

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen	9
1.1 Probleme mit der Unendlichkeit	9
1.2 Mengen	10
1.3 Abbildungen	12
1.4 Kartesische Produkte	12
1.5 Relationen	12
1.6 Axiome der Äquivalenzrelation	13
1.7 Quantoren	13
2 Körper	15
2.1 Folgerungen aus den Axiomen	16
2.1.1 Lemma	16
2.1.2 Lemma	16
2.1.3 Lemma	17
2.1.4 Lemma	17
2.2 Beispiel	17
2.3 Notationen	17
3 Angeordnete Körper	19
3.1 Notationen	19
3.2 Intervalle	19
3.3 Quadrate sind positiv	19
3.4 Natürliche Zahlen	20
3.5 Lemma	20
3.6 Bemerkung	21
3.7 Folgerung	21
3.8 Lemma	21
3.9 Lemma	21
3.10 Lemma	22
4 Die Betragsfunktion	23
4.1 Lemma	23
4.2 Definition der Distanzfunktion	24
5 Der Körper der komplexen Zahlen	25
5.1 Satz	25
5.2 Inverses Element der Multiplikation	25
5.3 Die Einbettung von K	26

5.4	Die Zahl i	26
5.5	Hinweis	26
6	Archimedisches Axiom	27
6.1	Folgerung (Satz des Eudoxos)	27
6.2	Dichtigkeitssatz	27
6.3	Bernoulli Ungleichung	28
7	Folgen	29
7.1	Definition Folgen	29
7.2	Annahme	29
7.3	Definition Cauchyfolge	30
7.4	Definition Konvergenz	30
7.5	Eindeutigkeit des Grenzwerts	30
7.6	Konvergenz impliziert Cauchykonvergenz	31
7.7	Cauchyfolgen sind beschränkt	31
7.8	Permanenzeigenschaften	31
7.8.1	Zusatz:	31
7.9	Nullfolgen	32
7.10	Das Archimedische Axiom	33
7.11	Die Leibnizfolge	33
7.12	Die geometrische Folge	33
7.13	Intervallteilung	34
7.14	Teilfolgen beschränkter Folgen	34
7.14.1	Hinweis	34
7.14.2	Beweis Teil 1	35
7.14.3	Beweis Teil 2 (Intervallschachtelung)	35
7.14.4	Beweis Teil 3 (Diagonaltrick)	35
7.15	Monotone beschränkte Folgen	36
7.16	Abgeschlossenheit	36
8	Der Körper der reellen Zahlen	37
8.1	Obere Schranken	38
9	Reihen	39
9.0.1	Dezimalzahlen	39
9.1	Cauchy Kriterium für Reihen	40
9.1.1	Folgerung 1	40
9.1.2	Folgerung 2 Leibnizkriterium	40
9.1.3	Beispiel	41
9.1.4	Majorantenkriterium	41
9.2	Geometrische Reihen	42
9.2.1	Die geometrische Summe	42
9.2.2	Quotientenkriterium	42
9.2.3	*Verdichtung	43
9.3	Exponentialreihe	44
9.3.1	*Die Eulersche Zahl	44
9.3.2	Binomialtheorem	44
9.3.3	*Beschränktheit der Folge x_n	45
9.3.4	*Monotonie der Folge	45

9.3.5	*Konvergenz der Folge	45
9.3.6	*Untere Schranke	46
9.4	Umordnen	47
9.4.1	Umordnungssatz	47
9.4.2	Zerlegungssatz	48
9.5	Die Faltungsreihe	50
9.5.1	Funktionalgleichung der Exponentialfunktion	52
10	Exkurs in die Lineare Algebra	53
10.1	Der n-dimensionale R-Vektorraum	53
10.2	Das Skalarprodukt	53
10.3	Definition der Norm	53
10.3.1	54
10.3.2	Eine triviale Abschätzung	54
10.4	Schwarz'sche Ungleichung	54
10.4.1	Verschärfung	55
10.4.2	Dreiecksungleichung	55
10.4.3	Bild	55
11	Metrische Räume	57
11.0.4	Beispiel	57
11.0.5	Einschränken einer Metrik	57
11.1	Cauchyfolgen	57
11.2	Konvergente Folgen	58
11.3	Vollständige metrische Räume	58
11.4	Abgeschlossene Teilmengen	58
11.4.1	59
11.5	Folgenkompaktheit	59
11.5.1	Hinweis	59
11.6	Der Banachsche Fixpunktsatz	60
11.6.1	Beweis der Eindeutigkeit	60
11.6.2	Beweis der Existenz	60
11.7	*Das Newton Verfahren	62
11.7.1	Hilfsrechnung	63
12	Stetige Abbildungen	65
12.0.2	Variante: Stetigkeit im Punkt ξ	65
12.0.3	Beispiele	65
12.0.4	Untere Dreiecksungleichung	66
12.1	Komposition	66
12.2	Weitere Permanenzeigenschaften	67
12.2.1	Polynome sind stetig	67
12.2.2	Gebrochen rationale Funktionen	67
12.2.3	Die Exponentialfunktion	67
12.3	Der Nullstellensatz	68
12.3.1	Zwischenwertsatz	68
12.3.2	Folgerung	68
12.3.3	Information	69
12.3.4	Bemerkung	69
12.3.5	Bemerkung	69

12.4	Das Epsilon-Delta-Kriterium	70
12.4.1	Folgerung	70
12.5	Gleichmässige Stetigkeit	71
12.6	Stetig versus gleichmäßig stetig	71
12.7	Maxima und Minima	72
13	Integration	73
13.0.1	Ober/Untersummen	73
13.1	Visualisierung der Ober/Untersummen	74
13.2	Offensichtliche Eigenschaften	74
13.2.1	Beachte	74
13.3	Integrierbare Funktionen	75
13.3.1	Triviale Abschätzungen	75
13.4	Stetige Funktionen sind integrierbar	76
13.5	Linearität des Integrals	77
13.6	Intervalladditivität	78
13.6.1	Beweis	78
13.7	Definition - Differenzierbarkeit	79
13.8	Der Hauptsatz (1. Version)	79
13.8.1	Beweis	80
14	Differenzierbare Funktionen	81
14.1	Definition - Ordnung	81
14.1.1	Eine Äquivalenzrelation	82
14.2	Tangenten	82
14.3	Hinweis	82
14.4	Differenzierbar versus linear approximierbar	82
14.5	Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit	83
14.6	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	84
14.6.1	Visualisierung des Mittelwertsatzes	84
14.7	Korollar	85
14.8	Vollständige Formulierung des Hauptsatzes der Analysis	86
14.8.1	Folgerung	86
14.9	Schreibweise	87
14.10	Ableitungsregeln	87
14.11	Lemma - Ableitungen von Monomen	88
14.12	Folgerung - Ableitungen von Polynomen	88
14.13	Definition - n-mal differenzierbar	89
15	Einige wichtige Funktionen	91
15.1	Ableitung der Exponentialfunktion	91
15.2	Sinus und Cosinus	92
15.3	Monotonie und erste Ableitung	94
15.3.1	Umkehrfunktion	94
15.3.2	Stetigkeit der Umkehrfunktion	94
15.4	Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion	95
15.5	Folgerung - Ableitung des Logarithmus	95
15.6	Die Kettenregel	96
15.6.1	Ableitungen von beliebigen Potenzen	97
15.7	*Zur Erinnerung	97

16 Taylor Entwicklung	99
16.1 Taylor's Formel mit Lagrange Restglied	99
16.1.1 Hinweise	99
16.2 Taylorentwicklung des Logarithmus	100
16.2.1 Taylorreihe	101
16.3 Ein instruktives Beispiel	101
16.4 Exponentialfunktion	102
16.5 Variante des Taylor'schen Satzes	103
16.5.1 Zur Erinnerung	103
16.6 *Eine Anwendung	104
16.7 Regel von d'Hospital	106
16.7.1 *Beispiel	106
16.7.2 *Folgerung	106
16.8 Taylor's Formel mit Integralrestglied	108
16.9 Partielle Integration	109
16.10 Integration durch Substitution	109
16.11 *Anwendung der Taylor-Formel auf die binomische Formel	110
16.11.1 Beweis	111
16.11.2 Resumée	113
17 Eulersche Formel	115
17.0.3 Bernoulli-Polynome	115
17.0.4 Eigenschaften der Bernoulli-Polynome	117
17.1 Eulersche Formel	118
17.2 Sterling's Formel	120
17.3 *Die Simpson'sche Regel	121
17.4 *Die Keplersche Faßregel	121
17.4.1 Beweisskizze	122
17.5 Beispiel - Berechnung von $\log(2)$	122
18 Differentialgleichungen	125
18.0.1 Höhere Ordnung	126
18.1 Ein metrischer Raum von Funktionen	127
18.1.1 Visualisierung der Metrik	127
18.2 Der Raum der stetigen Funktionen ist vollständig	127
18.3 Lipschitz-stetige Funktionen	130
18.3.1 Variante	130
18.3.2 Wichtigstes Beispiel	130
18.4 Existenz und Eindeutigkeit	131
18.4.1 Beweis	131
18.5 Verheftung	133
18.5.1 Visualisierung	133
18.5.2 Lineare Differentialgleichungen	134
18.5.3 Der Lösungsraum	134
19 Vertauschungssätze	135
19.1 Normierte Räume	135
19.1.1 Stetige lineare Abbildungen	135
19.2 Der Raum $C^1(X)$	136
19.3 Das Beispiel der Potenzreihen	138

