegen des Poincare Lemmas gilt deshalb

$$F = dA$$

für eine **1-Form**  $A = \sum_i A_i dx_i$ , das sogenannte **Vektorpotential**. Die Form  $A$  ist durch  $F = dA$  eindeutig bestimmt bis auf eine exakte Form  $d\varphi$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  (die **Eichfreiheit**, Satz 4.30).

Der  $*_L$ -Operator ist invariant unter der Symmetriegruppe  $SO(q_L)$ , nimmt bei Spiegelungen aber ein Vorzeichen auf. Der Hodge Operator  $d^* = *_L \circ d \circ *_L = (-1)^2 (*_L)^{-1} \circ d \circ *_L$  auf 2-Formen ist dagegen invariant unter der **Lorentzgruppe**  $O(q_L)$ . Die **Maxwell Gleichungen** in der Form

$$dF = 0 \quad , \quad d^* F = j$$

sind daher invariant unter der vollen Lorentzgruppe. Die Maxwell Gleichungen  $DF = j$  für  $D = d + d^*$  reduzieren sich wegen  $d^2 = (d^*)^2 = 0$  bei geeigneter Eichung<sup>15</sup> auf die Bestimmung von  $A$  durch

$$D^2 A = (d^* d + d d^*) A = d^* d A = j ,$$

also nach Lemma 5.21 bei gegebenem  $j$  auf die vier Gleichungen  $\square A_i = j_i$  für  $i = 1, \dots, 4$ . Im elektrostatischen Fall lautet dies  $-\Delta U = \rho$  unter Benutzung der *Physiker Notation*  $U := -A_4$ .

<sup>14</sup>Im Vakuum ist  $\mu$  eine Konstante und kann dann in den Maxwell Gleichungen im Prinzip ignoriert werden.

<sup>15</sup>im Falle der **Lorenz-Eichung**  $d^* A = 0$  der Form  $A$ ; siehe Lemma 5.21. Die Gleichung  $d^*(A + d\varphi) = 0$  führt auf  $\square \varphi = -D^2 \varphi = -d^* d \varphi = d^* A$  nach Lemma 5.21.

# 6 Lebesgue Integration

## 6.1 Übersicht

Für einen Funktionenverband  $B(X)$  auf einer Menge  $X$  und ein abstraktes Integral  $I$  auf  $B(X)$  wurde in Lemma 3.21 gezeigt, daß sich  $I$  eindeutig zu abstrakten Integralen  $I^\pm$  der Halbverbände der monotonen Hüllen  $B^\pm(X) \supset B(X)$  fortsetzen lässt. Eine beliebige Funktion

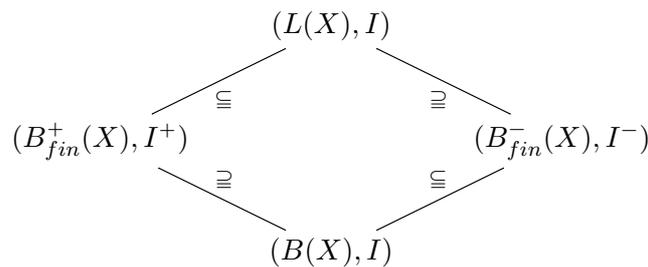
$$f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

heißt dann **integrierbar** bezüglich  $(B(X), I)$ , wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  geeignete Funktionen  $h \in B^-(X)$  und  $g \in B^+(X)$  gibt mit  $h \leq f \leq g$  und  $I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$ . Für integrierbare Funktionen kann das Lebesgue Integral  $I(f) \in \mathbb{R}$  definiert werden. Dieses stimmt auf  $B(X)$  mit dem gegebenen Integral  $I$  überein. Sei  $\hat{L}(X)$  die Menge der integrierbaren Funktionen.

Wir zeigen für das Standardintegral, daß die Teilmenge der Punkte  $x \in X$ , wo eine integrierbare Funktion die Werte  $\pm\infty$  annimmt, eine Nullmenge ist, und dass man integrierbare Funktionen auf Nullmengen beliebig abändern kann ohne das Lebesgue Integral zu verändern.

Die  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen  $f$  in  $B^\pm(X)$  mit endlichem Integral  $I^\pm(f) \neq \pm\infty$  bilden einen Halbverband  $B_{fin}^\pm(X)$  in  $B^\pm(X)$ .

Die  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen in  $\hat{L}(X)$  bilden einen Verband  $L(X)$  und das Lebesgue Integral definiert ein abstraktes Integral auf  $L(X)$ . Es ist das eindeutig bestimmte abstrakte Integral auf  $L(X)$ , das auf  $B(X) \subset L(X)$  mit dem gegebenen  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  übereinstimmt.



Eine Funktion ist Lebesgue integrierbar genau dann wenn sie außerhalb von einer Nullmenge mit einer Funktion in  $L(X)$  übereinstimmt. Eine erneute Anwendung des Lebesgue Prozeßes auf  $(L(X), I)$  liefert dann keine neuen integrierbaren Funktionen mehr.

## 6.2 Das Lebesgue Integral

Sei  $X$  eine Menge,  $B = B(X)$  ein Verband von Funktionen auf  $X$  und  $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$  ein abstraktes Integral. Wir fixieren  $(X, B, I)$  und schreiben  $B^+ := B^+(X)$  und  $B^- := B^-(X)$  für die monotonen Hüllen von  $B(X)$ . Beachte  $B^\mp = -B^\pm$ .

**Definition 6.1 (Integrierbarkeit).** Eine beliebige Funktion

$$f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

heißt **Lebesgue-integrierbar** bezüglich  $(B, I)$  oder kurz **integrierbar**, wenn gilt: Für alle reellen Zahlen  $\varepsilon > 0$  existieren<sup>1</sup> Funktionen  $h \in B^-$  und  $g \in B^+$  mit der Eigenschaft  $h \leq f \leq g$  so dass gilt<sup>2</sup>

$$I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon.$$

Für eine beliebige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  definiert man

$$I^\sharp(f) := \inf\{I^+(g) \mid g \in B^+ \text{ mit } f \leq g\}$$

(ist diese Menge leer, sei  $I^\sharp(f) := \infty$ ), beziehungsweise

$$I^\flat(f) := \sup\{I^-(h) \mid h \in B^- \text{ mit } h \leq f\}$$

(ist diese Menge leer, sei  $I^\flat(f) := -\infty$ ). Dann gilt nach Definition

$$I^\flat(f) \leq I^\sharp(f).$$

[Beachte  $I^\flat(f) = \sup_{h \in B^-, h \leq f} I^-(h) \leq I^+(g)$  wegen  $I^-(h) \leq I^+(g)$  für  $h \leq f \leq g$  (Lemma 3.22). Im Limes folgt aus  $I^\flat(f) \leq I^+(g)$  dann  $I^\flat(f) \leq \inf_{g \in B^+, f \leq g} I^+(g) = I^\sharp(f)$ .]

**Lemma 6.2 (Lebesgue Integral).** Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  bezüglich  $(B, I)$  Lebesgue-integrierbar, dann gilt  $I^\flat(f) = I^\sharp(f)$  und der so definierte Wert ist eine reelle Zahl, d.h. verschieden von  $\pm\infty$ .

**Definition 6.3.** Die in Lemma 6.2 definierte reelle Zahl wird das **Lebesgue Integral**  $I(f)$  der bezüglich  $(B, I)$  integrierbaren Funktion  $f$  genannt

$$I(f) := I^\flat(f) = I^\sharp(f).$$

<sup>1</sup>Man sieht dann a posteriori auch, dass es reicht wenn für alle  $\varepsilon > 0$  Lebesgue integrierbare Funktionen  $h$  und  $g$  existieren mit  $h \leq f \leq g$  und  $I(g) - I(h) < \varepsilon$ . [Denn für  $g^+ \in B^+$  mit  $g \leq g^+$ ,  $I(g) \leq I^+(g^+)$  sowie  $I^+(g^+) - I(g) < \varepsilon/2$  und analog  $h^- \leq h$ ,  $h^- \in B^-$  mit  $I^-(h^-) \leq I(h)$  und  $I(h) - I^-(h^-) < \varepsilon/2$  gilt  $h^- \leq f \leq g^+$  sowie  $I^+(g^+) - I^-(h^-) < \varepsilon + I(g) - I(h) < 2\varepsilon$ .]

<sup>2</sup>Nach Lemma 3.22 gilt ausserdem  $0 \leq I^+(g) - I^-(h)$ .

**Beweis.** Aus  $I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$  folgt  $I^+(g) < \infty$  sowie  $I^-(h) > -\infty$ , denn a priori gilt  $I^+(g) \in \mathbb{R}^+$  und  $I^-(h) \in \mathbb{R}^-$ . Also ist  $\{I^-(h) | B^- \ni h \leq f \leq g\}$  nach oben durch  $I^+(g) < \infty$  beschränkt (Lemma 3.22). Das Supremum  $I^b(f)$  liegt daher in  $\mathbb{R}$ . Ditto für  $I^\sharp(f)$ . Wegen  $0 \leq I^\sharp(f) - I^b(f) \leq I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  folgt  $I^b(f) = I^\sharp(f)$ .  $\square$

**Lemma 6.4.** Eine Funktion  $f$  aus  $B^+$  resp.  $B^-$  ist Lebesgue integrierbar bezüglich  $(B, I)$  genau dann, wenn  $I^+(f) \neq \infty$  resp.  $I^-(f) \neq -\infty$  gilt. In diesem Fall ist  $I(f) = I^b(f) = I^\sharp(f)$  gleich  $I^+(f)$  resp.  $I^-(f)$ .

Insbesondere sind die Funktionen aus  $B \subseteq B^+$  Lebesgue integrierbar, und das Lebesgue Integral stimmt auf  $B$  mit dem ursprünglich gegebenen Integral  $I : B \rightarrow \mathbb{R}$  überein.

**Beweis.** Sei  $f \in B^+$ . Aus  $g \in B^+$  und  $f \leq g$  folgt  $I^+(f) \leq I^+(g)$  wegen der Monotonie von  $I^+$ . Das Infimum  $I^\sharp(f)$  der Werte  $I^+(g)$ , für  $g \in B^+$  mit  $f \leq g$ , wird daher wegen  $f \in B^+$  bei  $g = f$  angenommen. Also gilt

$$I^\sharp(f) = I^+(f) < +\infty.$$

Es verbleibt  $I^+(f) \leq I^b(f)$  für unser  $f \in B^+$  zu zeigen. Wähle dazu Funktionen  $f_n \in B$  mit  $f_n \nearrow f$ . Nach Definition von  $I^+(f)$  gilt  $I^-(f_n) = I(f_n) \nearrow I^+(f)$ . Es folgt

$$I^\sharp(f) = I^+(f) := \sup_n I(f_n) = \sup_n I^-(f_n) \leq \sup_{h \in B^-, h \leq f} I^-(h) =: I^b(f).$$

Da  $I^b(f) \leq I^\sharp(f)$  immer gilt, folgt daraus  $I^b(f) = I^\sharp(f) = I^+(f) < \infty$ .  $\square$

### 6.3 Der Verband $L(X)$

**Satz 6.5.** Die  $\mathbb{R}$ -wertigen (!) bezüglich  $(B, I)$  Lebesgue integrierbaren Funktionen

$$\boxed{f : X \rightarrow \mathbb{R}}$$

bilden einen **Verband**  $L(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}$ , welcher  $B$  umfasst.

Dies folgt aus

**Satz 6.6 (Permanenzeigenschaften).** Die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist unter reeller Skalarmultiplikation, Addition<sup>3</sup> und den Bildungen  $\min, \max$  abgeschlossen.

**Beweis.** Schritt 1. Für Funktionen  $f_1, f_2$  gilt  $I^\sharp(f_1 + f_2) \leq I^\sharp(f_1) + I^\sharp(f_2)$  und  $I^\sharp(\lambda f) \leq \lambda I^\sharp(f)$  für  $\lambda > 0$ . Entsprechendes gilt für  $I^b$  mit den umgekehrten Ungleichungen [wegen  $I^\sharp(-f) = -I^b(f)$  und  $I^b(-f) = -I^\sharp(f)$ ]. Daraus folgt  $I^b(f_1) + I^b(f_2) \leq I^b(f_1 + f_2) \leq I^\sharp(f_1 + f_2) \leq I^\sharp(f_1) + I^\sharp(f_2)$ . Sind  $f_1, f_2$  Lebesgue integrierbar, folgt aus  $I^b(f_i) = I^\sharp(f_i)$

$$\boxed{I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)}$$

<sup>3</sup>Hierbei müssen wir annehmen, dass beide Funktionen gleichzeitig Werte entweder in  $\mathbb{R}^+$  oder  $\mathbb{R}^-$  haben.

und ditto  $I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)$  für Lebesgue integrierbare Funktionen  $f$  und  $\lambda \geq 0$ .

*Schritt 2.* Beachte, aus  $h \leq f \leq g$  mit  $h \in B^-, g \in B^+$  und  $I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$ , folgt sofort  $-g \leq -f \leq -h$  mit  $-g \in B^-, -h \in B^+$  und  $I^+(-h) - I^-(-g) = I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon$ . Man zeigt dann analog  $I^\sharp(-f) = -I^\flat(f)$  und  $I^\flat(-f) = -I^\sharp(f)$ , also  $I(-f) = -I(f)$ . Dies zeigt die Verbandseigenschaft  $f \in L(X) \Rightarrow -f \in L(X)$  und  $I(-f) = -I(f)$ . Zusammen mit Schritt 1 folgt daher für alle Lebesgue integrierbaren Funktionen  $f$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)}.$$

*Schritt 3.* Wegen  $\min(f, \tilde{f}) = -\max(-f, -\tilde{f})$  genügt, dass für integrierbares  $f$  und  $\tilde{f}$  die Funktion  $\max(f, \tilde{f})$  integrierbar ist. Wähle dazu  $h \leq f \leq g$  resp.  $\tilde{h} \leq \tilde{f} \leq \tilde{g}$  mit  $I^+(g) - I^-(h) = I^+(g - h) < \varepsilon$  resp.  $I^+(\tilde{g}) - I^-(\tilde{h}) = I^+(\tilde{g} - \tilde{h}) < \varepsilon$ . Dann gilt automatisch  $I^+(\tilde{g}) < \infty$  und  $I^+(g) < \infty$  sowie  $B^- \ni \max(h, \tilde{h}) \leq \max(f, \tilde{f}) \leq \max(g, \tilde{g}) \in B^+$ . Weiterhin gilt

$$I^+(\max(g, \tilde{g})) - I^-(\max(h, \tilde{h})) = I^+(\max(g, \tilde{g}) - \max(h, \tilde{h})) \leq I^+(g - h) + I^+(\tilde{g} - \tilde{h}) < 2\varepsilon$$

unter Benutzung von  $g - h \in B^+$  und  $\tilde{g} - \tilde{h} \in B^+$  und<sup>4</sup>

$$\max(g, \tilde{g}) - \max(h, \tilde{h}) \leq (g - h) + (\tilde{g} - \tilde{h}).$$

Also ist  $\max(f, \tilde{f})$  integrierbar. □

**Lemma 6.7.** Auf dem Verband  $L(X) = L(X, B, I)$  definiert das Lebesgue Integral  $I$  ein abstraktes Integral.

**Beweis.** Wir haben bereits gezeigt, dass  $I$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung ist. Für die Monotonie genügt es  $I(f) \geq 0$  zu zeigen für integrierbare Funktionen  $f \geq 0$ . Beachte  $I(f) = I^\sharp(f) = \inf I^+(g)$  für  $g \geq f \geq 0$  mit  $g \in B^+$ . Wegen der Monotonie von  $I^+$  gilt  $I^+(g) \geq I^+(0) = 0$  für  $g \geq 0$  in  $B^+$ . Daraus folgt  $I(f) = \liminf \{I^+(g)\} \geq 0$ , also die Monotonie des Lebesgue Integrals  $I$ . Die Halbstetigkeit: Für  $f_n \nearrow f$  und  $f_n, f \in L(X)$  existiert  $g \in B^+$  mit  $f_n \leq f \leq g$  und  $I(g) < \infty$ . Also gilt  $I(f_n) \leq I(g)$  und damit  $\sup I(f_n) \leq I(g) < \infty$ . Aus dem nächsten Satz 6.8 (Beppo Levi) folgt  $I(f) = \sup I(f_n)$  und damit die Halbstetigkeit des Lebesgue Integrals. □

## 6.4 Vertauschungssätze

**Satz 6.8 (Beppo Levi).** Für eine monotone Folge  $f_n \nearrow f$  von integrierbaren Funktionen  $f_n$  definiert  $I(f_n)$  eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen. Gilt

$$\boxed{\kappa := \sup_n I(f_n) < \infty},$$

dann ist die punktweise Grenzfunktion  $f = \sup_n f_n$  integrierbar und es gilt

$$\boxed{I(f) = I(\sup_n f_n) = \sup_n I(f_n) = \kappa}.$$

<sup>4</sup>Ist obdA  $g(x) \geq \tilde{g}(x)$ , dann ist  $\max(g, \tilde{g}) - \max(h, \tilde{h}) \leq g - h \leq (g - h) + (\tilde{g} - \tilde{h})$  im Punkt  $x$ .

**Bemerkung:** Eine analoge Aussage gilt für monoton fallende Folgen integrierbarer Funktionen  $f_n$  im Fall  $\inf_n I(f_n) > -\infty$ .

**Beweis.** Fixiere  $\varepsilon > 0$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es  $h_n \in B^-$  sowie  $g_n \in B^+$  mit  $h_n \leq f_n \leq g_n$  so daß gilt

$$I^+(g_n) - I^-(h_n) = I^+(g_n - h_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Beachte, dann  $I^+(g_n) < \infty$ .

*Untere Abschätzung.* Aus  $h_n \in B^-$  und  $h_n \leq f$  folgt  $\sup_n I(h_n) \leq I^\flat(f)$ . Wegen  $I(f_n - h_n) \leq I(g_n - h_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$  gilt  $I(f_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq I(h_n)$ . Im Limes  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$\kappa \leq I^\flat(f) \quad , \quad \kappa := \sup_n I(f_n).$$

*Obere Abschätzung.* Beachte  $\tilde{g}_n := \max_{i=1}^n g_i \in B^+$  sowie  $f_n \leq \tilde{g}_n$ . Die Folge  $\tilde{g}_n$  konvergiert monoton gegen eine Grenzfunktion  $\tilde{g} \nearrow \tilde{g}$ , welche nach Lemma 3.16 in  $(B^+)^+ = B^+$  liegt. Die Abschätzung  $\tilde{g}_n - f_n \leq \max_{i=1}^n (g_i - h_i) \leq \sum_{i=1}^n (g_i - h_i)$  liefert  $I^+(\tilde{g}_n) < I(f_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} < I(f_n) + \varepsilon$ . Im Limes  $n \rightarrow \infty$  gibt dies  $I^+(\tilde{g}) \leq \kappa + \varepsilon$ . Wegen  $f \leq \tilde{g} \in B^+$  gilt  $I^\sharp(f) \leq I^+(\tilde{g})$ . Daraus folgt

$$\kappa \leq I^\flat(f) \leq I^\sharp(f) \leq I^+(\tilde{g}) \leq \kappa + \varepsilon.$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  richtig ist, zeigt dies wie behauptet  $I^\sharp(f) = I^\flat(f) = \kappa < \infty$ . □

**Bemerkung.** Der Satz von Beppo Levi zeigt, daß die monotonen Hüllen  $L_{fin}^\pm(X)$  von  $(L(X), I)$  mit  $L(X)$  übereinstimmen. Aus Fußnote 1 und Beppo Levi folgt, daß eine Iteration des Lebesgueprozesses, angewendet auf  $(L(X), I)$ , keine neuen integrierbaren Funktionen liefert.

**Satz 6.9 (Satz von Lebesgue).** Sei  $f_n \rightarrow f$  eine punktweise konvergente Folge integrierbarer Funktionen  $f_n$  auf  $X$ , so dass eine von  $n$  unabhängige integrierbare Funktion  $F$  existiert mit  $|f_n| \leq F$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $f$  integrierbar und es gilt

$$\boxed{I(\lim_n f_n) = \lim_n I(f_n)}.$$

Man nennt diesen Satz auch **Satz von der dominierten Konvergenz**, da die Funktionen  $f_n$  von der fixierten integrierbaren Funktion  $F$  dominiert werden.

**Beweis.** *Schritt 1.* Es gilt

$$\varphi_n(x) := \inf_{i \geq n} (f_i(x)) \nearrow f(x).$$

Für festes  $n$  gilt

$$\psi_m(x) := \inf_{m \geq i \geq n} (f_i(x)) \searrow \varphi_n(x).$$

Beachte  $\psi_m \in L(X)$ . Wegen  $-F \leq \psi_m$  gilt  $-\infty < I(F) \leq \lim_m I(\psi_m)$ , und somit ist die Grenzfunktion  $\varphi_n$  integrierbar nach Beppo Levi. Wegen  $\varphi_n \leq F$  gilt  $\lim_n I(\varphi_n) \leq I(F) < \infty$ , und somit ist  $f$  (erneut nach Beppo Levi) integrierbar mit  $I(\varphi_n) \rightarrow I(f)$ .

*Schritt 2.* Analog definiert man  $\tilde{\varphi}_n(x) = \sup_{i \geq n} (f_i(x)) \searrow f(x)$  und zeigt die Konvergenz  $I(\tilde{\varphi}_n(x)) \rightarrow I(f)$ . Nach Definition gilt

$$\varphi_n \leq f_n \leq \tilde{\varphi}_n.$$

Daraus folgt dann wie behauptet die Konvergenz  $I(f_n) \rightarrow I(f)$ . □

## 6.5 Anwendungen

Sei  $Y = \mathbb{R}^n$  oder  $Y = \mathbb{Z}$  oder ein Produkt  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$  etc.

**Satz 6.10.** Sei  $Z$  ein metrischer Raum und  $f : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in der Variable  $z \in Z$  für jedes feste  $y \in Y$ . Gilt  $|f(y, z)| \leq F(y)$  für ein  $F \in L(Y)$  und alle  $z \in Z$ , und ist  $f(y, z)$  in  $L(Y)$  für festes  $z \in Z$ , dann ist  $g(z) := \int_Y f(y, z) dy$  definiert und stetig in der Variable  $z$ .

**Beweis.** Für jede Folge  $z_n \rightarrow z$  ist  $f_n(y) := f(y, z_n) \in L(Y)$ . Wegen  $|f_n(y)| \leq F(y)$  folgt aus dem Satz 6.9 von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n(y) dy = \int_Y \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) dy.$$

Also  $\lim_n \int_Y f(z_n, y) dy = \int_Y f(z, y) dy$ . □

Analog beweist man den bereits im Abschnitt 4.13 formulierten **Vertauschungssatz 4.32**:

**Beweis.** Für jede Folge  $x_n \rightarrow \xi$  ( $x_n \neq \xi$ ) gibt es  $\theta_{y,n} \in [a, b]$  zwischen  $\xi$  und  $x$  mit

$$f(x_n, y) - f(\xi, y) = (x_n - \xi) \partial_x f(\theta_{y,n}, y) =: (x_n - \xi) f_n(y)$$

(Mittelwertsatz). Nach Annahme ist die linke Seite in  $L(Y)$ . Also  $f_n(y) \in L(Y)$ , und nach der Definition der Ableitung  $\lim_n f_n(y) = f'(\xi, y)$ . Wegen  $|f_n(y)| = |\partial_x f(\theta_{y,n}, y)| \leq F(y)$  folgt dann  $\int_Y f_n(y) dy \rightarrow \int_Y \partial_x f(\xi, y) dy$  aus dem Satz von der dominierten Konvergenz 6.9 (siehe nächstes Kapitel Lebesgue Integration). Nach Definition von  $f_n(y)$  ist der Limes der  $\int_Y f_n(y) dy$  aber  $\lim_n (g(x_n) - g(\xi)) / (x_n - \xi) = g'(\xi)$ . □

**Korollar 6.11 (Fubini).** Für das Produkt  $X = Y \times Z$  zweier nicht entarteter beschränkter Quader  $Y, Z$  wie in Beispiel 2.25 definiert daher  $I(f) := \int_Z f(y, z) dz$  eine lineare Abbildung

$$I : B = C(X) \rightarrow \tilde{B} = C(Y).$$

Es gilt  $\int_X f dy dz = \int_Y I(f) dy$  (da dies richtig ist für Treppenfunktionen  $f$  und da  $I, \int_Y$  und  $\int_X$   $\mathbb{R}$ -linear, monoton und halbstetig sind).

Eine reelle Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert eine sogenannte **absolut konvergente Reihe**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ , wenn  $f$  in  $L(\mathbb{N})$  liegt. In der Tat: Da  $L(\mathbb{N})$  ein Verband ist, ist mit  $f$  auch die Folge  $|f(n)|$  der Absolutbeträge in  $L(\mathbb{N})$ , und aus Satz 6.9 folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |f(n)| < \infty .$$

Die Umkehrung gilt auch: Aus  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |f(n)| < \infty$  folgt  $|f(n)| \in L(\mathbb{N})$  nach dem Satz von Beppo Levi oder Lemma 6.4, sowie die absolute Konvergenz im Sinne von  $f \in L(\mathbb{N})$  wegen des Satzes 6.9 von der dominierten Konvergenz (mit der Majorante  $F = |f|$ ).

