

Teil I

Komplexe Mannigfaltigkeiten

Kapitel 1

Formen

Eine Mannigfaltigkeit X heißt komplexe oder analytische Mannigfaltigkeit, wenn alle Kartenabbildungen $\phi_i : U_i \subset X \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^d$ stetige Abbildungen zwischen offenen Untermengen der Räume X und \mathbb{C}^d sind, und die Kartenwechsel $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ holomorphe Funktionen auf $\phi_i(U_i)$ sind. Ist X zusammenhängend, heißt die Zahl $d = d(X)$ Dimension von X .

Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn alle Einschränkungen $f \circ \phi_i^{-1}$ holomorph auf $\phi_i(U_i)$ sind. Die holomorphen Funktionen auf X definieren eine Untergarbe \mathcal{O}_X der Garbe C_X^∞ der unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf X .

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten. Diese heißt holomorph, falls Pullbacks $f^*(h) = h \circ f$ holomorpher Funktionen $h \in \mathcal{O}_Y(V)$ wieder holomorph sind $f^*(h) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

1.1 Differentialformen

Für $U \subset \mathbb{C}^d$ ist der $C^\infty(U)$ -Modul der C^∞ -Differentialformen definiert durch

$$A^1(U) = C^\infty(U)dz_1 \oplus \dots \oplus C^\infty(U)dz_d \oplus C^\infty(U)d\bar{z}_1 \oplus \dots \oplus C^\infty(U)d\bar{z}_d$$

sowie der $C^\infty(U)$ -Modul der alternierenden n -Formen

$$A^n(U) = \bigwedge^n A^1(U).$$

1.2 Äussere Ableitungen

Sei $\partial_i = \frac{1}{2}(\partial/\partial x_i - i\partial/\partial y_i)$ und $\bar{\partial}_i = \frac{1}{2}(\partial/\partial x_i + i\partial/\partial y_i)$ sowie $dz_i = dx_i + idy_i$ resp $d\bar{z}_i = dx_i - idy_i$. Man definiert ∂ durch

$$\partial(hdz_I \wedge d\bar{z}_J) = \sum_{i=1}^d \partial_i(h)dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

und analog $\bar{\partial}$. Offensichtlich gilt $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ sowie $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$. Die äussere Ableitung

$$d : A^n(X) \rightarrow A^{n+1}(X)$$

ist definiert durch $d = \partial + \bar{\partial}$ und erfüllt $d^2 = 0$. $A^\bullet(U) = \bigoplus_{n=0}^{2d} A^n(U) = \bigoplus A^{p,q}(U)$ ist ein bigraduierter, superkommutativer Ring bezüglich des \wedge -Produktes. Diesbezüglich gilt

$$d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^n \eta \wedge d\omega$$

für $\eta \in A^n(U)$ und $\omega \in A^m(U)$.

1.3 Pullback

Für holomorphe Abbildungen $f : U \rightarrow U'$ mit $U' \subset \mathbb{C}^{d'}$ und $U \subset \mathbb{C}^d$ hat man den Pullback

$$f^* : A^{\bullet,\bullet}(U') \rightarrow A^{\bullet,\bullet}(U) .$$

Dies sind bigraduierte Ringhomomorphismen $f^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = f^*(\eta_1) \wedge f^*(\eta_2)$, verträglich mit der Ableitung

$$d(f^*(\eta)) = f^*(d\eta)$$

und funktoriell $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Diese Eigenschaften charakterisieren die Pullbacks eindeutig.

Beispiel 1.3.1. Auf $A^{1,0}$ gilt $f^*(h(z')dz'_i) = \sum_{j=1}^{d'} h(f(z))(df_i/dz_j)(z)dz_j$.

1.4 Die Garben A_X^n

Für allgemeines X und $U \subset X$ offen definiert man die C_X^∞ -Modulgarbe A_X^n der alternierenden n -Formen auf X durch die Schnitte

$$A_X^n(U) = \{\eta_i \in A^n(\phi_i(U \cap U_i)) \mid \phi_{ij}^*(\eta_j) = \eta_i \in A^n(\phi_i(U_i \cap U_j \cap U))\} .$$

Alle lokalen Aussagen verallgemeinern sich durch Verkleben. Insbesondere hat man die Pullbacks

$$f^* : A^n(Y) \rightarrow A^n(X)$$

für holomorphe Abbildungen $f : X \rightarrow Y$. Desgleichen hat man auch global

$$A_X^n = \bigoplus_{p+q=n} A_X^{p,q}$$

durch Sortieren der holomorphen und antiholomorphen Differentiale (wohldefiniert, da Kartenwechsel holomorph!).

Kapitel 2

Ströme

2.1 Testformen

Sei $A_c^{2d-n}(X)$ der \mathbb{C} -Vektorraum der Schnitte der Garbe A_X^n mit kompaktem Träger auf X . Auf $A_c^{2d-n}(X)$ hat man die Schwartztopologie. Die Nullfolgen dieser Topologie

$$\phi_\nu \rightarrow 0$$

sind Folgen mit der Trägerbedingung $\cup_\nu \text{supp}(\phi_\nu) \subset K$, K kompakt und der Eigenschaft

$$\sup_{x \in K} |D^r(\phi_\nu)(x)| \rightarrow 0 \quad (\text{für alle } r)$$

für alle r -fachen Ableitungen der Koeffizienten der ϕ_ν (dies ist wohldefiniert wegen der Trägerbedingung!).

2.2 Ströme auf X

Sei $D^{p,q}(X)$ der Raum der stetigen \mathbb{C} -Linearformen T auf dem Testraum $A_c^{d-p,d-q}(X)$ und analog $D^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} D^{p,q}(X)$. Die $D^{p,q}(U)$ definieren für offene Teilmengen $U \subset X$ (im Gegensatz zu den $A_c^{d-p,d-q}(U)$!) C_X^∞ -Modulgarben (benutze Partition der 1) auf X

$$D_X^n = \bigoplus_{p+q=n} D_X^{p,q} .$$

Man nennt sie die Garben der p, q -Ströme $D_X^{p,q}$ oder n -Ströme D_X^n . Die C^∞ -Modulstruktur ergibt sich für $f \in C^\infty(X)$ durch

$$(fT)(\eta) = T(f\eta) .$$

Als C_X^∞ -Modulgarben sind die Garben $A_X^{p,q}, D_X^{p,q}$ fein und haben somit verschwindende Garbenkohomologie $H^n(X, A_X^{p,q}) = H^n(X, D_X^{p,q}) = 0$ für $n > 0$.

2.3 Erstes Beispiel: Zykel

Zykel sind formale endliche Linearkombinationen $Z = \sum_j n_j Y_j$ von abgeschlossenen komplexen Untermannigfaltigkeiten Y_j (oder allgemeiner komplexen Unterräumen) von X von einer festen komplexen Kodimension k . Solche k -Zykel definieren Ströme $\delta_Z = \sum n_j \delta_{Y_j}$ mit Hilfe der Dirac Distributionen δ_{Y_j} . Hierbei ist

$$\delta_Y \in D^{d-d(Y), d-d(Y)}(X) = D^{k,k}(X)$$

$$\delta_Y(\eta) = \int_{Y^{ns}} i^*(\eta) = \int_{\tilde{Y}} \pi^* i^*(\eta)$$

definiert für abgeschlossene komplexe Unterräume $i : Y \rightarrow X$ von X mit Desingularisierung $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$. (Komplexe Mannigfaltigkeiten sind automatisch orientiert, somit sind die Integrale wohldefiniert. Wähle im folgenden immer die üblichen kompatiblen Orientierungen.)

2.4 Funktorialität

Eine Abbildung heißt eigentlich, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. Der Pullback definiert eine Abbildung

$$A_c^{p,q}(Y) \rightarrow A_c^{p,q}(X)$$

sowie dual dazu

$$D^{p,q}(X) \rightarrow D^{p-r,q-r}(Y).$$

Hierbei bezeichne $r = d(X) - d(Y)$ die relative Dimension.

Für glatte holomorphe Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ erhält man durch Integration über Fasern (!) eine Abbildung

$$A_c^{p,q}(X) \rightarrow A_c^{p-r,q-r}(Y)$$

und dual einen Pullback

$$f^* : D^{p,q}(Y) \rightarrow D^{p,q}(X).$$

2.5 Ableitung von Strömen

Für $T \in D^n(X)$ definiert man die Ableitung $dT \in D^{n+1}(X)$ durch

$$(dT)(\eta) = (-1)^{n+1} T(d\eta) \quad , \quad \eta \in A_c^{2d-n-1}(X).$$

Analog definiert man ∂ und $\bar{\partial}$ und zeigt die üblichen Formeln $d^2 = \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$.

Beispiel 2.5.1. Für Zykel gilt $d\delta_Y = 0$. Dies folgt aus dem Satz von Stokes. Dieser besagt $d(\delta_Y) = \pm \int_Y d(?) = 0$ für Formen mit kompaktem Träger auf Y . Reduziere dies mit Partition der 1 und Fubini auf $\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) dx = 0$ für $\phi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

2.6 Multiplikation

D_X^\bullet ist eine A_X^\bullet -Modulgarbe. Für $T \in D^i(X)$ und $\omega \in A^j(X)$ definiert man $\omega \wedge T \in D^{i+j}(X)$ durch

$$(\omega \wedge T)(\eta) = T(\omega \wedge \eta) \quad , \quad \eta \in A_c^{2d-i-j}(X).$$

Dies macht $D_X^{\bullet,\bullet}$ zu einer bigraduierten $A_X^{\bullet,\bullet}$ -Modulgarbe.

Achtung: Das \wedge -Produkt zweier Distributionen in $D^i(X)$ und $D^j(X)$ ist im allgemeinen aber nicht erklärt!