19.3.1	Konvergenzlemma	138
19.3.2	Gliedweises Ableiten von Potenzreihen	139
19.3.3	Identitässatz	139
19.4	Partielle Ableitungen	140
19.5	Vertauschung von Differentiation und Integration	141
19.5.1	Diagramms	141
19.5.2	Kommutativität des Diagramms	142
19.6	Fubini (erste Version)	142
19.7	Vertauschung von Ableitungen	143
20	Alternierende Differentialformen	145
20.1	Offene Mengen	145
20.2	Das \wedge -Produkt	146
20.3	Die Cartanableitung d	147
20.4	Produktformel	147
20.5	Cup und Cap	148
20.5.1	Ein Hilfssatz	148
20.5.2	Der Operator I	148
20.6	Der Differentialformenkomplex	149
20.6.1	Das Poincare Lemma	149
20.6.2	Die Homotopieformel	149
20.6.3	Beweis der Homotopieformel	150
20.6.4	Der eindimensionale Fall	151
20.7	Maxwellgleichung	152
21	Mehrdimensionale Differentiation	153
21.1	Approximation und Landausymbole	153
21.2	Differenzierbarkeit	153
21.3	Fundamentale Eigenschaften	154
21.3.1	Affin lineare Abbildungen	154
21.3.2	Eine Reduktion	154
21.3.3	Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit	155
21.3.4	Kettenregel	155
21.4	Die Jacobi-Matrix	156
21.5	Stetig partiell differenzierbare Funktionen	157
21.5.1	Kritische Punkte	157
21.6	Der Umkehrsatz	158
21.6.1	Beweis	158
21.6.2	Reduktion auf den Spezialfall	160
21.7	Satz von der impliziten Funktion	161
21.8	Verallgemeinerte Taylor-Entwicklung	163
21.8.1	Eine kombinatorische Formel	164
21.8.2	Taylorformel mit Restglied	164
21.9	Extremwerte	165
21.9.1	Die Hessematrix	165
21.9.2	Lokale Maxima	165

22 Kompakte metrische Räume	167
22.1 Kompaktheit	167
22.1.1 Vereinigung zweier kompakter Mengen	167
22.2 Heine-Borel (1.Version)	168
22.3 Überdeckungen (2.Version)	168
23 Monotone Limiten	171
23.1 Vorbemerkungen	171
23.2 Funktionsverbände	174
23.3 Permanenzeigenschaften	175
23.3.1 Abgeschlossenheit unter monotonen Folgen	175
23.4 Funktionen mit kompaktem Träger	176
23.4.1 Offene Intervalle	176
23.4.2 Charakteristische Funktionen	177
23.4.3 *Lokalkompakte metrische Räume	177
23.4.4 *Metrische Räume mit abzählbarer Basis	178
23.5 Der Satz von Dini	178
23.6 Die Daniell Eigenschaft	179
24 Lebesgue Integration	181
24.1 Integrale	181
24.1.1 Die wesentlichen Monotonieeigenschaften	182
24.1.2 Approximation von unten und oben	182
24.1.3 Daniell-Lebesgue integrierbare Funktionen	183
24.1.4 Erste Beispiele	183
24.1.5 Permanenzeigenschaften	184
24.2 Satz von Beppo Levi	185
24.3 Satz von Lebesgue	186
24.4 Nullmengen	187
24.4.1 ε -Kriterium für Nullmengen	187
24.4.2 Der Funktionswert unendlich	187
25 Integration im Euklidischen	189
25.1 Fortsetzung des Riemann Integrals	190
25.2 Kompatibilität	191
25.3 Einige Anwendungen	192
25.4 Der Satz von Fubini	194
25.5 Substitutionsregel	196
26 Kohomologie	199
26.0.1 Fortsetzungslemma	200
26.1 Mayer-Vietoris Sequenzen	201
26.1.1 Lemma	201
26.1.2 Lemma	202
26.2 Kohomologie der Sphäre	203
26.2.1 Lemma	203
26.2.2 Ein Erzeuger	204
26.3 Das duale Poincare Lemma	206
26.4 Poincare Dualität	208
26.5 Ströme	211

26.6	Beispiele für Ströme	212
26.7	Der Sternoperator	213
27	Metriken	215
27.1	Der Euklidische Sternoperator	215
27.2	Exkurs in die lineare Algebra	216
27.2.1	Fortsetzung auf alternierende Tensoren	216
27.3	Der *-Operator einer Bilinearform	217
27.4	Der Fall $K = \mathbb{R}$	218
27.5	Der globale Fall	219
27.6	Kurvenlängen	219
28	Hilberträume	221
28.1	Messbare Funktionen	221
28.2	L^2 -Räume	222
28.3	Satz von Fischer-Riesz	223
28.4	$C_c(X, \mathbb{C})$ liegt dicht	224
28.5	Der Folgenraum $L^2(\mathbb{Z})$	224
28.6	Orthonormalbasen	225
28.7	L^2 -Fourier Transformation	226
28.8	Stone-Weierstrass	227
28.9	*Orthoprojektion	228
28.10*	Das stetige Dual	229
28.10.1*	Autodualität	229
A	Anhang – Bernoulli Polynome	231
A.1	Hinweise für Maple-Benutzer	232
B	Anhang – Hinweise für Maple-Benutzer	233
B.1	Allgemeine Hinweise	233
B.2	Quickstart in Maple	233
B.2.1	Semikolon und Doppelpunkt - wird schnell vergessen	233
B.2.2	Restart und with - so fängt es an	234
B.2.3	Plot - Zeichnen im Zweidimensionalen	234
B.3	Problemlösungen für Fortgeschrittene	235
B.3.1	Das Zeichnen einer Folge	235

Kapitel 1

Vorbemerkungen

1.1 Probleme mit der Unendlichkeit

Man ist von der Schule gewöhnt mit Dezimalzahlen wie

$$x = 1,1111\dots$$

zu rechnen. In der Schule lernt man auch, dass $9 \cdot x = 9,9999\dots$ gleich 10 ist (Frage: wieso gilt dies eigentlich?) und zeigt damit $x = \frac{10}{9}$. Ohne an dieser Stelle dieser Frage nachzugehen wollen wir uns im Moment nur daran erinnern, dass die obige genannte Zahl x eigentlich als eine unendliche Summe von Zahlen definiert ist

$$x = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

So weit so gut

... dass das Rechnen mit unendlichen Summen nicht ganz ohne Probleme vorstatten geht, ist vielleicht nicht so bekannt. Wir wollen an dieser Stelle die hier auftretenden Probleme an einem typischen Beispiel illustrieren:

Betrachte folgende Reihe

$$x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Durch Zusammenfassen von jeweils zwei aufeinander folgenden Termen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots > 0$$

lässt sich diese Zahl x leichter berechnen. Als Summe von positiven Zahlen ist insbesondere x positiv.

Was spricht dagegen die Berechnung von x durch andere geschickte Umordnungen zu vereinfachen? Ein Vorschlag wäre, die positiven und negativen Glieder getrennt zu summieren, um nur eine Subtraktion durchführen zu müssen

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

und obendrein einen Term einzuschieben, der gleichzeitig addiert und abgezogen wird

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots\right),$$

um dann folgende Vereinfachung der Summation

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

zu erhalten! Was ist passiert? Es folgt $x = 0$ im Widerspruch zur ersten Überlegung, welche $x > 0$ zeigt. Wir haben jetzt ein Problem, das offensichtlich daher rührt, dass wir zu unvorsichtig mit dem Hantieren von 'unendlich' vielen Grössen umgegangen sind. Wir haben insbesondere auch gar nicht genau genug gesagt, wie eigentlich eine 'unendliche' Summe zu erklären ist, in wie weit sie überhaupt allgemein existiert etc. Vielleicht war die Bildung der unendlichen Summe gar nicht sinnvoll?

Dieses Beispiel dient dazu zu verdeutlichen, warum wir bei allen nun folgenden Überlegungen, insbesondere bei den Definitionen und Begriffsbildungen, so vorsichtig wie möglich sein werden. In der Tat werden wir im Verlauf der Vorlesung sehen – nachdem wir uns genau überlegt haben wie unendliche Summen überhaupt zu definieren sind – dass der erste Ansatz sehr wohl sinnvoll war, und dass in überraschender Weise die dadurch definierte unendliche Summe den Wert $x = \log(2)$ besitzt (natürlicher Logarithmus), was im übrigen – durch eine Modifikation des zweiten Ansatzes – auf die Formel $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \log(2)$ zurückgeführt werden kann (siehe 15.7).

1.2 Mengen

Wir benutzen häufig die Sprache der Mengenlehre. Etwa folgende Bezeichnung für die Menge A , welche aus den Zahlen 1, 2 und 3 besteht

$$A = \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 1\}$$

Dann bedeutet

$$1 \in A$$

„1 ist Element der Menge M “. In diesem Sinne gilt analog:

$$\begin{aligned} a &\in \{a, b\} \\ \{1, 2\} &\in \left\{ \{1, 2\}, \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\} \end{aligned}$$

Das zweite Beispiel ist eine Menge von Mengen, deren zwei Elemente aus der zweielementigen Menge $\{1, 2\}$ und der Menge der reellen Zahlen im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ bestehen.

Zwei Teilmengen N_1 und N_2 einer Menge M heissen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt $N_1 \cap N_2$ die leere Menge \emptyset ist.