**Satz 6.12 (Umordnungssatz).** *Ist eine Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L(\mathbb{N})$  (d.h. die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  ist absolut konvergent), dann gilt für jede Bijektion  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$*

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\sigma(i)) .$$

**Beweis.** Sei  $F(x) = |f(x)|$ . Da  $f_n(x) := f(x)\chi_{[0,1,\dots,n]}(\sigma^{-1}(x))$  punktweise gegen  $f(x)$  konvergiert, konvergiert  $I(f_n) = \sum_{i=0}^n f(\sigma(i))$  gegen  $I(f)$  nach Satz 6.9.  $\square$

## 6.6 Nullmengen

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heisst **endlich messbar** (bezüglich  $(B(X), I)$ ), wenn ihre charakteristische Funktion  $\chi_Y(x)$  integrierbar ist. Man nennt die reelle Zahl  $\text{vol}(Y) = I(\chi_Y) \geq 0$  das **Volumen** von  $Y$ . Sind  $Y_1, Y_2$  endlich messbar, dann nach Satz 6.5 auch  $Y_1 \cap Y_2$  und  $Y_1 \cup Y_2$  und es gilt

$$\boxed{\text{vol}(Y_1) + \text{vol}(Y_2) = \text{vol}(Y_1 \cup Y_2) + \text{vol}(Y_1 \cap Y_2)} .$$

Dies folgt aus  $\chi_{Y_1} + \chi_{Y_2} = \chi_{Y_1 \cup Y_2} + \chi_{Y_1 \cap Y_2}$  und  $\max(\chi_{Y_1}, \chi_{Y_2}) = \chi_{Y_1 \cup Y_2}$  sowie analog  $\min(\chi_{Y_1}, \chi_{Y_2}) = \chi_{Y_1 \cap Y_2}$ . Insbesondere gilt  $\text{vol}(Y_1 \cup Y_2) \leq \text{vol}(Y_1) + \text{vol}(Y_2)$ .

Eine **Nullmenge** ist eine endlich messbare Menge vom Volumen Null.

Für eine Nullmenge  $Y$  gilt  $I(n \cdot \chi_Y) = 0$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ . Im Limes  $n \rightarrow \infty$  folgt daher wegen Beppo Levi: Die Funktion, die  $+\infty$  auf  $Y$  ist, und Null sonst, ist integrierbar mit Integral Null. Ditto für  $-\infty$  anstelle von  $+\infty$ . Aus  $-\infty \cdot \chi_Y \leq f \leq +\infty \cdot \chi_Y$  folgt daher  $f \in \hat{L}(X)$  und  $I(f) = 0$ . Somit gilt:

*Jede Funktion  $f$  mit Werten in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  und Träger in einer Nullmenge ist integrierbar mit Integral Null. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.*

**Lemma 6.13 ( $\varepsilon$ -Kriterium für Nullmengen).**  *$Y \subseteq X$  ist eine Nullmenge, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine abzählbare Überdeckung von  $Y$  durch endlich messbare Mengen  $U_i$  existiert mit  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(U_i) < \varepsilon$ .*

**Beweis.** Mittels Beppo Levi zeigt man:  $U := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  ist endlich messbar mit  $\text{vol}(U) < \varepsilon$ . Für  $\varepsilon = 1/n$  sei  $U(n)$  diese Vereinigung. Dann bilden die Durchschnitte  $Z_n := \bigcap_{i=1}^n U_i$  eine absteigende Kette endlich messbarer Mengen mit  $\text{vol}(Z_n) < \frac{1}{n}$ . Daher ist  $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_n$  eine Nullmenge (Beppo Levi). Aus  $Y \subseteq Z$  folgt die Behauptung.  $\square$

Ein Spezialfall:

Eine abzählbare Vereinigung  $Y$  von Nullmengen  $Y_i, i = 1, 2, \dots$  ist eine Nullmenge.

**Lemma 6.14.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  integrierbar. Dann ist die Menge der Unendlichkeitsstellen  $f^{-1}(\{\pm\infty\})$  eine Nullmenge in  $X$ .

**Beweis.** Es genügt, daß  $\Sigma = f^{-1}(+\infty)$  eine Nullmenge ist [Ersetze  $f$  durch  $-f$ ]. OBdA gilt  $f \geq 0$  [Ersetze  $f$  durch  $\max(0, f)$ ]. OBdA  $f \in B^+(X)$  mit  $I(f) \in \mathbb{R}$  [Benutze die Definition der Integrierbarkeit]. Für  $\varphi(x) \geq 0$  in  $B(X)$  und reelles  $c > 0$  gilt  $\Sigma \subset \Sigma(c) = \{x \in X \mid f(x) - c\varphi(x) > 0\}$ . Aus  $h := 0 \leq \chi_{\Sigma} \cdot \varphi \leq c^{-1}f \cdot \chi_{\Sigma(c)} \leq c^{-1}f =: g$  und  $I(g) - I(h) \leq I(f)/c$  folgt  $\chi_{\Sigma} \cdot \varphi \in L(X)$  mit  $I(\chi_{\Sigma} \cdot \varphi) = 0$  (für  $c \rightarrow \infty$ ). Also ist  $\Sigma_n = \Sigma \cap \{x \in X \mid \varphi(x) \geq 1/n\}$  wegen  $B^-(X) \ni 0 \leq \chi_{\Sigma_n} \leq n(\chi_{\Sigma} \cdot \varphi) \in B^+(X)$  eine Nullmenge für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Vereinigung  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n = \{x \in \Sigma \mid \varphi(x) > 0\}$  ist also eine Nullmenge. Wegen  $f \in B^+(X)$  gilt  $\varphi_n \nearrow f$  für gewisse  $\varphi_n \in B(X)$  (und oBdA  $\varphi_n \geq 0$ ). Es folgt  $\Sigma \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid \varphi_n(x) > 0\}$ . Also ist  $\Sigma$  enthalten in der abzählbaren Vereinigung der Nullmengen  $\{x \in \Sigma \mid \varphi_n(x) > 0\}$ . Somit ist  $\Sigma$  selbst eine Nullmenge.  $\square$

## 6.7 Messbare Funktionen

Sei  $L(X) = L(X, B, I)$  der Verband der reellwertigen Lebesgue integrierbaren Funktionen. Wir gehen in diesem Abschnitt über zu den  $\mathbb{C}$ -wertigen Räumen  $L(X, \mathbb{C})$  und  $C_c(X, \mathbb{C})$ . Damit sei gemeint, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil im entsprechenden Raum liegen. Setze  $I(u + iv) := I(u) + iI(v)$  für komplexes  $f = u + iv$  aus  $L(X, \mathbb{C})$ . Wir machen jetzt folgende

**Annahme:**  $B(X) \supset C_c(X, \mathbb{C})$ .

**Definition 6.15.**  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  heisst dann **messbar**, wenn es eine Folge  $f_n \in C_c(X, \mathbb{C})$  gibt, welche **punktweise fast überall** (d.h. **ausserhalb einer Nullmenge**) gegen  $f$  konvergiert

$$f_n \rightarrow f \quad (\text{f\"u}).$$

**Satz 6.16.** Es gilt

1. Die messbaren reellwertigen Funktionen bilden einen Verband  $M(X)$ .
2.  $M(X, \mathbb{C})$  ist eine  $\mathbb{C}$ -Algebra.
3.  $f \in M(X, \mathbb{C}) \implies \bar{f}$  und  $|f| \in M(X, \mathbb{C})$ .
4. Aus  $f_n \rightarrow f$  fast überall und  $f_n \in M(X, \mathbb{C})$  folgt  $f \in M(X, \mathbb{C})$ .

5.  $M(X)$  ist abgeschlossen unter abzählbarer (Supremums-)Infimumsbildung.

6. Ist  $|f| \leq g$  fast überall und  $f \in M(X, \mathbb{C})$  sowie  $g \in L(X)$ , dann gilt  $f \in L(X, \mathbb{C})$ .

**Beweis.** 1., 2. und 3. folgt sofort aus den Permanenzsätzen der Konvergenz und der entsprechenden Eigenschaft von  $C_c(X)$ . 4. folgt ähnlich mittels des Diagonalfolgentricks und der Tatsache, daß abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind. 5. folgt dann unmittelbar aus 4. und der Abgeschlossenheit 1. unter endlichen Suprema (Infima).

Zur letzten Aussage. OBdA ist  $f$  reellwertig. Für  $f = f_+ + f_-$  genügt es  $f_{\pm}$  zu betrachten. Das heißt oBdA  $f \geq 0$ . Wähle  $f_n \rightarrow f$  (fü) mit  $f_n \in C_c(X)$ . Ersetzt man  $f_n$  durch  $\max(0, f_n)$ , gilt oBdA  $0 \leq f_n$ . Dann gilt  $\min(f_n, g) \rightarrow \min(f, g) = f$  (fü). Wegen  $|\min(f_n, g)| \leq g$  ist  $g$  eine Majorante. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt daher  $f \in L(X)$ , denn  $g$  und alle  $f_n$  und damit auch alle  $\min(f_n, g)$  sind in  $L(X)$  wegen der Verbandseigenschaft von  $L(X)$ .  $\square$



# 7 Hilberträume

## 7.1 Vorbemerkung

In der **Quantentheorie** betrachtet man (in der Regel unendlich dimensionale)  $\mathbb{C}$ -Vektorräume  $V$ , welche mit einer positiv definiten Hermiteschen Bilinearform versehen und vollständig sind: Das heisst, auf  $V$  existiert eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Form

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

mit  $\langle \lambda v, \mu w \rangle = \bar{\lambda} \mu \langle v, w \rangle$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  und  $v, w \in V$  sowie

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle},$$

so daß weiterhin  $\langle v, v \rangle$  reell und  $> 0$  ist für alle  $v \neq 0$ . Es wird außerdem angenommen, daß  $V$  vollständig ist bezüglich der Metrik  $d(v, w) = \|v - w\|$  auf  $V$  definiert durch  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ . Einen solchen Vektorraum  $V$  nennt man einen **Hilbertraum**.

Physikalisch betrachtet definiert  $V$  einen sogenannten **Zustandsraum**: Zustände sind dabei die komplexen Geraden  $\mathbb{C} \cdot v$  (komplex lineare Unterräume der Dimension 1 in  $V$ ) mit  $v \neq 0$ . Da sich der Beweis der Schwarz Ungleichung überträgt, erfüllt die reelle Zahl

$$W(v, w) = \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|v\|^2 \|w\|^2}$$

die Ungleichung

$$0 \leq W(v, w) \leq 1.$$

Diese Zahl hängt nur von den Zuständen  $\mathbb{C}v$  und  $\mathbb{C}w$  ab. Physikalisch wird  $W(v, w)$  gedeutet als Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zustand  $\mathbb{C}v$  den Zustand  $\mathbb{C}w$  enthält (oder in ihn übergeht). Eine Bijektion der Menge aller Zustände, welche alle Übergangswahrscheinlichkeiten erhält, nennt man einen Automorphismus des Zustandsraumes. Jede **unitäre** lineare Abbildung  $L : V \rightarrow V$  liefert einen solchen Automorphismus, wobei  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $L$  unitär genannt werden wenn  $\langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle$  für alle Vektoren  $v, w$  aus  $V$  gilt.

Von besonderer Bedeutung sind **anti-hermitesche**  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $X : V \rightarrow V$ , also Abbildungen<sup>1</sup> mit der Eigenschaft  $\langle X(v), w \rangle = -\langle v, X(w) \rangle$ . Sie definieren eine **Lie Algebra**:

<sup>1</sup>Ist  $V$  endlich dimensional, so daß  $U_t = \exp(tX)$  definiert ist, dann ist  $U_t$  unitär nach Lemma 4.43.

Sind  $X$  und  $Y$  anti-hermitesch, dann ist auch  $[X, Y] := XY - YX$  anti-hermitesch. Ein anti-hermitescher Operator  $X$  kann physikalisch wie folgt mit **Messungen** in Verbindung gebracht werden. Ist  $X$  anti-hermitesch, dann ist  $\frac{X}{2\pi i}$  ein **hermitescher** Operator

$$X \text{ anti-hermitesch} \iff \frac{X}{2\pi i} \text{ hermitesch,}$$

und hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte. Die Eigenwerte des **hermiteschen** Operators  $\frac{X}{2\pi i}$  haben **physikalische Bedeutung**, in konkreten Fällen etwa als Impuls, Ort, Energie etc. (abhängig vom Operator  $X$ ). Zustände  $\mathbb{C}v$ , die Eigenräume des Operators  $\frac{X}{2\pi i}$  zum Eigenwert  $\lambda$  definieren, haben den wohldefinierten Messwert  $\lambda$  (Impuls, Ort, Energie resp.). Beliebige Zustände  $\mathbb{C}v$  haben keinen wohldefinierten Messwert. Nur der statistische **Erwartungswert** der Messung ist dann definiert als die automatisch (!) reelle Zahl

$$E(X, v) := \frac{\langle \frac{X}{2\pi i} v, v \rangle}{\|v\|^2}.$$

Die **Standardabweichung**  $\sigma(X, v)$  vom Erwartungswert  $E(X, v)$  der Messung ist dann

$$\sigma(X, v) := \frac{\|\frac{\tilde{X}}{2\pi i} v\|}{\|v\|} = \frac{\|\frac{X}{2\pi i} v - E(X, v)v\|}{\|v\|}$$

für den normalisierten Operator

$$\tilde{X} := X - 2\pi i E(X, v) \cdot id_V.$$

Beachte  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$ . Ein System von antihermiteschen Operatoren  $X_\nu$  (Messungen) für  $\nu = 1, \dots, n$  heisst kohärent, wenn alle Operatoren  $X_\nu$  und damit auch alle normalisierten Operatoren  $\tilde{X}_\nu$  miteinander kommutieren.

Die **Heisenberg Unschärferelation**. Seien  $X$  und  $Y$  zwei 'Messungen' zu Operatoren  $X$  und  $Y$ , die nicht miteinander kommutieren sondern die Heisenberg Kommutatorrelation<sup>2</sup> erfüllen

$$[X, Y] = 2\pi i h \cdot id_V$$

für eine Konstante  $h$  (das **Wirkungsquantum**). Sei  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  (bei richtiger Normierung ist  $h = 1$ ). Dann gilt für jeden Zustand  $\mathbb{C}v$  (obdA mit  $\|v\| = 1$ ) die Unschärferelation

$$\sigma(X, v) \cdot \sigma(Y, v) \geq \frac{1}{2} \hbar.$$

**Beweis.** Durch Übergang zu den normalisierten Operatoren kann man obdA annehmen  $X = \tilde{X}$  und  $Y = \tilde{Y}$ . Es folgt  $2\pi h = |\langle 2\pi i h v, v \rangle| = |\langle (XY - YX)v, v \rangle| = |-\langle Y(v), X(v) \rangle + \langle X(v), Y(v) \rangle| \leq \|Y(v)\| \|X(v)\| + \|X(v)\| \|Y(v)\| = 2\|X(v)\| \|Y(v)\| = 2(2\pi)^2 \sigma(X, v) \sigma(Y, v)$ .  $\square$

<sup>2</sup>Für dieses berühmte Beispiel siehe Heisenberg, Physikalische Prinzipien der Quantentheorie, Seite 14

$$X(f) = h \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$$Y(f) = 2\pi i x \cdot f(x),$$

wobei  $\frac{X}{2\pi i}$  und  $\frac{Y}{2\pi i}$  zu Impuls resp. Ort korrespondieren. Siehe auch Abschnitt 7.10 (mit  $h = 1$ ).

## 7.2 $L^2$ -Räume

Für komplexwertige Funktionen  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  gelten die trivialen Abschätzungen

1.  $|\bar{f} \cdot g| \leq \max(|f|, |g|)^2 = \max(|f|^2, |g|^2)$
2.  $|f + g|^2 \leq (|f| + |g|)^2 \leq 4 \cdot \max(|f|, |g|)^2 = 4 \cdot \max(|f|^2, |g|^2)$ .

Wir nehmen an,  $X$  sei ein metrischer Raum und  $C_c(X, \mathbb{C}) \subset L(X, \mathbb{C})$  für ein abstraktes Integral  $I$  auf  $B(X)$ , und definieren  $\mathcal{L}^2(X, I) = \mathcal{L}^2$  als Teilraum der *messbaren Funktionen*  $M(X, \mathbb{C})$

$$\mathcal{L}^2(X, I) = \left\{ f \in M(X, \mathbb{C}) \mid |f|^2 \in L(X) \right\}.$$

**Lemma 7.1.**  $\mathcal{L}^2$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Beweis.**  $M(X, \mathbb{C})$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Daher folgt die Behauptung aus der zweiten obigen Abschätzung mit Hilfe der Eigenschaften 6.16.6 und 6.16.2.  $\square$

Analog zeigt dieses Argument mit Hilfe der ersten trivialen Abschätzung die Aussage:  $\bar{f}g \in L(X)$  für  $f, g \in \mathcal{L}^2$ . Somit definiert

$$\langle f, g \rangle = I(\bar{f} \cdot g)$$

für  $f, g \in \mathcal{L}^2$  eine positiv semidefinite hermitesche Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wie in Satz 1.7 folgt daraus das nächste Lemma für

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

**Lemma 7.2.**  $\|f\| = 0 \iff$  Träger von  $f$  ist eine Nullmenge.

**Beweis.**  $\Leftarrow$  klar.  $\Rightarrow$ : Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\text{vol}\{x \in X \mid |f|^2 \geq 1/n\} = 0$  wegen der Abschätzung  $\frac{1}{n} \cdot \text{vol}(\cdot) \leq \|f\|^2$  und  $\|f\| = 0$ . Nach Beppo Levi folgt im Limes  $\text{vol}\{x \in X \mid |f| > 0\} = 0$ .  $\square$

Die Nullfunktionen (Funktionen in  $\mathcal{L}^2$ , die ausserhalb einer Nullmenge verschwinden) bilden einen  $\mathbb{C}$ -linearen Untervektorraum von  $\mathcal{L}^2$ . Der Quotientenraum sei  $L^2 = \mathcal{L}^2 / \{\text{Nullfunktionen}\}$ . Die Werte  $\|f\| = \|f\|_{L^2}$  und  $\langle f, g \rangle$  hängen offensichtlich nur von der Äquivalenzklasse von  $f$  und  $g$  in  $L^2$  ab. Aus dem letzten Lemma und dem nächsten Paragraphen folgt daher

**Korollar 7.3.**  $(L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2})$  ist ein Hilbertraum.

**Lemma 7.4.** Es gilt die Schwarzungleichung und die Dreiecksungleichung. Gleichheit wird nur für proportionale Vektoren angenommen.

## 7.3 Satz von Fischer-Riesz

**Satz 7.5.**  $(L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2})$  ist vollständig und damit ein Hilbertraum.

**Beweis.** Alle nun auftretenden Funktionen  $f_n, f, g_n, g$  sind messbar, somit diskutieren wir nur die Integrierbarkeit. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchyfolge  $f_n$  in  $L^2(X)$  konvergiert.  
*Präparation.* Durch Übergang zu einer Teilfolge gilt oBdA

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} \leq 2^{-\min(n,m)}.$$

*Majorantenfolge.* Wir betrachten die monotone Folge von Hilfsfunktionen  $g_n \in L^2(X)$

$$g_1 = 0, \quad g_n := |f_1| + |f_1 - f_2| + \cdots + |f_n - f_{n-1}| \quad \text{für } n \geq 2$$

und ihren Limes  $g_n \nearrow g$  (mit Werten in  $\mathbb{R}^+$ ). Wir zeigen nun die Beschränktheit von  $I(|g_n|^2)$  und damit  $g \in \mathcal{L}^2$  (wegen Beppo Levi) mit Hilfe der Dreiecksungleichung und unserer Präparation

$$I(|g_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|g_n\|_{L^2} \leq \|f_1\|_{L^2} + \sum_{n \geq 2} \|f_n - f_{n-1}\|_{L^2} \leq \|f_1\|_{L^2} + 1 < \infty.$$

*Punktweise Konvergenz.* Wegen  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  punktweise f.ü. (im Komplement der Unendlichkeitsstellen der  $g_n, g$ , die nach Lemma 6.14 eine Nullmenge bilden) ist  $g_n(x) \in \mathbb{R}$  für festes  $x \in X$  eine reelle Cauchyfolge f.ü. Dasselbe gilt für  $f_n(x)$  wegen

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{n+1}^m |f_k(x) - f_{k-1}(x)| = g_m(x) - g_n(x) \quad , \quad m > n.$$

Es existiert daher eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_n \rightarrow f$  punktweise f.ü.

*Majorante.* Aus  $|f_n| \leq |f_1| + \sum_{k=2}^n |f_k - f_{k-1}| \leq g_n \leq g$  für alle  $n \geq 2$  folgt  $|f_n|^2 \leq g^2$  und damit  $|f|^2 \leq g^2$  sowie dann  $|f - f_n|^2 \leq (2g)^2$ . Aus  $M(X) \ni |f - f_n|^2 \leq (2g)^2 \in L(X)$  folgt  $|f - f_n|^2 \in L(X)$  nach Satz 6.16.6. Wegen  $|f_n - f|^2 \rightarrow 0$  punktweise f.ü. und  $L(X) \ni |f - f_n|^2 \leq (2g)^2 \in L(X)$  folgt aus dem Satz 6.9 von der dominierten Konvergenz

$$\lim_n I(|f - f_n|^2) = I(\lim_n |f - f_n|^2) = 0.$$

Dies zeigt  $\lim_n \|f - f_n\|_{L^2} = 0$  und damit unsere Behauptung. □

## 7.4 $C_c(X, \mathbb{C})$ liegt dicht

Wir nehmen in diesem Abschnitt an:  $B(X) \supseteq C_c(X)$ , und für jede Funktion  $h \in B(X)$  und jedes  $\varepsilon > 0$  existiere ein  $g \in C_c(X)$  mit  $I(|h - g|) < \varepsilon$ . (In der Tat gilt in den uns interessierenden Fällen sogar immer  $B(X) = C_c(X)$ .) Unter diesen Annahmen gilt

$$C_c(X, \mathbb{C}) \text{ liegt dicht in } (L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2}).$$

**Beweis.** *Schritt 1.* Nach Beppo Levi gilt  $\lim_n(\min(n, f)) \rightarrow f$  in  $L^2(X)$ . Man kann also  $f$  oBdA durch  $\tilde{f} = \min(n, f)$  ersetzen. Somit ist oBdA  $f$  durch eine Konstante  $C$  nach oben beschränkt, und dann analog auch durch  $-C$  nach unten. Sei also oBdA  $|f| \leq C$ .

*Schritt 2.* Für  $\varepsilon > 0$  existieren nach Definition  $h \in B^-(X)$  und  $h_n \in B(X) = C_c(X)$  mit  $h_n \searrow h$  und  $I(|f - h|) \leq I(|g - h|) < \varepsilon$  so dass für  $n \gg 0$  gilt  $I(|h - h_n|) < \varepsilon$  und damit  $I(|f - h_n|) < 2\varepsilon$ . Dies bleibt richtig, wenn man  $h, h_n$  nach oben und unten bei  $\pm C$  abschneidet. Sei also oBdA  $|h_n| \leq C$  und damit  $I(|f - h_n|) \leq 2C$ . Es folgt

$$\|f - h_n\|_{L^2}^2 = I(|f - h_n|^2) \leq (2C) \cdot I(|f - h_n|) < (2C)2\varepsilon .$$

□

## 7.5 Der Folgenraum $L^2(\mathbb{Z})$

Die Teilmenge  $\mathbb{Z}$  der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  versehen mit der Einschränkung der Euklidischen Metrik hat folgende Eigenschaften: 1) Jede Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig, und 2) Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{Z}$  ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist. Somit gilt

$$C_c(X, \mathbb{C}) = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid a(n) = 0 \text{ für fast alle } n\} .$$

Offensichtlich definiert daher auf  $C_c(\mathbb{Z})$  die normale (endliche !) Summe

$$I(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)$$

eine  $\mathbb{R}$ -lineare monotone Abbildung  $C_c(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Wegen Lemma 3.17 ist damit  $I$  sogar halbstetig, d.h. ein abstraktes Integral auf  $C_c(X)$ . Der Raum der bezüglich  $(C_c(\mathbb{Z}), I)$  messbaren Funktionen  $M(X, \mathbb{C})$  ist dann der Raum aller Folgen  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , der Raum  $L(X, \mathbb{C})$  ist der Unterraum aller *absolut konvergenten* Folgen. Weiterhin ist die leere Menge die einzige Nullmenge. Daher gilt

$$L^2(X, I) = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)|^2 < \infty\}$$

sowie

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a(n)} \cdot b(n) .$$

Für  $\nu \in \mathbb{Z}$  definieren wir die Funktionen  $f_\nu \in C_c(\mathbb{Z})$  durch

$$f_\nu(n) = \delta_{\nu n} \quad (\text{Kronecker-Delta}) .$$

Diese haben die Eigenschaften

- $\langle f_\nu, f_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}$  (**Orthogonalität**).
- Für alle  $f \in L^2(\mathbb{Z})$  und für alle  $\varepsilon > 0$  existiert eine endliche  $\mathbb{C}$ -Linearkombination  $g \in C_c(X, \mathbb{C})$  der  $f_\nu$  mit  $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$  ( **$L^2$ -Dichtigkeit**).

## 7.6 Orthonormalbasen

Wir erinnern: Ein **Hilbertraum**  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist vollständig als metrischer Raum, wobei die Metrik  $d(v, w) = \|v - w\|$  durch das positiv definite hermitesche Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben ist

$$\boxed{\|v\|^2 = \langle v, v \rangle}.$$

**Definition 7.6.** Eine (abzählbare) **Hilbertraum-Basis**<sup>3</sup>  $v_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) eines Hilbertraumes  $H$  ist eine Folge von Vektoren  $v_n \in H$  mit der Eigenschaft

- **Orthonormalität:**  $\langle v_\nu, v_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}$  (Kronecker Delta)
- **$L^2$ -Dichtigkeit:** Für alle  $f \in H$  und für alle  $\varepsilon > 0$  existiert eine endliche  $\mathbb{C}$ -lineare Kombination  $g$  der  $v_\nu$  so dass gilt  $\|f - g\| < \varepsilon$ .

Die erste Eigenschaft impliziert die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $v_\nu$ : Verschwindet  $g = \sum_n a(n)v_n$  (endliche Summe), dann folgt  $a(m) = \langle g, v_m \rangle = 0$  für alle  $m$ .