2.7 Beispiel

Beispiel 2.7.1. Für $\omega \in D^n(X)$ sei $T_\omega = \omega \wedge \delta_X$

$$T_\omega(\eta) = \int_X \omega \wedge \eta .$$

Dies definiert injektive Garbenabbildungen

$$A_X^n \hookrightarrow A_X^n \wedge \delta_X \subset D_X^n$$

gegeben auf globalen Schnitten durch $\omega \mapsto T_\omega \in D_X^n$. Insbesondere geht die konstante Funktion $1 \in A^0(X)$ auf $\delta_X \in D^0(X)$.

Diese Injektionen sind kompatibel mit der $A^{\bullet,\bullet}(X)$ -Modulstruktur sowie mit Ableitungen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_X^n & \xrightarrow{d} & A_X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & D_X^n & \xrightarrow{d} & D_X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Beweis: $T_{d\omega}(\eta)$ ist

$$\int_X (d\omega) \wedge \eta = \int_X d(\omega \wedge \eta) - \int_X (-1)^n \omega \wedge d\eta = \int_X d(\omega \wedge \eta) + dT_\omega(\eta) = dT_\omega(\eta)$$

wegen dem Satz von Stokes $\int_X d(?) = 0$.

Bemerkung 2.7.2. Das Beispiel (2.7.1) zeigt, daß man sogar jeden Schnitt $\omega \in A_{L^1,loc}^n(X)$ als Strom in $D^n(X)$ auffassen kann (via $\omega \mapsto T_\omega$ definiert durch obige Formeln).

Sei $\omega \in A_{L^1,loc}^n(X)$ und die Einschränkung von ω sei glatt auf einer offenen dichten Teilmenge U . Die Ableitung $d\omega \in A^{n+1}(U)$ lasse sich zu einem Schnitt in $A_{L^1,loc}^{n+1}(X)$ fortsetzen. Dann sind $T_{d\omega}$ und dT_ω wohldefiniert. Der Satz von Stokes ist nicht mehr direkt anwendbar. Der verbleibende Term $\int_U d(\omega \wedge \eta)$ liefert ein sogenanntes Residuum $res = T_{d\omega} - dT_\omega$.

Beispiel 2.7.3. $\omega = \frac{1}{2\pi i} dz/z \in D^{1,0}(\mathbb{C})$, $U = \mathbb{C}^* \subset X = \mathbb{C}$ mit $d\omega = 0 \in D^{1,1}(\mathbb{C}^*)$ und

$$res(T_\omega) = -dT_\omega = \delta_{\{0\}} ,$$

da sich für den Störterm in $D^2(\mathbb{C})$ mittels des Satzes von Stokes aus

$$-\int_U d(\omega \wedge \eta) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\epsilon} \frac{1}{2\pi i} dz/z \wedge f(z) = f(0)$$

ergibt.

Kapitel 3

Glättung

3.1 Das Poincaré–Lemma

Wir erinnern an das Poincare Lemma:

Lemma 3.1.1. *Die Garbenkomplexe $(A_X^{p,\bullet}, \bar{\partial})$, $(D_X^{p,\bullet}, \bar{\partial})$ sowie (A_X^\bullet, d) , (D_X^\bullet, d) sind exakt mit Ausnahme an der nullten Stelle.*

Im folgenden betrachten wir nur die $\bar{\partial}$ Komplexe, da der d -Fall einfacher ist.

Das Poincare Lemma liefert eine Komplexabbildung zwischen feinen Garbenauflösungen

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Kern}(\bar{\partial} : D_X^{p,0}) & \longrightarrow & D_X^{p,1} & \longrightarrow & D_X^{p,1} & \longrightarrow & D_X^{p,2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & D_X^{p,d} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Kern}(\bar{\partial} : A_X^{p,0}) & \longrightarrow & A_X^{p,1} & \longrightarrow & A_X^{p,1} & \longrightarrow & A_X^{p,2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_X^{p,d} & \longrightarrow & 0 .
 \end{array}$$

Die Garbe

$$\Omega_X^p := \text{Kern}(\bar{\partial} : A_X^{p,0} \rightarrow A_X^{p,1})$$

ist die Garbe der holomorphen alternierenden p -Formen . Lokal für $U \subset \mathbb{C}^d$ und

$$\omega = \sum_I h_I dz_I \in \Omega_X^p(U)$$

impliziert nämlich

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{I,i} \bar{\partial}_i(h_I) d\bar{z}_i \wedge dz_I = 0 ,$$

die Holomorphiebedingungen $\bar{\partial}_i h_I = 0$ (für alle i und I) für die Koeffizienten $h_I \in C^\infty(U)$. Die Koeffizienten $h_I \in \mathcal{O}_X(U)$ sind also notwendigerweise holomorph.

3.2 Glättungslemma

Wir zeigen nun folgendes Glättungslemma:

Lemma 3.2.1. Für $T \in D^{p,q}(X)$ mit

$$\bar{\partial}T = \eta \in A^{p,q+1}(X)$$

existiert ein $\omega \in A^{p,q}(X)$ und ein $S \in D^{p,q-1}(X)$ mit

$$T = \omega + \bar{\partial}S .$$

Beweis: Wir nehmen an, wir hätten die Aussage im Fall $q = 0$ und $\eta = 0$ bewiesen. Dann folgt

$$\Omega_X^p := \text{Kern}(\bar{\partial} : A_X^{p,0} \rightarrow A_X^{p,1}) = \text{Kern}(\bar{\partial} : D_X^{p,0} \rightarrow D_X^{p,1}) .$$

Da Kohomologie von der Wahl einer $\Gamma(X)$ -azyklischen Auflösung nicht abhängt, folgt

$$\boxed{H^q(X, \Omega_X^p) \cong H^q(A_X^{p,\bullet}, \bar{\partial}) \cong H^q(D_X^{p,\bullet}, \bar{\partial}) .}$$

Der zweite Isomorphismus wird induziert von der obigen Komplexabbildung und liefert zwei Spezialfälle des Glättungslemmas:

- i) Surjektivität: Aus $\bar{\partial}\tilde{T} = 0$ folgt die Existenz einer glatten Form $\tilde{\omega}$ mit $\tilde{T} = \tilde{\omega} + \bar{\partial}S$ und insbesondere $\bar{\partial}\tilde{\omega} = 0$.
- ii) Injektivität: Sei eine glatte Form η durch einen Strom berandet $\eta = \bar{\partial}T$, dann existiert eine glatte Form ω mit $\eta = \bar{\partial}\omega$.

i) und ii) implizieren andererseits das Glättungslemma:

Sei $\bar{\partial}T = \eta$ wie in der Formulierung des Glättungslemmas. Nach ii) gibt es ein glattes ω' mit $\bar{\partial}(T - \omega') = 0$. Nach i) folgt daraus $(T - \omega') = \omega'' + \bar{\partial}S$ für ein glattes ω'' . Für $\omega = \omega' + \omega''$ folgt die Behauptung.

Es verbleibt der noch fehlende Nachweis des Glättungslemmas im Fall $\eta = 0$ und $q = 0$. Für die Koeffizienten $h_I \in D^0(U)$ von $T = \sum_I h_I dz_I$ reduziert sich dies auf die Aussage: Sei $h \in D^0(U)$ mit $\bar{\partial}h = 0$, dann ist h glatt. Einen Beweis findet man in Teil V, Appendix A an der Seite 122.

Bemerkung 3.2.2. Analog zeigt man $\text{Kern}(d : A_X^0 \rightarrow A_X^1) = \mathbb{C}_X$ und

$$\boxed{H^n(X, \mathbb{C}_X) = H^n(A^\bullet(X), d) = H^n(D^\bullet(X), d) .}$$

Für zwei Kohomologieklassen $[z_i]$ von $H^{n_i}(A^\bullet(X), d)$ mit geschlossenen Repräsentanten $z_i \in A^{n_i}(X)$, $dz_i = 0$ ist die Kohomologieklass $[z_1][z_2] = [z_1 \wedge z_2] \in H^{n_1+n_2}(X, \mathbb{C}_X)$ wohldefiniert. Sie hängt nicht ab von der Wahl der Repräsentanten z_i wegen $(z_1 + d\omega_1) \wedge (z_2 + d\omega_2) = z_1 \wedge z_2 + d\omega_3$. Dies definiert das superkommutative Cup-Produkt \cap auf der Kohomologie $H^\bullet(X, \mathbb{C}_X)$.

Beispiel 3.2.3. Ist X kompakt und zusammenhängend, dann definiert Integration über X eine nichttriviale Abbildung $\# : H^{2d}(X, \mathbb{C}_X) \cong A^{2d}(X)/dA^{2d-1}(X) \rightarrow \mathbb{C}$. Für k -Zykel Z_1 und Z_2 mit Kodimension $k_1 + k_2 = d$ erhält man mittels des Glättungslemmas das Schnittprodukt

$$(Z_1, Z_2) = \#(\delta_{Z_1} \cap \delta_{Z_2}) .$$

Kapitel 4

Lineare Algebra

4.1 Komplexifizierung

Wir betrachten einen komplexen Vektorraum V . Sei σ die komplexe Konjugation auf \mathbb{C} und

$$W = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \cong V \oplus V$$

$$\lambda \otimes_{\mathbb{R}} v \mapsto (\lambda v, \sigma(\lambda)v)$$

der komplexwertige Tangentialraum" von V . Auf W hat man zwei Vektorraumstrukturen, einmal via $\lambda(v, w) = (\lambda v, \sigma(\lambda)w)$ auf den Koeffizienten und zum anderen die induzierte geometrische Operation $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$. Falls nicht anders gesagt betrachten wir die Koeffizienten- Struktur auf W . Die Abbildung $(v, w) \mapsto \overline{(v, w)} = (w, v)$ ist antilinear bezüglich der Koeffizientenstruktur und heißt komplexe Konjugation auf W . Wir identifizieren im folgenden V mit dem \mathbb{C} -linearen Unterraum aller Elemente $(v, 0) \in W$. Dann ist der konjugierte Raum \overline{V} der \mathbb{C} -Unterraum aller Elemente $\bar{v} := (0, v) \in W$. Man erhält damit die \mathbb{C} -Vektorraumzerlegung

$$W = V \oplus \overline{V} .$$

Hierbei sind V und \overline{V} die Eigenräume von der Fortsetzung $J = id \otimes_{\mathbb{R}} i$ auf W von der Multiplikation mit i auf V . Wir identifizieren dabei V mit dem ersten Summanden via $v := (v, 0) = \frac{1}{2}(1 \otimes v - i \otimes iv)$ in $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$. Dann ist $\bar{v} = \overline{(v, 0)} = (0, v) = \frac{1}{2}(1 \otimes v + i \otimes iv)$.