Auch in der Mengenlehre wird man mit dem Problem der Unendlichkeit konfrontiert. Etwa wenn man versucht Mengen rekursiv zu definieren in dem man setzt

$$M_0 = \{a\}$$

$$M_1 = M_0 \cup \{M_0\} = \{a, \{a\}\}$$

(disjunkte Vereinigung)

$$M_2 = M_1 \cup \{M_1\} = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$$

und so weiter ... Iteriert man das unendlich oft, erhält man eine Menge

$$M = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}, \dots\}$$

welche die Eigenschaft besitzt

$$M \in M .$$

Dass es mit derartigen Konstruktionen Probleme geben kann, zeigt das uns das folgende Paradoxon

Definition: Eine Menge M heisse gutartig, wenn $M \notin M$ gilt. Eine Menge heisse pathologisch, wenn $M \in M$ gilt.

Offensichtlich sollte eine Menge dann entweder gutartig oder pathologisch sein. Bilden wir jetzt aber die Menge aller guten Mengen, so erhalten wir einen Widerspruch

Definition: Es sei \mathcal{M} die Menge aller gutartigen Mengen.

Es stellt sich dann die Frage, ob die so definierte Menge \mathcal{M} selbst wieder gutartig ist?

Angenommen, dies wäre der Fall. Dann wäre \mathcal{M} als gutartige Menge wegen der Definition von \mathcal{M} selbst ein Element von \mathcal{M} , das heisst $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$. Das kann aber nicht eintreten, denn dann wäre wegen $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ die Menge \mathcal{M} eine pathologische Menge, und nicht – wie angenommen – gutartig. Dies zeigt uns also, dass die Menge \mathcal{M} aller gutartigen Mengen selbst nicht gutartig sein kann.

Dann bleibt anscheinend nur die Alternative, dass die Menge \mathcal{M} aller gutartigen Mengen eine pathologische Menge ist (was uns vielleicht nicht so überraschend erscheinen mag). Als pathologische Menge erfüllt daher \mathcal{M} die Eigenschaft

$$\mathcal{M} \in \mathcal{M} .$$

Das war die Definition von pathologisch! Aber aus $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ folgt, dass \mathcal{M} ein Element der Menge \mathcal{M} aller gutartigen Mengen ist. Mit anderen Worten, es folgt: \mathcal{M} ist eine gutartige Menge!

An dieser Stelle erinnern wir uns aber daran, dass dies nicht sein kann, da wir es bereits ausgeschlossen haben, dass die Menge \mathcal{M} aller gutartigen Mengen gutartig sein kann. Ein Teufelskreis!

Offensichtlich kann man Mengen also nicht ‘beliebig’ definieren. Ein solides Fundament der Mengenlehre zu legen ist eine schwierige Aufgabe, und gehört eigentlich nicht zum Themenkreis der Analysisvorlesung. Wir wollen uns an dieser Stelle nur merken, dass man beim Umgang mit der Unendlichkeit Sorgfalt walten lassen sollte. Wir benutzen die Begriffe der Mengenlehre eigentlich in der Regel nur im Sinne von Notationen. Wichtige Bildungen in diesem Zusammenhang verbinden sich mit den Begriffen: Abbildung, kartesisches Produkt, Relationen, Quantoren. Diese sollen nun kurz vorgestellt werden:

1.3 Abbildungen

Eine Zuordnung zwischen nichtleeren Mengen M und N ,

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ m \in M &\mapsto f(m) \in N \end{aligned}$$

welche jedem Element m aus M (dem sogenannten Definitionsbereich) ein eindeutig bestimmtes Element in N (im Wertebereich) zuweist, nennt man Abbildung oder Funktion. Die Teilmenge $\{f(m) \in N \mid m \in M\}$ von N nennt man das Bild von f , kurz $Bild(f)$. Die Abbildung heisst surjektiv, wenn gilt $Bild(f) = N$. Eine Abbildung heisst injektiv, wenn aus $f(m) = f(m')$ folgt $m = m'$. Eine Abbildung heisst bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.4 Kartesische Produkte

Das kartesische Produkt zweier Mengen M und N ist die Menge aller Paare (m, n) :

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

Beachte, dass im Gegensatz zum Mengenbegriff bei der Bildung von Paaren (m, n) , die Reihenfolge eine Rolle spielt. Das heisst im allgemeinen gilt, dass (m, n) von (n, m) verschieden ist, selbst wenn für die Mengen gilt $M = N$.

Beispiel: Ist \mathbb{R} die reelle Zahlengerade, dann ist

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \text{Zahlenebene}$$

1.5 Relationen

Eine Relation auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$.

Schreibweise

$x, y \in X, x \stackrel{R}{\sim} y$ für $(x, y) \in R$, oder kurz $x \sim y$. Man sagt dann „... x steht in Relation zu y bezüglich der Relation R...“

1.6 Axiome der Äquivalenzrelation

Eine Relation auf X nennt man Äquivalenzrelation, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

1. Reflexivität: $x \sim x$ (für alle $x \in X$)
2. Symmetrie: Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$
3. Transitivität: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$

Eine Äquivalenzrelationen auf X definiert eine Zerlegung von X in disjunkte Äquivalenzklassen. Umgekehrt definiert jede Zerlegung von X in disjunkte Teilmengen eine Äquivalenzrelation auf X .

1.7 Quantoren

- \forall bedeutet „für alle“
Beispiel: $\forall x \in K$ bedeutet „für alle x aus K “
- \exists bedeutet „es existiert (mindestens) ein“
Beispiel: $\forall x \in K \quad \exists y \in K \quad (y + x = 0)$
- $\exists!$ bedeutet „es existiert **genau** ein“.

Kapitel 2

Körper

Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei Abbildungen

$$\begin{array}{ll} K \times K \xrightarrow{+} K & K \times K \xrightarrow{\cdot} K \\ (a, b) \longrightarrow a + b & (a, b) \longrightarrow a \cdot b \end{array}$$

(genannt Addition und Multiplikation) so, dass folgende Axiome erfüllt sind

- K1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in K$ (*Assoziativgesetz*)
- K2) Es existiert ein Element $0 \in K$ mit $0 + a = a$ für alle $a \in K$ (*neutrales Element*)
- K3) Für jedes $a \in K$ gibt es ein Element $-a \in K$,
so dass gilt $-a + a = 0$ (*inverses Element*)
- K4) Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$ (*Kommutativgesetz*)

Dies waren das Assoziativgesetz, die Existenz des neutralen Elements, die Existenz des inversen Elements, und das Kommutativgesetz der Addition. Analog fordert man für die Multiplikation

- K1') $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$
- K2') Es existiert ein Element $1 \in K$ mit $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$
- K3') Für alle $a \in K \neq 0$ existiert ein Inverses a^{-1} in K mit $a^{-1} \cdot a = 1$
- K4') $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$

Ausserdem wird gefordert

$$\text{K5')} 1 \neq 0$$

sowie das Distributivgesetz

$$\text{D)} \text{ Für alle } a, b, c \in K \text{ gilt } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{Distributivgesetz})$$

Die Assoziativgesetze erlauben es mehrfache Klammern bei der Addition wegzulassen. Man schreibt also kurz $a + b + c$ anstatt $(a + b) + c = a + (b + c)$. Analog für die Multiplikation. Ausserdem benutzt man die übliche Schreibkonvention $(a \cdot b) + (c \cdot d) = a \cdot b + c \cdot d$ oder auch $ab + cd$.

2.1 Folgerungen aus den Axiomen

Varianten des Distributivgesetzes Wendet man (K4') auf beiden Seiten von D) an, erhält man auch die folgende Variante D') des Distributivgesetzes:

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Distributivgesetz mit 4 Variablen Es gilt:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$$

Beweis: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$ wegen der Distributivgesetze D' und D.

2.1.1 Lemma

Inverse und neutrale Elemente sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Aus $u + a = 0 = v + a$ und (K4) folgt $a + u = a + v$. Somit $-a + (a + u) = -a + (a + v)$ wegen (K3). Wegen (K1) also $(-a + a) + u = (-a + a) + v$, oder $0 + u = 0 + v$. Daher $u = v$ wegen (K2). Dies zeigt die Eindeutigkeit des zu a inversen Elements. Analog zeigt man die Eindeutigkeit des neutralen Elements: $0 + a = a = \tilde{0} + a$ impliziert $a + 0 = a + \tilde{0}$ wegen (K4), und somit $0 = \tilde{0}$ (wie oben für $u = 0, v = \tilde{0}$). Der multiplikative Fall ist analog.

2.1.2 Lemma

Es gilt $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn gilt: $x = 0$ oder $y = 0$.

Beweis: Wir zeigen zuerst $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$. Nach (K4') genügt die rechte Gleichheit.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 && (K2) \\ x \cdot 0 &= x \cdot 0 + x \cdot 0 && (D) \\ -x \cdot 0 + x \cdot 0 &= -x \cdot 0 + (x \cdot 0 + x \cdot 0) \\ 0 &= (-x \cdot 0 + x \cdot 0) + x \cdot 0 && (K3), (K1) \\ 0 &= 0 + x \cdot 0 && (K3) \\ 0 &= x \cdot 0 && (K2). \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus $x \cdot y = 0$ entweder $y = 0$ oder $x = 0$. Ist nämlich $x \neq 0$, dann existiert x^{-1} . Wie bereits gezeigt gilt dann $x^{-1} \cdot 0 = 0$. Also $0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y$, das heißt $y = 0$.

2.1.3 Lemma

$$-x = (-1) \cdot x.$$

Beweis: $(-1) \cdot x + x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$ wegen (D'),(K3) und Lemma 2.1.2. Aus der Eindeutigkeit des Inversen (Lemma 2.1.1) und $(-1) \cdot x + x = 0$ folgt daher $-x = (-1) \cdot x$.