**Satz 7.7.** Ist  $v_\nu$  eine abzählbare Hilbertraum-Basis eines Hilbertraumes  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , dann induziert  $L^2(\mathbb{Z}) \ni a \mapsto \sum_n a(n) \cdot v_n$  einen isometrischen Isomorphismus von Hilberträumen

$$\boxed{i : L^2(\mathbb{Z}) \cong H} \quad , \quad \boxed{\langle a, b \rangle_{L^2(\mathbb{Z})} = \langle i(a), i(b) \rangle}.$$

Die Umkehrabbildung ordnet einem Vektor  $v \in H$  die Folge  $a(n) = \langle v_n, v \rangle$  in  $L^2(\mathbb{Z})$  zu.

**Beweis.** Wegen der linearen Unabhängigkeit der  $v_n$  ist die Abbildung  $i$  auf dem Teilraum  $C_c(\mathbb{Z}) \subseteq L^2(\mathbb{Z})$  wohldefiniert (fast alle  $a(n)$  sind Null) und es gilt wegen der Orthonormalität

$$\|i(a)\|^2 = \left\langle \sum_n a(n) \cdot v_n, \sum_m a(m) \cdot v_m \right\rangle = \sum_n |a(n)|^2 = \|a\|_{L^2(\mathbb{Z})}^2.$$

$C_c(\mathbb{Z})$  liegt dicht in  $L^2(\mathbb{Z})$ . Wegen der Isometrieeigenschaft lässt sich daher die Abbildung  $i$  durch Limesbildung auf ganz  $L^2(\mathbb{Z})$  wohldefiniert fortsetzen: Für  $a \in L^2(\mathbb{Z})$  wähle  $a_n \rightarrow a$  im  $L^2$ -Sinn mit  $a_n \in C_c(\mathbb{Z})$ . Dann ist  $i(a_n)$  eine Cauchyfolge in  $H$  wegen  $\|i(a_n) - i(a_m)\| = \|i(a_n - a_m)\| = \|a_n - a_m\|$ . Ihr Grenzwert sei  $i(a)$ .

Man sieht aus der Definition sofort, dass  $i$  linear ist [ $i(a+b) := \lim_n i(a_n+b_n) = \lim_n i(a_n) + \lim_n i(b_n) = i(a) + i(b)$  für  $L^2$ -konvergente Folgen  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ .] Es gilt  $\|i(a)\| = \lim_n \|i(a_n)\| = \lim_n \|a_n\| = \|a\|$ . Somit ist  $i$  injektiv:  $i(a) = 0 \implies \|a\| = \|i(a)\| = 0 \implies a = 0$ . Ausserdem folgt, daß das Bild  $B := i(L^2(\mathbb{Z}))$  abgeschlossen in  $H$  ist. [Sei  $B \ni v_n \rightarrow v$  eine konvergente Folge und sei  $v_n = i(w_n)$ . Dann definiert  $w_n$  wegen  $\|v_n - v_m\| = \|i(w_n) - i(w_m)\| = \|i(w_n - w_m)\| = \|w_n - w_m\|$  eine Cauchy Folge, welche wegen der Vollständigkeit konvergiert:  $w_n \rightarrow w$ . Es folgt dann sofort mittels des Diagonalfolgentricks  $i(w) = v$ .]

<sup>3</sup>Es handelt sich hierbei nicht um eine Basis im Sinne der Linearen Algebra.

Wegen der Dichtigkeits-Annahme enthält das Bild  $B$  einen dichten Teilraum. Für  $f \in H$  existiert also ein  $g \in B$  mit  $\|f - g\| < \varepsilon$ . Somit gibt es eine Folge von  $g_n \in B$  welche gegen  $f$  konvergiert. Da  $B$  abgeschlossen ist, folgt  $f \in B$ . Daher ist  $i$  surjektiv.  $\square$

**Korollar 7.8.** Ist  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  eine (abzählbare) Hilbertraum-Basis eines Hilbertraumes  $V$ , dann gilt für jedes  $v \in V$  (die Summe ist definiert im Sinne der Hilbertraum-Konvergenz)

$$v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle v_n, v \rangle \cdot v_n .$$

*Bemerkung.* Physiker schreiben dies symbolisch oft in der Form  $|v\rangle = \sum_{n \in I} |v_n\rangle \cdot \langle v_n | v \rangle$ .

## 7.7 Fourier Reihen

Mittels der Parametrisierung  $t \mapsto \exp(2\pi it)$  entsprechen Funktionen  $g$  auf dem Einheitskreis  $X = S^1$  periodischen Funktionen  $f(t) = g(\exp(2\pi it))$  auf  $\mathbb{R}$  mit der Periode 1 und umgekehrt. Der Raum  $C_c(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{C})$  kann dabei mit dem Raum der **periodischen** stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $f(t+1) = f(t)$  identifiziert werden. Das Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

definiert ein Daniell-Integral auf  $C_c(X)$ . Sei  $I$  das zugehörige Lebesgue Integral. In diesem Sinne gilt

$$L^2(S^1, I) \cong L^2([0, 1], \mathbb{C}) \cong L^2_{\text{periodisch}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) .$$

**Satz 7.9.** Die Funktionen  $\chi_n(t) = \exp(2\pi int)$  definieren eine Hilbertraum-Basis von  $L^2(S^1, I)$ . Das heisst: Jede Funktion  $f \in L^2(S^1)$  schreibt sich als  $L^2$ -Limes

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) \exp(2\pi int)$$

mit den **Fourierkoeffizienten**

$$a(n) = \int_0^1 f(t) \exp(-2\pi int) dt$$

und es gilt die **Plancherel Formel**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2}^2 < \infty .$$

Die Fourierreihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) \exp(2\pi int)$  konvergiert **punktweise** gegen  $f(t)$  für alle Funktionen  $f \in C^2([0, 1], \mathbb{C})$  mit der Eigenschaft  $f(0) = f(1)$  und  $f'(0) = f'(1)$ .

**Beweis.** Nach 7.6 genügt es zu zeigen, dass die Funktionen  $\chi_n(t) = \exp(2\pi int)$  für  $n \in \mathbb{Z}$  eine Hilbertraumbasis von  $L^2(S^1, I)$  bilden. Die Plancherel Formel folgt dann aus der Existenz des isometrischen Isomorphismus  $i : L^2(\mathbb{Z}) \cong L^2(S^1, I)$  nach Satz 7.7.

*Orthonormalität.*

$$\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \int_0^1 \exp(2\pi ikt) dt$$

für  $k = m - n$ . Für  $k = 0$  ist das Integral 1, und für  $k \neq 0$  gleich  $(2\pi ik)^{-1} \exp(2\pi ikt)|_0^1 = 0$ .

*Dichtigkeit.* Der von endlichen Linearkombinationen  $g(t)$  der Funktionen  $\chi_n(t)$  aufgespannte  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum definiert wegen  $\chi_n(t) \cdot \chi_m(t) = \chi_{n+m}(t)$  eine  $\mathbb{C}$ -Algebra  $A$  in  $C(X, \mathbb{C})$ . Offensichtlich trennt die Funktion  $\chi_1(t) = \exp(2\pi it)$  die Punkte von  $S^1$  im Sinne von Abschnitt 7.8. Also gibt es für jede Funktion  $f \in C(X, \mathbb{C})$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $g \in A$  mit

$$\|f - g\|_{L^2}^2 \leq \text{vol}(S^1) \cdot \sup_{t \in S^1} |f(t) - g(t)|^2 < \varepsilon$$

wegen des Satzes von Stone-Weierstraß (nächster Paragraph). Andererseits liegt  $C(X, \mathbb{C})$  dicht in  $L^2(X, \mathbb{C})$  nach Abschnitt 7.4, und damit liegt auch  $A$  dicht in  $L^2(X, \mathbb{C})$ .

*Punktweise Konvergenz.* Beachte  $|\exp(2\pi int)| = 1$  für  $t \in [0, 1]$ . Wegen  $f \in C^2([0, 1], \mathbb{C})$  und  $f(0) = f(1)$  sowie  $f'(0) = f'(1)$  folgt durch zweimalige partielle Integration

$$a(n) = \int_0^1 f(t) \exp(-2\pi int) dt = \frac{1}{-4\pi^2 n^2} \int_0^1 f''(t) \exp(-2\pi int) dt.$$

Also  $|a(n)| \leq \frac{C}{n^2}$  für eine Konstante  $C$ , da die stetige Funktion  $f''(t)$  auf dem Kompaktum  $[0, 1]$  beschränkt ist. Wegen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$  konvergiert  $g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi int)$  absolut und gleichmäßig auf  $[0, 1]$ , definiert also nach Satz 2.24 eine stetige Funktion auf  $[0, 1]$ . Aus Schritt 1 (Übergang zu einer Teilreihe!) und dann Schritt 2 und 3 im Beweis des Satzes von Fischer-Riesz folgt, daß die Fourier Reihe punktweise (fü.) gegen  $f(x)$  konvergiert. Daher sind  $f(x)$  und  $g(x)$  fast überall gleich. Da beide Funktionen stetig sind, folgt aus dem nächsten Lemma  $f(x) = g(x)$ .  $\square$

**Lemma 7.10.** *Ist  $h$  stetig auf  $[0, 1]$  und gilt  $\|h\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |h(t)|^2 dt = 0$ , dann ist  $h = 0$ .*

**Beweis.** Wäre  $h(t_0) \neq 0$ , gäbe es wegen der Stetigkeit ein  $\delta > 0$  mit  $|h(t)| > \frac{1}{2}|h(t_0)|$  für  $|t - t_0| < \delta$ . Ein Widerspruch wegen  $I(|h|^2) \geq \frac{1}{4}|h(t_0)|^2 \cdot I(\chi_{[-\delta+t_0, t_0+\delta]}) > 0$ .  $\square$

**Warnung.** Für  $f(x) = x - \frac{1}{2}$  und  $a_\nu = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \exp(-2\pi i\nu t) dt$  gilt  $a_0 = 0$ , und mittels partieller Integration zeigt man  $a_\nu = (t - \frac{1}{2}) \frac{\exp(-2\pi i\nu t)}{-2\pi i\nu} \Big|_0^1 = \frac{-1}{2\pi i\nu}$ . Es folgt für  $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\sin(2\pi\nu x)}{\pi\nu} \longrightarrow f(x) = x - \frac{1}{2}$$

im  $L^2$ -Sinn wegen  $f \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ . Beachte  $f(0) \neq f(1)$ . Tatsächlich konvergiert die Reihe aber *nicht* punktweise. Im Punkt  $x = 0$  ist der Fourier-Limes Null, aber es gilt  $f(0) = -1/2$ .

## 7.8 Stone-Weierstraß

Zur Erinnerung: Sei  $X$  ein metrischer Raum. Ein **Verband**  $B$  auf  $X$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum von Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $f(x) \in B \implies |f(x)| \in B$ . Wegen  $\max/\min(f, 0) = \frac{1}{2}(f \pm |f|)$  sowie  $\max/\min(f, g) = g + \max/\min(f - g, 0)$  ist  $B$  unter der Bildung endlicher Minima und Maxima abgeschlossen.

**Beispiel.** Sei  $K \subseteq X$  eine Teilmenge. Ist  $B$  ein Verband auf  $X$ , dann bilden die Funktionen  $B_K \subseteq B$  mit Träger in  $K$  wieder einen Verband.

Sei  $K \subseteq X$ , und  $B$  ein Verband auf  $X$  mit folgender Eigenschaft der **Punktetrennung** (\*):

- Für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $K$  und reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gibt es eine Funktion  $f_{x,y} \in B_K$  mit der Eigenschaft  $f_{x,y}(x) = a$  und  $f_{x,y}(y) = b$ , so daß  $f_{x,y}$  stetig ist in einer Umgebung von  $x$  und  $y$ .

Ist  $B$  in  $C(X)$  enthalten, ist natürlich  $f_{x,y}$  automatisch stetig auf ganz  $X$ .

**Satz 7.11.** Sei  $K$  kompakt in  $X$ ,  $B$  ein Verband auf  $X$  mit der Eigenschaft (\*) und  $g$  eine stetige Funktion auf  $X$  mit Träger in  $K$ . Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  eine beschränkte Funktion  $f \in B_K$  mit *Supremumsnorm*<sup>4</sup>  $\|g - f\| < \varepsilon$ . Ist  $g \geq 0$ , kann  $f \geq 0$  gewählt werden.

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir die folgende nichttriviale Aussage (siehe Satz 10.3) von Heine-Borel: Für folgenkompakte metrische Räume  $X$  gilt: Sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine Überdeckung durch offene Teilmengen  $U_i$  von  $X$ , dann existiert eine endliche Teilmenge  $J \subset I$  mit der Eigenschaft  $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ .

**Beweis.** Für  $x \neq y \in K$  existiert ein  $f_{x,y} \in B_K$  mit  $f_{x,y}(x) = g(x)$  und  $f_{x,y}(y) = g(y)$ . Für festes  $x$  existiert zu jedem  $y$  eine offene Umgebung  $V(y)$  mit  $\sup_{y' \in V(y)} |f_{x,y}(y') - g(y')| < \varepsilon$ , da  $g$  und  $f_{x,y}$  bei  $y$  stetig sind. Endlich viele  $V(y_1), \dots, V(y_m)$  der  $V(y)$  überdecken  $K$ . Das Infimum  $f_x := \inf(f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_m})$  ist in  $B_K$  (wegen der Verbandseigenschaft) und stetig in einer Umgebung von  $x$  mit

$$f_x(x) = g(x) \quad , \quad f_x(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall y \in K) .$$

Für jedes  $x \in K$  gibt es analog eine offene Umgebung  $U(x)$  mit  $\sup_{x' \in U(x)} |g(x') - f_x(x')| < \varepsilon$ . Endlich viele  $U(x_1), \dots, U(x_n)$  überdecken  $K$ . Für  $f = \sup(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \in B_K$  folgt

$$f(x) > g(x) - \varepsilon \quad , \quad f(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall x, y \in K) ,$$

also  $d_\infty(f, g) < \varepsilon$ . Ersetze  $f$  durch  $\max(f, 0)$  im Fall  $g = \max(g, 0) \geq 0$ . □

**Satz 7.12 (Stone-Weierstraß).** Sei  $X$  folgenkompakt und  $A \subseteq C(X)$  eine  $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von  $C(X)$  mit 1. Existiert für jedes Paar  $x \neq y$  in  $X$  ein  $f \in A$  mit  $f(x) \neq f(y)$ , dann liegt  $A$  dicht in  $C(X)$ . (Im Fall  $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$  fordert man noch  $f \in A \implies i \cdot f \in A$  und  $\bar{f} \in A$ ).

<sup>4</sup>siehe Abschnitt 2.7

**Beweis.** Der Abschluß  $\overline{A}$  von  $A$  in  $C(X)$  ist wieder eine Algebra und enthält  $A$ , ist also punktstetig. OBdA ist daher  $A$  abgeschlossen in  $C(X)$ . Wegen Satz 7.11 genügt es zu zeigen:  $A$  ist ein Verband, d.h.  $f \in A \implies |f| \in A$ . Also genügt es aus  $0 \leq h = f^2 \in A$  eine positive Wurzel  $+\sqrt{h} \in A$  ziehen zu können. Im Fall  $0 < c_1 \leq h \leq c_2 < 1$  ist  $h = 1 - g$  mit  $\|g\|_\infty < 1$ , so daß nach Lemma 4.40 die Potenzreihe  $\sqrt{h} = 1 - \frac{1}{2}g - \frac{1}{8}g^2 + \dots$  in  $A \subseteq C(X)$  konvergiert. Ersetzt man also die beschränkte Funktion  $h$  durch  $c \cdot (h + d)$  für kleine positive Konstanten  $c, d$ , kann man daraus in  $A$  die Wurzel ziehen. Da  $c$  eine Wurzel besitzt, folgt  $\sqrt{h + d} \in A$ . Im Limes  $d \rightarrow 0$  folgt  $\sqrt{h} \in A$ .  $\square$

## 7.9 Reelle Fourier Transformation

Eine **Schwartz-Funktion**  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine unendlich oft differenzbare Funktion auf  $\mathbb{R}^N$ , so daß für jede Ableitung  $f^{(n)}(x)$  von  $f(x)$  und jedes Polynom  $P(x)$  eine von  $n$  und  $P(x)$  abhängige Konstante  $C = C(n, P(x))$  existiert mit

$$|P(x) \cdot f^{(n)}(x)| \leq C.$$

Sei  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  der Raum der Schwartz-Funktionen und  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Beispiel 7.13.** Die **Gauß-Funktionen**  $f(x) = \exp(-ax^2 - bx - c)$  für  $b, c \in \mathbb{C}$  und reellem Exponenten  $a > 0$  liegen in  $\mathcal{S}$ .

Der Raum der Schwartz-Funktionen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum von  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Für Schwartz-Funktionen  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  ist die **Fourier Transformierte**  $\mathcal{F}f$  für  $y \in \mathbb{R}^N$  erklärt durch

$$(\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \exp(2\pi i x \cdot y) dx.$$

Da  $f(x) \cdot \exp(2\pi i x \cdot y)$  stetig in  $x$  und damit messbar ist, existiert das Integral nach Satz 6.16.6 auf Grund der Existenz einer auf  $\mathbb{R}^N$  integrierbaren Majorante, denn  $|f(x) \cdot \exp(2\pi i x y)| = |f(x)| \leq g(x) := \min(c_0, \frac{c_1}{\|x\|^{n+1}})$  mit  $g \in L(\mathbb{R}^N)$ . [Setze  $c_0 = C(0, 1)$  und  $c_1 = C(0, r^{2(n+1)})$ .] Insbesondere ist daher  $(\mathcal{F}f)(y)$  eine durch  $const := \int_{\mathbb{R}^N} g(x) dx < +\infty$  beschränkte Funktion der Variable  $y$ . Es gilt  $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ . Der Einfachheit halber sei nun  $N = 1$ .

**Lemma 7.14.** 1.  $\mathcal{F}$  definiert eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

2.  $\mathcal{F}$  bildet dabei  $x^n \cdot f(x)$  für  $f \in \mathcal{S}$  ab auf  $(\frac{\partial y}{2\pi i})^n (\mathcal{F}f)(y)$ .

3.  $\mathcal{F}$  bildet  $(\frac{\partial x}{2\pi i})^n f(x)$  für  $f \in \mathcal{S}$  ab auf  $(-y)^n \cdot (\mathcal{F}f)(y)$ .

4. Es gilt  $\mathcal{F}f = f$  für  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ .

**Beweis.** Wegen  $\mathcal{F}(x^n f(x))(y) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \exp(2\pi i x y) dx = \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial y}{2\pi i})^n f(x) \exp(2\pi i x y) dx$  folgt Aussage 2 aus Satz 4.32 [verifiziere die Voraussetzungen!]. Durch partielle Integration folgt Aussage 3. Daraus folgt  $|P(-y)(\frac{\partial y}{2\pi i})^n \mathcal{F}f(y)| = |\mathcal{F}(P(\frac{\partial x}{2\pi i})x^n f(x))(y)| \leq const$ , und dies zeigt  $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$  für  $f \in \mathcal{S}$  und damit Aussage 1.

Aussage 4 ist am schwierigsten: Mit Hilfe des Hauptsatzes und Satz 4.32 zeigt man zuerst, daß  $c(y) = \exp(\pi y^2) \cdot \mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi(x-iy)^2) dx$  konstant als Funktion von  $y$  ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}c(y) &= \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x-iy)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} e^{-\pi(x-iy)^2} dx = 2\pi i \int_{\mathbb{R}} (x-iy) e^{-\pi(x-iy)^2} dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} e^{-\pi(x-iy)^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} -i e^{-\pi(x-iy)^2} \Big|_{-n}^{+n} = 0. \end{aligned}$$

Aus der Substitutionsregel und dem Satz von Fubini folgt dann für  $c = c(0)$

$$c^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon, N]} \int_0^{2\pi} e^{-\pi r^2} r dr d\theta = \frac{-e^{-x}}{2\pi} \Big|_0^\infty \cdot 2\pi = 1.$$

Wegen  $c \geq 0$  gilt daher  $c = 1$ . Es folgt  $(\mathcal{F}f)(y) = \exp(-\pi y^2)$  sowie

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1}.$$

□

Die **Gauß-Funktionen**  $\exp(-ax^2 - bx - c)$  für  $b, c \in \mathbb{C}$  mit reellen **Exponenten**  $a > \pi$  spannen einen  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{S}$  auf.

**Lemma 7.15.**  $\mathcal{G}$  (und damit  $\mathcal{S}$ ) liegt dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Beweis.** Wegen Satz 7.12, Lemma 8.1 sowie Abschnitt 7.4 liegt  $C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dicht<sup>5</sup> in  $L^2(\mathbb{R})$ . Es genügt daher Funktionen  $\tilde{f}(x) \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  durch Funktionen  $\tilde{g}_m \in \mathcal{G}$  in der  $L^2$ -Norm zu approximieren. Fixiere  $\tilde{f}(x) \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und  $\varepsilon > 0$ ; fixiere dann ein  $t_0 = t_0(\tilde{f}) \geq 1$  und ein  $x_0$  mit  $|x_0| < \frac{1}{2}$  derart daß der Träger von  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(t_0 x)$  in  $[-x_0, x_0] \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  liegt. Wir benutzen dann: Approximationen von  $\tilde{f}(x)$  durch Funktionen  $\tilde{g}_m(x)$  in  $\mathcal{G}$  (d.h. mit **Exponenten**  $> \pi$ ) entsprechen Approximationen von  $\tilde{f}(x)$  durch Summen  $g_m(x) = \tilde{g}_m(t_0 x)$  von Gaußfunktionen mit **Exponenten**  $> t_0^2 \cdot \pi$  vermöge  $t_0^{1/2} \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ . Für

$$h(x) := e^{tx^2} \cdot \tilde{f}(x) \quad , \quad t \geq t_0^2 \cdot \pi$$

gilt  $\text{supp}(h) \subseteq [-x_0, x_0]$  und  $h(x) \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Wegen  $h^{(\nu)}(-1/2) = h^{(\nu)}(1/2) = 0$  für  $\nu = 0, 1$  konvergiert daher auf  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  die Fourierentwicklung  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{2\pi i n x} \rightarrow h(x)$  gleichmässig (Satz 7.9). Wegen  $\exp(-tx^2) \leq 1$  konvergiert auf  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  dann ebenfalls

$$g_m(x) = e^{-tx^2} \cdot p_m(x) = \sum_{|n| \leq m} a(n) e^{-tx^2 + 2\pi i n x} \rightarrow f(x) = e^{-tx^2} \cdot h(x)$$

gleichmässig gegen  $f(x)$ . Es folgt für  $m \geq m_0(\varepsilon, t_0, t)$

$$t_0 \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} |f(x) - g_m(x)|^2 dx < \varepsilon^2/2.$$

<sup>5</sup>Allgemeinen liegen Produkte  $\prod_{i=1}^N f_i(x_i)$  von Gaußfunktionen  $f_i(x_i)$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Man reduziert diese Aussage leicht auf den hier behandelten Fall  $N = 1$ , da nach Satz 7.11 der Verband aller Produkte  $\prod_{i=1}^N f_i(x_i)$  mit  $f_i \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  dicht in  $C_c(\mathbb{R}^N)$  liegt.

Im Bereich  $\frac{1}{2} \leq |x|$  ist  $f(x) = 0$ . Also lässt sich  $\int_{\frac{1}{2} \leq |x|} |f - g_m|^2 dx = \int_{\frac{1}{2} \leq |x|} |g_m(x)|^2 dx$  durch  $2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-2t(\frac{2\nu+1}{2})^2) \cdot \int_{-1/2}^{1/2} |p_m(x)|^2 dx$  abschätzen, da  $|p_m(x)|^2$  periodisch ist und  $e^{-2tx^2}$  monoton fallend ist. Wegen  $\int_{-1/2}^{1/2} |p_m(x)|^2 dx = \sum_{|n| \leq m} |a_n|^2 \leq \|h\|_{L^2([-1/2, 1/2])}^2 \leq C_1 e^{2tx_0^2}$  (Plancherelformel) und  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \exp(-t(\frac{2\nu+1}{2})^2) \leq \exp(-\frac{t}{2}) / (1 - \exp(-\frac{t}{2})) \leq C_2 \exp(-\frac{t}{2})$  für genügend große  $t$ , folgt daher aus  $x_0^2 < 1/4$  für  $t \geq \max(t_0(\varepsilon), t_0^2 \cdot \pi)$

$$t_0 \int_{\frac{1}{2} \leq |x|} |f(x) - g_m(x)|^2 dx \leq t_0 C_1 C_2 \cdot e^{2t(x_0^2 - \frac{1}{4})} < \varepsilon^2 / 2.$$

Zusammen mit der Abschätzung für  $|x| \leq \frac{1}{2}$  folgt für genügend großes  $t = t(\varepsilon)$

$$t_0^{1/2} \|f - g_m\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon \quad \text{für} \quad m \geq m_0(\varepsilon, t_0, t).$$

Die durch  $g_m(x) = \tilde{g}_m(t_0 x)$  definierten Funktionen  $\tilde{g}_m$  liegen dann nach Konstruktion in  $\mathcal{G}$  und approximieren  $\tilde{f}(x)$  in der  $L^2$ -Metrik:  $\|\tilde{f} - \tilde{g}_m\|_{L^2(\mathbb{R})} = t_0^{1/2} \|f - g_m\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon$ .  $\square$

**Lemma 7.16.** *Der von den  $\mathbb{C}$ -linear unabhängigen Funktionen  $x^n \cdot \exp(-\pi x^2)$  für natürliches  $n \in \mathbb{N}$  aufgespannte  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{H}$  liegt dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ .*

**Beweis.** Punktweise Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  bzw.  $f(x) - f_n(x) \rightarrow 0$  auf  $\mathbb{R}$  für  $f, f_n$  in  $L^2(\mathbb{R})$  zusammen mit  $|f - f_n|^2 \leq F$  für ein  $F \in L(\mathbb{R})$  impliziert nach Satz 6.9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

*Schritt 1.*  $f_n(x) = Q_n(x) \cdot \exp(-\alpha x^2) := \exp(-\alpha x^2) P(x) \sum_{m=0}^{m=n} \frac{(-1)^m}{m!} (\rho x^2 + bx + c)^m$  konvergiert wegen Satz 4.42 punktweise auf  $\mathbb{R}$  gegen  $f(x) := P(x) \exp(-ax^2 - bx - c)$  für

$$a = \alpha + \rho.$$

Es gilt  $|f - f_n|^2 \leq |P(x)|^2 \exp(-2\alpha x^2) \exp(2(\rho x^2 + |b||x| + |c|)) = F(x)$ . Wegen  $a > \pi$  ist die Majorante  $F(x) := |P(x)|^2 \exp(-\lambda x^2 + 2|b||x| + 2|c|)$  mit  $\lambda = 2(a - 2\rho)$  in  $L(\mathbb{R})$  für alle  $0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$ . Die Funktionen  $f_n(x) = Q_n(x) \cdot \exp(-\alpha x^2)$  approximieren in diesem Fall nach Satz 6.9 im  $L^2$ -Sinn die Funktion  $f(x) = P(x) \cdot \exp(-ax^2 - bx - c)$ , d.h.

$$\|f - f_n\|_{L^2}^2 < \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad n \geq n_0(\varepsilon).$$

*Schritt 2.* Nach Lemma 7.15 liegt der Aufspann der Funktionen  $f(x) = P(x) \cdot e^{-ax^2 - bx - c}$  mit  $b, c \in \mathbb{C}$  und reellem Exponent  $a > \pi$  und Polynomen  $P(x)$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ . Wendet man Schritt 1 sukzessive auf die approximierenden Funktionen  $f(x) = P(x) \cdot e^{-ax^2 - bx - c}$  an, kann man den Exponent  $a > \pi$  um  $\rho$  auf  $\alpha = a - \rho$  verkleinern; wähle  $0 \leq \rho \leq \min(\frac{\pi}{2}, a - \pi)$ . Nach endlich vielen Schritten folgt, daß alle Exponenten gleich  $\alpha = \pi$  gewählt werden können. Mit anderen Worten: Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein komplexes Polynom  $Q(x)$  mit

$$\|P(x) \cdot e^{-ax^2 - bx - c} - Q(x) \cdot e^{-\pi x^2}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Das heisst, die Funktionen  $Q(x) \cdot \exp(-\pi x^2)$  für Polynome  $Q(x)$  liegen dicht in  $L^2(X)$ .