4.2 Hermitesche Formen auf V

Sei h eine positive definite hermitesche Form auf V mit $h(\lambda v_1, \mu v_2) = \lambda \bar{\mu} h(v_1, v_2)$. Die Form h auf V ist \mathbb{R} -linear. Das gleiche gilt für die beiden \mathbb{R} -Bilinearformen $g = Re(h)$ sowie

$$\omega := -Im(h) : V \times V \rightarrow \mathbb{R} .$$

Die Sesquilinearität von h ist $Re(h)$ eine symmetrische und $-Im(h)$ eine symplektische Bilinearform auf v . Skalare Erweiterung induziert zwei entsprechende \mathbb{C} -Bilinearformen auf W . Wegen $-\omega(Jv, w) = Im(h)(iv, w) = g(v, w)$ für $v, w \in V$ ist g und damit auch h durch ω eindeutig bestimmt.

Sei e_1, \dots, e_d eine Orthonormalbasis von V bezüglich h . Eine kurze Rechnung zeigt: Die \mathbb{C} -Unterräume V und \bar{V} von W sind maximal isotrop bezüglich der symmetrischen Form $g = \operatorname{Re}(h)$ und der symplektischen Form ω . Desweiteren gilt $g(e_\nu, \bar{e}_\mu) = \frac{1}{2}$ und $\omega(e_\nu, \bar{e}_\mu) = -\operatorname{Im}(h)((e_\nu, 0), (0, e_\mu)) = \frac{i}{2} \delta_{\nu, \mu} = \frac{i}{2}(e_\nu^* \otimes \bar{e}_\mu^* - \bar{e}_\nu^* \otimes e_\mu^*)$. Anders formuliert $\omega = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^d e_\nu^* \wedge \bar{e}_\nu^*$.

Normierung: Wir normieren die Dualbasis $e_\nu^* = dz_\nu, \bar{e}_\nu^* = d\bar{z}_\nu$ des Kotangententialraum W^* durch die Normierung $v_\nu = e_\nu^*/\sqrt{2}$ bzw. $\bar{v}_\nu = \bar{e}_\nu^*/\sqrt{2}$. Bezüglich der dualen Metrik auf W^* gilt dann $g(v_\nu, \bar{v}_\mu) = \delta_{\nu\mu}$. Also

$$\omega = i \sum_{\nu=1}^d v_\nu \wedge \bar{v}_\nu,$$

und $i \cdot v_\nu \wedge \bar{v}_\nu = \frac{i}{2} dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu = dx_\nu \wedge dy_\nu$ ist das Euklidische Volumenelement. Der Faktor i macht $\bar{\omega} = \omega$ reell. Da die $v_\nu \wedge \bar{v}_\nu$ miteinander kommutieren, sieht man leicht

$$\frac{\omega^d}{d!} = (dx_1 \wedge dy_1) \wedge \dots \wedge (dx_d \wedge dy_d).$$

4.3 Die unitäre Gruppe U

Sei $U = U(V, h)$ die zu h gehörige unitäre Gruppe. Diese operiert \mathbb{C} -linear auf V mit der Standarddarstellung. Dies induziert eine \mathbb{C} -lineare Operation von U auf W durch skalare Erweiterung. Bezüglich der \mathbb{C} -linearen Identifikation

$$H : W = V \oplus V \rightarrow V \oplus V^* \\ (v, w) \mapsto (v, h(\cdot, w))$$

operiert dann U auf dem ersten Summanden $V \subset W$ mit der Standarddarstellung, und auf V^* mit der kontragredienten Darstellung $w \mapsto (u')^{-1}w$ wegen

$$u(v, w) \longleftrightarrow (u(v), h(\cdot, u(w))) = (uv, h(u^{-1}(\cdot), w)) \longleftrightarrow (uv, (u')^{-1}w).$$

4.4 Die Grassmann-Algebra

Wir betrachten die Grassmann Algebra $W^\bullet = \bigoplus_{n=0}^{2d} W^n$ des Kotangententialraumes $W \cong W^* = T_{\mathbb{C}}(V)^*$

$$W^n = \bigwedge^n W^* = \bigoplus_{p+q=n} \bigwedge^p V \wedge \bigwedge^q V^* = \bigoplus_{p+q=n} W^{p,q}.$$

Die Operation von U auf W setzt sich fort auf W^\bullet mittels $u(\bigwedge_i v_i) = \bigwedge_i u(v_i)$. Die Aktion von U vertauscht mit den Projektionen $\Pi^{p,q} : W^\bullet \rightarrow W^{p,q}$ auf die Unterräume $W^{p,q}$. Der Raum $(W^2)^U$ der U -Invarianten in W^2 ist eindimensional

$$(W^2)^U = \mathbb{C} \cdot \omega, \quad \omega = i \sum_{\nu=1}^d v_\nu \wedge \bar{v}_\nu$$

Die durch $\eta \mapsto \eta \wedge \omega$ definierte Abbildung

$$\boxed{L : W^\bullet \rightarrow W^\bullet \\ \eta \mapsto \eta \wedge \omega}$$

hat Bigrad $(1, 1)$ und kommutiert mit U und der komplexen Konjugation.

4.5 Paarungen und $*$

Das \wedge -Produkt definiert eine nichtausgeartete \mathbb{C} - und U -lineare Cup-Produkt Paarung

$$\langle, \rangle_1 : W^{p,q} \otimes W^{d-p,d-q} \xrightarrow{\wedge} W^{d,d} = \bigwedge^d V \wedge \bigwedge^d V^* \xrightarrow{or} \mathbb{C}$$

durch $\langle \eta, \eta' \rangle_1 = or(\eta_1 \wedge \eta_2)$, wobei der Isomorphismus $or : W^{d,d} \cong \mathbb{C}$ normiert sei durch die Vorschrift $i^d v_1 \wedge \bar{v}_1 \dots \wedge v_d \wedge \bar{v}_d \mapsto 1$. Weiterhin hat man

$$\langle, \rangle_2 : W^{p,q} \otimes W^{q,p} = \bigwedge^p V \wedge \bigwedge^q V^* \otimes \bigwedge^q V \wedge \bigwedge^p V^* \rightarrow \mathbb{C},$$

und somit die \mathbb{C} - und U -lineare Auswertungspaarung

$$\langle, \rangle_2 : W^{p,q} \otimes W^{q,p} \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert¹ durch $\langle v_I \wedge \bar{v}_J, v_{I'} \wedge \bar{v}_{J'} \rangle_2 = (-1)^{|I||J|} = (-1)^{pq}$ für $I' = J, J' = I$ und Null sonst. Dies definiert via $\langle \eta, \cdot \rangle_1 = \langle * \eta, \cdot \rangle_2$ einen Isomorphismus

$$* : W^\bullet \rightarrow W^\bullet.$$

Aus dieser Definition folgt: Die \mathbb{C} -lineare Abbildung $* : W^{p,q} \cong (W^{d-p,d-q})^* \cong W^{d-q,d-p}$ vertauscht mit der Operation von U . Ebenso mit komplexer Konjugation

$$*\bar{\eta} = \overline{* \eta}$$

wegen $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$ für beide Paarungen. Explizit berechnet² ergibt sich bis auf das Vorzeichen $C_{IJ} = i^d (-1)^{d(d-1)/2 + pd} \text{sign}(I, I^c) \text{sign}(J, J^c)$

$$*(v_I \wedge v_J^*) = C_{IJ} \cdot v_{J^c} \wedge v_{I^c}^*$$

Hierbei sei $\text{sign}(I, I^c)$ das Vorzeichen der Permutation, welche (I, I^c) für aufsteigend geordnete I und I^c in $(1, 2, 3, \dots, d)$ umordnet.

Beispiel: $*1 = i^d (-1)^{d(d-1)/2} v_{\{1, \dots, d\}} \wedge v_{\{1, \dots, d\}}^* = (iv_1 \wedge v_1^*) \cdots (iv_d \wedge v_d^*) = \omega^d / d!$.

Aus $\text{sign}(I, I^c) \text{sign}(I^c, I) = (-1)^{p(d-p)}$ für $|I| = p$ etc. folgt dann mit einer kleinen Rechnung³

$$** \eta = (-1)^{p+q} \eta, \quad \eta \in W^{p,q}.$$

Abbildung 4.1: Die Operatoren $*$ und $-$

Im Diagramm (4.1) an der Seite 17 bedeutet $*$ spiegeln an der horizontalen Achse und $-$ spiegeln an der vertikalen Achse.

¹Beachte $(\bigwedge^p V \wedge \bigwedge^q V^*) \otimes (\bigwedge^q V \wedge \bigwedge^p V^*) = (\bigwedge^p V \wedge \bigwedge^q V^*) \otimes (\bigwedge^p V^* \wedge \bigwedge^q V)$.