Wir benutzen nun folgende Schreibweise

$$x^2 := x \cdot x.$$

2.1.4 Lemma

$$(-x)^2 = x^2.$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} (-x) + x &= 0 \\ (-x) \cdot ((-x) + x) &= (-x) \cdot 0 \\ (-x)^2 + (-x) \cdot x &= 0 \quad (D), (Lemma\ 2.1.2) \\ ((-x)^2 + (-x) \cdot x) + x \cdot x &= x \cdot x \quad (K2) \\ (-x)^2 + ((-x) + x) \cdot x &= x^2 \quad (K1), (D') \\ (-x)^2 + 0 &= x^2 \quad (Lemma\ 2.1.2) \\ (-x)^2 &= x^2 \quad (K4), (K2) \end{aligned}$$

2.2 Beispiel

Jeder Körper besitzt mindestens zwei verschiedene Elemente, nämlich 0 (Null) und 1 (Eins) nach Axiom (K5'). Wie man leicht nachprüft, definieren folgende Tabellen einen Körper $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Im übrigen sind diese Tabellen durch die Körperaxiome bereits eindeutig festgelegt! Beispielsweise ist $1 + 1 = 1$ ausgeschlossen, wegen $1 \neq 0$.

2.3 Notationen

- $x - y := x + (-y) = (-y) + x = -y + x$
- $x/y := \frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$ für $y \neq 0$
- Die üblichen Bruchrechenregeln wie Kürzen ($\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ für $a \neq 0, c \neq 0$) oder Hauptnennerbildung ($\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ für $b \neq 0, d \neq 0$ also $bd \neq 0!$) folgert man leicht aus den Körperaxiomen.

⁰Jedes Element der Additionstabelle kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vor; warum?

Kapitel 3

Angeordnete Körper

Ein Körper K heißt angeordnet, wenn es eine Relation $<$ auf K gibt, für die gilt:

- O1) Für $x, y \in K$ gilt genau einer der drei Fälle (*Exklusivität*)
 $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$.
- O2) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in K$ (*Translationsinvarianz*)
- O3) Aus $0 < x$ und $0 < y$ folgt $0 < x \cdot y$ (*Multiplikativität*)
- O4) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (*Transitivität*)

3.1 Notationen

- $x > y$ steht für $y < x$
- $x \geq y$ bedeutet $x > y$ oder $x = y$
- $x \leq y$ bedeutet $x < y$ oder $x = y$

3.2 Intervalle

In einem angeordneten Körper K sind Intervalle definiert

- $(a, b) := \{x \in K \mid a < x < b\}$
- $[a, b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) := \{x \in K \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] := \{x \in K \mid a < x \leq b\}$

3.3 Quadrate sind positiv

Aus den Axiomen eines geordneten Körpers folgt:

$$x \neq 0 \implies x^2 > 0, \text{ insbesondere gilt } 1 > 0$$

Beweis: Aus $x \neq 0$ folgt $x < 0$ oder $x > 0$ (Axiom O1). Für $x > 0$ gilt $x^2 = x \cdot x > 0$ nach (Axiom O3). Ist $x < 0$, so folgt durch Addition von $z = -x$ aus Axiom O2

$$0 < -x .$$

Nach Axiom O3 daher $0 < (-x) \cdot (-x) = (-x)^2$. Wegen $(-x)^2 = x^2$ (Lemma 2.1.4) folgt also auch in diesem Fall $x^2 > 0$.

3.4 Natürliche Zahlen

In einem angeordneten Körper K gilt $0 < 1$ nach Folgerung (a). Aus der Translationsinvarianz (O2) folgt dann

$$1 < 1 + 1$$

und induktiv

$$1 + 1 < 1 + 1 + 1$$

und so weiter. Die so definierten Elemente $0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$ des angeordneten Körpers K sind paarweise verschieden wegen des Transitivitätsaxioms (O4) und der Exklusivität (O1). Man bezeichnet die so definierten Zahlen mit $0, 1, 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1$ usw. Die so definierten Zahlen in K definieren eine Teilmenge

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

des Körpers K , die so genannte „Menge der natürlichen Zahlen“.

Folgerung: *Ein angeordneter Körper K besitzt unendlich viele Elemente.*

3.5 Lemma

Es gilt

- (a) $x < y \iff 0 < y - x$
- (b) $x < 0 \iff -x > 0$
- (c) $x > 0 \iff -x < 0$
- (d) $x < y \iff -y < -x$
- (e) $x < y$ und $0 < z \implies xz < yz$.

Insbesondere vertauscht $x \mapsto -x$ ‘positive’ und ‘negative’ Zahlen.

Beweise: Für (a) addiere $-x$ und benutze (O2). (b) ist der Spezialfall $y = 0$ von (a). Auch (c) ist ein Spezialfall von (a) wegen $-(-x) = x$ (siehe Übungsblatt). Zu (d): $x < y \iff 0 < y - x \iff 0 > -(y - x) \iff 0 > -y + x \iff -x > -y$ wegen Axiom (O2) und (b) und (c). Zu (e): $x < y$ impliziert $0 < y - x$ und daher wegen (O3) $0 < (y - x)z = yz - xz$. Aus (O2) folgt $xz < yz$.

3.6 Bemerkung

Ein Spezialfall von (e) ist

$$(O5) \quad 0 < x, 0 < y \implies 0 < x + y .$$

Beachte: (O1),(O2),(O3),(O4) sind äquivalent zu (O1),(O2),(O3),(O5), denn Transitivität schliesst man wie folgt: $a < b \iff 0 < b - a$ und $b < c \iff 0 < c - b$ nach (O2). Gilt (O5), folgt daher aus $a < b, b < c$ die Aussage $0 < (b - a) + (c - b) = c - a$. Also wegen Axiom (O2) durch Addition von a die Aussage $a < c$ von Axiom (O4).

3.7 Folgerung

$$x \cdot y > 0 \iff x > 0, y > 0 \text{ oder } x < 0, y < 0$$

$$x \cdot y < 0 \iff x > 0, y < 0 \text{ oder } x < 0, y > 0$$

Beweis 1. Schritt. Aus $x > 0, y > 0$ folgt $xy > 0$ nach (O3). Aus $x < 0, y < 0$ folgt $0 < -x, 0 < -y$ wegen Lemma 3.5b. Also $0 < (-x) \cdot (-y) = (-1)^2 xy = xy$ nach (O3) und Lemma 2.1.3 und 2.1.4.

2. Schritt. Aus $x > 0, y < 0$ folgt $0 < x(-y)$ nach (O3), wegen $0 < -y$ (Lemma 3.5b). Wegen $x(-y) = x \cdot (-1) \cdot y = (-1) \cdot (xy) = -xy$ (Lemma 2.1.3) gilt also $0 < -xy$ oder $xy < 0$ (Lemma 3.5c). Im Fall $y > 0, x < 0$ zeigt man analog $xy < 0$.

3. Schritt. Da $xy = 0$ genau dann gilt, wenn entweder $x = 0$ ist oder $y = 0$ ist, haben wir eine vollständige Liste aller Fälle aufgestellt. Daraus folgt die Behauptung.

3.8 Lemma

$$x > 0 \iff x^{-1} > 0$$

Beweis: Wegen $x^{-1} \cdot x = 1 > 0$ folgt aus $x > 0$ die Behauptung $x^{-1} > 0$ aus dem letzten Lemma.

3.9 Lemma

$$x > y > 0 \implies 0 < x^{-1} < y^{-1}$$

Beweis: Aus der Annahme und dem letzten Lemma folgt $0 < x^{-1}$ und $0 < y^{-1}$, also $0 < x^{-1}y^{-1}$. Aus Lemma 3.5e folgt die Behauptung.

3.10 Lemma

Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

Beweis: Aus der Annahme folgt $0 < b - a$ und $0 < d - c$ (Axiom O2). Also folgt $0 < d - c + b - a$, oder durch Addition von $a + c$ (Axiom O2) wie behauptet $a + c < b + d$.

Kapitel 4

Die Betragsfunktion

K sei ein angeordneter Körper. Wir setzen

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Aus der Definition folgt sofort $x \leq |x|$ sowie $-x \leq |x|$ sowie $|-x| = |x|$ durch Betrachtung der einzelnen Fälle.

4.1 Lemma

Es gilt

$$|x| \geq 0$$

für alle $x \in K$ und $|x| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ ist. Weiterhin gilt für alle $x, y \in K$

1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
2. ¹ $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis: Die Eigenschaft $|x| \geq 0$ folgt durch Fallunterscheidungen aus dem Lemma 3.5b.

Eigenschaft 1. folgt durch Fallunterscheidung (9 Fälle). Ist $x = 0$ oder $y = 0$ folgt die Behauptung aus Lemma 2.1.2. Wenn nicht benutzt man Folgerung 3.7. Im wesentlichen muss man dann die drei Fälle $0 < x, 0 < y$ und $x < 0, y < 0$ und oBdA $x < 0, 0 < y$ unterscheiden. Im ersten Fall ist $|xy| = xy = |x||y|$, da $xy > 0$ ist. Im zweiten Fall ist $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$, wegen $(-1)^2 = 1$ (Lemma 2.1.4). Im dritten Fall ist $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$ wegen $-xy = (-1) \cdot (x \cdot y) = ((-1) \cdot x) \cdot y = (-x)y$ (Lemma 2.1.3).

¹Diese Ungleichung wird „Dreiecksungleichung“ genannt.