*Schritt 3.* Die Funktionen  $x^n e^{-\pi x^2}$  sind  $\mathbb{C}$ -linear unabhängig, da Monome  $\mathbb{C}$ -linear unabhängig sind (Lemma 4.39), und bilden eine Basis des von den  $Q(x) \cdot \exp(-\pi x^2)$  für Polynome  $Q(x)$  aufgespannten Vektorraums.  $\square$

Fourier Transformation erhält die Teilräume  $V_N = \bigoplus_{n=0}^N \mathbb{C}x^n \cdot e^{-\pi x^2}$  wegen Lemma 7.14. Mittels Induktion nach  $n$  zeigt man durch orthogonale Projektion (**Gram-Schmidt**): Es gibt Polynome  $H_n(x)$  vom Grad  $n$  mit der Eigenschaft: 1) Die Funktionen  $f_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$  bilden eine ON-Basis des Hilbertraums. 2) Die  $f_n(x)$  für  $n = 0, \dots, N$  definieren eine Basis von

$$V_N = \bigoplus_{n=0}^N \mathbb{C} \cdot x^n e^{-\pi x^2}.$$

Die dadurch eindeutig bestimmten Polynome  $H_n(x)$  mit positivem reellem höchstem Koeffizienten sind die sogenannten **Hermiteischen Polynome**. In der Tat gilt bis auf geeignete Normierungskonstanten  $c(n) \in \mathbb{R}$  mit  $c(0) = 1$

$$H_n(x) := c(n) \cdot e^{2\pi x^2} \partial_x^n (e^{-2\pi x^2}),$$

denn  $\int_{\mathbb{R}} \overline{P(x)} \exp(-\pi x^2) \cdot H_n(x) \exp(-\pi x^2) dx = 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} \overline{P(x)} c(n) (\partial_x^n \exp(-2\pi x^2)) dx = 0$  für alle Polynome  $P(x)$  vom Grad  $\leq n-1$  (für letzteres benutze partielle Integration!). Also liegen  $e^{\pi x^2} \partial_x^n (e^{-2\pi x^2})$  und  $H_n(x)e^{-\pi x^2}$  in  $V_n$  und sind orthogonal zu dem Unterraum  $V_{n-1}$  von  $V_n$  der Kodimension 1, und damit proportional.

Aus der obigen expliziten Formel für  $H_n(x)$  folgt  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ .

**Satz 7.17.** Die Funktionen  $f_n(x) = H_n(x) \exp(-\pi x^2) \in \mathcal{S}$  sind Eigenfunktionen der Fourier Transformation  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  zu den Eigenwerten  $i^n$  und definieren eine ON-Basis des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$ . Die Fourier Transformation lässt sich daher eindeutig fortsetzen zu einer **unitären  $\mathbb{C}$ -linearen Transformation des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$**

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \cong L^2(\mathbb{R}) \quad , \quad (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f, g).$$

**Beweis.**  $(\mathcal{F}f_n)(y) = c(n) \int_{\mathbb{R}} e^{\pi x^2 + 2\pi ixy} \partial_x^n e^{-2\pi x^2} dx = c(n) e^{\pi y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{\pi(x+iy)^2} \partial_x^n e^{-2\pi x^2} dx$  ist wegen partieller Integration dasselbe wie  $c(n) e^{\pi y^2} (-1)^n i^{-n} (\partial_y)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} e^{\pi(x+iy)^2} dx$ , und wie  $i^n c(n) e^{\pi y^2} \partial_y^n e^{-\pi y^2} (\mathcal{F}f_0)(y) = i^n f_n(y)$ . Daher ist  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Isometrie. Diese kann man auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$  fortsetzen: Für  $v \in L^2(\mathbb{R})$  existiert eine Folge  $v_n$  aus  $\mathcal{H}$ , welche gegen  $v$  konvergiert. Da  $v_n$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$  ist, ist  $\mathcal{F}(v_n)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H}$ , denn  $\mathcal{F}$  ist auf  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$  definiert und eine Isometrie! Setze  $\mathcal{F}(v) := \lim_n \mathcal{F}(v_n)$ . Man zeigt nun leicht, dass  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  wohldefiniert,  $\mathbb{C}$ -linear und eine Isometrie ist.  $\square$

**Korollar 7.18 (Fourier Inversion).** Für alle  $f$  in  $L^2(\mathbb{R})$  gilt

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x).$$

Wir bemerken:  $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$  gilt für alle Basisfunktionen  $f(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2}$  von  $\mathcal{H}$  und somit dann auch für beliebiges  $f \in L^2(\mathbb{R})$  (zumindestens fast überall auf  $X = \mathbb{R}$ ). Ist  $f$  und damit auch  $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x)$  in  $\mathcal{S}$ , stimmen daher  $f(-x)$  und  $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x)$  als stetige Funktionen in allen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  überein. Es folgt

**Korollar 7.19 (Fourier Inversion).** Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt

$$\boxed{f(x) = (\mathcal{F}g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi i y x} dy} \quad \text{für} \quad \boxed{g(y) = (\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i y x} dx}.$$

Die Aussagen und Argumente übertragen sich verbatim auf den  $N$ -dimensionalen Fall.

## 7.10 Der harmonische Oszillator

Die von uns konstruierte ON-Basis des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$f_n(x) = H_n(x)e^{-\pi x^2} = c(n) \cdot e^{\pi x^2} (e^{\pi x^2} \partial_x e^{-\pi x^2})^n (e^{-\pi x^2}) = c(n) \cdot A_+^n (e^{-\pi x^2}).$$

Hierbei ist  $A_+$  der Differentialoperator  $A_+ := e^{\pi x^2} \partial_x e^{-\pi x^2} = \partial_x - 2\pi x = X + iY$  mit den Abkürzungen  $X = \partial_x$  und  $Y = 2\pi i x$ . Sei analog  $A_- := X - iY$ , dann wird  $f_0(x) = e^{-\pi x^2}$  von  $A_-$  annulliert, wobei die Gleichung  $A_-(f(x)) = \partial_x f(x) - 2\pi x f(x) = 0$  die Funktion  $f_0(x)$  bis auf eine Normierungskonstante  $c$  eindeutig bestimmt (Satz 4.18).

$[A_+, A_-] = (X + iY)(X - iY) - (X - iY)(X + iY) = -2[X, iY] = 4\pi[\partial_x, x] = 4\pi$  zeigt, daß  $A_-(A_+^n) - (A_+)^n A_- = [A_-, A_+]A_+^{n-1} + A_+[A_-, A_+]A_+^{n-2} + \dots + A_+^{n-1}[A_-, A_+]$  gleich  $-4\pi n \cdot A_+^{n-1}$  ist, und  $A_+ A_- f_n(x) = c(n) A_+ A_- A_+^n(x) f_0(x) = -4\pi n c(n) A_+^n f_0(x) = -4\pi n \cdot f_n(x)$ . Also sind alle  $f_n(x)$  Eigenfunktionen des Operators  $(A_+ A_-)$

$$(A_+ A_-) f_n(x) = -4\pi n \cdot f_n(x).$$

**Lemma 7.20.** Für  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $\boxed{c(n)^2 = \frac{1}{(4\pi)^n n!}}$ .

**Beweis.** Offensichtlich gilt  $A_+ f_n(x) = c_n \cdot f_{n+1}(x)$  für gewisse andere Konstanten  $c_n$  mit  $c_n^2 = \|c_n f_{n+1}\|^2 = \|A_+ f_n\|^2$ . Partielle Integration zeigt  $\|A_+ f_n\|^2 = -\langle f_n(x), A_- A_+ f_n(x) \rangle$ . Benutzt man  $A_- A_+ = -4\pi + A_+ A_-$ , folgt  $c_n^2 = -\langle f_n(x), -4\pi(n+1)f_n(x) \rangle = 4\pi(n+1)$ . Wegen  $c_n \cdot c(n) = c(n+1)$  ergibt sich dann die Behauptung durch Induktion nach  $n$ .  $\square$

Der Operator  $\frac{1}{2}(A_+ A_- + A_- A_+) = A_+ A_- - 2\pi$  entspricht bis auf den Faktor  $(2\pi i)^2$  dem Operator  $(\partial_x - 2\pi x)(\partial_x + 2\pi x) - 2\pi = \partial_x^2 + (2\pi i x)^2 = X^2 + Y^2$ . Zur Erinnerung  $\frac{X}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \partial_x$  entspricht dem Impulsoperator und  $\frac{Y}{2\pi i} = x$  dem Ortsoperator. Es folgt

$$\boxed{(X^2 + Y^2) f_n(x) = -4\pi(n + \frac{1}{2}) \cdot f_n(x)}.$$

Der Operator  $X^2 + Y^2$  ist bis auf eine Normierung der sogenannte **Hamilton Operator** des quantenmechanischen harmonischen Oszillators.

# 8 Integration auf Mannigfaltigkeiten

## 8.1 Partitionen der Eins

Sei  $f(x)$  eine reellwertige  $r$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf dem Intervall  $[0, \infty)$  mit der Eigenschaft

$$f^{(\nu)}(0) = 0 \quad , \quad \forall \nu = 0, 1, \dots, r-1 .$$

Wir nehmen ausserdem an  $f(x) \geq 0$  sowie  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ .

**Beispiele.**  $f(x) = x^r$  für  $r < \infty$  und  $f(x) = \exp(-\frac{1}{x})$  für  $r = \infty$ . Sei später obdA  $r = \infty$ .

Wir setzen für  $x < 0$  die Funktion  $f(x)$  durch Null zu einer Funktion auf ganz  $\mathbb{R}$  fort und nennen diese Fortsetzung in  $C^{r-1}(\mathbb{R})$  wieder  $f(x)$ .

Für ein beliebiges  $x_0 > 0$  ist dann  $g(x) = f(x)f(x_0 - x)$  in  $C^{r-1}(\mathbb{R})$ . Es gilt  $g(x) > 0$  genau dann wenn  $x \in (0, x_0)$ , und  $g(x)$  ist Null sonst.

Wegen dem Hauptsatz ist  $h(x) = \int_0^x g(t)dt$  dann in  $C^r(\mathbb{R})$ . Es gilt  $h(x) = 0$  für  $x \leq 0$ ,  $0 < h(x) < \text{const}$  für  $0 < x < x_0$  sowie  $h(x) = \text{const}$  für  $x \geq x_0$ . Hierbei ist  $\text{const} = \int_0^{x_0} g(t)dt$  und obdA  $\text{const} = 1$  bei geeigneter Normierung von  $f$ .

Die Funktion  $\psi(x) = h(x+a)h(a-x)$  für  $a > x_0$  ist wieder in  $C^r(\mathbb{R})$ . Es gilt  $\psi(x) = 0$  genau dann wenn  $x \notin (-a, a)$ , und  $\psi(x) = 1$  genau dann wenn  $x \in [-a+x_0, a-x_0]$ , und es gilt  $0 < \psi(x) < 1$  sonst. Daraus folgt für  $r = \infty$  bei geeigneter Wahl von  $a$  und  $x_0$  sofort

**Lemma 8.1.** Die Funktionen in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  trennen Punkte in  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** In der Tat hat die  $C_c^\infty$ -Funktion

$$\varphi(x) = \varphi_{\xi,a}(x) = \psi(d_{\mathbb{R}^n}(x, \xi))$$

ihren Träger in einer Kugel  $K_a(\xi)$  vom Radius  $a$  um den Punkt  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Sie 'trennt' daher  $\xi$  von jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$ , der weiter als  $a$  von  $\xi$  entfernt ist.  $\square$

Sei nun  $M$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und sei  $M = \bigcup_{\xi \in I} M \cap K_r(\xi)$  eine endliche Überdeckung von  $M$  durch offene Kugeln um endlich viele Punkte  $\xi \in M$ . Die Radien  $r = a/2 > 0$  mögen hierbei von den Punkten  $\xi$  abhängen:  $r = r(\xi)$ . Sei  $N$  die offene Menge

$$N = \bigcup_{\xi \in I} K_{2r}(\xi) .$$

Es gilt  $M \subset N$ . Für eine gegebene offene Menge im  $\mathbb{R}^n$ , welche  $M$  enthält, kann obdA durch geeignete Wahl der Radien  $r = r(\xi)$  angenommen werden, daß  $N$  in dieser offenen Menge liegt. Für  $x \in N$  ist dann

$$\varphi_\xi(x) = \frac{\varphi_{\xi, a(\xi)}(x)}{\sum_{\xi \in I} \varphi_{\xi, a(\xi)}(x)}$$

eine wohldefinierte  $C^\infty$ -Funktion und es gilt

$$\boxed{\sum_{\xi \in I} \varphi_\xi(x) = 1} \quad , \quad \forall x \in \tilde{N}$$

auf der offenen Teilmenge  $\tilde{N} = \bigcup_{\xi \in I} K_r(\xi)$  von  $N$ , welche  $M$  enthält. Man nennt die so konstruierte Funktionenschar  $\varphi_\xi$  (für  $\xi \in I$ ) dann eine **Partition der Eins** auf  $\tilde{N}$  (oder  $M$ ), welche der gegebenen Überdeckung von  $M$  zugeordnet ist.

## 8.2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit den Eigenschaften

- $f(\xi) = 0 \implies df(\xi) \neq 0$
- $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$  sei kompakt.

Man nennt dann  $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$  den **Rand** von  $M$ , und  $M$  eine **kompakte Untermannigfaltigkeit** von  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $\partial M$ .

**Beispiel.** Für  $f(x) = -1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$  ist  $M$  die abgeschlossene Einheitskugel  $E$  im  $\mathbb{R}^n$  und  $\partial M$  ist die Einheitssphäre  $S$  der Dimension  $n - 1$  im  $\mathbb{R}^n$ .

*Lokale Beschreibung des Randes.* Für jeden Randpunkt  $\xi \in \partial M$  gilt  $\partial_\nu f(\xi) \neq 0$  für ein  $\nu = 1, \dots, n$  nach Annahme. Durch Umbenennen sei obdA  $\nu = 1$  (für gegebenes  $\xi$ ) und damit  $\partial_1 f(\xi) \neq 0$ . Aus Stetigkeitsgründen ist dann die Determinante der Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & 0 \\ * & E \end{pmatrix}$$

der folgenden Abbildung [Beachte: Die Jacobimatrix ist eine Dreiecksmatrix und hat daher die Determinante  $\partial_1 f(x)$ ] von Null verschieden für alle  $x \in K_{2r}(\xi)$  nahe bei  $\xi$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x), x_2, \dots, x_n)$$

bei geeigneter Wahl von  $r = r(\xi) > 0$ . Für spätere Zwecke bezeichne

$$\boxed{\varepsilon_\xi = \text{sign}(\partial_1 f(\xi))}$$

das **Vorzeichen** dieser Determinante im Punkt  $\xi$ . Aus dem Satz von der Umkehrfunktion 4.24 folgt dann die Existenz einer lokalen  $C^\infty$ -Umkehrfunktion  $\psi$  der obigen Funktion. Diese lokale Umkehrfunktion hat dann notwendiger Weise die Gestalt

$$\psi(y) = \psi(y_1, \dots, y_n) = (g(y), y_2, \dots, y_n).$$

und  $\psi$  stiftet eine bijektive Abbildung zwischen den offenen Mengen

$$U := \psi^{-1}(K_{2r}(\xi)) \cong K_{2r}(\xi);$$

( $r$  hängt von  $\psi$  etc. ab). Somit definiert  $\psi$  Bijektionen

$$U \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cong K_{2r}(\xi) \cap M,$$

$$V := U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cong K_{2r}(\xi) \cap \partial M.$$

Die Gleichung  $y_1 = 0$  beschreibt daher in  $U = \psi^{-1}(K_{2r}(\xi))$  den Rand  $\partial M$  von  $M$ . Wegen  $x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$  (für die Abbildung  $\psi$  und ihr Inverses) ist daher

$$\lambda : \mathbb{R}^{n-1} \supset V \ni (y_2, \dots, y_n) \mapsto (g(0, y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n)$$

eine **lokale  $C^\infty$ -Parametrisierung** des Randes  $\partial M$  von  $M$  in der Nähe des Punktes  $\xi \in \partial M$ .

Für Punkte  $\xi \in M \setminus \partial M$  findet man ein  $r = r(\xi) > 0$  derart, daß gilt  $K_{2r}(\xi) \subseteq M \setminus \partial M$ . In der Tat ist  $M \setminus \partial M$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , denn das Komplement  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$  ist eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Da  $M$  kompakt ist, überdecken bereits endliche viele der Kugeln  $K_r(\xi), \xi \in M$  die Menge  $M$  (Satz 10.3). Sei  $I$  die endliche Menge der zugehörigen Mittelpunkte  $\xi \in M$ .

## 8.3 Randintegrale

**Annahmen.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit den Eigenschaften  $f(\xi) = 0 \implies df(\xi) \neq 0$  sowie  $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$  sei kompakt. Sei  $U$  offen und  $\partial M \subseteq U$ .

Wir definieren nun für eine Differentialform  $\eta \in A^{n-1}(U)$  das Randintegral  $\int_{\partial M} \eta$ .

**Warnung.** Dies ist kein Integral im  $\mathbb{R}^n$ , denn dort ist  $\partial M$  eine Menge vom Maß Null! Wir machen hierfür folgende

Für endliche viele  $\xi \in I$  auf dem Rand  $\partial M$  überdecken die Kugeln  $K_r(\xi), r = r(\xi)$  die Randmenge  $\partial M$ . ObdA gilt  $K_r(\xi) \subset U$ . Für jedes  $\xi \in I$  haben wir eine **lokale Parametrisierung**  $\lambda_\xi$  durch eine offene Teilmenge  $V = V_\xi$  des  $\mathbb{R}^{n-1}$  gefunden

$$\lambda_\xi : \mathbb{R}^{n-1} \supseteq V_\xi \longrightarrow \partial M \cap K_{2r}(\xi) \subseteq K_{2r}(\xi) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildung  $\lambda = \lambda_\xi$  ist vom Typ  $C^\infty$ . Sei  $\{\varphi_\xi \mid \xi \in I\}$  eine **zugeordnete Partition der Eins** auf der in Abschnitt 8.1 definierten offenen Teilmenge  $\tilde{N} = \bigcup_{\xi \in I} K_r(\xi) \subseteq U$  von  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 8.2.** Sei  $\eta \in A^{n-1}(\tilde{N})$  und damit  $\varphi_\xi(x) \cdot \eta \in A_c^{n-1}(V_\xi)$ . Dann setzen wir

$$\int_{\partial M} \eta := \sum_{\xi \in I} \varepsilon_\xi \cdot \int_{V_\xi} \lambda_\xi^*(\varphi_\xi(x) \cdot \eta) \quad \varepsilon_\xi \in \{\pm 1\}.$$

Obwohl dies auf den ersten Blick hochgradig von der Wahl der Stützpunkte  $\xi \in I$ , der Wahl der lokalen Parametrisierungen  $(V_\xi, \lambda_\xi)$  von  $\partial M$  und der Wahl einer Partition der Eins  $\varphi_\xi$  abzuhängen scheint, gilt erstaunlicherweise

**Lemma 8.3.** *Das in Definition 8.2 definierte Randintegral ist unabhängig von allen hierbei getroffenen Wahlen  $\lambda_\xi, \varphi_\xi, V_\xi, I$ .*

**Beweis.** Zur Unabhängigkeit von der Wahl der Partition der Eins, der Stützpunkte  $\xi \in I$  und der Radien  $r = r(\xi)$ : Für eine andere Wahl bekommt man eine neue Partition der Eins  $\varphi'_{\xi'}$  (für endlich viele neue Stützpunkte  $\xi' \in I'$ ). Man betrachtet zum Vergleich die neue Partition der Eins  $\varphi_\xi(x) \cdot \varphi_{\xi'}(x)$  für  $(\xi, \xi') \in J = I \times I'$  mit Trägern in  $K_{2r}(\xi) \cap K_{2r'}(\xi')$  (Übungsaufgabe!). Zur Unabhängigkeit von der Parametrisierung: Hierzu beachte, daß nach unserer Konstruktion für zwei verschiedene Parametrisierungen die Zusammensetzung  $h = \lambda^{-1} \circ \lambda'$

$$V \xrightarrow{\lambda} \partial M \cap K_{2r}(\xi) \xleftarrow{\lambda'} V'$$

sowie die Umkehrung  $h^{-1}$  beide  $C^\infty$ -Abbildungen sind; insbesondere daher  $\det(D(h)(x)) \neq 0$ . Die Behauptung folgt dann aus der Substitutionsregel 4.27, denn den Übergang vom Integral über  $V$

$$\int_V \varepsilon_\xi \cdot \lambda_\xi^*(\eta)$$

zum Integral über  $V'$

$$\int_{V'} \varepsilon_{\xi'} \cdot \lambda_{\xi'}^*(\eta)$$

erhält man durch eine Substitution mittels der Abbildung  $h$ , wenn man

$$h^*(\lambda_\xi^*(\eta)) = \lambda_{\xi'}^*(\eta)$$

berücksichtigt sowie  $\text{sign}(\det(Dh(x))) \cdot \varepsilon_{\xi'} = \varepsilon_\xi$ . Letztere Aussage über Vorzeichen folgt aus einer der Übungsaufgaben auf den Übungsblättern und wird benötigt aus folgendem Grund: In der Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale tritt der Absolutbetrag der Determinante der Jacobimatrix  $D(h(x))$  auf, beim Pullback dagegen nur die Determinante der Jacobimatrix  $D(h(x))$  selbst. Siehe dazu Seite 71. □

## 8.4 Der Satz von Stokes

**Satz 8.4.** *Sei  $M$  eine kompakte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit Rand  $\partial M$  und  $\eta \in A^{n-1}(\tilde{N})$  eine Differentialform auf einer offenen Menge  $\tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ , welche  $M$  enthält. Dann gilt*

$$\boxed{\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta}.$$

**Beweis.** Sei  $\{\varphi_\xi(x) \mid \xi \in I\}$  eine Partition der Eins zu einer Überdeckung von  $M$  durch offene Kugeln  $K_{2r}(\xi)$ . Dann gilt für das Integral  $\int_M d\eta := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x) \cdot d\eta$  wegen der  $\mathbb{R}$ -Linearität sowohl des Lebesgue Integrals auf  $\mathbb{R}^n$  als auch der Cartan Ableitung  $d$

$$\int_M d\eta = \int_M d\left(\sum_{\xi \in I} \varphi_\xi(x) \cdot \eta\right) = \sum_{\xi \in I} \int_M d(\varphi_\xi(x) \cdot \eta) .$$

Es genügt daher  $\int_M d(\varphi_\xi(x) \cdot \eta) = \varepsilon_\xi \cdot \int_{V_\xi} \lambda_\xi^*(\varphi_\xi(x) \cdot \eta)$  für jeden Summanden zu zeigen; Summation über die  $\xi \in I$  liefert dann den Satz von Stokes. Jetzt ist  $\rho = \varphi_\xi(x) \cdot \eta \in A_c^{n-1}(K_{2r}(\xi))$  eine Differentialform mit kompaktem Träger in einer lokalen Kartenmenge  $K_{2r}(\xi)$  von  $M$ . Zu zeigen bleibt dafür (\*)

$$\int_M d\rho = \varepsilon_\xi \cdot \int_{V_\xi} \lambda_\xi^*(\rho) .$$

Die Substitutionsregel für die Substitution  $\psi = \psi_\xi$  (siehe Abschnitt 8.2) sowie Trägergründe implizieren für die linke Seite von (\*) und die offene Menge  $U_\xi := \psi^{-1}(K_{2r}(\xi)) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_M d\rho := \int_{K_{2r}(\xi)} \chi_M(x) \cdot d\rho = \varepsilon_\xi \cdot \int_{U_\xi} \psi^*(\chi_M(x) \cdot d\rho) = \varepsilon_\xi \cdot \int_{U_\xi} \chi_{y_1 \leq 0} \cdot d(\psi^*(\rho)) ,$$

denn es gilt  $\psi^*(\chi_M(x)) = \chi_{y_1 \leq 0}(y)$ . Setze  $\omega := \psi^*(\rho) \in A_c^{n-1}(U_\xi)$ .