²Benutze $C_{IJ} (-1)^{(d-p)(d-q)} = (-1)^d (-1)^{d(d-1)/2} (-1)^{(d-p)q} \text{sign}(I, I^c) \text{sign}(J, J^c)$

³wegen $C_{IJ} C_{J^c I^c} = (-1)^{d+pd+(d-q)d} (-1)^{p(d-p)} (-1)^{q(d-q)} = (-1)^{p+q}$

4.6 Hermitesche Form auf W^\bullet

Man sieht sofort $\langle v_I \wedge v_J^*, \overline{*(v_{I'} \wedge v_{J'}^*)} \rangle_1 = \delta_{II'} \delta_{JJ'}$ für alle I, J, I', J' . Daher definiert für $\eta_1, \eta_2 \in W^{p,q}$

$$\eta_1 \wedge *\bar{\eta}_2 \in W^{d,d} = \bigwedge^d V \wedge \bigwedge^d V^* \cong \mathbb{C}$$

eine positiv definite hermitesche Paarung $[\eta_1, \eta_2] = \text{or}(\eta_1 \wedge *\bar{\eta}_2)$ auf $W^{p,q}$.

Übungsaufgaben:

- L ist selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.
- $\Lambda = *^{-1}L*$ ist das (hermitesch) adjungierte von L bezüglich $[\cdot, \cdot]$ oder $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

Kapitel 5

Invariantentheorie

5.1 Verbindung zu $sl(2, \mathbb{C})$

Betrachte nun $\Lambda = *^{-1}L*$. Dies ist ein \mathbb{C} -linearer Operator auf W^\bullet , welcher mit U und der komplexen Konjugation vertauscht. Man zeigt durch Reduktion¹ auf den offensichtlichen² Fall der Dimension $d = 1$ die fundamentale Lefschetzidentität

$$\Lambda L - L\Lambda = h := \sum_{p,q} (d - p - q) \Pi^{p,q} .$$

Unmittelbar klar sind ausserdem

$$\begin{aligned} hL - Lh &= -2L \\ h\Lambda - \Lambda h &= 2\Lambda . \end{aligned}$$

Dies entspricht den Relationen der Liealgebra $sl(2, \mathbb{C})$ vermöge der Zuordnung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow L , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow h .$$

Die Aktion integriert sich zu einer Operation der einfach zusammenhängenden Gruppe $Sl(2, \mathbb{C})$. Zusammen mit der damit kommutierenden Aktion von $z \in \mathbb{C}^*$ auf $W^{p,q}$ via z^{d+p-q} erhält man eine Darstellung von $GL(2, \mathbb{C}) = (Sl(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*) / \pm 1$ auf W^\bullet , welche mit der Operation von U kommutiert. Die Untergruppe $Gl(2, \mathbb{R})^+$ vertauscht obendrein mit der komplexen Konjugation. Die Gruppe

$$Gl(2, \mathbb{R}) = \langle Gl(2, \mathbb{R})^+, * \rangle$$

vertauscht ebenfalls mit U und der komplexen Konjugation.

Lemma 5.1.1 (Zerlegungslemma). *Die $(d+1)(d+2)/2$ irreduziblen Konstituenten von W^\bullet unter der Operation von $Gl(2, \mathbb{C}) \times U$ haben Multiplizität ≤ 1 .*

¹Für $(V, h) = (V_1, h_1) \oplus (V_2, h_2)$ gilt $(W^\bullet, [., .]) = (W_1^\bullet, [., .]) \otimes_{\mathbb{C}} (W_2^\bullet, [., .])$ und $L = L_1 \otimes id + id \otimes L_2$ sowie $h = h_1 \otimes id + id \otimes h_2$. Ebenso $\Lambda = \Lambda_1 \otimes id + d \otimes \Lambda_2$ durch Adjunktion bzgl. $[., .]$. Somit folgt die Kommutatorrelation aus derjenigen für V_1 resp. V_2 .

² $[\Lambda, L]1 = \Lambda L(1) = \Lambda(\omega) = (*^{-1}L*) * 1 = *^{-1}L1 = 1$ wegen $*1 = L1 = \omega$ und $p + q = 0$.

5.2 Darstellungstheorie von $Gl(2, \mathbb{C})$

Vektoren w mit der Eigenschaft $\Lambda w = 0$ heißen primitiv. Die Darstellungstheorie der Untergruppe $U(2) \subset Gl(2, \mathbb{C})$ zeigt, daß eine irreduzible Unterdarstellung W_π von $Gl(2, \mathbb{C})$ in W^\bullet einen eindeutig bestimmten primitiven Vektor w_π besitzt. Beachte, daß dies gerade der Eigenvektor unter dem Torus der Diagonalmatrizen (oder äquivalent dazu der Eigenvektor von h) mit dem höchsten Gewicht ist. Insbesondere charakterisiert das Eigenwertsystem $diag(t_1, t_2)w_\pi = t_1^{n_1}t_2^{n_2}w_\pi$ die Darstellung π . Eine Basis des irreduziblen Darstellungsraumes W_π erhält man in der Form

$$w_\pi, L(w_\pi), L^2(w_\pi), \dots, L^r(w_\pi) .$$

Hierbei ist r gegeben durch $diag(t, t^{-1})(w_\pi) = t^r w_\pi$ oder $h(w_\pi) = r w_\pi$. Beachte weiterhin $h(L^m(w_\pi)) = (r - 2m)w_\pi$. Insbesondere ist L damit a priori injektiv auf allen Eigenräumen von h vom Eigenwert > 0 . Schließlich folgt $W_\pi = W_{\pi,prim} \oplus L(W_\pi)$.

5.3 Beweis des Zerlegungslemmas

Die Eigenräume in W^\bullet unter den Matrizen $\{diag(t_1, t_2)\}$ sind genau die $W^{p,q}$ mit den Eigenwertsystemen $diag(t_1, t_2) \mapsto t_1^{d-q}t_2^p$. Die Vektoren

$$v_{p,q} = v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge v_{d+1-q}^* \wedge \dots \wedge v_d^* \in W^{p,q} \quad , \quad p + q \leq d$$

in $W^{p,q}$ sind offensichtlich (!) primitiv $\Lambda(v_{p,q}) = 0$. Es sind gleichzeitig (!) Vektoren von U vom Höchstgewicht

$$\underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{p \text{ mal}}, \underbrace{(-1, \dots, -1)}_{q \text{ mal}} .$$

Der davon erzeugte irreduzible U -Modul besteht nur aus primitiven Elementen (U und Λ kommutieren) und hat die Dimension ³

$$\binom{d}{p} \binom{d}{q} - \binom{d}{p-1} \binom{d}{q-1}$$

Dies ist aber genau

$$dim_{\mathbb{C}}(W^{p,q}) - dim_{\mathbb{C}}(L(W^{p-1,q-1})) ,$$

denn L ist injektiv für $p + q \leq d$ (Darstellungstheorie der $Gl(2, \mathbb{C})$). Es folgt

$$\boxed{W^{p,q} = W_{prim}^{p,q} \oplus L(W^{p-1,q-1})}$$

und $W_{prim}^{p,q}$ ist ein irreduzibler primitiver U -Modul vom angegebenen Höchstgewicht. Andererseits gibt es für $p + q > d$ keine primitiven Elemente (das $U(2)$ -Gewicht $r = d - p - q$ eines primitiven Vektors ist immer positiv). Folglich erzeugen die $v_{p,q}$ unter der Operation von $Gl(2, \mathbb{C}) \times U$ ganz W^\bullet . Die Behauptung folgt. bis auf einen Skalar

Korollar 5.3.1 (Hodge-Riemann Bilinearrelationen). *Je zwei U -invariante hermitesche Formen auf $W_{prim}^{p,q}$ sind proportional (Schur'sches Lemma!) und damit bis auf einen Skalar definit.*

³Benutze Induktion nach d . Sei obdA $p > 0$. Wegen Weyl's Dimensionsformel nimmt $dim_{\mathbb{C}}(W_{prim}^{p,q})$ beim Übergang von (d, p, q) zu $(d - 1, p - 1, q)$ den Faktor $\frac{(d+1)d}{p(d+1-q)}$ auf. Dasselbe gilt für $\binom{d}{p} \binom{d}{q} - \binom{d}{p-1} \binom{d}{q-1} = \frac{d!(d+1)!}{p!q!(d-p+1)!(d-q+1)!} (d + 1 - p - q)$.

Beispiel 5.3.2. $\eta_1 \wedge \bar{\eta}_2 \wedge \frac{\omega^{d-p-q}}{(d-p-q)!}$ ist auf $W_{prim}^{p,q}$ das $(-1)^{(p+q)(p+q-1)/2} i^{p-q}$ -fache⁴ der definiten Form $\eta_1 \wedge * \bar{\eta}_2$.

Daß die erste Paarung diese Eigenschaft besitzt ist direkt nicht einfach einzusehen (selbst im Fall $d = p + q$), und im allgemeinen auch nicht richtig auf ganz $W^{p,q}$.

5.4 Appendix

Wir erinnern in diesem Anhang an einige wohlbekanntete Eigenschaften (stetiger endlich dimensionaler) Darstellungen π der unitären Gruppe $U = U(d) \subset Gl(d, \mathbb{C})$ auf endlich dimensionalen komplexen Vektorräumen V . Solche Darstellungen $\pi : U \rightarrow Gl(V)$ auf V heißen irreduzibel, falls V keinen nichttrivialen U -stabilen Teilraum besitzt.

Lemma 5.4.1 (Schur'sches Lemma). *Zwischen irreduziblen Darstellungen gibt es bis auf skalare Vielfache höchstens eine U -lineare Abbildung (Kern und Bild sind U -stabil).*

Jede Darstellung ist isomorph zu einer direkten Summe von irreduziblen (man konstruiert mittels Integration eine U -invariante hermitesche Metrik und verwendet dann orthogonale Projektion).