Eigenschaft 2. Wie wir bereits gesehen haben gilt $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Also gilt $x + y \leq |x| + |y|$ nach Lemma 3.10. Ditto $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$, also $-x - y \leq |x| + |y|$. Wegen

$$|x + y| = \begin{cases} x + y & x + y \geq 0 \\ -x - y & x + y < 0 \end{cases}$$

folgt daher wie behauptet $|x + y| \leq |x| + |y|$.

4.2 Definition der Distanzfunktion

Wir betrachten neben dem Betrag $|\cdot|$ häufig auch die Distanzfunktion $d(x, y)$

$$d: K \times K \rightarrow K$$

definiert durch

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Offensichtlich gelten die folgenden metrischen Eigenschaften:

- $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in K$, und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in K$

Die erste Eigenschaft folgt aus der ersten Aussage des letzten Lemmas. Die zweite Aussage folgt aus $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$. Die letzte Aussage folgt aus der Dreiecksungleichung des letzten Lemmas

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Kapitel 5

Der Körper der komplexen Zahlen

Sei K ein angeordneter Körper. Wir betrachten das kartesische Produkt $L = K \times K = \{(x, y) | x, y \in K\}$ und definieren

Addition: $L \times L \xrightarrow{+} L$
 $((x, y), (x', y')) \rightarrow (x + x', y + y')$

Multiplikation: $L \times L \xrightarrow{\cdot} L$
 $((x, y), (x', y')) \rightarrow (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x')$

5.1 Satz

$(L, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Dabei ist $0 = (0, 0)$ das Nullelement und $1 = (1, 0)$ das Einselement. Wir beschränken uns darauf, die Existenz der multiplikativ inversen Elemente zu zeigen. Die anderen Eigenschaften überlassen wir als Übungsaufgabe.

5.2 Inverses Element der Multiplikation

Sei $z = (x, y) \neq 0$. Dann gilt $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Wir benutzen nun Abschnitt 3.3

Fallunterscheidung $x^2 + y^2$

$x = 0, y \neq 0$	$x^2 + y^2 = y^2 > 0$
$y \neq 0, x = 0$	$x^2 + y^2 = y^2 > 0$
$y \neq 0, x \neq 0$	$x^2 + y^2 > 0$, denn $x^2 > 0$ und $y^2 > 0$

Also folgt in allen Fällen: $x^2 + y^2 \neq 0$

Ansatz: Somit ist das folgende Element definiert

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Dann gilt $z \cdot z^{-1} = \left(\frac{x \cdot x - y \cdot (-y)}{x^2 + y^2}, \frac{x \cdot (-y) + y \cdot x}{x^2 + y^2} \right) = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{0}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0) = 1$ unter Benutzung von $-y = (-1) \cdot y$. Das heisst $z^{-1} \cdot z = 1$.

5.3 Die Einbettung von K

Betrachte die Einbettung $i : K \hookrightarrow L$, welche der Zahl $x \in K$ die Zahl $(x, 0) \in L$ zuordnet. Dann gilt $i(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = i(x) + i(y)$ und $i(x \cdot y) = (xy, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = i(x) \cdot i(y)$. Wir können also K als Teilkörper von L auffassen und schreiben kurz x anstatt $i(x)$.

5.4 Die Zahl i

Wir definieren $i \in L$ durch

$$i = (0, 1) .$$

Dann gilt $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$

$$i^2 = -1 .$$

In K besitzt die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung, da in einem angeordneten Körper Quadrate immer positiv sind. In L haben wir eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ gefunden. Insbesondere ist daher L ein Körper, der keine Anordnung besitzt.

Beachte $(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, 0) + (0, y)$. Mit unserer Kurzschreibweise $x = (x, 0)$ erhalten wir somit

$$(x, y) = x + y \cdot i .$$

5.5 Hinweis

Im später relevanten Fall, wenn K der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen ist, nennt man oben konstruierten Körper L den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

Kapitel 6

Archimedisches Axiom

Ein angeordneter Körper K heisst archimedisch, falls¹ gilt

$$\boxed{\forall x \in K \exists n \in \mathbb{N} \ x < n} .$$

6.1 Folgerung (Satz des Eudoxos)

In einem archimedischen Körper K gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ aus K existiert eine natürliche Zahl $0 \neq n \in \mathbb{N}$ aus K , so dass gilt

$$0 < 1/n < \varepsilon .$$

Beweis: Aus $0 < \varepsilon$ folgt $0 < \varepsilon^{-1}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon < n$ (archimedisches Axiom). Dann folgt $0 < n^{-1} < \varepsilon$ wie behauptet.

In einem angeordneten Körper K hat man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subseteq K$ sowie die inversen Elemente $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Aus Lemma 3.5 folgt $\mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$. Die Vereinigung $\mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$ nennt man die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen. Diese Menge ist unter Addition und Subtraktion abgeschlossen, wie man leicht sieht. Aus den Bruchrechenregeln sieht man dann sofort, dass die rationalen Zahlen in K

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \in K \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

einen Teilkörper von K definieren.

6.2 Dichtigkeitssatz

Die rationalen Zahlen liegen in einem archimedischen Körper K dicht. Damit ist folgendes gemeint: $\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0$ aus $K \exists y \in \mathbb{Q}$ mit

$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon .$$

¹Dies ist keine Folgerung aus den bisherigen Axiomen, wie es vielleicht den Anschein haben könnte, sondern ein unabhängiges Axiom

Beweis 1. Schritt. ObdA $x \geq 0$. [Denn anderenfalls ist $-x \geq 0$. Hat man $y \in \mathbb{Q}$ gefunden mit $(-x) - \varepsilon < y < (-x) + \varepsilon$, so folgt durch Multiplikation mit -1 daraus $x - \varepsilon < -y < x + \varepsilon$. Wegen $y \in \mathbb{Q} \iff -y \in \mathbb{Q}$ folgt die Behauptung.]

2. Schritt. ObdA $\varepsilon = \frac{1}{n}$ für ein $0 < n \in \mathbb{N}$. [Für beliebiges $0 < \varepsilon$ existiert nach Eudoxos ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Hat man ein $y \in \mathbb{Q}$ gefunden mit $x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n}$ dann gilt auch $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$ wegen $x - \varepsilon < x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon$.]

3. Schritt. ObdA kann man annehmen $\varepsilon = 1$ und $x \geq 0$. [Offensichtlich ist $x - \frac{1}{n} < y < x + \frac{1}{n}$ äquivalent zu $\tilde{x} - 1 < \tilde{y} < \tilde{x} + 1$ für $\tilde{x} = n \cdot x \geq 0$ und $\tilde{y} = n \cdot y$ (multipliziere mit n). Beachte $y \in \mathbb{Q} \iff \tilde{y} \in \mathbb{Q}$.]

4. Schritt. Der Fall $x \geq 0$ und $\varepsilon = 1$. Betrachte $M = \{y \in \mathbb{N} \mid x - 1 < y\}$. Nach dem archimedischen Axiom ist diese Menge M nicht leer. Sei m die kleinste natürliche Zahl aus M . Dann gilt per Definition von M

$$x - 1 < m .$$

Behauptung: Es gilt auch $m < x + 1$ ($m \in \mathbb{N}$ ist also die gesuchte Zahl aus \mathbb{Q}).

Beweis der Behauptung: Der Fall $m = 0$ ist klar, denn $0 < x + 1$ wegen $x \geq 0$. Im Fall $m \geq 1$ ist $m - 1$ wieder eine Zahl in \mathbb{N} . Angenommen $m < x + 1$ wäre nicht richtig, dann gilt $x < x + 1 \leq m$, also $x - 1 < m - 1$. Somit wäre $m - 1$ auch eine natürliche Zahl $< m$ aus M im Widerspruch zur Minimalität von m . Also gilt wie behauptet $m < x + 1$.

6.3 Bernoulli Ungleichung

Sei $n \geq 2$ aus \mathbb{N} und sei $x > -1$ eine von Null verschiedene Zahl aus einem angeordneten Körper K . Dann gilt

$$(1 + x)^n > 1 + nx .$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Der Induktionsanfang $n = 2$: Für $n=2$ folgt die Aussage aus $x^2 > 0$ und der binomischen Formel

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x ,$$

welche aus dem Distributivgesetz folgt.

Der Induktionsschritt von n auf $n + 1$: Angenommen es gilt $(1 + x)^n > 1 + nx$. Dann folgt durch Multiplikation mit der Zahl $1 + x > 0$ (benutze Lemma 3.5e)

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x) \cdot (1 + x)^n > (1 + x) \cdot (1 + nx) \\ &= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

wegen $nx^2 > 0$. Beachte $n > 0$ und $x^2 > 0$.

Kapitel 7

Folgen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Folgen und studieren die Begriffe der Konvergenz und der Cauchyfolge in einem archimedischen Körper K . Wir zeigen später, daß sich einige dieser Begriffe und Ergebnisse übertragen lassen auf metrische Räume. In der Tat benötigen 7.1 bis 7.7 keine weiteren Eigenschaften als die Axiome einer Metrik und übertragen sich später Wort für Wort (siehe Kapitel 11, Seite 57).

7.1 Definition Folgen

Sei X eine Menge. Eine Folge in X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

von den natürlichen Zahlen nach X . Man schreibt häufig $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots \in X$.

7.2 Annahme

Im weiteren sei K ein angeordneter Körper K .

Beispiele: Die in der Einleitung definierten Folgen

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 - \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad x_3 = \dots$$

oder

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 10^{-1}, \quad x_2 = 0.11 = x_1 + 10^{-2}, \quad x_3 = 0.111 = x_2 + 10^{-3}, \dots$$

sind in jedem angeordneten Körper erklärt.