Zur Berechnung der rechten Seite (\*) beachte  $i^*(\omega) = i^*(\psi^*(\rho)) = \lambda_\xi^*(\rho)$  für die Inklusion  $i : V_\xi \hookrightarrow U_\xi$  und den Pullback von  $\omega$  auf  $V_\xi = U_\xi \cap \{y_1 = 0\}$  wegen  $\lambda_\xi = \psi \circ i$ . Es verbleibt daher für  $\omega = \psi^*(\rho) \in A_c^{n-1}(U_\xi)$  und die Inklusion  $i : V_\xi \hookrightarrow U_\xi$  zu zeigen (\*\*)

$$\int_{U_\xi} \chi_{y_1 \leq 0} \cdot d\omega = \int_{V_\xi} i^*(\omega) \quad \text{für} \quad V_\xi = U_\xi \cap \{y_1 = 0\} ,$$

Legt man  $U_\xi \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1})$  in einen genügend grossen Quader  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ , dessen eine Wand durch die Hyperebene  $y_1 = 0$  gegeben ist, und setzt die Form  $\omega$  durch Null auf den Quader  $Q$  fort [möglich, da  $\omega$  kompaktem Träger in  $U_\xi \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1})$  besitzt], dann folgt diese letzte verbliebene Aussage (\*\*) unmittelbar aus dem Satz von Stokes für Quader (Satz 4.34).  $\square$

## 8.5 Drehinvarianz

Der **Stern-Operator**  $*$ :  $A^i(\mathbb{R}^n) \rightarrow A^{n-i}(\mathbb{R}^n)$  ist definiert durch

$$*\left(\sum_I f_I(x) dx_I\right) = \sum_I f_I(x) *dx_I$$

vermöge  $*dx_I = \varepsilon \cdot dx_{I^c}$ , wobei  $I^c$  die Komplementärmenge von  $I$  in  $\{1, \dots, n\}$  ist und  $\varepsilon$  ein durch  $dx_I \wedge *dx_I = \omega_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  bestimmtes Vorzeichen. Für  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt für den Pullback  $M^*(dx_i) = \sum_\nu M_{i\nu} dx_\nu$ , und daher für alle  $i, j$

$$dx_i \wedge *(M^*(dx_j)) = dx_i \wedge *\left(\sum_\nu M_{j\nu} dx_\nu\right) = dx_i \wedge \sum_\nu M_{j\nu} *dx_\nu = \sum_\nu M_{j\nu} \delta_{i\nu} \omega_n = M_{ji} \omega_n .$$

Diese erste Satz Gleichungen bestimmt  $\ast(M^\ast(dx_j)) \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  eindeutig. Analog gilt

$$({}^T M)^\ast(dx_i) \wedge \ast dx_j = \left( \sum_{\nu} M_{\nu i} dx_{\nu} \right) \wedge \ast dx_j = \sum_{\nu} M_{\nu i} \delta_{\nu j} \omega_n = M_{ji} \omega_n .$$

Sei nun  ${}^T M \circ M = id$  mit  $\det(M) = 1$ , d.h.  $M$  sei aus der orthogonalen Gruppe  $SO(m, \mathbb{R})$ . Dann gilt  $M^\ast(\omega_n) = \det(M)\omega_n = \omega_n$  sowie  $M^\ast({}^T M)^\ast(dx_i) = dx_i$ . Dann folgt aus dem zweiten Satz Gleichungen

$$\begin{aligned} dx_i \wedge M^\ast(\ast dx_j) &= M^\ast({}^T M)^\ast(dx_i) \wedge M^\ast(\ast dx_j) \\ &= M^\ast({}^T M)^\ast(dx_i) \wedge \ast dx_j = M^\ast(M_{ji} \omega_n) = M_{ji} \omega_n . \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem ersten Satz Gleichungen zeigt daher  $M^\ast(\ast dx_j) = \ast(M^\ast(dx_j))$  für alle  $j$ . Also

**Lemma 8.5.** Für Einsformen  $\eta \in A^1(\mathbb{R}^n)$  und Substitutionen  $M$  aus  $SO(n, \mathbb{R})$  gilt

$$M^\ast(\ast \eta) = \ast(M^\ast(\eta)) .$$

Berücksichtigt man  $M^\ast(r^2) = r^2 \iff {}^T M M = id$ , folgt

**Korollar 8.6.** Die Formen  $\rho_0 = \frac{1}{2}r^2$  sowie  $\rho_1 = d\rho_0$  und  $\sigma_{n-1} = \ast\rho_1$  sind dreihinvariant, d.h. invariant unter Pullbacks mit Abbildungen  $M \in SO(n, \mathbb{R})$ , d.h. es gilt  $M^\ast(\sigma_i) = \sigma_i$ .

## 8.6 Standardintegral auf der Kugeloberfläche

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall der Kugeloberfläche  $\partial M = S^{n-1}$  im  $\mathbb{R}^n$ . In den letzten Abschnitten haben wir erklärt, wie für eine beliebige  $(n-1)$ -Form  $\eta \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  das Randintegral  $\int_{S^{n-1}} \eta$  definiert ist, wobei  $S^{n-1}$  als Rand der abgeschlossenen Einheitskugel  $E^n \subset \mathbb{R}^n$  aufgefasst wird.

Im Fall der Kugeloberfläche würden wir aber gerne etwas wie die Gesamtfläche definieren. Wie soll man das machen? Hierauf gibt es eine sehr befriedigende Antwort: Betrachte die dreihinvariante Differentialform  $\sigma_{n-1} = \sigma_{n-1}(x) \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$

$$\sigma_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ast dx_i = \ast d\left(\frac{1}{2}r^2\right) .$$

Hierbei entsteht  $\ast dx_i$  aus  $\omega_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  bis auf ein Vorzeichen  $(-1)^{i-1}$  durch Weglassen des Terms  $dx_i$

$$\ast dx_i = dx_i \vee \omega_n = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Es gilt daher  $dx_i \wedge \ast dx_i = \omega_n$ . Zum Beispiel gilt  $\sigma_1 = xdy - ydx$  im Fall  $n = 2$  und es gilt  $\sigma_2 = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$  im Fall  $n = 3$ . Optisch schöner

$$\sigma_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy .$$

Es gilt offensichtlich

$$\boxed{d\sigma_{n-1} = n \cdot \omega_n}.$$

Mit Hilfe der Kugeloberflächenform  $\sigma_{n-1}$  definieren wir für beliebige stetige Funktionen  $f(x)$  auf der Sphäre  $S = S^{n-1}$  ein Integral

$$I : C(S^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R},$$

das sogenannte **Standard Integral**. Wir erklären dies zuerst für  $f(x) \in A$  auf dem Unterraum  $A \subset C(S^{n-1})$ ,

$$I(f) := \int_{S^{n-1}} f(x) \cdot \sigma_{n-1}(x) \quad , \quad f(x) \cdot \sigma_{n-1}(x) \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n),$$

welcher durch Einschränkungen von Funktionen in  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  erklärt ist (es würde sogar genügen den Raum der Einschränkungen aller Polynome im  $\mathbb{R}^n$  auf  $S^{n-1}$  zu betrachten). Dieser Unterraum  $A$  ist eine Algebra und liegt nach Lemma 8.1 und dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in  $C(S^{n-1})$  bezüglich der Supremums-Norm. Auf Grund von Lemma 8.8 und Korollar 8.9 (weiter unten) kann man  $I$  wie in Abschnitt 3.6 eindeutig zu einem abstrakten Integral auf  $C(S^{n-1})$  fortsetzen.

**Lemma 8.7.** *Das Standardintegral  $I(f)$  ist ein Integral auf dem Verband  $A$  und ist invariant unter Drehungen<sup>1</sup> aus der Gruppe  $SO(n, \mathbb{R})$ , d.h.*

$$\boxed{I(f) = I(f \circ M) \quad , \quad M \in SO(n, \mathbb{R})}.$$

**Beweis.** Die Abbildung  $I : A \rightarrow \mathbb{R}$  ist per Definition  $\mathbb{R}$ -linear; die Drehinvarianz folgt aus der Drehinvarianz der Oberflächenform  $\sigma_{n-1}$ . Es verbleibt daher nur noch für  $f(x) \geq 0$  zu zeigen  $I(f) \geq 0$ .

Mittels einer Partition der Eins kann man sich auf den Fall beschränken, daß der Träger von  $f(x)$  in einer Karte enthalten ist. Durch eine Drehung kann man dann annehmen, der Träger von  $f(x)$  sei enthalten in der rechten ‘Hemisphäre’  $S_+^{n-1} := \{x \in S^{n-1} \mid x_1 > 0\}$ . Eine Kartenabbildung

$$\lambda : \{x = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \rho^2 := \sum_{i=2}^n x_i^2 < 1\} \longrightarrow S_+^{n-1}$$

für die rechte Hemisphäre  $S_+^{n-1}$  ist für  $\rho^2 := \|x\|_{\mathbb{R}^{n-1}}^2 = \sum_{i=2}^n x_i^2$  gegeben durch die lokale Parametrisierung

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = (+\sqrt{1 - \rho^2}, x_2, \dots, x_n).$$

Die Behauptung  $I(f) \geq 0$  für  $f \geq 0$  folgt daher aus dem nächsten Lemma. □

---

<sup>1</sup>Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist in der Gruppe  $SO(\mathbb{R}^n)$  und erhält damit die Sphäre  $S^{n-1}$ , wenn gilt  $M = {}^T M^{-1}$  sowie  $\det(M) = 1$ . Siehe auch Abschnitt 9.7.

**Lemma 8.8.** Für Funktionen  $f$  mit kompaktem Träger in der rechten Hemisphäre  $S_+^{n-1}$  gilt

$$\int_{S_+^{n-1}} f(x) \cdot \sigma_{n-1} = \int_{\|x\| < 1} \frac{f(\lambda(x_2, \dots, x_n))}{+\sqrt{1-\rho^2}} dx_2 \cdots dx_n .$$

**Beweis.** Bis auf  $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$  ist der Pullback  $\lambda^*(\sigma_{n-1})$  gleich

$$\sqrt{1-\rho^2} - \sum_{i=2}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{1-\rho^2} = (1-\rho^2)^{-1/2} \cdot (1-\rho^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2) = (1-\rho^2)^{-1/2} .$$

**Korollar 8.9.** Das Standard Integral  $I$  auf  $C(S^{n-1})$  ist ein abstraktes Integral.

**Beweis.** Für monotone Folgen  $f_n \nearrow f$  stetiger Funktionen  $f_n \in C(S^{n-1})$  mit stetiger Grenzfunktion  $f \in C(S^{n-1})$  ist zu zeigen  $I(f_n) \nearrow I(f)$ . Durch eine Partition der Eins kann man obdA annehmen, daß alle  $f, f_n$  kompakten Träger in der rechten Hemisphäre  $S_+^{n-1}$  besitzen. In diesem Fall folgt die Aussage sofort aus dem letzten Lemma und dem Satz von Beppo Levi angewendet auf das reelle Integral  $\int_{\|x\| < 1} \frac{f(\lambda(x_2, \dots, x_n))}{+\sqrt{1-\rho^2}} dx_2 \cdots dx_n$ .  $\square$

**Lemma 8.10.**  $\int_{\|x\| < r} f(x) \omega_n = \int_0^r (\int_S f(t\xi) \sigma_{n-1}(\xi)) t^{n-1} dt .$

**Beweis.** ObdA hat  $f$  Träger in der rechten Hemisphäre. Die Abbildung  $\psi : \{\|\xi\| < 1\} \times (0, r) \rightarrow B_r(0)$  sei definiert durch  $\psi(\xi_2, \dots, \xi_n; t) = (t\sqrt{1-\rho^2}, t\xi_2, \dots, t\xi_n)$ . Sie hat dann die Eigenschaft  $\det(D\psi)(\xi) = \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-\rho^2}}$  (Laplace Entwicklungssatz). Die Aussage folgt daher aus der Substitutionsformel Satz 4.27, sowie dem Satz von Fubini und Lemma 8.8.  $\square$

Das letzte Lemma motiviert die Definition des Standardintegrals  $I_R$  auf der Sphäre  $S(R)$  vom Radius  $R$  durch die Formel

$$I_R(f) := R^{n-1} \cdot \int_S f(R\xi) \sigma_{n-1}(\xi) .$$

Lemma 8.10 schreibt sich dann suggestiver in der Form

$$\int_{\|x\| < r} f(x) \omega_n = \int_0^r I_t(f) dt .$$

## 8.7 Die Kugelflächenform

In diesem Abschnitt betrachten wir den Rand  $\partial E^n = S^{n-1}$  der Einheitskugel  $E^n$  im  $\mathbb{R}^n$ . Wir haben die  $(n-1)$ -Form  $\sigma_{n-1}$  in  $A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  und ihren Pullback auf die Sphäre benutzt um das Standardintegral auf  $S = S^{n-1}$  zu definieren. Die Kugeloberfläche (das Wort Oberfläche ist natürlich ein Sprachmissbrauch in Dimensionen  $n \neq 3$ ) ist damit definiert durch

$$\text{vol}(S) := \int_S \sigma_{n-1} .$$

Zur Erinnerung: Die drehinvariante Differentialform  $\sigma_{n-1} \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  ist gegeben durch

$$\sigma_{n-1} = \sum_{i=1}^n x_i * dx_i = *d\left(\frac{1}{2}r^2\right),$$

etwa  $\sigma_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$  im Fall  $n = 3$ . Für  $\omega_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  gilt

$$d\sigma_{n-1} = n \cdot \omega_n.$$

Diese Bedingung und die Drehinvarianz unter Drehungen  $M$  in der orthogonalen Gruppe  $SO(n, \mathbb{R})$  (in allen Teilebenen in den  $i, j$ -Koordinatenrichtungen für  $1 \leq i < j \leq n$ ) bestimmen<sup>2</sup> die Form  $\sigma = \sigma_{n-1}$  in  $A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  eindeutig. Wir nennen  $\sigma_{n-1}$  die **Kugelflächen Form** im  $\mathbb{R}^n$ . Im Abschnitt 10.1 ergibt sich für  $vol(S) = \int_{S^{n-1}} \sigma_{n-1}$  der Wert

$$vol(S^{n-1}) = 2, 2\pi, 4\pi, 2\pi^2, \dots$$

in den Fällen  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ .

In der Fußnote wird unter anderem gezeigt, daß die der Kugelflächenform  $\sigma_{n-1}$  zugeordnete **Potentialform**  $\rho \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\rho = \frac{\sigma_{n-1}}{r^n},$$

welche einen Singularität im Nullpunkt besitzt, eine geschlossene rotationssymmetrische Differentialform auf  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist:

$$d\rho = 0.$$

Bei Integration über die Sphäre  $S^{n-1}$  liefert die Potentialform  $\rho$  dasselbe Integral  $nc(n) \neq 0$  wie die Oberflächenform  $\sigma_{n-1}$ , da  $r = 1$  ist auf der Einheitskugel. Wir zeigen nun, daß deshalb im Gebiet  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  das Poincaré Lemma nicht gilt (das verallgemeinert die Bemerkung auf Seite 75 im Fall  $n = 2$ )

**Lemma 8.11.**  $\rho \notin d(A^{n-2}(U)).$

**Beweis.** Angenommen  $\rho = d\eta$ , dann folgt  $nc(n) = \int_{S^{n-1}} \rho = \int_{S^{n-1}} d\eta$  für ein  $\eta \in A^{n-2}(U)$ . Eine stärkere Version (!) des Satzes von Stokes (hier ohne Beweis) würde dann folgenden Widerspruch liefern  $0 \neq nc(n) = \int_{S^{n-1}} d\eta = \int_{\partial S^{n-1}} \eta = 0$ , letzteres wegen  $\partial S^{n-1} = \emptyset$ .  $\square$

<sup>2</sup>Ist  $\sigma = \sum f_i(x) * dx_i$  invariant unter allen Drehungen  $M = M(\alpha)$  in Richtung der  $x_1, x_2$ -Ebene mit Winkeln  $\alpha$ , d.h. gilt  $M^*(\sigma) = \sigma$ , dann folgt  $f_1(x) = \cos(\alpha)f_1(\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2, -\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2, \dots) - \sin(\alpha)f_2(\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2, -\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2, \dots)$  für alle  $\alpha$ . Wenn man diese Relation nach  $\alpha$  ableitet und  $\alpha = 0$  setzt, folgt daraus  $x_1 f_2(x) = x_2 f_1(x)$ . Macht man dies analog für andere Koordinatenebenen, so folgt  $f_i(x) = x_i \cdot f(x)$  für eine Funktion  $f(x)$ , welche auf Sphären konstant ist und daher nur vom Radius  $r$  abhängt. Also  $\sigma = f(r) \cdot \sigma_{n-1}$ . Fordert man noch  $d\sigma = n \cdot \omega_n$ , so folgt aus  $d\sigma = df \wedge \sigma_{n-1} + n f \omega_n$  die inhomogene lineare Differentialgleichung  $\sum_{i=1}^n x_i \partial_i f(x) + n f(x) = n$ , oder wegen  $\partial_i f(r) = \frac{x_i}{r} \frac{d}{dr} f(r)$  dann  $r \frac{d}{dr} f(r) + n f = n$ . Also  $f = 1 + g$  für eine Lösung  $g(r) = c \cdot r^{-n}$  der homogenen Gleichung  $r \frac{d}{dr} g(r) + n g(r) = 0$ . Nur für  $c = 0$  ist diese Lösung differenzierbar im Punkt Null.

## 8.8 Greensche Formel

Der Satz von Stokes für die abgeschlossenen Kugeln vom Radius  $R$  resp.  $r$  zeigt dann durch Subtraktion für die **Kugelschale**  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r \leq \|x\| \leq R\}$  das folgende Resultat: Für  $\eta \in A^{n-1}(U)$  und  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  mit  $X \subset U$  gilt

$$\int_X d\eta = \int_{S^{n-1}(R)} \eta - \int_{S^{n-1}(r)} \eta.$$

Hierbei bezeichne  $S^{n-1}(R)$  resp.  $S^{n-1}(r)$  die Sphären vom Radius  $R$  resp.  $r$ . Wir schreiben die rechte Seite dieser Formel symbolisch wieder als  $\int_{\partial X}$ , wobei der Rand  $\partial X$  jetzt aus den beiden Sphären (mit unterschiedlicher Orientierung, nämlich  $+$  für den äusseren Teil und  $-$  für den inneren Teil) besteht

$$\int_X d\eta = \int_{\partial X} \eta.$$

**Greensche Formel.** Der Laplace Operator  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$  operiert auf Funktionen  $f, g \in C^\infty(U)$ . Für das Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle_{L^2(X)} = \int_X \bar{f}(x)g(x)dx$  im Hilbertraum  $L^2(X)$  gilt

$$\boxed{\langle f, \Delta(g) \rangle_{L^2(X)} - \langle \Delta(f), g \rangle_{L^2(X)} = \int_X (f\Delta(g) - g\Delta(f))\omega_n}$$

(beachte  $f = \bar{f}$  und  $g = \bar{g}$ ) und man hat

**Lemma 8.12. (Greensche Formel).** Für Kugelschalen  $X$  gilt

$$\boxed{\int_X (f\Delta(g) - g\Delta(f))\omega_n = \int_{\partial X} f \sum_{i=1}^n \partial_i(g) * dx_i - \int_{\partial X} g \sum_{i=1}^n \partial_i(f) * dx_i}.$$

**Beweis.** Benutze  $d(\sum_i f \partial_i(g) * dx_i) = \sum_i df \wedge \partial_i(g) * dx_i + \sum_i f \cdot d(\partial_i(g) * dx_i)$  wegen  $d(*dx_i) = 0$ , und damit  $d(\sum_i f \partial_i(g) * dx_i) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(\partial_i g) \omega_n + f \Delta(g) \omega_n$  wegen  $df \wedge *dx_i = \sum_j (\partial_j f) dx_j \wedge *dx_i = (\partial_i f) \omega_n$ . Vertauscht man  $f$  und  $g$  und bildet die Differenz, folgt daraus sofort das Lemma mit Hilfe des Satzes von Stokes. □

# 9 Harmonische Analysis

## 9.1 Der Hilbertraum $L^2(S)$

Sei  $n \geq 2$  und sei  $S = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  die **Einheitssphäre** im  $\mathbb{R}^n$ . Das in Abschnitt 8.6 für stetige Funktionen  $f \in C(S)$  erklärte Standard Integral  $I(f) = I_S(f)$  ist nach Korollar 8.9 ein abstraktes Integral. Daher kann man den Hilbertraum  $L^2(S)$  definieren mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = I_S(\bar{f} \cdot g)$ , d.h.

$$\langle f, g \rangle = \int_S \bar{f}(x)g(x)\sigma_{n-1}(x)$$

gebildet zur Differentialform  $\sigma_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n x_i * dx_i$  (siehe Abschnitt 8.6).

Der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  ist eine Algebra. Da bereits lineare Funktionen Punkte trennen, ist diese Algebra punktstrennend auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Nach Stone-Weierstraß ist daher der Raum  $A$  der Einschränkungen aller Polynome auf  $S$  ein dichter Unterraum des Raumes  $C(S)$  der stetigen Funktionen auf  $S$ , denn  $S$  ist kompakt. Nach Lemma 5.15 wird  $A$  von den Einschränkungen der harmonischen Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  aufgespannt. Es folgt

**Lemma 9.1.** *Der Vektorraum aller harmonischen Polynome liegt dicht in  $L^2(S)$ .*

In Lemma 9.6.4 wird gezeigt, daß homogene harmonische Polynome verschiedenen Grades orthogonal zueinander sind bezüglich des Skalarproduktes von  $L^2(S)$ . Wir beschränken uns daher für den Moment auf homogene *harmonische* Polynome in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  festes Grad  $l$ . Das Skalarprodukt  $\langle P, Q \rangle$  von  $L^2(S)$  liefert eine positiv definite symmetrische  $\mathbb{R}$ -Bilinearform auf  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $\{P_{l,k}(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \mid 1 \leq k \leq \dim \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)\}$  eine **reelle ON-Basis**  $P_{l,k}(x)$  dieses Skalarproduktes auf  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ . Verschwindet ein Polynom in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  auf der Sphäre  $S$ , dann ist es wegen der Homogenität das Nullpolynom. Die Einschränkung  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(S)$  ist also eine injektive Abbildung. Wir definieren dann für  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$Z_l(x, \xi) := \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} P_{l,k}(x)P_{l,k}(\xi).$$

Für festes  $\xi$  ist die Funktion  $Z_l(x, \xi)$  ein harmonisches Polynom der Variable  $x$  vom Grad  $l$ , und umgekehrt gilt dies auch. Nach Definition gilt

$$Z_l(x, \xi) = Z_l(\xi, x) \quad , \quad Z_l(\lambda x, \lambda \xi) = \lambda^{2l} Z_l(x, \xi) .$$

$Z_l(x, \xi)$  ist **vollkommen bestimmt** durch die folgende **Reproduktionsformel**

$$\langle Z_l(x, \xi), P(x) \rangle = P(\xi) .$$

[Diese folgt unmittelbar aus  $\langle \sum_k a_k P_{l,k}(x), P_{l,j}(x) \rangle = a_j$ .] Aus der Drehinvarianz des Standard Integrals auf  $S$  folgt  $\langle Z_l(Mx, M\xi), P(x) \rangle = \langle Z_l(x, M\xi), P(M^{-1}x) \rangle$  für  $M \in SO(n, \mathbb{R})$ . Aber  $\langle Z_l(x, M\xi), P(M^{-1}x) \rangle = P(M^{-1}M\xi) = P(\xi)$ , also  $\langle Z_l(Mx, M\xi), P(x) \rangle = P(\xi)$ . Aus obiger Eindeutigkeitsaussage folgt daher

$$Z_l(Mx, M\xi) = Z_l(x, \xi) \quad , \quad M \in SO(n, \mathbb{R}) .$$

Insbesondere ist  $Z_l(x, \xi)$  als Funktion von  $x \in S$  (bei festem  $\xi \in S$ ) damit invariant unter dem Stabilisator  $SO(n-1, \mathbb{R})$  des Punktes  $\xi$ . Im Spezialfall  $\xi = (1, 0, \dots, 0)$  hängt daher  $Z_l(x, \xi)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  nur von  $x_1 = x \cdot \xi$  und  $r = \|x\|$  ab, ist daher proportional zu dem **zonalen harmonischen Polynom**  $P_{l,0}(x)$  vom Grad  $l$  (definiert in Abschnitt 5.7). D.h. man erhält die **Additionsformel**

$$Z_l(x, \xi) = \text{const}(l) \cdot P_{l,0}(x) \quad , \quad \xi = (1, 0, \dots, 0) .$$

**Lemma 9.2.** *Es gilt  $|Z_l(x, \xi)| \leq Z_l(x, x) = \frac{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))}{\text{vol}(S)}$  für alle  $x, \xi \in S$ .*

**Beweis.** Wegen  $Z_l(x, x) = \sum_k P_{l,k}(x)^2$  und der  $SO(n, \mathbb{R})$ -Invarianz ist  $Z_l(x, x) = c$  eine konstante Funktion auf  $S$ . Also  $\text{vol}(S)c = \int_S Z_l(x, x) \sigma_{n-1} = \sum_k \langle P_{l,k}, P_{l,k} \rangle = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))$ . Es gilt  $|Z_l(x, \xi)| = |\sum_k P_{l,k}(x)P_{l,k}(\xi)| \leq |Z_l(x, x)|^{1/2} |Z_l(\xi, \xi)|^{1/2} = Z_l(x, x)$ . Dies benutzt die Schwarz Ungleichung und die Konstanz von  $Z_l(x, x) \geq 0$  auf  $S$ .  $\square$

## 9.2 Poisson Kern

Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion. Insbesondere gilt  $f \in C^\infty(U)$ . Ist  $x_0 = 0$  in  $U$ , dann sind die Taylor Koeffizienten

$$c_l(x) = \frac{1}{l!} \left( \frac{d}{dt} \right)^l f(tx)_{t=0}$$

harmonische Polynome in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ ; siehe Abschnitt 5.6.