Die Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen V_π stehen in eineindeutiger Korrespondenz zu den d -Tupeln $\chi = \chi(\pi)$ ganzer Zahlen

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_d .$$

Die Zuordnung $\pi \mapsto \chi(\pi)$ ist wie folgt definiert: Betrachte den Torus $T = U(1)^d$ der Diagonalmatrizen in U . Der Raum V_π zerfällt in Eigenräume unter T mit den Eigenwerten $diag(t_1, \dots, t_d)v = t_1^{m_1} \dots t_d^{m_d} v$. Die Permutationsmatrizen sind in U enthalten und operieren auf V_π . Zu jedem 'Eigenwert' (m_1, \dots, m_d) gibt es somit einen permutierten, welcher angeordnet ist $m_1 \geq \dots \geq m_d$. Der bezüglich der lexikographischen Anordnung größte dieser Eigenwerte ist das Höchstgewicht $\chi = \chi(\pi)$ der Darstellung V_π . Schließlich hat man die Weyl'schen Dimensionsformeln:

$$\dim_{\mathbb{C}}(V_\pi) = \frac{\Delta(n_1 + d - 1, n_2 + d - 2, \dots, n_{d-1} + 1, n_d)}{\Delta(d - 1, d - 2, \dots, 1, 0)}$$

mit $\Delta(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$.

”**Übungsaufgabe 5.4.2.** Die Darstellungen $det^m \otimes Sym^r(\mathbb{C}^2)$ erschöpfen alle Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von $U(2)$ (und $Gl(2, \mathbb{C})$). Zeige damit die Vorbemerkung zum Beweis des Zerlegungslemmas.

”**Übungsaufgabe 5.4.3.** Für $p > 0$ ist $\dim(W_{prim}^{p,q;d})$ gleich $\frac{(d+1)d}{p(d+1-q)} \cdot \dim(W_{prim}^{p-1,q;d-1})$ wegen der Gleichung $\frac{\Delta(d, d-1, \dots, (d-p)^\vee, \dots, (q-1)^\vee, \dots, 0, -1)}{\Delta(d-1, \dots, 1, 0)} = \frac{(d+1)d}{p(d+1-q)} \frac{\Delta(d-1, \dots, (d-p)^\vee, \dots, (q-1)^\vee, \dots, 0, -1)}{\Delta(d-2, \dots, 1, 0)}$.

⁴ $(-1)^{pq}(-1)^{qq}(-1)^{p(p-1)/2}(-1)^{q(q-1)/2}i^{-p-q} = (-1)^{(p+q)(p+q-1)/2}i^{p-q}$

Kapitel 6

Kählersche Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren komplexes Tangentialbündel (assoziiert zum Dual der lokalfreien Garbe Ω_X^1) eine hermitesche Metrik h besitzt. Sei ϕ_1, \dots, ϕ_d eine lokale Basis von $A^1(X)$, welche in lokalen Koordinaten punktuell in jedem Punkt x von der Form $v_1, \dots, v_d \in T_x(X, \mathbb{C})^*$ gebildet zu einer Orthonormalbasis e_1, \dots, e_d des Tangentialraums $T_x(X, \mathbb{C})$ bezüglich h .

6.1 Der $*$ Operator

Die hermitesche Metrik definiert nun den $*$ Operator auf $A^\bullet(X)$ wie im lokalen Fall. Benutze dazu die Basis ϕ_ν und die expliziten Formeln im Abschnitt über lineare Algebra. Wie dort gezeigt wurde, ist die Definition intrinsisch und hängt nicht ab von der Wahl der ϕ_ν ab. Analog definiert man den Lefschetzoperator L wie im lokalen Fall.

6.2 Die globale Paarung

Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X mit einer hermiteschen Metrik definiert nun

$$(\eta_1, \eta_2)_X = \int_X \eta_1 \wedge * \bar{\eta}_2$$

eine positiv definite hermitesche Form auf den $A_c^{p,q}(X)$. Die globalen Operatoren $L, \partial, \bar{\partial}$ und d definieren die hermitesch adjungierten globalen Operatoren $\Lambda, \partial^*, \bar{\partial}^*$ und d^* sind diesbezüglich der Paarung $(\cdot, \cdot)_X$. Es gilt dann wieder $d^* d^* = \partial^* \partial^* = \bar{\partial}^* \bar{\partial}^* = 0$. Es gilt auch global $\Lambda = *^{-1} L *$. Ausserdem gilt für $d^* = \partial^* + \bar{\partial}^*$

$$\begin{aligned} \partial^* &= - * \bar{\partial}^* \\ \bar{\partial}^* &= - * \partial^* \end{aligned}$$

nach dem Satz von Stokes¹.

¹ $\int_X d\eta_1 \wedge * \bar{\eta}_2 = \int_X d(\dots) - (-1)^{p-1} \int_X \eta_1 \wedge \bar{d} * \eta_2$ für die $p-1$ -Form η_1 . Für die $2d-p+1$ -Form $*\eta_2$ ist $** = (-1)^{2d-p+1} = (-1)^{p-1}$. Es folgt $(d\eta_1, \eta_2)_X = \int_X d\eta_1 \wedge * \bar{\eta}_2 = \int_X \eta_1 \wedge *(- * d^*)\eta_2 = (\eta_1, (- * d^*)\eta_2)_X$.

6.3 Kählermetriken

Eine hermitesche Metrik h auf einer komplexen Mannigfaltigkeit heißt Kählermetrik, wenn die assoziierte reelle (1,1)-Form

$$\omega = i \sum \phi_\nu \wedge \bar{\phi}_\nu \in A^{1,1}(X) \quad , \quad \omega = \bar{\omega}$$

geschlossen ist

$$d\omega = 0 .$$

Bemerkung 6.3.1. In den einzelnen Punkten $x \in X$ entspricht ω auf $T_x(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus V^*$ der bereits betrachteten symplektischen Form $-Im(h) = i \sum v_\nu \wedge \bar{v}_\nu$. Somit ist ω intrinsisch definiert und hängt nur ab von h und nicht ab von der Wahl der ϕ_ν .

Bezeichne

$$L : A^\bullet(X) \rightarrow A^\bullet(X)$$

$$\eta \mapsto \eta \wedge \omega .$$

Die Kählerbedingung $d\omega = 0$ ist gleichbedeutend mit der Kähleridentität

$$\partial L = L \partial \quad , \quad \bar{\partial} L = L \bar{\partial} .$$

Es zeigt sich, daß die Kählerbedingung eine Reihe anderer Identitäten von Operatoren nach sich zieht, z.B. trivialerweise

$$\partial^* \Lambda = \Lambda \partial^* \quad , \quad \bar{\partial}^* \Lambda = \Lambda \bar{\partial}^* .$$

Zuerst zeigen wir, daß für jeden Punkt $x \in X$ bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems (Eichung) die Form ω infinitesimal in erster Ordnung bei x invariant unter der lokalen Symmetriegruppe $U(d)$ gemacht werden kann.

6.4 Infinitesimale Umgebungen

Fixiere $x \in X$. Wir ersetzen $R = C^\infty(X)$ nach Wahl lokaler holomorpher Koordinaten z_1, \dots, z_d durch den Restklassenring $R = C^\infty(X)/m^2$ für das Ideal $m = (z_1, \dots, z_d, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_d)$. Die Formen aus $A^\bullet(X)$ reduzieren sich in dieser infinitesimalen Umgebung auf $R \otimes_{\mathbb{C}} W^\bullet$. $R = R_0 + R_1$ ist ein kommutativer lokaler Ring mit $R_0 = \mathbb{C} \cdot 1$ und nilpotentem maximalen Ideal $R_1 = \mathbb{C}z_1 + \dots + \mathbb{C}z_d + \mathbb{C}\bar{z}_1 + \dots + \mathbb{C}\bar{z}_d$. Es gilt $(R_1)^2 = 0$ und wir identifizieren R_1 mit W^* in der offensichtlichen Weise. Sei $h = h_0 + h_1$ die infinitesimale Variation der hermiteschen Metrik und $U = U(V, h_0)$ die zugehörige unitäre Gruppe auf V . U operiert auf R in der natürlichen Weise und mit der induzierten Operation auf $R \otimes_{\mathbb{C}} W^\bullet$.

Analog wie im Fall $R = C^\infty(X)$ haben wir jetzt die äußere Ableitungen $d : R \otimes_{\mathbb{C}} W^\bullet \rightarrow R/R_1 \otimes_R (R \otimes_{\mathbb{C}} W^{\bullet+1}) \cong W^{\bullet+1}$ und analog $\partial, \bar{\partial}$ auf $R \otimes W$. Diese kommutieren mit der Operation von U .

Speziell für $\omega \in R \otimes W^{1,1}$ hat man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow W^{1,1} \oplus M \oplus \bar{M} \rightarrow R \otimes_{\mathbb{C}} W^{1,1} \xrightarrow{d} W^{2,1} \oplus W^{1,2} \rightarrow 0 .$$

Hierbei ist $R \otimes_{\mathbb{C}} W^{1,1} \cong (\mathbb{C} \oplus V \oplus V^*) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C} \oplus (1, 0, \dots, 0, -1))$ und

$$M \cong V^* \otimes \text{Symm}^2(V)$$

ist Summe zweier irreduzibler U -Moduln mit den jeweiligen Höchstgewichten $(2, 0, \dots, 0, -1)$ bzw. $(1, 0, \dots, 0, 0)$. Die komplexe Konjugation vertauscht die \mathbb{C} -Unterräume M und \bar{M} .

Die h zugeordnete Form $\omega \in R \otimes W^{1,1}$ ist invariant unter komplexer Konjugation (reell). Sei $\omega_0 = -Im(h_0)$ ihr Term nullter Ordnung. Offensichtlich ist der Raum der U -Invarianten eindimensional $(R \otimes_{\mathbb{C}} W^{1,1})^U = (W^{1,1})^U = \mathbb{C}\omega_0$. Somit folgt

Bemerkung 6.4.1. Sei $\omega \in (R \otimes_{\mathbb{C}} W^{1,1})^U$ invariant unter U . Dann gilt $\omega = \omega_0 \in W^{1,1}$ und somit $d\omega = 0$.