7.3 Definition Cauchyfolge

Eine Folge x_n mit Werten in K heißt Cauchyfolge, wenn folgende Aussage richtig ist:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left(n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon \right)}.$$

Oder etwas weniger formal: Für alle $\varepsilon > 0$ aus K gibt es eine natürliche Zahl N , so daß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gilt für alle $n, m \geq N$.

7.4 Definition Konvergenz

Eine Folge x_n aus K heißt konvergent mit Grenzwert $x \in K$, falls gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left(n \geq N \implies d(x_n, x) < \varepsilon \right)}.$$

Weniger formal: Für alle $\varepsilon > 0$ in K gibt es eine natürliche Zahl N so, dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq N$.

Oder alternativ auch: ‘Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Fast alle¹ Folgenglieder liegen im Intervall $(- \varepsilon + x, x + \varepsilon)$.

Bemerkung: Da die Zahl N von ε abhängt, schreibt man häufig auch $N = N(\varepsilon)$.

Bemerkung: Ist x_n eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in K$, dann schreibt dann häufig auch $x_n \rightarrow x$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und spricht vom Limes x . Diese Notation wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

7.5 Eindeutigkeit des Grenzwerts

Der Grenzwert x einer konvergenten Folge x_n ist eindeutig durch die Folge bestimmt.

Beweis: Seien x, y Grenzwerte derselben Folge x_n aus K . Wir zeigen $d(x, y) = 0$, was nach 4.2 zur Folge hat: $x = y$. Wegen $d(x, y) \leq 0$ genügt es $d(x, y) > 0$ auszuschliessen.

Wir führen einen so genannten

Widerspruchsbeweis: Wäre $d(x, y) > 0$, dann existiert für $\varepsilon = d(x, y)$ wegen der Konvergenz der Folge x_n ein N aus \mathbb{N} mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$, beziehungsweise ein M aus \mathbb{N} mit $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq M(\frac{\varepsilon}{2})$. Aus der Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ und der Symmetrie $d(x, x_n) = d(x_n, x)$ folgt daraus

$$d(x, y) < \varepsilon$$

für alle $n \geq \max(N, M)$. Ein Widerspruch zu $\varepsilon = d(x, y)$! Also kann $d(x, y) > 0$ nicht gelten.

¹alle bis auf endlich viele

7.6 Konvergenz impliziert Cauchykonvergenz

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei x_n eine konvergente Folge mit Grenzwert x . Dann gilt $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N = N(\frac{\varepsilon}{2})$. Aus der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

folgt $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, also $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. x_n ist daher eine Cauchyfolge.

7.7 Cauchyfolgen sind beschränkt

Für eine Cauchyfolge x_n existiert ein $y \in K$ und ein $C \in K$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(x_n, y) \leq C$.

Beweis: Für $\varepsilon = 1$ gilt $d(x_n, x_m) < 1$ für alle $n, m \geq N = N(1)$ (Cauchykonvergenz). Setze $y = x_N$. Dann gilt $d(x_n, y) = d(x_n, x_N) < 1$ für alle $n \geq N$. Also $d(x_n, y) \leq C$ für

$$C = \max(d(x_0, y), \dots, d(x_{N-1}, y), 1) .$$

7.8 Permanenzeigenschaften

Sind $(x_n)_{n \geq 0}$ und $(y_n)_{n \geq 0}$ Cauchyfolgen in K , dann auch die Summen-, Differenz- und Produktfolge:

- $(z_n)_{n \geq 0} = (x_n \pm y_n)_{n \geq 0}$ ist eine Cauchyfolge
- $(z_n)_{n \geq 0} = (x_n \cdot y_n)_{n \geq 0}$ ist eine Cauchyfolge

7.8.1 Zusatz:

Falls $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ konvergieren, dann konvergieren auch die Summenfolgen, Differenzfolgen und Produktfolgen z_n , und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \pm \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

Weiterhin gilt (siehe Übungsblatt). Sei y_n eine konvergente Folge mit Grenzwert $y \neq 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gilt

1. $y_n \neq 0$ für alle $n \geq N$

2. Die Folge $z_n := \begin{cases} z_n & \text{beliebig für } n < N \\ y_n^{-1} & \text{für } n \geq N \end{cases}$ konvergiert, und hat den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = y^{-1}$$

Beweis: oBdA nur im Fall $z_n = x_n \cdot y_n$ für Cauchyfolgen x_n, y_n .

$$\begin{aligned} d(z_n, z_m) &= |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| \\ &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y_m + x_n \cdot y_m - x_m \cdot y_m| \\ &\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y_m| + |x_n \cdot y_m - x_m \cdot y_m| \\ &\leq |x_n \cdot (y_n - y_m)| + |(x_n - x_m) \cdot y_m| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |x_n - x_m| \cdot |y_m| \end{aligned}$$

Es gibt $C, C' \neq 0$ in K , so dass gilt

- $|x_n| \leq C$ (Beschränktheit der Cauchyfolge x_n)
- $|y_n - y_m| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot C}$ (Cauchyfolge)
- $|y_n| \leq C'$ (Beschränktheit der Cauchyfolge y_n)
- $|x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot C'}$ (Cauchyfolge)

falls $n, m \geq N(\frac{\varepsilon}{2 \cdot C})$ und $n, m \geq N(\frac{\varepsilon}{2 \cdot C'})$.

Somit ist z_n eine Cauchyfolge, denn

$$|z_n - z_m| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + C' \cdot \frac{\varepsilon}{2C'} = \varepsilon$$

gilt für alle

$$n, m \geq N = \max \left(N \left(\frac{\varepsilon}{2 \cdot C} \right), N' \left(\frac{\varepsilon}{2 \cdot C'} \right) \right).$$

Bemerkung: Sind x_n, y_n konvergent mit Grenzwerten x, y , dann zeigt man wie oben $d(z_n, xy) \leq |x|d(y_n, y) + d(x_n, x)|y|$, was $z_n \rightarrow xy$ zur Folge hat.

7.9 Nullfolgen

Hat eine konvergente Folge aus K den Grenzwert Null, dann nennt man x_n eine Nullfolge.

7.10 Das Archimedische Axiom

Von nun an sei K ein archimedischer Körper.

Dann gilt

7.11 Die Leibnizfolge

Die Leibnizfolge

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, \dots$$

oder allgemeiner (für $x > 0$)

$$x_n = \frac{1}{1 + xn}$$

definiert eine Nullfolge.

Wir zeigen ganz allgemein das folgende

Kriterium: Sei x_n eine Folge, der Folgenglieder von Null verschieden sind, so dass $y_n = x_n^{-1}$ definiert ist. Gilt (*)

$$\forall C \in K \exists N \in \mathbb{N} \left(n \geq N \implies |y_n| > C \right),$$

dann ist x_n eine Nullfolge.

(*) gilt offensichtlich für $y_n = 1 + nx$, denn $|y_n| > C$ für alle $n \geq x^{-1} \cdot C$. Beachte, dass es nach dem Archimedischen Axiom mindestens ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit dieser Eigenschaft, und dass diese Eigenschaft dann erst recht gilt für alle $n \geq N$.

Beweis des Kriteriums: Gegeben $\varepsilon > 0$. Für $C = \varepsilon^{-1}$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $C \leq |y_n|$ für alle $n \geq N$. Also gilt

$$d(x_n, 0) = |y_n|^{-1} < \varepsilon$$

für $n \geq N$.

7.12 Die geometrische Folge

Für $q \in K$ nennt man die Folge $x_n = q^n$ eine *geometrische Folge*. Die durch q definierte geometrische Folge konvergiert genau dann, wenn gilt $|q| < 1$ oder $q = 1$. Im Falle $|q| < 1$ ist der Grenzwert gleich 0.

Beweis: Der Fall $|q| = 1$. Für $q = 1$ konvergiert die Folge gegen 1 (trivial). Für $q = -1$ gilt $d(x_n, x_{n+1}) = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist x_n nicht einmal eine Cauchyfolge.

Der Fall $|q| > 1$. Wir behaupten, x_n ist unbeschränkt im Sinne von (*)

$$\forall C \exists N \in \mathbb{N} (n \geq N \implies |x_n| > C) ,$$

also ist x_n keine Cauchyfolge. Benutze $|q| = 1 + x$ für geeignetes $x > 0$. Dann ist $|x_n| = |q|^n$, und aus der Bernoulli Ungleichung folgt

$$|x_n| = (1 + x)^n > 1 + nx > C$$

für alle $n \geq N > x^{-1}C$ (ein solches $N \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Archimedischen Axiom!).

Der Fall $|q| < 1$. Für $q \neq 0$ setze $\tilde{q} = q^{-1}$. Dann gilt $|\tilde{q}| > 1$, und die Behauptung des Lemmas folgt aus dem Kriterium 7.11 und der Unbeschränktheit (*) der geometrischen Folge \tilde{q}^n . [Es gilt $|q||\tilde{q}| = |q\tilde{q}| = |1| = 1$. Also $|\tilde{q}| = |q|^{-1}$, und $1 < |q|$ impliziert daher $|\tilde{q}| > 1$ (Lemma 3.9).] Der Fall $q = 0$ ist trivial.

7.13 Intervallteilung

Für $a \leq b$ definiert man das Intervall $I = [a, b]$ als die Menge $\{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$. Man nennt $b - a$ die Länge $l(I)$ des Intervalls. Der ‘Mittelpunkt’ ist definiert als der Punkt

$$\frac{a+b}{2} = a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2} .$$

Aus $I =$ erhält man zwei Intervalle

$$I' = \left[a, \frac{a+b}{2} \right] , \quad I'' = \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

und es gilt $I = I' \cup I''$. Wie man leicht sieht, gilt $l(I') = l(I'') = \frac{1}{2}l(I)$.