Wir wenden dies an auf den **Poisson Kern** im Bereich  $\|x\| < \|\xi\|$ , d.h. auf die Funktion

$$P(x, \xi) = \frac{1}{\text{vol}(S)} \frac{\|\xi\|^2 - \|x\|^2}{\|\xi - x\|^n} \quad , \quad x \neq \xi .$$

Beachte  $\|x\|^2 - \|\xi\|^2 = \|x - \xi\|^2 + 2(x - \xi, \xi)$ . Also  $-\text{vol}(S)P(x, \xi) = \|x - \xi\|^{-\kappa} + \frac{2(x - \xi, \xi)}{\|x - \xi\|^{\kappa+2}} = P_0^*(x - \xi) + P_1^*(x - \xi)$ , d.h. eine Summe von Kelvin Transformaten der harmonischen Polynome  $P_0(x) = 1$  und  $P_1(x) = 2(x, \xi)$  mit  $\kappa = n - 2$ . D.h.  $P(x, \xi)$  ist eine harmonische Funktion in  $x - \xi$  und ist damit auch harmonisch in  $x$ , und wegen  $P(x, \xi) = -P(\xi, x)$  damit auch harmonisch in  $\xi$ .

Offensichtlich gilt  $P(Mx, M\xi) = P(x, \xi)$  für alle  $M \in SO(n, \mathbb{R})$ . Die Taylor Koeffizienten  $c_{l,\xi}(x) := T_l(P(x, \xi))(x)$  sind harmonische Polynome mit derselben Drehsymmetrie. Somit sind  $c_{l,\xi}(x)$  und  $Z_l(x, \xi)$  **zonale harmonische Polynome** in  $x$  vom Grad  $l$  und daher proportional zu  $P_{l,0}(x)$  (siehe Abschnitt 5.7). [Wegen der Drehsymmetrie ist oBdA  $\xi = \xi_0 = (1, \dots, 0)$ . Dann hängt  $\text{vol}(S)P(x, \xi_0) = \frac{1-r^2}{(1-2x_1+r^2)^{n/2}}$  als Funktion nur ab von der ersten Koordinate  $x_1 = (x, \xi_0)/2$  und dem Radius  $r = \|x\|$ . Dasselbe gilt dann auch für Taylor Koeffizienten  $c_l(x) = c_l(x, \xi_0)$ ].

**Satz 9.3.** *Es gilt  $c_l(x, \xi) = Z_l(x, \frac{\xi}{\|\xi\|^2})\|\xi\|^{-\kappa}$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ , und für alle  $x, \|x\| < \|\xi\|$  gilt*

$$P(x, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} Z_l(x, \frac{\xi}{\|\xi\|^2})\|\xi\|^{-\kappa}.$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von der Kugel  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \|\xi\|\}$  absolut und gleichmäßig.

**Bemerkung.** Für  $x, \xi \in S$  sind alle Koeffizienten  $Z_l(x, \xi)$  symmetrisch in  $x$  und  $\xi$ . Dennoch ist die Summe  $P(x, \xi)$  antisymmetrisch in  $x$  und  $\xi$ . Zur Illustration dieses scheinbaren Widerspruchs betrachte dazu im eindimensionalen Fall  $(\xi - x)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} z_l(x, \frac{\xi}{\xi^2})\xi^{-1}$  für  $z_l(x, \xi) = x^l \xi^l$  im Bereich  $|x| < |\xi|$  (im wesentlichen die geometrische Reihe).

**Beweis.** Durch Reskalierung  $(x, \xi) \mapsto (tx, t\xi)$  ist wegen  $P(tx, t\xi) = t^{-\kappa}P(x, \xi)$  und der analogen Reskalierungseigenschaft der rechten Seite oBdA  $\xi \in S$  und  $\|x\| < 1$ . Auf Grund der Drehinvarianz beider Seiten ist dann oBdA  $\xi = \xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . Wir zeigen nun, daß auf der rechten Seite  $\sum_{l=0}^{\infty} Z_l(x, \xi_0)$  für  $\|x\| < 1$  absolut konvergiert, und in diesem Bereich damit eine drehinvariante harmonische Funktion  $f(x)$  darstellt. Dazu benützen wir die Abschätzung  $|Z_l(x, \xi_0)| \leq t^l Z_l(\xi_0, \xi_0)$ , welche aus Lemma 9.2 folgt, und können für die absolute Konvergenz oBdA annehmen  $x = t\xi_0$ . Aus  $\text{vol}(S)Z_l(t\xi_0, \xi_0) = \dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)) \cdot t^l$  (Lemma 9.2) und  $\kappa \cdot \dim(\mathcal{H}_l) = (2l + \kappa) \binom{n+l-3}{l}$  oBdA für  $\kappa = n - 2 \geq 1$  (Satz 5.13), sowie

$$\sum_l \left(1 + \frac{2l}{\kappa}\right) \binom{n+l-3}{l} t^l = \frac{1}{(1-t)^\kappa} + \frac{2t}{\kappa} \frac{d}{dt} \frac{1}{(1-t)^\kappa} = \frac{1-t^2}{(1-t)^n} = \frac{\|\xi_0\|^2 - \|t\xi_0\|^2}{\|\xi_0 - t\xi_0\|^n},$$

folgt  $f(t\xi_0) = P(t\xi_0, \xi_0)$ . Wir haben dabei benutzt  $\frac{1}{t} \left(\frac{d}{dt}\right)^l (1-t)^{-\kappa} \Big|_{t=0} = \binom{\kappa+l-1}{l}$  für  $\kappa > 0$ . Im Fall  $n = 2$  reduziert sich alles auf  $-1 + 2/(1-t) = (1-t^2)/(1-t)^2$ . Dies zeigt die absolute und gleichmäßige Konvergenz.

Wegen der Proportionalität der zonalen harmonischen Polynome  $c_l(x, \xi) = \text{const}(l) \cdot Z_l(x, \xi)$  genügt wegen  $Z_l(\xi_0, \xi_0) > 0$  für  $\text{const}(l) = 1$  die gezeigte Gleichheit in den Punkten  $x = t \cdot \xi_0$ . Dies zeigt, daß alle Taylor Koeffizienten der harmonischen  $C^\infty$ -Funktion  $f(x) - P(x, \xi_0)$  im Mittelpunkt  $x_0 = 0$  der Kugel  $U = \{x \mid \|x\| < 1\}$  verschwinden. Aus Lemma 9.8 im nächsten Abschnitt folgt daher  $f(x) = P(x, \xi_0)$  auf  $U$ .  $\square$

Eine geringfügige Modifikation des Beweises zeigt analog

**Satz 9.4.** Für  $n \geq 3$  und  $\kappa = n - 2$  sei  $Q(x, \xi)$  das **Coulomb oder Newton Potential**

$$Q(x, \xi) = \frac{1}{\kappa \cdot \text{vol}(S)} \frac{1}{\|x - \xi\|^\kappa}$$

im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Für alle  $x$  mit  $\|x\| < \|\xi\|$  gilt dann

$$Q(x, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l + \kappa} \cdot Z_l(x, \frac{\xi}{\|\xi\|^2}) \|\xi\|^{-\kappa}.$$

Die Reihe konvergiert auf jedem Kompaktum der Kugel  $\{x \mid \|x\| < \|\xi\|\}$  absolut und gleichmässig.

### 9.3 Orthogonalität

In diesem Abschnitt sei  $n \geq 2$ . Für reelle Zahlen  $0 < \rho < R$  und  $r \in [\rho, R]$  sei  $X = X[r, R]$  die abgeschlossene **Kugelschale** im  $\mathbb{R}^n$  mit den Radien  $r$  und  $R$  um  $x_0 = 0$ . Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, welche  $X$  für alle  $r \in [\rho, R]$  enthält. Für harmonische Funktionen  $f(x), g(x) \in C^\infty(V)$  verschwindet die linke Seite der Greenschen Formel wegen  $\Delta(f) = \Delta(g) = 0$ . Die Greensche Formel (Lemma 8.12) liefert damit folgende **Vertauschungsformel**:

$$\int_{\partial X} f \sum_{i=1}^n \partial_i(g) * dx_i = \int_{\partial X} g \sum_{i=1}^n \partial_i(f) * dx_i.$$

Damit beweisen wir das nächste Lemma. Beachte,  $\partial X$  ist die Vereinigung der beiden Sphären  $S(R), S(r)$  vom Radius  $R$  und  $r$  mit unterschiedlicher Orientierung

$$\partial X = S(R) - S(r).$$

Die Vertauschungsformel zeigt daher, daß  $\int_{S(r)} f \sum_i \partial_i(g) * dx_i - \int_{S(r)} g \sum_i \partial_i(f) * dx_i$  unabhängig vom Radius  $r \in [\rho, R]$  ist.

**Definition.** Für harmonisches  $f(x) \in C^\infty(V)$  und  $P(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  und  $r \in [\rho, R]$  setzen wir

$$\langle f, P \rangle_r := r^{-n-2l} \int_{S(r)} f(x) P(x) \sigma_{n-1}(x).$$

**Lemma 9.5.** Ist  $P(x)$  ein harmonisches Polynom auf  $\mathbb{R}^n$  und  $f(x)$  eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , welche  $\bigcup_{r \in [\rho, R]} S(r)$  enthält, dann existieren Konstanten  $\alpha = \alpha(P, f)$  und  $\beta = \beta(P, f)$ , welche nicht von  $r \in [\rho, R]$  abhängen, so daß für  $\kappa = n - 2$  gilt

$$(\kappa + 2l) \cdot \langle f, P \rangle_r = \alpha + \beta \cdot r^{-\kappa-2l} \quad \text{bzw. für } (n, l) = (2, 0) \quad \langle f, P \rangle_r = \alpha + \beta \cdot \log(r).$$

**Beweis.** Die **Kelvin Transformierte**  $g(x) = P^*(x) = P(x) \|x\|^{-\kappa-2l}$  des harmonischen Polynoms  $P(x)$  hat eine **Singularität** im Punkt  $x_0 = 0$  [für  $(n, l) = (2, 0)$  setzt man analog  $g(x) = \log(\|x\|)$ ], ist aber harmonisch auf der offenen Menge  $V \setminus \{x_0\}$ , welche  $X = X(r, R)$  enthält. Wir wenden nun für  $g = P^*$  und  $f$  die oben angegebene **Vertauschungsformel** an. Wegen

$$\partial_i g(x) = -(\kappa + 2l) \frac{P(x) x_i}{\|x\|^{n+2l}} + \frac{\partial_i P(x)}{\|x\|^{\kappa+2l}}$$

gilt

$$f(x) \sum_i \partial_i(g) * dx_i = -(\kappa + 2l) \frac{f(x)P(x)\sigma_{n-1}(x)}{\|x\|^{n+2l}} + \frac{f(x) \sum_i \partial_i(P) * dx_i}{\|x\|^{\kappa+2l}}.$$

Die Nenner sind Potenzen von  $r$ , also konstant auf  $S(r)$ . Nach der Vertauschungsformel ist daher  $-\alpha := \int_{S(r)} f \sum_i \partial_i(g) * dx_i - \int_{S(r)} g \sum_i \partial_i(f) * dx_i$  unabhängig von  $r \in [\rho, R]$ . Konkret ist dann

$$-\alpha = -(\kappa + 2l) \langle f, P \rangle_r + \frac{1}{r^{\kappa+2l}} \int_{S(r)} f(x) \sum_i \partial_i(P) * dx_i - \frac{1}{r^{\kappa+2l}} \int_{S(r)} P(x) \sum_i \partial_i(f) * dx_i.$$

Analog zeigt die Vertauschungsformel angewandt für  $g = P$  und  $f$  die  $r$ -Unabhängigkeit von

$$\beta := \int_{S(r)} f(x) \sum_i \partial_i(P) * dx_i - \int_{S(r)} P(x) \sum_i \partial_i(f) * dx_i.$$

Beides zusammen liefert unsere Behauptung.  $\square$

Für  $(n, l) = (2, 0)$  überlassen wir es dem Leser  $\langle f, 1 \rangle_r = \frac{1}{r^2} \int_{S(r)} f(x) \sigma_1(x) = \alpha + \beta \cdot \log(r)$  zu zeigen mit einem analogen Argument.

**Lemma 9.6.** Sei  $U$  eine offene Kugel vom Radius  $> R$  um  $x_0 = 0$ . Wir nehmen an  $1 < R$ . Dann gilt für harmonisches  $f(x) \in C^\infty(U)$  und harmonisches  $P(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$

1. Nach Definition gilt  $\langle f, P \rangle_1 = \langle f, P \rangle$  für das Skalarprodukt  $\langle f, P \rangle = \langle f, P \rangle_{L^2(S)}$ .
2.  $\langle f, P \rangle_r$  hängt nicht ab von der Wahl von  $r$ .
3. Verschwinden die Taylor Koeffizienten  $T_\nu(f)(x)$  für  $\nu \leq l$ , dann gilt  $\lim_{r \rightarrow 0} \langle f, P \rangle_r = 0$ .
4. Orthogonalität: Es gilt  $\langle \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n), \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n) \rangle = 0$  für  $m \neq l$ .
5. Es gilt  $\langle f, P \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \langle f, P \rangle_r = \langle T_l(f), P \rangle$ .

**Beweis.** Behauptung 2 folgt aus Lemma 9.5, da  $f(x)$  nach Annahme stetig im Punkt  $x_0 = 0$  ist und deshalb für  $r \rightarrow 0$  das Integral  $\langle f, P \rangle_r$  beschränkt bleibt. Daraus folgt  $\beta = 0$  und  $(\kappa + 2l) \cdot \langle f, P \rangle_r = \alpha$  in Lemma 9.5. Beachte  $\kappa + 2l > 0$  ausser im Fall  $(n, l) = (2, 0)$ ; dieser geht aber analog. Für Behauptung 3 betrachten wir die Taylor Koeffizienten  $T_\nu(f)$  von  $f(x)$  im Punkt  $x_0 = 0$  (siehe Abschnitt 5.6). Aus  $T_\nu(f) = 0$  für alle  $\nu \leq l$  und Lemma 5.12 folgt  $f(x) = \|x\|^l \cdot H(x)$  für eine stetige Funktion  $H$  auf  $U$  mit  $H(0) = 0$ . Wegen  $f(rx)P(rx)\sigma_{n-1}(rx) = r^{2l+n} \cdot H(rx)P(x)\sigma_{n-1}(x)$  für  $x \in S = S(1)$  folgt Behauptung 3 aus  $\lim_{r \rightarrow 0} H(rx) = 0$ . Behauptung 4 folgt aus den Behauptungen 1,2,3, denn wegen  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  ist obdA  $m > l$ . Für die harmonische Funktion  $h(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^l T_\nu(f)(x)$  folgt  $\lim_{r \rightarrow 0} \langle h, P \rangle_r = 0$  aus Behauptung 3 und Abschnitt 5.6. Wegen Behauptung 1 und 2 ist daher  $\langle h, P \rangle = 0$  und damit  $\langle f, P \rangle = \sum_{m=0}^l \langle T_m(f), P \rangle$ , wegen Behauptung 4 also  $\langle f, P \rangle = \langle T_l(f), P \rangle$ . Dies zeigt Behauptung 5.  $\square$

Lemma 9.6.4 und Lemma 9.1 zusammen ergeben

**Satz 9.7.** Die Funktionen  $P_{l,k}(x)$  bilden eine Hilbertraum-Basis von  $L^2(S)$ .

Aus Lemma 9.6.1-3 folgt daher

**Lemma 9.8.** Verschwinden alle Taylor Koeffizienten einer harmonischen Funktion  $f \in C^\infty(U)$  im Mittelpunkt  $x_0$  einer offenen Kugel  $U$ , dann verschwindet  $f$  auf  $U$ .

## 9.4 Harmonische Funktionen sind analytisch

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine harmonische Funktion auf  $U$ . Sei die abgeschlossene Kugel vom Radius  $R$  um  $x_0$  in  $U$  enthalten

$$\{x \mid \|x - x_0\| \leq R\} \subset U.$$

Für die Sphäre  $S(R, x_0)$  mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $R$  gilt dann

**Satz 9.9 (Poisson Formel).** Unter obigen Voraussetzungen gilt für alle  $x$  in der Kugel  $B$  definiert durch  $\|x\| < R$

$$f(x + x_0) = \frac{1}{R^2 \text{vol}(S)} \int_{S(R,0)} f(\xi + x_0) \frac{\|\xi\|^2 - \|x\|^2}{\|\xi - x\|^n} \sigma_{n-1}(\xi).$$

Für  $x = 0$  liefert dies folgende **Mittelpunktsformel**

**Satz 9.10.** Sei  $n \geq 2$  und  $U$  offen im  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in C^\infty(U)$  eine harmonische Funktion. Für jede abgeschlossene Kugel vom Radius  $r$  in  $U$  mit Mittelpunkt  $x_0$  gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{\text{vol}(S(R))} \cdot \int_{S(R,0)} f(\xi + x_0) \sigma_{n-1}(\xi).$$

**Beweis.** Zum Beweis der Poisson Formel ist obdA  $x_0 = 0$  und  $R = 1$ . Das Integral auf der rechten Seite der Poisson Formel definiert eine Funktion  $g(x)$  auf  $B$ . Wegen Lemma 9.8 genügt es, daß alle (höheren) Ableitungen von  $f$  und  $g$  in  $x_0$  übereinstimmen. Zum Beweis entwickeln wir  $g$  auf  $B$  mittels Satz 9.4 in eine konvergente Potenzreihe<sup>1</sup>. Vertauschen von Summation und Integration (Korollar 6.11) liefert

$$g(x) = \int_S f(\xi) P(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi) = \sum_{l=0} \int_S f(\xi) Z_l(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi).$$

Die Summanden  $\int_S f(\xi) Z_l(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi) = \langle Z_l(\xi, x), f(\xi) \rangle$  sind homogen vom Grad  $l$  in  $x$ , somit gleich den Taylor Koeffizienten  $T_l(g)(x)$ . Also ist  $\langle Z_l(\xi, x), f(\xi) \rangle = \langle Z_l(\xi, x), T_l(f)(\xi) \rangle$  nach Lemma 9.6.5, und wegen der Reproduktionsformel in Abschnitt 9.1 dann gleich  $T_l(f)(x)$ . Also gilt  $T_l(f)(x) = T_l(g)(x)$  für alle  $l$ .  $\square$

<sup>1</sup>Die Konvergenz ist gleichmäßig für festes  $\xi \in S$  und alle  $x$  aus einer kompakten Teilkugel von  $B$ . Wegen der  $SO(n, \mathbb{R})$ -Invarianz von  $P(x, \xi)$  ist sie daher auch gleichmäßig für alle solchen  $x$  und alle  $\xi \in S$ .

Das selbe Argument zeigt unter gleichen Voraussetzungen

**Satz 9.11.** Die harmonische Funktion  $f(x)$  lässt sich um  $x_0$  (hier obdA  $x_0 = 0$ ) in eine konvergente Potenzreihe vom Konvergenzradius  $\geq R$  entwickeln

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x).$$

Die Funktionen  $P_l(x) \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  sind harmonische Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  und homogen vom Grad  $l$ , und sind wie folgt durch  $f$  bestimmt

$$P_l(x) = \frac{1}{R^2} \int_S f(\xi) Z_l(x, \xi) \sigma_{n-1}(\xi).$$

**Bemerkung.** Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung ist daher mindestens (!) so groß wie der Radius  $R$  jeder Vollkugel um  $x_0$ , die vollkommen im Definitionsbereich  $U$  von  $f$  enthalten ist.

Aus der Mittelpunktsformel kann man ohne große Mühe das sogenannte **Maximumsprinzip** folgern: Nimmt eine harmonische Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ihr Maximum (Minimum) in einem Punkt  $x_0 \in U$  an, dann ist  $f$  konstant auf jeder offenen Kugel in  $U$  mit Mittelpunkt  $x_0$ .

## 9.5 Entwicklung auf Kugelschalen

Sei  $X = X[\rho, R]$  eine abgeschlossene Kugelschale und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge, die  $X$  enthält. ObdA sei  $0 < \rho < R$  und

$$f : V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{harmonisch.}$$

**Satz 9.12.** Eine auf  $V$  harmonische Funktion  $f(x)$  lässt sich auf Kugelschalen  $X[\rho, R] \subset V$  in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe entwickeln der Gestalt (siehe Abschnitt 5.8)

$$f(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} (a_{lk} \cdot P_{l,k}(y) + b_{lk} \cdot P_{l,k}^*(y)).$$

Im Fall  $(n, l) = (2, 0)$  ist hierbei  $P_{0,1}^*(x)$  formal durch  $\log(r)$  zu ersetzen.

**Beweis.** Sei  $n > 2$ ; der Fall  $n = 2$  geht analog. Wir entwickeln  $f$  in eine Potenzreihe auf  $X[\rho, R]$ . Die Einschränkung von  $f$  auf jede Sphäre  $S(r)$  für  $r \in [\rho, R]$  definiert eine stetige Funktion auf  $S(r)$ , und ist somit in  $L^2(S(r))$  enthalten. Für harmonische Polynome  $P \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  gilt daher durch Transformation auf die Einheitssphäre  $S$ , mittels  $y = r\xi$  und der Notation  $f_r(\xi) = f(r\xi)$ ,

$$\int_S f_r(\xi) P(\xi) \sigma_{n-1}(\xi) = r^{-n-l} \int_{S(r)} f(y) P(y) \sigma_{n-1}(y) = ar^l + br^{-l-\kappa}$$

für Konstanten  $a, b$ , welche nur von  $f, P$  abhängen aber nicht von  $r$ . Letzteres folgt aus Lemma 9.5, wobei wir der Einfachheit halber  $(n, l) \neq (2, 0)$  angenommen haben! Anwenden von  $r \frac{d}{dr}$  liefert<sup>2</sup> auf Grund des Vertauschungssatzes 4.32

$$\int_S (Ef)_r(\xi) P(\xi) \sigma_{n-1}(\xi) = l \cdot ar^l - (l + \kappa) \cdot br^{-l-\kappa},$$

und damit  $\frac{2l+\kappa}{l+\kappa} \cdot ar^l = \langle f_r + \frac{1}{l+\kappa} (Ef)_r, P \rangle$ , beziehungsweise wegen  $(r \frac{d}{dr})^m f_r = (E^m f)_r$

$$\frac{(2l + \kappa)l^m}{l + \kappa} \cdot ar^l = \langle (E^m f)_r + \frac{1}{l + \kappa} (E^{m+1} f)_r, P \rangle.$$

Das Skalarprodukt rechts kann durch  $c_1 \cdot \max_{\xi \in S} |P(\xi)|$  abgeschätzt werden. Die Konstante  $c_1$  hängt dabei nur von  $f$  und  $m$  ab und nicht von  $l$ . Für  $P = P_{l,k}$ ,  $a = a_{lk}$  und  $l > 0$  liefert dies  $|a_{lk}r^l| \leq C_1 \cdot l^{-m} \max_{\xi \in S} |P_{l,k}(\xi)|$  für eine Konstante  $C_1$ , welche nur von  $f$  und  $m$  abhängt. Dies schätzt  $\sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} |a_{lk} \cdot P_{l,k}(r\xi)|$  durch  $C_1 l^{-m} \cdot \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} \max_{\xi \in S} (P_{l,k}(\xi))^2$  ab. Aus Lemma 9.2 folgt  $0 \leq P_{l,k}(\xi)^2 \leq Z_l(\xi, \xi) \leq \frac{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))}{\text{vol}(S)}$ . Wegen  $\frac{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))}{\text{vol}(S)} \leq C_2 \cdot l^n$  (Satz 5.13) gilt also

$$\sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} |a_{lk} \cdot P_{l,k}(r\xi)| \leq \text{vol}(S) C_1 C_2^2 \cdot l^{2n-m} \leq \text{const.} \cdot l^{-2},$$

da wir obdA  $m = 2n + 2$  wählen können. Ähnlich kann man  $\sum_k b_{lk} P_{l,k}^*(r\xi)$  abschätzen. Gilt  $x \in S$  und  $r \in [\rho, R]$ , folgt aus  $\sum_{l=1}^{\infty} l^{-2} < \infty$  daher für  $y = r \cdot x \in X[\rho, R]$  die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite der noch zu zeigenden Identität

$$f_r(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\dim(\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n))} (a_{lk}r^l + b_{lk}r^{-l-\kappa}) \cdot P_{l,k}(x).$$

Damit ist die rechte Seite der Formel in Satz 9.12 wohldefiniert und harmonisch auf ihrem Definitionsbereich  $X[\rho, R]$ . Weiterhin haben die linke und die rechte Seite der Formel in Satz 9.12 die selben Skalarprodukte mit allen Funktionen der Hilbertraum-Basis  $P_{l,k}(x)$  (Satz 9.7) von  $L^2(S)$ . Deshalb sind beide Seiten f.ü. gleich als Funktion auf  $S$  (Korollar 7.8) bei festem  $r$ . Damit sind beide Seiten gleich auf ganz  $S$  aus Stetigkeitsgründen (Satz 2.24 und Lemma 7.10). Aus  $P_{k,l}(y) = r^l P_{k,l}(x)$  resp.  $P_{k,l}^*(y) = r^{-l-\kappa} P_{k,l}(x)$  resp.  $f(y) = f_r(x)$  folgt daher die Behauptung (im Fall  $(n > 2)$ ).  $\square$

**Satz 9.13 (Hebbarkeitssatz).** Sei  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < R\}$  und  $f : B \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion. Ist  $f$  beschränkt auf  $\{x \neq x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$  für ein  $r$  mit  $0 < r < R$ , dann lässt sich  $f$  zu einer harmonischen Funktion auf ganz  $B$  fortsetzen.