6.5 Eichtransformationen

Holomorphe lokale Koordinatenwechsel mit identischer Jakobimatrix

$$T_\xi : z_i \mapsto z_i + \sum_{\nu, \mu} \xi_{\mu, \nu}^{(i)} z_\nu z_\mu \quad , \quad \xi \in Hom_{\mathbb{C}}(V^*, Symm^2(V^*))$$

liefern R -lineare (!) Eichtransformationen von $R \otimes W^\bullet$ (nicht U -linear !)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Kern(d) & \longrightarrow & R \otimes_{\mathbb{C}} W^n & \xrightarrow{d} & R/R_1 \otimes_R (R \otimes_{\mathbb{C}} W^{n+1}) \longrightarrow 0 \\ & & T_\xi \downarrow & & T_\xi \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Kern(d) & \longrightarrow & R \otimes_{\mathbb{C}} W^n & \xrightarrow{d} & R/R_1 \otimes_R (R \otimes_{\mathbb{C}} W^{n+1}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

induziert von den Abbildungen $T_\xi^*(r \otimes v_i) = r \otimes v_i + 2 \sum_{\mu, \nu} \xi_{\nu, \mu}^{(i)} z_\nu \otimes v_\mu$. Diese vertauschen mit komplexer Konjugation und den Ableitungen d . Für $u \in U$ gilt $uT_\xi u^{-1} = T_{u\xi}$.

Für Elemente in $Kern(d) \cap (R \otimes W^{1,1})$ zeigt eine direkte Rechnung

$$T_\xi(\omega_0 + m_1 + \bar{m}_2) = \omega_0 + (m_1 + \xi) + (\bar{m}_2 + \bar{\xi}) .$$

Zwei 'reelle' Formen $\omega_0 + m_1 + \bar{m}_1$ und $\omega_0 + m_2 + \bar{m}_2$ für $m_1, m_2 \in V \otimes Symm^2(V^*)$ können daher durch eine Eichtransformation ineinander übergeführt werden.

Folgerung 6.5.1. Äquivalent sind

- i) In jedem Punkt $x \in X$ existieren lokale holomorphe Koordinaten z_1, \dots, z_d für die das Bild von ω in $A^\bullet(X) \otimes_{C^\infty(X)} (C^\infty(X)/(z_1, \dots, z_d, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_d)^2)$ invariant unter $U = U(T_x(X), h_x)$ ist.
- ii) Die Kählerbedingung $d\omega = 0$.

Folgerung 6.5.2. Sei X Kählersch. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man durch geeignete Koordinatenwahl annehmen $\omega = \omega_0 +$ quadratische oder höhere Terme.

Folgerung 6.5.3. Da h durch ω eindeutig bestimmt ist folgt gleichermassen $h = h_0 +$ quadratische oder höhere Terme.

Sei X Kählersch. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir dann annehmen $\omega = (R \otimes W^2)^U$. Dies bedeutet, daß der Operator L auf $R \otimes_{\mathbb{C}} W^\bullet$ mit der Operation von U vertauscht.

6.5.4 (1.Beispiel). Sei $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = U(n+1, \mathbb{C})/(U(n, \mathbb{C}) \times U(1, \mathbb{C}))$ der projektive Raum. Für eine $U(n, \mathbb{C}) \times U(1, \mathbb{C})$ -invariante Metrik im Fußpunkt gibt es eine $U(n+1, \mathbb{C})$ -invariante Fortsetzung auf $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Nach der Bemerkung des vorigen Abschnittes ist diese Metrik auf Grund ihrer Symmetrie notwendig Kählersch.

Die so definierte $U(n+1, \mathbb{C})$ -invariante Metrik h auf $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ liefert eine alternierende $(1, 1)$ -Form ω , welche durch die $U(n+1, \mathbb{C})$ -Invarianz eindeutig bestimmt ist. Daraus folgt sofort aus Invarianzgründen bis auf Normierung

Explizit: $\omega(z_0 : \dots : z_n) = (2\pi i)^{-1} \bar{\partial} \partial \log(|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2)$.

Im eindimensionalen Fall also $\omega = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1+|z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z}$ (in affinen Koordinaten). Mit Polarkoordinaten $z = r \exp(2\pi i t)$ berechnet sich $\int_X \omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_{r>0} \frac{2r dr}{(1+r^2)^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$.

6.5.5 (2.Beispiel). *Komplexe Untermannigfaltigkeiten $i : Y \hookrightarrow X$ Kählerscher Mannigfaltigkeiten X sind wieder Kählersch. Für den Pullback der hermiteschen Form vererbt sich die Kählerbedingung $d(i^*(\omega)) = i^*d\omega = 0$.*

6.5.6 (3.Beispiel). *Produkte Kählerscher Mannigfaltigkeiten sind wieder Kählersch.*

Kapitel 7

Kähleridentitäten

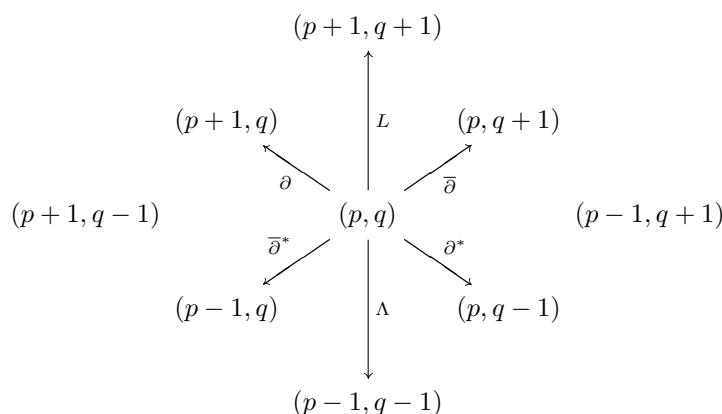
7.1 Die 6 Operatoren

Die hermitesche Metrik definierte den $*$ Operator auf $A_c^\bullet(X)$ und das globale Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$. Wie gezeigt wurde, gilt für $d^* = \partial^* + \bar{\partial}^*$

$$\partial^* = - * \bar{\partial}^*$$

$$\bar{\partial}^* = - * \partial^*$$

mit $d^* d^* = \partial^* \partial^* = \bar{\partial}^* \bar{\partial}^* = 0$. Zusammen mit L, Λ, ∂ und $\bar{\partial}$ erhält man folgende Operatoren auf $A^{\bullet, \bullet}(X)$



Für X Kählersch, hat man zusätzlich zu der ersten lokalen Kählerbedingung $[L, \partial] = 0$ und den konjugierten bzw. adjungierten Inkarnationen $\bar{\partial}L = L\bar{\partial}$, $\partial^*\Lambda = \Lambda\partial^*$, $\bar{\partial}^*\Lambda = \Lambda\bar{\partial}^*$ eine weiteren zweiten Typ von Kähleridentitäten erster Ordnung

$[L, \partial^*] = i\bar{\partial}$	$[L, \bar{\partial}^*] = -i\partial$
$[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*$	$[\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*$

Beweis: Jede der Gleichungen impliziert die anderen. Die rechts entstehen durch komplexe Konjugation. Die unteren aus den oberen durch Adjunktion. Da es sich um Identitäten erster Ordnung handelt, können wir zum Beweis infinitesimal in R rechnen. (Dabei benutzen wir die Notation aus dem Abschnitt 6.4.)

Dies erlaubt es X durch $V = \mathbb{C}^d$ zu ersetzen, und h durch die konstante Metrik $h = h_0$ auf \mathbb{C}^d . ObdA sei $x = 0$. Bezeichne $\mathcal{A}_c^\bullet(\mathbb{C}) = \bigotimes_1^d \mathcal{A}_c^\bullet(\mathbb{C}) \subset \mathcal{A}_c^\bullet(V)$ das supergraduierte Tensorprodukt von d eindimensionalen $\mathcal{A}_c^\bullet(\mathbb{C})$ für $V = \mathbb{C}^d$. Dann genügt es die obigen Identitäten auf $\mathcal{A}^\bullet(\mathbb{C}^d)$ im Punkt 0 zu zeigen.

Für orthogonale Zerlegungen $(V, h) = (V_1, h) \oplus (V_2, h)$ gilt offensichtlich $L = L_1 \otimes id + id \otimes L_2$ (Derivation) und

$$\bar{\partial} = \bar{\partial} \otimes^\varepsilon id + id \otimes^\varepsilon \bar{\partial}$$

(Superderivation im supergraduierten Sinn). Auf $\mathcal{A}^\nu(\mathbb{C})$ sei das Skalarprodukt $(\eta_1, \eta_2)_V$ bezüglich h_0 . Dann gilt $(\mathcal{A}^\nu(V), (\cdot, \cdot)_V) = (\mathcal{A}^\nu(V_1), (\cdot, \cdot)_{V_1}) \otimes^\varepsilon (\mathcal{A}^\nu(V_2), (\cdot, \cdot)_{V_2})$. Daher folgt mittels Adjunktion auch $\partial^* = \partial^* \otimes^\varepsilon id + id \otimes^\varepsilon \partial^*$. Da der Kommutator einer Derivation und einer Superderivation eine Superderivation ist, ist $[L, \partial^*]$ eine Superderivation. Damit kann man die Identität $[L, \partial^*] = i\bar{\partial}$ auf den eindimensionalen Fall $V = \mathbb{C}$ reduzieren. Im Fall $V = \mathbb{C}$ sind beide Seiten der Identität $[L, \partial^*] = i\bar{\partial}$ Null aus Gradgründen auf Formen vom Typ $(p, q) = (0, 1)$ oder $(p, q) = (1, 1)$.