Lemma: Für $x, y \in I$ gilt $d(x, y) \leq l(I)$,

denn oBdA $a \leq x \leq y \leq b$, und somit $d(x, y) = y - x \leq b - a = l(I)$.

7.14 Teilfolgen beschränkter Folgen

In einem archimedischen Körper K besitzt jede beschränkte Folge x_n eine Teilfolge² X_n , welche eine Cauchyfolge ist.

7.14.1 Hinweis

Wie später zu sehen ist, sind beschränkte Intervalle $[a, b]$ folgenkompakte, metrische Räume (siehe auch 11.5, Seite 59).

²Teilfolgen entstehen per Definition durch Weglassen von Folgengliedern aus einer gegebenen Folge

7.14.2 Beweis Teil 1

Beschränktheit der Folge: Es existiert also ein Intervall I mit

$$x_n \in I = [a, b] \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Wir zerteilen $\mathbb{N} = I' \cup I''$ wie oben beschrieben. Dann gilt

$$\mathbb{N} = \underbrace{A}_{\{n \in \mathbb{N}, x_n \in I'\}} \cup \underbrace{B}_{\{n \in \mathbb{N}, x_n \in I''\}}$$

\mathbb{N} ist eine unendliche Menge. Daher ist entweder A unendlich; in diesem Fall setze $I_1 = I'$. Ist A endlich und somit B unendlich, setze $I_1 = I''$. Als Konsequenz: Die Folge x_n enthält eine Teilfolge y_n mit Werten in I_1 , welche dadurch entsteht, alle Folgenglieder weggelassen werden, welche nicht in I_1 liegen.

Beispiel: Sei $x_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ und $I = [-1, 1]$, also $x_0 = 1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, \dots$. Dann ist $I_1 = [-1, 0]$ und $y_0 = -\frac{1}{2}, y_1 = -\frac{1}{4}, y_2 = -\frac{1}{6}, \dots$.

7.14.3 Beweis Teil 2 (Intervallschachtelung)

Durch Iteration erhält man eine absteigende Kette von Intervallen

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

der Länge

$$l(I_n) = \frac{1}{2^n} \cdot l(I) .$$

mit einer Ketten von Teilfolgen

$$\begin{array}{ll} x_0, x_1, x_2, \dots & \in I_0 \\ y_0, y_1, y_2, \dots & \in I_1 \\ z_0, z_1, z_2, \dots & \in I_2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

7.14.4 Beweis Teil 3 (Diagonaltrick)

Die Diagonalfolge x_0, y_1, z_2, \dots ist eine Teilfolge (!) der ursprünglichen Folge. Nenne sie ξ_n .

Diese Diagonalfolge ξ_n ist eine Cauchyfolge. Zum Nachweis sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu finden ist eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ so daß gilt:

$$n, m \geq N \implies d(\xi_n, \xi_m) < \varepsilon .$$

Aus $n, m \geq N$ folgt:

$$\underbrace{\xi_n}_{\in I_n}, \underbrace{\xi_m}_{\in I_m} \in I_N$$

Somit gilt

$$d(\xi_n, \xi_m) \leq l(I_n) = \frac{(b-a)}{2^N}.$$

Wähle $N \geq 2$ so groß, daß $2^N = (1+1)^N > 1+N > \varepsilon^{-1}(b-a)$ (Bernoulli Ungleichung und Archimedisches Axiom!). Dann ist $\frac{(b-a)}{2^N} < \varepsilon$. Also ist $d(\xi_n, \xi_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Also ist die Teilfolge ξ_n eine Cauchyfolge, was zu zeigen war.

Beispiel: Für $x_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$ ist die oben konstruierte Teilfolge ξ_n gegeben durch

$$\xi_0 = -\frac{1}{2}, \quad \xi_1 = -\frac{1}{4}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{8}, \quad \xi_3 = -\frac{1}{16}, \dots$$

7.15 Monotone beschränkte Folgen

In einem archimedischen Körper ist jede monoton wachsende Folge

$$x_n \leq x_{n+1} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

welche nach oben beschränkt ist $x_n \leq C$, eine Cauchyfolge. (Ditto für monoton fallende nach unten beschränkte Folgen).

Beweis: Nach Annahme ist dann die Folge x_n beschränkt. Wegen 7.14 existiert eine Teilfolge \tilde{x}_n der Folge, welche eine Cauchyfolge ist: $d(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) < \varepsilon$ für alle $i, j \geq \tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon)$. Es gibt ein $N \geq \tilde{N}$, so dass $\tilde{x}_{\tilde{N}} = x_N$ (Teilfolge!). Für $n, m \geq N$ (oBdA $n \leq m$) gilt dann

$$\tilde{x}_{\tilde{N}} \leq x_n \leq x_m \leq \tilde{x}_m$$

wegen der Monotonie der Folge x_n . Also $d(x_n, x_m) \leq d(\tilde{x}_{\tilde{N}}, \tilde{x}_m)$ und $\tilde{N}, m \geq \tilde{N}$. Dies zeigt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

7.16 Abgeschlossenheit

Sei $I = [a, b]$ oder $I = [a, \infty)$ oder $I = (\infty, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Ist $x_n \in I$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x , dann gilt $x \in I$.

Beweis: Angenommen $a \leq x_n$ gilt für alle n . Wäre $x < a$, dann gibt es ein n mit $d(x_n, x) < \varepsilon$ für $\varepsilon = a - x > 0$. Also $x_n = x + (x_n - x) \leq x + d(x_n, x) < x + \varepsilon = a$ im Widerspruch zu $x_n \geq a$. Es folgt $x \geq a$.

Folgerung: Insbesondere gilt für jede monoton wachsende beschränkte Folge: Alle Folgenglieder x_n sind kleiner gleich dem Limes

$$x_n \leq \lim_{i \rightarrow \infty} x_i .$$

Kapitel 8

Der Körper der reellen Zahlen

Konvergente Folgen sind immer Cauchyfolgen, wie wir bereits gesehen haben. Die Umkehrung gilt im allgemeinen aber nicht. $K = \mathbb{Q}$ ist ein archimedischer Körper, aber \mathbb{Q} ist nicht vollständig¹.

Ein archimedischer Körper K heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in K konvergiert

Wir fixieren im folgenden einen archimedischen vollständigen Körper², und bezeichnen diesen Körper als den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Folgen in \mathbb{R} nennen wir reelle Folgen.

Für reelle Folgen gilt:

- x_n konvergiert genau dann, wenn x_n eine Cauchyfolge ist.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt, und besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert.
- Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.
- Ist x der Grenzwert einer Folge, die in einem abgeschlossenen Intervall I enthalten ist, dann gilt $x \in I$.
- Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.
- Jede nicht leere nach oben beschränkte³ Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine reelle kleinste obere Schranke $\sup(X)$.

Nur die letzte Aussage bedarf noch eines Beweises.

¹siehe Übungsblatt

²Man kann aus den Peano-Axiomen ableiten, dass ein solcher Körper existiert

³Ist die Menge nicht nach oben beschränkt, schreibt man $\sup(X) = \infty$

8.1 Obere Schranken

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine reelle Zahl y heisst obere Schranke von X , wenn gilt

$$x \leq y \quad , \quad \forall x \in X .$$

Die Menge Y aller oberen Schranken von X ist genau dann nicht leer, wenn X nach oben beschränkt ist.

1.Bemerkung: Die Menge Y ist unter Limesbildung abgeschlossen. Sei $y_n \in Y$ eine Folge mit Grenzwert y . Ist $x \in X$, dann gilt $x \leq y_n$ für alle n . Also gilt $x \leq y$ wegen 7.16. Da dies für alle $x \in X$ gilt, folgt $y \in Y$.

2.Bemerkung: Ist $a_n \notin Y$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a , dann gilt $a \leq y$ für alle $y \in Y$. Dies folgt wieder aus 7.16, denn für a_n existiert ein $x_n \in X$ mit $a_n < x_n$. Also wegen $x_n \leq y$ gilt daher $a_n \leq y$ für alle n .

Nun zum Existenzbeweis des Supremums $\sup(X)$: Wähle $a_0 \notin Y$ und $b_0 \in Y$. Dann gilt $a_0 \leq b_0$ (Bemerkung 2). Zerlege $I = [a_0, b_0]$ in zwei Teilintervalle $I = I' \cup I''$ um den Mittelpunkt $\frac{a_0+b_0}{2}$. Setze $I_1 = I'$ beziehungsweise $I_1 = I''$, je nachdem ob $\frac{a_0+b_0}{2}$ in Y oder nicht in Y liegt. Dann gilt $I_1 = [a_1, b_1]$ mit $a_1 \notin Y$ und $b_1 \in Y$. Iteriert man dies, erhält man eine Intervallschachtelung, und damit eine Kette von Zahlen $a_n \notin Y$ und $b_n \in Y$ mit

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \quad \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 .$$

Die reellen Folgen a_n und b_n sind monoton und beschränkt, und konvergieren daher. Der Grenzwert b der Folge $b_n \in Y$ liegt in Y (Bemerkung 1). Es gilt

$$b - a = \lim_{n \rightarrow \infty} (b - b_n + b_n - a_n + a_n - a)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (b - b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0 + 0 + 0 = 0 ,$$

denn $a_n - a$ und $b - b_n$ sind Nullfolgen, ebenso wie die 'geometrische' Folge $b_n - a_n = \frac{l(I)}{2^n}$. Es folgt $a = b$. Jedes $y \in Y$ ist eine obere Schranke für den Grenzwert a der Folge $a_n \notin Y$ (Bemerkung 2). Gäbe es ein $y \in Y$ mit $y < b$, würde daraus folgen $a \leq y < b$ im Widerspruch zu $a = b$. Also ist b das kleinste Element der Menge Y , und damit die gesuchte kleinste obere Schranke von X

$$\sup(X) = a = b .$$

Beispiel: Für $X = (0, 1)$ ist $Y = [1, \infty)$ und $\sup(X) = 1$. Für $X = (0, 1]$ ist wieder $Y = [1, \infty)$, und $\sup(X) = 1$.