Aus Lemma 9.5 folgt wie im Beweis von Lemma 9.6.2 aus der Beschränktheit von  $f$  das Verschwinden der Koeffizienten  $b = b_{kl}$ . Damit folgt das Resultat leicht aus Satz 9.12.

<sup>2</sup>Für das Eulerfeld  $E = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$  gilt  $r^2 \Delta(Ef) = E(r^2 \Delta(f)) = 0$ . Deshalb ist auch  $Ef$  harmonisch auf  $V$ , sowie dann alle  $E^m f$  für  $m \in \mathbb{N}$ . Aus der Kettenregel folgt  $(Ef)(r\xi) = r \frac{d}{dr} f(r\xi)$  für reelles  $r > 0$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

## 9.6 Die Potential Gleichung $-\Delta U = \rho$

Für eine gegebene  $C^\infty$ -Funktion  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (hier der Einfachheit halber  $n \geq 3$ ) suchen wir Lösungen  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der **Potential Gleichung** oder auch **Laplace Gleichung**

$$\boxed{-\Delta U(x) = \rho(x)}.$$

Hat man eine Lösung  $U(x)$  gefunden, dann ist jede andere Lösung von der Gestalt  $U(x) + f(x)$  für eine harmonische Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Unter geeigneten Bedingungen an das Abklingen der Lösungen im Unendlichen (etwa  $\leq \text{const} \cdot r^{-\varepsilon}$  für ein  $\varepsilon > 0$ ) ist die Lösung der Poisson Gleichung eindeutig, d.h. es gilt  $f(x) = 0$ . Dazu benutzt man

**Satz 9.14.** *Beschränkte harmonische Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind konstant.*

**Beweis.** (Im Prinzip ist das Satz 9.13). Wegen Satz 4.8 genügt zu zeigen  $df(x_0) = 0$  für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Zum Beweis von  $df(x_0) = 0$  sei obdA  $x_0 = 0$ . Satz 9.9 und Satz 4.32 zeigen dann für den Poissonkern  $P(x, \xi)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(0) = \frac{1}{R^2} \int_{S(R)} f(\xi) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) P(x, \xi)_{x=0} \sigma_{n-1}(\xi).$$

Aus  $|\text{vol}(S) \partial_i P(x, \xi)_{x=0}| = n |\xi_i| \|\xi\|^{-n} \leq n R^{1-n}$  folgt  $|\text{vol}(S) \partial_i f(0)| \leq R^{-2} \cdot \max(|f|) \cdot n R^{1-n} \text{vol}(S(R)) = \frac{n \text{vol}(S)}{R}$ . Also folgt  $\partial_i f(0) = 0$  im Limes  $R \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Satz 9.15 (Existenz).** *Für  $\rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\kappa = n - 2 > 0$  ist*

$$\varphi(y) = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{X(r, R)} \frac{\rho(x+y)}{\|x\|^\kappa} dx_1 \cdots dx_n$$

in  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , und  $U(x) = \frac{\varphi(x)}{\kappa \text{vol}(S)}$  ist eine Lösung der Potential Gleichung  $-\Delta U = \rho$ .

**Bemerkung.** Intuitiver vom physikalischen Standpunkt ist die Formel

$$\boxed{\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(x)}{\|x-y\|^\kappa} \omega_n}.$$

Wir überlassen es dem Leser diese einfachere Formel mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz abzuleiten (unter Benutzung der Überlegungen im nachfolgenden Beweises). Mit der so erhaltenen Formel lässt sich die gefundene Lösung der Poisson Gleichung  $\frac{\varphi(x)}{\kappa \text{vol}(S)} = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) Q(x, y) \omega_n(x)$  deuten als Verschmierung des **Coulomb** oder **Newton Potentials**  $Q(x, y)$  im Punkt  $y$

$$\boxed{Q(x, y) = \frac{1}{\kappa \cdot \text{vol}(S) \|x-y\|^\kappa}}, \quad \kappa = n - 2 > 0.$$

**Beweis.** Der Limes  $R \rightarrow \infty$  des Integrals existiert, da  $\rho(x)$  kompakten Träger hat. Der Limes  $r \rightarrow 0$  existiert, wie man sofort durch Übergang zu Polarkoordinaten sieht

$$\varphi(y) = \int_0^\infty \left( \int_{\xi \in S} \rho(r\xi + y) \sigma_{n-1}(\xi) \right) r dr .$$

Für  $y \in K$ ,  $K$  kompakt, kann man das Integral obdA über einen kompakten Bereich  $r \in [0, r_0]$  erstrecken. Dann zeigt Satz 4.32, daß Differentiation nach  $y$  mit der Integration vertauscht. Also ist  $\varphi(y)$  unendlich oft partiell differenzierbar und es gilt

$$\Delta_y \varphi(y) = \int_0^\infty \int_{\xi \in S} \Delta_y \rho(r\xi + y) r dr \sigma_{n-1}(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{X(r,R)} \frac{\Delta_y \rho(x + y)}{\|x\|^\kappa} dx_1 \cdots dx_n .$$

Wegen  $\Delta_y \rho(x + y) = \Delta_x \rho(x + y)$  kann man die Greensche Formel anwenden. ObdA sei  $R$  so groß, daß  $g(x) = \rho(x + y)$  für  $x \in S(R)$  verschwindet. Dann liefert die Greensche Formel für  $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\kappa}$  wegen  $\Delta_x(f) = 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{X(r,R)} \frac{\Delta_x \rho(x + y)}{\|x\|^\kappa} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S(r)} \frac{\sum_i \partial_i \rho(x + y) * dx_i}{r^\kappa} - (-1) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S(r)} \rho(x + y) \sum_i \partial_i \frac{1}{\|x\|^\kappa} * dx_i . \end{aligned}$$

Der erste Limes über das  $S(r)$ -Integral verschwindet, da  $\text{vol}(S(r))/r^\kappa$  für  $r \rightarrow 0$  gegen Null geht. Aus  $\sum_i \partial_i \frac{1}{\|x\|^\kappa} * dx_i = -\kappa \|x\|^{1-n} \sum_i \frac{x_i}{\|x\|} * dx_i = -\kappa \|x\|^{-n} \sigma_{n-1}(x)$  folgt daher

$$-\Delta_y \varphi(y) = \kappa \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S(r)} \rho(x + y) \|x\|^{-n} \sigma_{n-1}(x) = \kappa \cdot \text{vol}(S) \rho(y) .$$

□

**Bemerkung.** In der **Elektrostatik** reduziert sich das Vektorpotential  $A$  auf dem  $\mathbb{R}^4$  (siehe Abschnitt 5.11) auf die 1-Form

$$A = -U(x, y, z) dt$$

und der Vierer-Strom  $j$  reduziert sich auf die 1-Form  $j = -\rho(x, y, z) dt$ . Die Maxwellgleichungen vereinfachen sich zu der Gleichung

$$-\Delta U(x, y, z) = \rho(x, y, z)$$

für die statische Ladungsverteilung  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Das Lösungspotential  $U$  liefert Satz 9.15. Durch das physikalische Postulat, daß im Unendlichen die Lösung  $U(x, y, z)$  abklingt oder zumindestens beschränkt ist, wird die Lösung  $U$  (bis auf eine Konstante) eindeutig.

**Bemerkung.** Sei  $X$  eine Kugelschale  $X$  um einen Punkt  $x_0$  und sei obdA  $x_0 = 0$ . Ist die Ladungsdichte  $\rho(x, y, z)$  Null auf  $X$  (eine physikalisch typische Situation wenn alle Ladungen im Inneren konzentriert sind), dann ist  $U(x, y, z)$  auf  $X$  eine harmonische Funktion und kann

dort nach Satz 9.12 in eine Potenzreihe entwickelt werden. Nimmt man sogar an  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq r\}$ , d.h. ist also  $R = +\infty$ , und ist  $x \ U(x, y, z)$  ausserdem beschränkt auf  $X$ , dann folgt aus Satz 9.13 die harmonische Fortsetzbarkeit der Kelvin Transformierten  $U^*(x, y, z)$  von  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| < \frac{1}{r}\}$  auf die offene Kugel  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \frac{1}{r}\}$ . Damit lässt sich  $U(x, y, z)$  im Bereich  $\|x\| \geq r + \varepsilon$  (für jedes  $\varepsilon > 0$ ) in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe der Gestalt

$$U(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{k=+l} b_{kl} \cdot P_{k,l}^*(x, y, z)$$

entwickeln für gewisse Koeffizienten  $b_{kl}$ . Aus der Kenntnis von  $U$  auf  $X$ , d.h. aus dieser Entwicklung, kann man die Ladungsdichte  $\rho$  ausserhalb von  $X$  aber nicht rekonstruieren! Im Gegenteil: Für den Beobachter in  $X$  erscheint es auf Grund dieser Formel eher so, als sei alle Ladung in infinitesimaler Nähe<sup>3</sup> des Ursprungs  $x_0 = 0$  konzentriert!

---

<sup>3</sup>Physiker nennen dies die **Multipolentwicklung** des Potentials in  $x_0$ . Die Terme  $P_{k,l}^*(x, y, z)$  können als Potentiale von  $2^l$  infinitesimal in der Nähe von  $x_0$  konzentrierten Ladungen gedeutet werden. Im Beispiel  $l = 1$  betrachten wir zwei Elementarladungen entgegen gesetzten Vorzeichens im Punkt  $\frac{1}{2}\xi$  und  $-\frac{1}{2}\xi$  (**Dipol**). Im Limes  $t \rightarrow 0$  für  $\xi = t \cdot \xi_0$  gilt

$$\frac{1}{\|\xi\|} \left( \frac{1}{\|x + \frac{1}{2}\xi\|} - \frac{1}{\|x - \frac{1}{2}\xi\|} \right) \longrightarrow \frac{(\xi_0 / \|\xi_0\|, x)}{\|x\|^3} = P^*(x)$$

für das lineare harmonische Polynom  $P(x) = (\xi_0 / \|\xi_0\|, x)$ .



# 10 Ausgewählte Themen II

## 10.1 Kugelvolumen

Sei  $E^n \subseteq \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel, d.h.  $x \in E^n \Leftrightarrow \|x\| \leq 1$ . Aus Lemma 8.10 folgt durch Berechnung in Polarkoordinaten

$$\boxed{\text{vol}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}) = c(n) \cdot R^n}$$

für das Volumen  $c(n) = \text{vol}(E^n)$  der Einheitskugel, sowie

**Lemma 10.1.**

$$\boxed{\text{vol}(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \sigma_{n-1} = n \cdot c(n)}.$$

Um  $c(n)$  und damit das Volumen  $\text{vol}(S^{n-1})$  der Einheitssphäre zu bestimmen wir folgendes Integral einmal mit Hilfe von Lemma 7.14.4

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-r^2) dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx = \pi^{\frac{n}{2}}$$

und einmal in Polarkoordinaten (Lemma 8.10):

$$I = \text{vol}(S^{n-1}) \int_{r>0} r^{n-1} \exp(-r^2) dr = \frac{\text{vol}(S^{n-1})}{2} \int_{r>0} r^{\frac{n}{2}} \exp(-r) \frac{dr}{r}.$$

Für die **Gammafunktion**  $\Gamma(s) := \int_{r>0} r^s \exp(-r) \frac{dr}{r}$  liefert partielle Integration sofort

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)} \quad , \quad (s > 0).$$

Wir haben damit  $\text{vol}(S^{n-1})$  berechnet

**Lemma 10.2.**

$$\boxed{\text{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}}.$$

Aus  $v(S^0) = c(1) = 2$  und  $\text{vol}(S^1) = 2c(2) = 2\pi$  folgt  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$ . Mittels der Rekursionsgleichung der Gammafunktion kann man damit dann alle Werte  $\Gamma(\frac{n}{2})$  leicht bestimmen.

## 10.2 Überdeckungskompaktheit

**Satz 10.3 (Heine-Borel).** Für einen folgenkompakter metrischen Raum  $(X, d)$  gilt: Jede Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  durch offene Teilmengen  $U_i \subseteq X$  besitzt eine Überdeckung durch endlich viele der Mengen  $U_i$ . (Die Umkehrung gilt auch).

**Beweis.** 1) Für jedes  $\varepsilon > 0$  besitzt ein folgenkompakter Raum  $(X, d)$  eine Überdeckung durch endlich viele offene Kugeln  $K_\varepsilon(x_i)$  vom Radius  $\varepsilon$ . [Anderenfalls gäbe es eine Folge  $x_1, x_2, \dots$  in  $X$  mit  $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} K_\varepsilon(x_i)$ . Diese würde wegen  $d(x_n, x_m) > \varepsilon$  keine konvergente Teilfolge besitzen. Ein Widerspruch zur Folgenkompaktheit von  $(X, d)$ ]. Für  $\varepsilon = 1/n$  liefert diese Beobachtung endlich viele Kugelmittelpunkte und die Vereinigung all dieser Punkte für  $n \in \mathbb{N}$  ist eine abzählbare Teilmenge  $M$  von  $X$ .

2)  $M$  liegt dicht in  $X$ . [Sei  $x \in X$  beliebig und  $U = K_\varepsilon(x)$  eine offene Kugel um  $x$  vom Radius  $\varepsilon > 0$ . Sei  $1/n < \varepsilon$ , dann existiert ein  $\xi \in M$  mit  $x \in K_{1/2n}(\xi)$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt dann  $x \in K_{1/2n}(\xi) \subset U$ ].

3) Sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine beliebige Überdeckung von  $X$  durch offene Mengen  $U_i \subset X$ . Für jedes  $x \in X$  gibt es dann ein  $i \in I$  mit  $x \in U_i$  sowie dann eine Kugel  $U = U_x = K_\varepsilon(x)$  in  $U_i$ , da  $U_i$  offen in  $X$  ist. Offensichtlich ist dann auch  $X = \bigcup_{x \in X} U_x$  eine Überdeckung von  $X$  durch offene Teilmengen. Wegen Schritt 2) gilt dann  $X = \bigcup_{n, \xi} K_{1/2n}(\xi)$  für eine gewisse Teilmenge  $J$  der  $(n, \xi) \in \mathbb{N} \times M$ .  $J$  ist daher abzählbar! Es gilt also  $X = \bigcup_{j \in J} V_j$  für  $V_j = K_{1/2n}(\xi)$  derart daß nach Schritt 2 jedes  $V_j, j \in J$  in einer der offenen Mengen  $U_i, i \in I$  enthalten ist. Lässt sich  $X$  durch endlich viele der  $V_j$  überdecken, dann erst recht durch endlich viele der  $U_i$ . Dies reduziert den Beweis auf den Fall, wo die Indexmenge  $I$  abzählbar ist.

4) Wegen des letzten Schrittes sei also  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  eine abzählbare Vereinigung. Man kann die  $U_i$  durch die aufsteigende Folge der offenen Mengen  $\bigcup_{j \leq i} U_j$  ersetzen und daher oBdA annehmen  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ . Dann bilden die abgeschlossenen Komplemente  $A_i = X \setminus U_i$  der  $U_i$  eine absteigende Folge  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ . Es genügt jetzt  $A_n = \emptyset$  für ein geeignetes  $n$ , denn dann gilt  $X = U_n$ . Gäbe es ein solches  $n$  nicht, gibt es eine Folge  $x_n \in X$  mit  $x_n \in A_n$ . Da  $X$  folgenkompakt ist, kann durch Übergang zu einer Teilfolge oBdA angenommen werden  $x_n \rightarrow x$  sei konvergent in  $(X, d)$ . Es gilt  $x \in U_m$  für ein  $m$ . Da  $U_m$  offen ist, liegen dann fast alle Folgenglieder der Teilfolge  $x_n$  in  $U_m$ , also  $x_n \notin A_m$  für alle  $n \geq n_0$ . OBdA ist hierbei  $n_0 \geq m$ . Dies ist ein Widerspruch wegen  $x_n \in A_n \subset A_m$  für alle  $n \geq n_0$ .  $\square$

Metrische Räume können skurrile Eigenschaften besitzen<sup>12</sup>

<sup>1</sup>Eine Menge  $X$  mit  $d(x, y) = 0$  für  $x = y$  und  $d(x, y) = 1$  für  $x \neq y$  definiert einen metrischen Raum  $(X, d)$ . Eine Teilmenge  $A \subset X$  ist kompakt in  $(X, d)$  genau dann, wenn  $A$  endlich ist. Jede Kugel in  $(X, d)$  ist kompakt oder gleich  $X$ . Ist  $X$  nicht abzählbar, dann ist  $X$  keine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen und besitzt keine abzählbare dichte Teilmenge.

<sup>2</sup>Sei  $X \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  die Teilmenge aller Punkte  $P = (x, y)$  für die im Fall  $y \neq 0$  die Zahl  $x/y$  in  $\mathbb{Q}$  ist. Versieht man  $X$  mit der Wegemetrik  $d$  (Hierbei sei  $d(P, Q)$  die Länge des kürzesten Weges zwischen  $P$  und  $Q$  in  $X$ ), dann ist keine Kugel in  $X$  um  $P = (0, 0)$  kompakt. Dennoch ist  $X$  eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen und besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge. Jede Funktion  $f \in C_c(X)$  verschwindet im Punkt  $x = 0$ .

## 10.3 Residuensatz

Sei  $\varepsilon > 0$  und

$$f : U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \|z - z_0\| < \varepsilon\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine auf  $U$  holomorphe Funktion.

**Satz 10.4 (Laurent Entwicklung).**  $f(z)$  ist dann auf jedem kompakten Kreisring in  $U$  in eine absolut und gleichmässig konvergente Potenzreihe entwickelbar

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot (z - z_0)^l + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot (z - z_0)^{-l}.$$

Man nennt den Koeffizient  $b_1$  das **Residuum**  $Res_{z_0}(f)$  der Funktion  $f$  bei  $z_0$ .

**Beweis.** ObdA  $z_0 = 0$ . Nach Lemma 5.8 sind Real- und Imaginärteil von  $f(z)$  harmonisch. Die harmonischen Polynome in  $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^2)$  sind  $Re(z^l)$  und  $Im(z^l)$  und somit folgt aus Satz 9.12 die Existenz einer Entwicklung  $f(z) = a_0 + b_0 \cdot \log(|z|) + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l z^l + \tilde{a}_l \bar{z}^l) + \sum_{l=1}^{\infty} (b_l z^{-l} + \tilde{b}_l \bar{z}^{-l})$ . Nach Annahme gilt  $\bar{\partial}_z f = 0$  für  $\bar{\partial}_z := \partial_x + i\partial_y$  (siehe Abschnitt 5.2). Gliedweises Ableiten mit  $\bar{\partial}_z$  gibt  $\frac{b_0}{z} + \sum_{l=0}^{\infty} l \tilde{a}_l \bar{z}^{l-1} - \sum_{l=1}^{\infty} l \tilde{b}_l \bar{z}^{-l-1} = 0$ , d.h.  $b_0 = \tilde{b}_l = \tilde{a}_l = 0$ ,  $l \neq 0$ .  $\square$

**Bemerkung.** Der letzte Satz liefert für  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = z_0 + r \cdot \exp(it)$  und  $0 < r < \varepsilon$  die Formel

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot Res_{z_0}(f).$$

Satz 6.9 zeigt nämlich  $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^l dz + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^{-l} dz$ . Beachte

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i \quad \text{sowie} \quad \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0, \quad (n \neq -1)$$

wegen  $(z - z_0)^n dz = d \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$  für  $n \neq -1$  (für beides siehe Abschnitt 5.2).

**Lemma 10.5.** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion und ist  $U$  eine sternförmige offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , dann gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ .

**Beweis.** Nach Lemma 5.4.1 ist die Differentialform  $\omega = f(z) dz$  für holomorphes  $f(z)$  geschlossen:  $d\omega = 0$ . Ist der Definitionsbereich  $U$  von  $f$  offen und sternförmig, folgt aus dem Poincare Lemma die Existenz eines Potentials  $\phi$  mit  $\omega = d\phi$ . Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein Weg in  $U$ , gilt also  $\int_{\gamma} \omega = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$ . Ist der Weg  $\gamma$  in  $U$  geschlossen, folgt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .  $\square$

Sei nun  $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$  ein beschränkter Quader im  $\mathbb{R}^2$ . Wir entfernen aus  $Q$  offene Kreise vom Radius  $\varepsilon > 0$  um die Eckpunkte und erhalten eine abgeschlossene Menge  $X$ . Nach Konstruktion gilt  $X \subset Q$ . Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  mit  $X \subset U$  und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Wurde  $\varepsilon > 0$  klein genug gewählt, enthält  $U$  eine sternförmige offene Teilmenge  $V \subseteq U$  welche ganz  $X$  enthält. Wegen Lemma 10.5 folgt daraus  $\int_{\partial X} f(z) dz = 0$ . Dies zeigt

**Satz 10.6 (Residuensatz).** Sei  $Q \subset \mathbb{R}^2$  ein Quader und  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Menge, welche  $Q$  enthält. Seien  $z_1, \dots, z_l$  endlich viele Punkte in  $Q \setminus \partial Q$  und sei  $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_l\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} f(z) dz = \sum_{\nu=1}^l \operatorname{Res}_{z_\nu}(f).$$

**Beweis.** Wir zerlegen den Quader  $Q$  in endlich viele Teilquader so, daß alle Punkte  $z_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, l$  zu Eckpunkten werden. Wir wählen dann  $\varepsilon > 0$  klein genug so daß das Innere aller Teilquader nach Herausnahme kleiner Kreisscheiben vom Radius  $\varepsilon$  um die Eckpunkte sternförmig wird. Seien  $\gamma_\nu : [0, 2\pi] \rightarrow U$  kleine Kreisinge in  $U$  definiert durch  $\gamma_\nu(t) = z_\nu + \varepsilon \cdot \exp(it)$ . Dann gilt  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} f(z) dz = \sum_{\nu=1}^l \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} f(z) dz$ , denn die Differenz beider Seiten schreibt sich als eine endliche Summe von Integralen  $\int_\gamma f(z) dz$  über Wege, die in einem sternförmigen offenen Teil von  $U$  enthalten sind und daher nach Lemma 10.5 verschwinden. Ist  $\varepsilon$  klein genug, dann liegt  $\gamma_\nu$  in  $U$  und  $f$  ist holomorph auf  $\{z \mid 0 < \|z - z_\nu\| < 2\varepsilon\}$ . Daraus folgt  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z_\nu}(f)$ , wie oben gezeigt wurde. Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

## 10.4 Wärmeleitungskern

Die Funktion  $f_t(x) = t^{-n/2} e^{-\pi \frac{\|x\|^2}{t}}$  ist definiert auf  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n$  und stellt dort eine  $C^\infty$ -Funktion dar. Man zeigt leicht, daß sie dort eine Lösung der **Wärmeleitungsgleichung**

$$4\pi \partial_t f_t(x) = \Delta f_t(x)$$

ist. Wir studieren im Folgenden das Verhalten der Funktion im rechtsseitigen Limes  $t \rightarrow 0^+$  (im Spezialfall  $n = 1$ ). Im physikalischen Kontext bedeutet dies in der Regel: Entweder die Zeit  $t$  geht gegen Null oder die Temperatur oder Energie  $T = \frac{1}{t}$  geht gegen unendlich. Man nennt die Funktion  $f_t(x - y)$  den **Wärmeleitungskern**.

**Lemma 10.7.** Für  $t > 0$  und  $f_t(x) = t^{-1/2} e^{-\pi \frac{x^2}{t}}$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_t(x) dx = 1.$$

**Beweis.** Man reduziert dies mittels Variablensubstitution auf den Spezialfall  $t = 1$ , der in Lemma 7.14 bewiesen wurde.  $\square$

Für  $0 < t \leq \delta$  kann das Integral  $\int_{|x| \geq \delta} f_t(x) dx$  durch  $\int_{|x| \geq 1} \frac{\delta}{t^{1/2}} \exp(-\pi \frac{\delta^2}{t} x^2) dx$ , oder damit  $\int_1^\infty \frac{\delta}{t^{1/2}} \exp(-\pi \frac{\delta^2}{t} y) dy = \frac{t^{1/2}}{\pi \delta} \cdot \exp(-\pi \frac{\delta^2}{t}) \leq c(\delta) t^{1/2}$  für  $c(\delta) = \frac{\exp(-\pi \delta)}{\pi \delta}$  abgeschätzt werden.

**Lemma 10.8.** Für eine beschränkte stetige Funktion  $g(x)$  auf  $\mathbb{R}$  gilt<sup>3</sup>

$$g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_t(x) dx.$$

<sup>3</sup>Insbesondere gilt hier im Fall  $g(0) \neq 0$  also  $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_t(x) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x) f_t(x) dx = 0$ . Dies demonstriert, wie essentiell die Bedingungen in Satz 6.10 sind.