Für $(p, q) = 0$ und $V = \mathbb{C}$ ist $[L, \partial^*]f = *\bar{\partial}*(Lf) = *(\bar{\partial}_z f)\sqrt{2}\bar{v} = i(\bar{\partial}_z f)\sqrt{2}\bar{v} = i\bar{\partial}f$ wegen $*\bar{v} = i\bar{v}$. Für $(p, q) = (1, 0)$ gilt $[L, \partial^*](f \cdot v) = -L * \bar{\partial} * (f \cdot v) = L * \bar{\partial}i(f \cdot v) = iL * (\bar{\partial}_z f) \cdot (\bar{v} \wedge v) = -\sqrt{2}(\bar{\partial}_z f)L(*\omega) = -\sqrt{2}(\bar{\partial}_z f) \cdot \omega = i\partial(f \cdot v)$ wegen $*v = -iv$ und $*1 = L(1) = \omega = iv \wedge \bar{v}$.

7.2 Identitäten zweiter Ordnung

Sei jetzt die Situation wieder global. Aus den lokalen Kähleridentitäten erster Ordnung folgen durch rein algebraische Umformungen Identitäten zweiter Ordnung, nämlich

Korollar 7.2.1. Für den Laplaceoperator $\Delta = dd^* + d^*d$ gilt $[\Delta, L] = \Delta L - L\Delta = 0$.

Beweis: Aus beiden Kähleridentitäten erster Ordnung folgt

$$[L, dd^* + d^*d] = d[L, d^*] + [L, d^*]d = (\partial + \bar{\partial})(i\bar{\partial} - i\partial) + (i\bar{\partial} - i\partial)(\partial + \bar{\partial}) = 2i(\bar{\partial}^2 - \partial^2) = 0.$$

Korollar 7.2.2. $\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = 0$.

Aus der zweiten Kähleridentität $i(L\bar{\partial}^* - \bar{\partial}^*L) = \partial$ und $\bar{\partial}^*\bar{\partial}^* = 0$ folgt

$$\partial\bar{\partial}^* = (-i\bar{\partial}^*L + \bar{\partial}^*)\bar{\partial}^* = -i\bar{\partial}^*L\bar{\partial}^* = -\bar{\partial}^*(iL\bar{\partial}^* - i\bar{\partial}^*\partial) = -\bar{\partial}^*\partial.$$

Korollar 7.2.3. $\Delta = 2\Delta_\partial = 2\bar{\Delta}_{\bar{\partial}}$. Insbesondere gilt $[\Delta, \partial] = [\Delta, \bar{\partial}] = 0$.

Beweis: Für $\Delta_\partial = (\partial\partial^* + \partial^*\partial)$ gilt

$$\Delta_\partial = i[L, \bar{\partial}^*]\partial^* + i\partial^*[L, \bar{\partial}^*] = L(i\bar{\partial}^*\partial^*) + i(\partial^*L\bar{\partial}^* - \bar{\partial}^*L\partial^*) - (i\partial^*\bar{\partial}^*)L.$$

Aus $L = \bar{L}$ folgt daher $\Delta_\partial = \bar{\Delta}_\partial$. Andererseits gilt trivialerweise $\bar{\Delta}_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$. Es folgt $\Delta = \Delta_\partial + (\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) + \Delta_{\bar{\partial}} = \Delta_\partial + \Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_{\bar{\partial}}$ wegen Korollar 7.2.2.

Kapitel 8

Der Satz von Hodge

8.1 Harmonische Formen

Auf einer Kählerschen Mannigfaltigkeit X ist

$$(\eta_1, \eta_2) = \int_X \eta_1 \wedge \bar{*}\eta_2$$

eine positiv definite hermitesche Form auf den $A_c^{\bullet, \bullet}(X)$. Die globalen Operatoren $\Delta, \partial^*, \bar{\partial}^*$ und d^* sind diesbezüglich die adjungierten Operatoren zu $L, \partial, \bar{\partial}$ und d .

Eine Form in $\eta \in A^n(X)$ (resp. $A^{p,q}(X)$) heißt harmonisch $\eta \in \mathcal{H}^n(X)$ (resp. $\mathcal{H}^{p,q}(X)$), wenn gilt

$$\Delta\eta = 0.$$

Aus der Kähleridentität $\Delta = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}$ folgt

$$\mathcal{H}^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}^{p,q}(X).$$
$$\overline{\mathcal{H}^{p,q}(X)} = \mathcal{H}^{q,p}(X).$$

Aus der Definitheit der Paarungen $(\ , \)$ folgt

Lemma 8.1.1. Für $\eta \in A_c^n(X)$ sind äquivalent:

- 1) η ist harmonisch.
- 2) $\partial\eta = \partial^*\eta = 0$.
- 3) $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}^*\eta = 0$.

Beweis: Die Äquivalenz von 1) und 3) ist klar wegen $(\Delta_{\bar{\partial}}\eta, \eta) = (\bar{\partial}\eta, \bar{\partial}\eta) + (\bar{\partial}^*\eta, \bar{\partial}^*\eta)$.
2) und 3) folgt aus $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$.

Sei nun X eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit. Dann ist $A^{p,q}(X) = A_c^{p,q}(X)$. Nach Lemma 1 ist jede harmonische Form geschlossen. Der nun folgende Satz zeigt sogar, daß die natürliche Abbildung

$$\mathcal{H}^{p,q}(X) \rightarrow H^q(A_X^{p, \bullet}, \bar{\partial}) = H^q(X, \Omega_X^p)$$

ein Isomorphismus ist.

8.2 Der Satz von Hodge

Satz 8.2.1 (Satz von Hodge). Sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Dann ist der Raum der harmonischen Formen $\mathcal{H}^{p,q}(X) \subset A^{p,q}(X)$ endlichdimensional. Sei $\mathcal{H} : A^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{H}^{p,q}(X)$ die Hilbertraumprojektion auf den abgeschlossenen (da endlich dimensional) Teilraum $\mathcal{H}^{p,q}(X)$. Dann gibt es einen Operator, den sogenannten Greenschen Operator

$$G : A^{p,q}(X) \rightarrow A^{p,q}(X) ,$$

welcher

$$\begin{aligned} [\bar{\partial}, G] &= [\bar{\partial}^*, G] = 0 \\ \eta &= \mathcal{H}(\eta) + \bar{\partial}(\bar{\partial}^* G(\eta)) + \bar{\partial}^*(\bar{\partial} G(\eta)) \end{aligned}$$

sowie

oder kurz $\mathcal{H} + \Delta_{\bar{\partial}} G = id$ erfüllt.

Beweis: Siehe Kapitel 11, Übungsaufgabe 1 und Teil V, Kapitel und .

Variante: Eine ähnliche Aussage gilt für $D^{p,q}(X)$ anstelle von $A^{p,q}(X)$.

Folgerung 8.2.2. Der Vergleich mit der Kohomologie $\mathcal{H}^{p,q}(X) \cong H^q(X, \Omega_X^p)$ (also das Glättungslemma) ergibt, daß ein harmonischer Strom automatisch glatt ist! Aus diesem Grund verwenden wir in beiden Fällen dieselbe Bezeichnung $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ für den Raum der harmonischen Elemente.

Korollar 8.2.3. Man hat eine orthogonale Zerlegung $A^{p,q}(X) = \mathcal{H}^{p,q}(X) \oplus (\text{Bild}(\partial) \oplus \text{Bild}(\partial^*))$.

Aus den Kähleridentitäten $\Delta = 2\Delta_{\partial} = 2\Delta_{\bar{\partial}}$ folgt $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$ und somit für den Greenschen Operator $G = \overline{G}$. Mit anderen Worten

Folgerung 8.2.4. Die Operatoren \mathcal{H} und G vertauschen mit allen Operatoren $d, d^*, \partial, \partial^*, \bar{\partial}, \bar{\partial}^*$.

Korollar 8.2.5. Man hat eine orthogonale Zerlegung $A^{p,q}(X) = \mathcal{H}^{p,q}(X) \oplus (\text{Bild}(\partial) + \text{Bild}(\partial^*) + \text{Bild}(\bar{\partial}) + \text{Bild}(\bar{\partial}^*))$.

Korollar 8.2.6. $\mathcal{H}^n(X) \cong H^n(A^\bullet(X), d) \cong H^n(X, \mathbb{C}_X)$.

Es sollte erwähnt werden, daß das \wedge -Produkt und der Pullback harmonische Formen im allgemeinen nicht in harmonische Formen überführt!

Kapitel 9

Der Satz von Lefschetz

Sei X eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit.

Auf Grund der Kählerrelation $[\Delta, L] = 0$ erhält der Operator L harmonische Formen

$$L : \mathcal{H}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{H}^{p+1,q+1}(X) .$$

Außerdem gilt $*\Delta_\partial = *(\partial\partial^* + \partial^*\partial) = -*\partial*\bar{\partial}*\bar{\partial}*\partial = \bar{\partial}^*\bar{\partial}*\partial + \bar{\partial}\bar{\partial}^* = (\Delta_{\bar{\partial}})* = (\Delta_\partial)*$ wegen $** = (-1)^{p+q}$. Es folgt

$$* : \mathcal{H}^{p,q}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{d-q,d-p}(X)$$

sowie natürlich dann $\Lambda, h : \mathcal{H}^{\bullet,\bullet} \rightarrow \mathcal{H}^{\bullet,\bullet}$.