**Beweis.** Indem man  $g(x)$  durch  $g(x) - g(0)$  ersetzt kann obdA  $g(0) = 0$  angenommen werden [benutze  $\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx = 1$ ]. Nach Annahme gilt  $|g(x)| \leq C$  für eine Konstante  $C$ . Wegen der Stetigkeit von  $g$  gibt es für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$  für  $|x| < \delta$ . Es gilt  $|\int_{|x| \leq \delta} g(x)f_t(x)dx| \leq \varepsilon \int_{|x| \leq \delta} f_t(x)dx$  wegen  $f_t(x) \geq 0$ . Weiterhin ist  $|\int_{|x| \geq \delta} g(x)f_t(x)dx| \leq C \int_{|x| \geq \delta} f_t(x)dx$ . Für  $t \leq \delta$  ist dies wie oben gezeigt  $\leq Cc(\delta) \cdot t^{1/2}$  und geht gegen Null im Limes  $t \rightarrow 0$ . Es folgt

$$-\varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} g(x)f_t(x)dx \leq +\varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx .$$

Aus  $\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx = 1$  (Lemma 10.7) folgt dann sofort die Behauptung.  $\square$

## 10.5 Spinordarstellung

Der Raum  $\mathcal{S}_n$  der Polynome in den antikommutierenden Variablen  $\theta_1, \dots, \theta_n$  besitzt folgende ausgezeichnete  $K$ -lineare Endomorphismen für  $\nu = 1, \dots, n$

$$\theta_\nu : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n \quad (\text{Linksmultiplikation mit } \theta_\nu) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \theta_\nu} : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n \quad (\text{Ableiten nach } \theta_\nu)$$

wobei  $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \theta_\nu}$  durch  $\partial_\nu(\theta_\nu \cdot g(\theta)) = g(\theta)$  sowie  $\partial_\nu \theta^I = 0$ , falls  $\nu \notin I$ , definiert ist. Der von diesen Endomorphismen aufgespannte Untervektorraum  $V$  von  $\text{End}_K(\mathcal{S}_n)$  hat  $\dim_K(V) = 2^n$ . Beachte,  $\mathcal{S}_n$  ist endlich dimensional mit Dimension  $\dim_K(\mathcal{S}_n) = 2^n$ .

Wie man leicht auf Monomen  $f(\theta) = \theta^I$  nachprüft, gilt in  $\text{End}_K(\mathcal{S}_n)$  in Analogie zu der Heisenberg Kommutatorrelation

$$\theta_\nu \circ \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} + \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \circ \theta_\nu = \delta_{\nu\mu} .$$

Neben der Fourier Transformation  $\mathcal{F} \in \text{End}_K(\mathcal{S}_n)$  hat man folgende Automorphismen  $\varphi$  von  $\mathcal{S}_n$ ; erstens die *Koordinatenwechsel*<sup>4</sup>  $f(\theta) \mapsto \det(U)^{-1/2} \cdot f(TU \cdot \theta)$  für invertierbare komplexe Matrizen  $U \in \text{Gl}(n, K)$ , zweitens Multiplikationen  $f(\theta) \mapsto f_A(\theta) \cdot f(\theta)$  mit **Gaußfunktionen**  $f_A(\theta)$  für *schiefsymmetrische* Matrizen  $A$

$$f_A(\theta) = e^{-\sum_{\nu < \mu} A_{\nu\mu} \theta_\nu \theta_\mu} \quad , \quad A_{\nu\mu} = -A_{\mu\nu} \in K .$$

Es gilt  $\partial_\nu f_A(\theta) = (\sum_{\mu < \nu} A_{\nu\mu} \theta_\mu - \sum_{\nu < \mu} A_{\nu\mu} \theta_\mu) \cdot f_A(\theta)$  sowie  $f_A(\theta)f(\theta) = f(\theta)f_A(\theta)$  für  $f \in \mathcal{S}_n$ . Beachte auch  $f_A(\theta)f_{A'}(\theta) = f_{A+A'}(\theta)$ .

Alle genannten Automorphismen  $\varphi \in \text{Gl}_K(\mathcal{S}_n)$  haben die Eigenschaft<sup>567</sup>

$$\varphi^{-1} \circ V \circ \varphi \subseteq V$$

<sup>4</sup>d.h, wir ersetzen die Variablen  $\theta_\nu$  durch  $\sum_{\mu=1}^n U_{\mu\nu} \theta_\mu$  und multiplizieren das entstehende Polynom mit der Konstante  $\det(U)^{-1/2}$  (die Wurzel existiere in  $K^*$ ; diese ist nur eindeutig bis auf ein Vorzeichen!)

<sup>5</sup> $f_{-A}(\theta)\theta_\nu f_A(\theta)f(\theta) = f(\theta)$  und  $f_{-A}(\theta)\partial_\nu f_A(\theta)f(\theta) = (\partial_\nu + (\sum_{\nu < \mu} A_{\nu\mu} \theta_\mu - \sum_{\mu < \nu} A_{\nu\mu} \theta_\mu))f(\theta)$ .

<sup>6</sup> $\mathcal{F}^{-1}(\partial_\nu \mathcal{F}(f)) = \theta_\nu f$  sowie damit  $\mathcal{F}^{-1}(\theta_\nu \mathcal{F}(f)) = \partial_\nu f$  zeigt man vollkommen analog zu Lemma 7.14. Zeige zuerst  $\partial_\nu \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(\theta_\nu f)$  mit Hilfe von  $\frac{\partial}{\partial \eta_\nu} \int P(\theta, \eta) d\theta = \int \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} P(\theta, \eta) d\theta$ . Analog  $\mathcal{F}_L^{-1} \circ \theta_\nu \circ \mathcal{F}_L = \lambda_\nu^{-1} \partial_\nu$ .

<sup>7</sup>Der Fall von Koordinatenwechseln ist klar.

Für die von diesen Automorphismen  $\varphi$  in  $Gl_K(\mathcal{S}_n)$  erzeugte Untergruppe  $G \subset Gl_K(\mathcal{S}_n)$  existiert daher ein Gruppenhomomorphismus

$$\iota : G \longrightarrow Gl_K(V) \quad , \quad \iota(\varphi)v := \varphi^{-1} \circ v \circ \varphi \text{ für } v \in V .$$

Der Kern  $Kern(\iota)$  besteht aus skalaren Vielfachen der Identität wegen

**Lemma 10.9.** *Sei  $\varphi \in Gl_K(\mathcal{S}_n)$ . Gilt  $\varphi \circ v = v \circ \varphi$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\varphi = \lambda \cdot id$  ein skalares Vielfaches der Identität.*

**Beweis.** Für  $P := \varphi(1) \in \mathcal{S}_n$  gilt  $v(P) = \varphi(v(1)) = 0$  für  $v = \partial_\nu \in V, \forall \nu$ . Also  $P(\theta) = \lambda$  für  $\lambda \in K$  (benutze Induktion nach dem Grad). Erneut durch Induktion nach  $r = |I|$  folgt dann  $\varphi(\theta^I) = \lambda \cdot \theta^I$  für alle  $I$ . Benutze dazu  $\varphi(\theta_\nu \theta^I) = \theta_\nu \varphi(\theta^I)$  für  $\theta_\nu \in V$ .  $\square$

In geeigneten Koordinaten von  $V$  sind die Matrizen  $\iota(\varphi)$  gegeben durch

$$M(U) := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^T U^{-1} \end{pmatrix} \quad , \quad M(A) := \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

und liegen daher in der orthogonalen Gruppe  $O(S, K)$  der symmetrischen  $2n \times 2n$ -Matrix  $S$ . Die Matrix  $S$  liegt in  $SO(S, K)$  genau dann, wenn  $n$  gerade ist; die anderen liegen in  $SO(S, K)$ . Wir überlassen es dem Leser folgendes nachzuweisen<sup>8</sup>

**Lemma 10.10.** *Für  $K = \mathbb{C}$  ist die von den Matrizen  $M(U), M(A), SM(A)S^{-1}$  erzeugte Untergruppe  $H \subset Gl_{\mathbb{C}}(V)$  die Gruppe  $H = SO(S, \mathbb{C})$ . Also ist  $G/Kern(\iota) = SO(S, \mathbb{C})$  oder  $O(S, \mathbb{C})$  je nachdem ob  $\dim_{\mathbb{C}}(V)$  durch 4 teilbar (d.h.  $n$  gerade) ist oder nicht.*

**Lemma 10.11.**  $Kern(\iota) = \pm id_{\mathcal{S}_n}$ .

**Beweis.**  $[f, h] := \int f^*(\theta) \cdot h(\theta) d\theta$  ist eine  $G$ -invariante  $K$ -Bilinearform auf  $\mathcal{S}_n$ . Benutze dazu  $f_A^*(\theta) = f_{-A}(\theta)$ , die 'Leibnizformel'  $\int h({}^T U \cdot \theta) d\theta = \det(U) \cdot \int h(\theta) d\theta$  (Seite 71) und<sup>9</sup>

$$\boxed{[\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(h)]} = [f, h] \quad , \quad f, h \in \mathcal{S}_n .$$

Für  $g = \lambda \cdot id \in G$  gilt deshalb  $[\lambda \cdot f, \lambda \cdot h] = [f, h]$ , also  $\lambda^2 = 1$ .  $\square$

<sup>8</sup>Hinweis: Der Hyperbelfall  $n = 1$  ist instruktiv, denn hier ist

$$O(S, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Für  $n \geq 2$  und  $M \in SO(S, K)$  setzt man  $v = M(e_1), w = M(e_{n+1})$  und zeigt, daß wegen  $q_S(v) = q_S(w) = 0$  und  ${}^T v S w = 1$  eine Substitution  $g \in H$  existiert mit  $g(v) = e_1$  und  $g(w) = e_{n+1}$ . Dann läßt  $gM$  den Teilraum  $W = K \cdot e_1 + K \cdot e_{n+1}$  identisch fest. Man kann sich auf das Orthokomplement  $W^\perp = \{v \in V \mid {}^T v S w = 0 \forall w \in W\}$  beschränken und schließt dann per Induktion.

<sup>9</sup> $\mathcal{S}_n$  zerfällt in orthogonale Summanden  $W = Kf \oplus K\mathcal{F}(f), f(\theta) = \theta^I$  mit  $[f, f] = [\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(f)] = 0$  wegen Lemma 5.19. Somit genügt  $[\mathcal{F}(f), \mathcal{F}^2(f)] = [f, \mathcal{F}(f)]$  wegen  $[h, g] = \varepsilon_n [g, h]$  [beachte  $\int h^* g d\theta = \varepsilon_n \int (h^* g)^* d\theta = \varepsilon_n \int g^* f h d\theta$ ]. Setze nun  $h := \mathcal{F}(f)$  und  $g := \mathcal{F}^2(f) = \varepsilon_n f$ .

Das Urbild von  $SO(S, \mathbb{C})$  in  $G$  definiert wegen Lemma 10.11 eine zweiblättrige Überlagerung der Gruppe  $SO(S, \mathbb{C})$ , die sogenannte **Spingruppe**  $Spin(S, \mathbb{C})$ . Die kanonische Einbettung von  $G$  in  $Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n)$  definiert eine Darstellung

$$Spin(S, \mathbb{C}) \hookrightarrow Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n).$$

Die Operation von  $Spin(S, \mathbb{C})$  erhält die Teilräume  $\mathcal{S}_n^{\pm}$  der geraden resp. ungeraden Polynome in  $\mathcal{S}_n$ . Unsere Darstellung zerfällt daher in zwei Teildarstellungen  $\mathcal{S}_n^{\pm}$  der Dimension  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n^{\pm}) = 2^{n-1}$ , die beiden **Spindarstellungen** der Gruppe  $Spin(S, \mathbb{C})$

$$\boxed{Spin(S, \mathbb{C}) \longrightarrow Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n^{\pm})}.$$

*Physiker Notation:*  $(\mathcal{S}_n)_L$  und  $(\mathcal{S}_n)_R$  für 'links' und 'rechts'.

## 10.6 Oszillatordarstellung

Auf dem Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  hat man  $\mathbb{C}$ -lineare Endomorphismen für  $\nu = 1, \dots, n$

$$2\pi i x_{\nu} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \text{ (Multiplikation mit } 2\pi i x_{\nu}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Der davon aufgespannte Untervektorraum  $V$  in  $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  hat Dimension  $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2N$ . Neben der Fourier Transformation  $\mathcal{F} \in End_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  betrachten wir folgende Automorphismen  $\varphi$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ : Die *Koordinatenwechsel*  $f(x) \mapsto \det(U)^{+1/2} \cdot f(TU \cdot \theta)$  für invertierbare reelle Matrizen  $U \in Gl(n, \mathbb{R})$ , sowie Multiplikationen  $f(x) \mapsto f_S(x) \cdot f(x)$  mit Gaußfunktionen  $f_S(x)$  für *symmetrische* reelle Matrizen  $S$

$$f_S(\theta) = e^{-\pi i \sum_{\nu, \mu} S_{\nu\mu} x_{\nu} x_{\mu}} \quad , \quad S_{\nu\mu} = S_{\mu\nu} \in \mathbb{R}.$$

Es gilt  $\partial_{\nu} f_S(\theta) = (\sum_{\mu} S_{\nu\mu} x_{\mu}) \cdot f_S(x)$ . Die genannten Automorphismen  $\varphi \in Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  haben wegen Lemma 7.14, der Substitutionsregel und wegen  $f_{-S}(x) x_{\nu} f_S(x) f(x) = f(x)$  und  $f_{-S}(x) \partial_{\nu} f_S(x) f(x) = (\partial_{\nu} + \sum_{\nu} S_{i\nu} 2\pi i x_{\nu}) f(x)$  die Eigenschaft

$$\boxed{\varphi^{-1} \circ V \circ \varphi \subseteq V}.$$

Für die von diesen Automorphismen  $\varphi$  in  $Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  erzeugte Untergruppe  $G \subset Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  existiert daher ein Gruppenhomomorphismus

$$\iota : G \longrightarrow Gl_{\mathbb{C}}(V) \quad , \quad \iota(\varphi)v := \varphi^{-1} \circ v \circ \varphi \text{ für } v \in V.$$

*Kern*( $\iota$ ) besteht aus skalaren Matrizen. [ $f(x) := \varphi(\exp(-\pi r^2))$  ist gleich  $\lambda \exp(-\pi r^2)$ , da  $f(x)$  von den  $\partial_{x_{\nu}} - 2\pi x_{\nu}$  annulliert wird. Man schließt dann  $\varphi = \lambda \cdot id$  analog zu Lemma 10.9 auf der dichten Teilmenge  $\bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^N) \cdot \exp(-\pi r^2)$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ]. In geeigneten Koordinaten von  $V$  sind die Matrizen  $\iota(\varphi)$  gegeben durch

$$M(U) := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^T U^{-1} \end{pmatrix} \quad , \quad M(A) := \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese liegen in der **symplektischen Gruppe**  $Sp(2N, \mathbb{R}) \subset Gl_{\mathbb{C}}(V)$  aller reellen  $2N \times 2N$  Matrizen  $M$  mit der Eigenschaft  ${}^T M J M = J$ . Ähnlich wie Lemma 10.10 zeigt man dann

**Lemma 10.12.** Die von den Matrizen  $M(U)$ ,  $M(S)$ ,  $J$  erzeugte Untergruppe in  $Gl_{\mathbb{C}}(V)$  ist die symplektische Gruppe  $Sp(2N, \mathbb{R})$ . Insbesondere ist  $G/\text{Kern}(\iota) = Sp(2N, \mathbb{R})$ .

Wieder gilt  $\text{Kern}(\iota) = \pm id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}$  (diesmal ist der Beweis diffiziler als im Fall von Lemma 10.11). Daher ist  $G$  eine zweiblättrige Überlagerung der symplektischen Gruppen, die sogenannte **metaplektische Gruppe**  $Mp(2N, \mathbb{R})$ . Die kanonische Einbettung von  $G = Mp(2N, \mathbb{R})$  in die Gruppe  $Gl_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$  wird realisiert durch eine Einbettung in die unitäre Gruppe von  $L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{Mp(2N, \mathbb{R}) \longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}^N))},$$

wie man durch direkte (!) Inspektion auf den Erzeugern  $M(U)$ ,  $M(S)$ ,  $\mathcal{F}$  sieht. Dies definiert die **metaplektische Darstellung** oder auch **Oszillatordarstellung**.

## 10.7 $\gamma$ -Matrizen

Sei  $S \in Gl(K, k)$  eine symmetrische Matrix mit Koeffizienten  $S_{\nu\mu}$  im Körper  $K$ . Wir nennen Endomorphismen  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  eines  $K$ -Vektorraums  $W$  Spinoren für  $S$ , wenn gilt

$$\boxed{\gamma_\nu \circ \gamma_\mu + \gamma_\mu \circ \gamma_\nu = 2S_{\nu\mu} \cdot id}.$$

**Beispiel** ( $k = 2n$ ). Sei  $S$  die Matrix von Abschnitt 10.5. Dann sind  $\gamma_i = \theta_i, \gamma_{i+n} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) Spinoren für  $\frac{1}{2}S$  und  $W = \mathcal{S}_n \cong \mathbb{C}^{2^n}$ . Die  $2^{2n}$  angeordneten Monome  $\gamma^J$ ,  $J \subseteq \{1, \dots, 2n\}$  sind linear unabhängig in  $M_{2^n, 2^n}(\mathbb{C})$ , wie man leicht sieht. Sie bilden daher eine Basis wegen  $\dim_{\mathbb{C}}(M_{2^n, 2^n}(\mathbb{C})) = (2^n)^2 = 2^{2n}$ .

**Basiswechsel.** Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  Spinoren für  $S$  in  $End_K(W)$  und ist  $U \in Gl(k, K)$ , dann sind  $\tilde{\gamma}_n := \sum_{\nu=1}^k U_{\nu n} \gamma_\nu$  Spinoren<sup>10</sup> für die symmetrische Matrix  $\tilde{S} = {}^T U S U$  in  $End_K(W)$ .

Die Abbildung  $O(\tilde{S}, K) \ni M \mapsto U^{-1} M U \in O(S, K)$  definiert einen Isomorphismus<sup>11</sup>

$$O(\tilde{S}, K) \cong O(S, K).$$

Die Abbildung  $\gamma_\nu \mapsto \tilde{\gamma}_\nu$  setzt sich zu einem Ringisomorphismus  $\rho$  des Ringes  $End_K(K^{2^n})$  fort und damit zu einem Gruppenautomorphismus  $\rho : Gl(2^n, K) \rightarrow Gl(2^n, K)$ .

**Der Fall**  $K = \mathbb{C}$ . Sei dann  $Spin(\tilde{S}, \mathbb{C}) = \rho(Spin(S, \mathbb{C}))$  für die Spinorgruppe  $Spin(S, \mathbb{C})$  definiert in Abschnitt 10.5. Beachte: Es gilt  $g^{-1} \tilde{V} g \subset \tilde{V}$  für den  $K$ -Aufspann  $\tilde{V}$  der Spinormatrizen  $\tilde{\gamma}$ . Die Abbildung  $g \mapsto (\tilde{v} \mapsto g^{-1} \tilde{v} g)$  definiert einen Gruppenhomomorphismus (2-blättrige Überlagerung)

$$Spin(\tilde{S}, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(\tilde{S}, \mathbb{C}).$$

Die Einbettung  $\tilde{G} \hookrightarrow Gl(2^n, \mathbb{C})$  definiert die Spindarstellungen.

Da zwei symmetrische invertierbare Matrizen  $\tilde{S}, S$  lassen sich über dem Körper  $K = \mathbb{C}$  durch einen Basiswechsel ineinander überführen, existiert  $U \in Gl(2n, \mathbb{C})$  mit der Eigenschaft  $U^T S U = \tilde{S}$ . Daraus folgt

<sup>10</sup>Für  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  gilt  $\sum_n \sum_m \lambda_n \lambda_m (\tilde{\gamma}_n \tilde{\gamma}_m + \tilde{\gamma}_m \tilde{\gamma}_n) = \sum_{\nu, \mu, n, m} \lambda_n \lambda_m U_{\nu n} U_{\mu m} (\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu) = 2 \sum_{\nu, \mu, n, m} \lambda_n \lambda_m U_{\nu n} U_{\mu m} S_{\nu\mu} = 2 \sum_n \sum_m \lambda_n \lambda_m \tilde{S}_{nm}$ . Setze jetzt  $\lambda_i = 0$  für  $i \neq \nu, \mu$ .

<sup>11</sup> $M \in O(\tilde{S}, K) \iff {}^T M \tilde{S} M = \tilde{S} \iff {}^T M^T U S U M = U^T \tilde{S} U \iff U M U^{-1} \in O(S, K)$ .

**Lemma 10.13.** Für jedes  $S = {}^T S \in Gl(2n, \mathbb{C})$  existieren Spinoren  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$  in  $End(\mathbb{C}^{2n})$ .

**Beispiel.** Im Fall  $2n = 4$  definieren die **Dirac-Matrizen**

$$\gamma_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ -\sigma_\nu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3 \quad \text{sowie} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_4 \\ \sigma_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Spinoren für die Lorentzform  $\tilde{S} = \text{diag}(-1, -1, -1, 1)$ . Hierbei seien  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die **Pauli-Matrizen**. Die beiden Spinordarstellungen  $S^\pm$  die Dimension  $2^{n-1} = 2$ .

Die Pauli-Matrizen sind wie folgt erklärt: Der **Minkowski Raum**  $(\mathbb{R}^4, q_L)$  ist der  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der quadratischen Lorentz Form

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2.$$

Die zugehörige orthogonale Gruppe  $O(3, 1)$  ist die **Lorentzgruppe**. Der Minkowski Raum kann mit dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum *Herm* der komplex hermiteschen  $2 \times 2$  Matrizen identifiziert werden

$$\mathbb{R}^4 \ni x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \sum_{i=1}^4 x_i \sigma_i = \begin{pmatrix} x_4 + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} = |x \in Herm$$

mit  $x_4 = \frac{1}{2} \text{Tr}(|x)$ . Matrixen  $M \in Sl(2, \mathbb{C})$  operieren auf *Herm* vermöge  $H \mapsto M^\dagger H M$  durch  $\mathbb{R}$ -lineare Transformationen  $\psi(M)$ . Wegen  $\det(M^\dagger H M) = \det(H)$  und  $q(x) = \det(|x)$  definiert dies einen Homomorphismus  $M \mapsto \psi(M)$

$$\boxed{\psi : Sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow O(3, 1)(\mathbb{R})}.$$

Man kann zeigen  $\text{Kern}(\psi) = \pm id_{2,2}$ , und für  $\varepsilon = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$  gilt

$$\boxed{O(3, 1)(\mathbb{R}) = \text{Bild}(\psi) \cup -\text{Bild}(\psi) \cup \varepsilon \cdot \text{Bild}(\psi) \cup -\varepsilon \cdot \text{Bild}(\psi)}.$$

## 10.8 Heisenberggruppe

Nach Satz 7.17 ist die Fourier Transformation unitär, definiert also einen Automorphismus des Zustandsraumes  $L^2(\mathbb{R})$ . Das Lemma 7.14 2) und 3) lassen sich so deuten, daß die Fourier Transformation die physikalischen Operatoren von Impuls  $\frac{1}{2\pi i} X = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx}$  und Ort  $\frac{1}{2\pi i} Y = x$  vertauscht; also als Transformation von der (kohärenten) **Ortsraumdarstellung** in die (kohärente) **Impulsraumdarstellung**. Das Wirkungsquantum  $\hbar$  wurde hierzu der Einfachheit halber zu 1 normiert. Man hat die unitären Transformationen

$$U_t(f) : f(x) \mapsto f(x + t) \quad , \quad V_s(f) : f(x) \mapsto e^{2\pi i x s} \cdot f(x)$$

$$W_r(f) : f(x) \mapsto e^{2\pi i r} \cdot f(x)$$

des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$  in sich, welche man (hier nur symbolisch<sup>12</sup>) auch in der Form  $U_t = \exp(2\pi i t \tilde{X})$  und  $V_s = \exp(2\pi i s \tilde{Y})$  schreibt, denn es gelten die Funktionalgleichungen  $U_t \circ U_{t'} = U_{t+t'}$  und  $V_s \circ V_{s'} = V_{s+s'}$  mit

$$\frac{d}{dt} U_t(f)|_{t=0}(x) = \frac{d}{dt} f(x+t)|_{t=0} = \partial_x f(x) = (Xf)(x)$$

$$\frac{d}{ds} V_s(f)|_{s=0}(x) = 2\pi i x \cdot f(x) = (Yf)(x),$$

$$\frac{d}{dr} W_r(f)|_{r=0}(x) = 2\pi i \cdot f(x) = 2\pi i \cdot (id_{L^2(\mathbb{R})} f)(x).$$

Die Operatoren  $U_t, V_s$  und  $W_r$  (für  $r, s, t \in \mathbb{R}$ ) erzeugen eine Gruppe unitärer Operatoren, die sogenannte **Heisenberggruppe**. Es gilt

$$U_t \circ V_s = W_{st} \circ V_s \circ U_t = e^{2\pi i st} \cdot V_s \circ U_t.$$

Bis auf einen **Phasenfaktor**  $W_{st} = \exp(2\pi i st)$  vertauschen also  $U_t$  und  $V_s$ . Die Operatoren  $W_s$  induzieren die identische Abbildung auf dem Zustandsraum aller Geraden  $\mathbb{C} \cdot v$  im Hilbertraum. In der Tat bildet  $W_s$  die Gerade  $\mathbb{C} \cdot v$  auf  $\mathbb{C} \cdot \exp(2\pi i r) \cdot v = \mathbb{C} \cdot v$  ab.

Die Heisenberggruppe ist isomorph zur Matrixgruppe aller Matrizen der Gestalt

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

beschrieben werden, mit

$$u_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad w_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrixgruppe operiert auf  $L^2(\mathbb{R})$  durch die Zuordnung  $u_t \mapsto U_t, v_s \mapsto V_s, w_r \mapsto W_r$ , denn man prüft leicht nach

$$u_t \circ v_s = w_{st} \circ v_s \circ u_t.$$

<sup>12</sup>Man würde gerne schreiben  $U_t : f(x) \mapsto e^{\partial_x t} f(x)$ , denn  $f(x+t) = e^{\partial_x t} f(x)$  gilt für analytische Funktionen  $f$  und kleine  $t$ ; siehe Lemma 4.39. Für beliebige Funktionen  $f \in L^2(X)$  ist der Ausdruck  $e^{\partial_x t} f(x)$  aber sinnlos!