Folgerung 9.0.7. *Man hat eine natürliche Operation von $\langle *, Gl(2, \mathbb{C}) \rangle$ auf den harmonischen Formen. Dies induziert eine Zerlegung*

$$\mathcal{H}^{p,q}(X) = \mathcal{H}_{prim}^{p,q}(X) \oplus L(\mathcal{H}^{p-1,q-1}(X))$$

mit

$$\mathcal{H}_{prim}^{p,q}(X) = \{\eta \in \mathcal{H}^{p,q}(X) \mid \Lambda\eta = 0\} .$$

Korollar 9.0.8 (Hard Lefschetz). *Es gibt Isomorphismen*

$$\begin{array}{ll} L^{(d-p-q)/2} : \mathcal{H}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{d-q,d-p} & , \quad \text{wegen } Gl(2, \mathbb{C}) \text{ Theorie} \\ * : \mathcal{H}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{d-q,d-p} & , \quad \text{da } (,) \text{ definit .} \end{array}$$

und somit die folgende scharfe Form der Poincare Dualität: Bezeichne $[L] \in H^2(X, \mathbb{C}_X)$ die Kohomologieklass der (geschlossenen) Kählerform ω , dann gilt

$$\cap[L]^n : H^{d-n}(X, \mathbb{C}_X) \xrightarrow{\sim} H^{d+n}(X, \mathbb{C}_X) .$$

Sei nun die Dimension d gerade. Aus den Hodge-Riemann Bilinearrelationen folgt, daß z.B. das Cup-Produkt eine definite nichtausgeartete Paarung auf $H_{prim}^{d/2,d/2}$ definiert (Hodge Indexsatz). Hierbei ist $\eta \in H_{prim}^{d/2,d/2}$ äquivalent mit $\Lambda(\eta) = 0$ oder $L(\eta) = 0$ (η ist invariant unter $Sl(2, \mathbb{C})$).

Ein Spezialfall des Hard Lefschetz ist die Tatsache, daß die Potenzen ω^r nichttriviale Kohomologieklassen in $H^{2r}(X, \mathbb{C}_X)$ definieren für alle $r = 0, \dots, d$.

Kapitel 10

10 Die Potentialgleichung

10.1 Der Operator K

Wir studieren nun den Operator

$$K = (2\pi i)^{-1} \bar{\partial} \partial : A^{p,q}(X) \rightarrow A^{p+1,q+1}(X) .$$

Beachte $\bar{\partial} \partial = d \partial$. Somit ist jede Form im Bild von K geschlossen $d(K(\eta)) = 0$, ∂ -exakt und $\bar{\partial}$ -exakt sowie d -exakt ! Die Umkehrung gilt auch (Lemma 1). Also ist $Bild(K)$ der Raum $B^{p,q}(X)$ der d -exakten Formen!

Lemma 10.1.1. Sei X kompakt und Kählersch. Sei $\eta \in A^{p,q}(X)$ geschlossen $d\eta = 0$ und ∂ - (oder $\bar{\partial}$ oder d) exakt, dann gibt es ein Potential $\phi \in A^{p-1,q-1}(X)$ mit der Eigenschaft

$$(2\pi i)^{-1} \bar{\partial} \partial \phi = \eta .$$

Zusatz: Für $\eta = \bar{\eta}$ reell und $p = q$ kann man ϕ reell wählen.

Variante: Eine analoge Aussage gilt für Ströme.

Beweis: Aus jeder der drei Arten von Exaktheit für η folgt

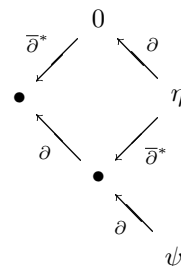
$$\mathcal{H}(\eta) = 0 .$$

Andererseits ist $d\eta = 0$, also $\partial\eta = 0$ und $\bar{\partial}\eta = 0$. Somit folgt aus dem Satz von Hodge

$$\eta = \bar{\partial}(\psi) \quad , \quad \psi = \bar{\partial}^*(G(\eta)) .$$

Wegen der Kähleridentität $\bar{\partial}^* \partial + \partial \bar{\partial}^* = 0$ erfüllt ψ aber $\partial\psi = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{H}(\psi) = 0$ wegen des Korollars zum Satz von Hodge. Der Satz von Hodge (∂ -Variante) zeigt jetzt:

$$\psi = \partial(\psi') \quad , \quad \psi' = \partial^*(G(\psi)) .$$



Zusammengefaßt folgt also $(2\pi i)^{-1}\bar{\partial}\partial\phi = \eta$ für

$$\phi = G(G(2\pi i\partial^*\bar{\partial}^*\eta)) .$$

Da $i\bar{\partial}\partial$ mit Konjugation vertauscht, kann man für reelles η das Potential ϕ auf seine reelle Komponente projizieren und erhält obdA ein reelles Potential als Lösung.

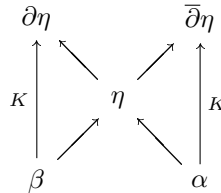
Bemerkung 10.1.2. *Man hat ein triviales lokales Analogon. Ist $\eta \in A^{p,q}(X)$ geschlossen, dann existiert für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U und ein $\phi \in A_X^{p-1,q-1}(U)$ mit $\frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\partial\phi = \eta$ (benutze Poincare Lemma!).*

Lemma 10.1.3. *Sei X kompakt und Kählersch. Ist $\eta \in A^{p,q}(X)$ eine Form mit $\bar{\partial}\eta = 0$, dann gibt es Formen $\alpha \in A^{p-1,q}(X), \beta \in A^{p,q-1}(X)$ mit*

$$\eta = \mathcal{H}(\eta) + \partial\alpha + \bar{\partial}\beta .$$

Variante: Eine entsprechende Aussage gilt auch für Ströme.

Beweis: 0.3



$\bar{\partial}\eta$ ist nach Annahme geschlossen $d(\bar{\partial}\eta) = 0$. Andererseits ist es $\bar{\partial}$ -exakt. Nach dem obigen Satz gilt daher

$$\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}(\partial\alpha) = d(\partial\alpha)$$

für ein α . Analog aber auch

$$\partial\eta = \partial(\bar{\partial}\beta) = d(\bar{\partial}\beta)$$

für ein β . Es folgt $d(\eta - \partial\alpha - \bar{\partial}\beta) = 0$ und somit aus dem Satz von Hodge

$$(\eta - \partial\alpha - \bar{\partial}\beta) = \text{harmonische Form} + d\text{-exakt} .$$

Daraus folgt die Behauptung.

10.2 Das Glättungslemma

Die Information von Lemma 10.1.1 und Lemma 10.1.3 ist gerade das Diagramm (X kompakt Kählersch)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p,q}(X) & \longrightarrow & \tilde{A}^{p,q}(X) & \xrightarrow{K} & \mathcal{B}^{p+1,q+1}(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \text{injektiv} & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p,q}(X) & \longrightarrow & \tilde{D}^{p,q}(X) & \xrightarrow{K} & \mathcal{B}^{p+1,q+1}(X) & \longrightarrow & 0 .
 \end{array}$$

Hierbei seien

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{p,q}(X) &= A^{p,q}(X)/(\partial A^{p-1,q}(X) + \bar{\partial} A^{p,q-1}(X)) \\ \tilde{D}^{p,q}(X) &= D^{p,q}(X)/(\partial D^{p-1,q}(X) + \bar{\partial} D^{p,q-1}(X)) . \end{aligned}$$

und weiterhin bezeichne $B^{p,q}(X)$ resp. $\mathcal{B}^{p,q}(X)$ den Raum der d -exakten Formen resp. Ströme vom Typ (p,q) . Beachte, daß jeder harmonische Strom glatt ist.

Die rechte vertikale Abbildung ist aber injektiv! Aus der Kern-Kokern Sequenz folgt daher für X kompakt und Kählersch

Lemma 10.2.1 (Glättungslemma). *Sei X komplexe Mannigfaltigkeit.*

- I) Ist $K(T)$ glatt für $T \in D^{p,q}(X)$, dann gibt es eine glatte Form $\eta \in A^{p,q}(X)$ und Ströme A, B mit $T = \eta + \partial A + \bar{\partial} B$.
- II) Ist eine glatte Form $\eta \in A^{p,q}(X)$ von der Gestalt $\eta = \partial A + \bar{\partial} B$ für Ströme A und B , dann gibt es glatte Formen α und β mit $\eta = \partial\alpha + \bar{\partial}\beta$, d.h. $\tilde{A}^{p,q}(X) \hookrightarrow \tilde{D}^{p,q}(X)$.

Beweis: Im allgemeinen Fall schließt man durch Induktion nach $p - q$ wie folgt:

Teil I): Der Induktionsanfang $(p, q) = (0, d)$ folgt aus dem $\bar{\partial}$ Glättungslemma.

Der Induktionsschluß ist wie folgt: Sei $\partial\bar{\partial}T$ glatt.

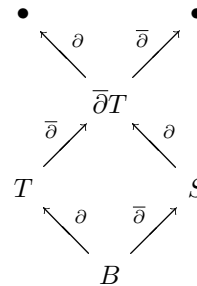
- 1) Aus dem ∂ Glättungslemma folgt für ein S

$$(*) \quad \bar{\partial}T = \text{glatt} + \partial S$$

- 2) Aus $\bar{\partial}(\partial S) = \bar{\partial}$ glatt = glatt folgt aus der Induktionsannahme des Lemmas

$$S = \text{glatt} + \partial A + \bar{\partial} B .$$

- 3) Einsetzen in (*) liefert $\bar{\partial}(T + \partial B) = \text{glatt}$. Aus dem $\bar{\partial}$ Glättungslemma folgt die Induktionsaussage $T + \partial B + \bar{\partial} A = \text{glatt}$ für geeignetes A . Das zeigt I).



Nun zu Teil II): Sei $\omega = \partial A + \bar{\partial} B$. Dann sind $K(A)$ und $K(B)$ glatt. Nach Teil I) folgt daher für ein S

$$\omega = \partial\alpha + \bar{\partial}\beta + K(S) .$$

Da $K(S)$ dann glatt ist, folgt nach Teil I) für ein glattes σ

$$\omega = \partial\alpha + \bar{\partial}\beta + K(\sigma) \in \partial A^{p-1,q}(X) + \bar{\partial} A^{p,q-1}(X) .$$