Ist das Supremum $\sup(X)$ in X enthalten, nennt man die Zahl das Maximum $\max(X)$ von X . Analog definiert das Infimum $\inf(X)$ einer nach unten beschränkten Menge X , respektive das Minimum $\min(X)$.

Kapitel 9

Reihen

Wir sind nun in Lage zu präzisieren, was wir in den Vorbemerkungen bereits auf naive Weise getan haben, nämlich was unter einer unendlichen Summe zu verstehen ist. Dies führt uns auf den Begriff der Reihen. Eine Reihe ist eine Folge, welche aus einer Folge x_n reeller Zahlen entsteht durch sukzessive Addition $x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \dots$. Auf diese Weise entsteht eine neue Folge reeller Zahlen, die Folge s_n der Partialsummen. Diese ist rekursiv definiert durch $s_n = s_{n-1} + x_n$ und $s_0 = x_0$, und man schreibt auch

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^n x_i \\ &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n . \end{aligned}$$

Man sagt ‘die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert’, wenn die zugeordnete Folge s_n der Partialsummen eine konvergente Folge ist. Ist dies der Fall, dann bezeichnet man gleichzeitig den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$. Ist die Folge der Partialsummen nicht konvergent, sagt man $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert nicht.

9.0.1 Dezimalzahlen

Etwa

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^{-i} \\ &= a_0, a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

für eine Ziffernfolge $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definiert eine Reihe. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass jede solche Reihe konvergiert (Majorantenkriterium, geometrische Reihe). Dies kann man natürlich auch aus der Konvergenz monotoner beschränkter Folgen ableiten. Der Grenzwert definiert die Dezimalzahl

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i} .$$

9.1 Cauchy Kriterium für Reihen

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, so dass gilt

$$m \geq n \geq N(\varepsilon) \implies \left| \sum_{i=n+1}^m x_i \right| < \varepsilon$$

Beweis: Die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{i=0}^n x_i$ konvergiert genau dann, wenn s_n eine Cauchyfolge ist. Letzteres bedeutet: $\forall \varepsilon \exists N$ so dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$d(s_n, s_m) = \left| \sum_{i=n+1}^m x_i \right| < \varepsilon .$$

9.1.1 Folgerung 1

Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, dann ist x_n notwendiger Weise eine Nullfolge.

Beweis: Konvergiert die Reihe, dann liefert im Fall $m = n + 1$ das Cauchy Kriterium die Aussage

$$m \geq N(\varepsilon) \implies |x_m| < \varepsilon .$$

Also ist x_m eine Nullfolge.

9.1.2 Folgerung 2 Leibnizkriterium

Für eine monoton fallende Nullfolge x_n konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$.

Beweis: Wir benutzen $(x_i - x_{i+1}) \geq 0$ für alle $i \geq 0$ (Monotonie). Für ungerades $m - n \geq 1$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_n - x_{n+1}) + \dots + (x_{m-1} - x_m) \\ &= x_n - (x_{n+1} - x_{n+2}) - \dots - (x_{m-2} - x_{m-1}) - x_m \\ &\leq x_n - x_m = d(x_n, x_m) , \end{aligned}$$

und da x_n eine Cauchyfolge ist:

$$\left| \sum_{i=n}^m (-1)^i \cdot x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n, m \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Ist $m - n \geq 0$ gerade, folgt aus dem eben Bewiesenen und der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{i=n}^m (-1)^i \cdot x_i \right| < |x_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

da für eine Nullfolge $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt für alle genügend grossen n . Damit ist das Cauchy Kriterium auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$ anwendbar!

9.1.3 Beispiel

- Die Leibnizsche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert (Leibnizkriterium).¹

9.1.4 Majorantenkriterium

Seien a_n und C_n reelle Folgen derart, dass gilt $|a_n| \leq C_n$ für (fast) alle n . Dann gilt: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} C_n .$$

Definition: Falls dieser Fall vorliegt, nennt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

eine Majorantenreihe.

Wegen $a_n \leq |a_n| \leq C_n$ konvergiert eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Beweis: Da $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ konvergiert, gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $\sum_{i=n+1}^m C_n \leq \varepsilon$ für $N \leq n+1 \leq m$ nach 9.1 (die Beträge können hier weggelassen werden wegen $C_i \geq 0$). Nach 9.1 genügt für die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $|\sum_{i=n+1}^m a_i| < \varepsilon$ für alle $N \leq n+1 \leq m$. Dies folgt unmittelbar aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (welche durch Induktion aus der Dreiecksungleichung 4.1 folgt)

$$\left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| \leq \sum_{i=n+1}^m C_i < \varepsilon$$

Die Ungleichung für die Grenzwerte: Da

$$\sum_{i=0}^n C_i - \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^n (C_i - a_i) \geq 0 ,$$

gilt auch im Limes $\sum_{n=0}^{\infty} C_i - \sum_{n=0}^{\infty} a_i \geq 0$ nach 7.16.

¹gegen den Grenzwert $\log(2)$ wie wir sehen werden

9.2 Geometrische Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ konvergiert nicht (klar)
- Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert genau dann wenn $|q| < 1$ gilt, und hat in diesem Fall den Wert

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)}.$$

Die letzte Aussage benutzt folgende Formel für die Partialsummen der geometrischen Reihe

9.2.1 Die geometrische Summe

Für $q \neq 1$ gilt

$$\boxed{\sum_{n=0}^N q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}}$$

Beweis: Die Formel stimmt für $N = 0$. Gilt die Formel für N , dann auch für $N + 1$ wegen

$$\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} + q^{N+1} = \frac{1 - q^{N+1} + (q^{N+1} - q \cdot q^{N+1})}{1 - q} = \frac{1 - q^{N+2}}{1 - q}.$$

Der Limes $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$: Wie wir bereits wissen, konvergiert die Reihe nicht für $q = 1$. Ist $q \neq 1$ existiert wegen 7.8.1 der Limes

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} - \frac{q}{1 - q} \lim_{N \rightarrow \infty} q^N$$

genau dann, wenn $|q| < 1$ (siehe 7.12), und hat dann den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$.

Beispiel: Die Dezimalreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$ hat als Majorante die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{9}{10^i}$, welche im Prinzip die geometrische Reihe für $q = 1/10$ ist. Daher konvergiert die Dezimalreihe und definiert eine Zahl $\leq \frac{9}{1-q} = \frac{9}{1-\frac{1}{10}} = 10$.

9.2.2 Quotientenkriterium

Gilt $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \leq q < 1$ und $x_n \neq 0$ (für fast alle n), dann konvergiert die Reihe.

Beweis: Dann gilt $|x_n| \leq C \cdot q^n$ für alle n für eine geeignete gewählte Konstante C (benutze dazu vollständige Induktion). Die Konvergenzaussage (absolute Konvergenz!) führt man nun mittels des Majorantenkriteriums auf den Fall der geometrischen Reihe zurück!

9.2.3 *Verdichtung

Sei a_n eine monoton fallende Folge von Zahlen $a_n \geq 0$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert} .$$

Beweis: Für $N = 2^M - 1$ gilt

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^M 2^n a_{2^n} \right) \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n \right) \leq \left(\sum_{n=0}^{M-1} 2^n a_{2^n} \right)$$

wegen

$$\begin{array}{rcccc} a_2 & +2a_4 & +4a_8 & + \dots \\ a_1 & +(a_2 + a_3) & +(a_4 + a_5 + a_6 + a_7) & + \dots \\ a_1 & +2a_2 & +4a_4 & + \dots \end{array}$$

$a_2 \leq a_1 \leq a_1$, $2a_4 \leq (a_2 + a_3) \leq 2a_2$, $4a_8 \leq (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \leq 4a_4$ und so weiter.

Da die Folgen der Partialsummen monoton wachsend sind wegen $a_n \geq 0$, ist Konvergenz gleichbedeutend mit der Beschränktheit der Partialsummen. Obige Abschätzung beschränkt die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ durch die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ und umgekehrt.

Verdichtung der Harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Die Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht, wegen $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert dagegen, denn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergiert.

9.3 Exponentialreihe

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Den Grenzwert nennt man

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Wir definieren hierbei „n Fakultät“ durch

$$\begin{aligned} n! &:= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= \prod_{i=1}^n i \end{aligned}$$

mit $0! := 1$. Beispiel: $5! = 120$.

Beweis: Folgt für $x \neq 0$ aus dem Quotientenkriterium, denn $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 2|x|$. Der Fall $x = 0$ ist trivial.

9.3.1 *Die Eulersche Zahl

Für $x \geq 0$ konvergiert die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

und hat den Grenzwert

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für $x = 1$ definiert dies die Eulersche Zahl e .

Beweis: Wir benutzen das

9.3.2 Binomialtheorem

Sei K ein archimedischer Körper. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen $\binom{n}{i} \in \mathbb{N}$ für $i = 0, 1, \dots, n$, so dass für $x, y \in K$ gilt:

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Zusätzlich ist:

- $\binom{n}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Der Beweis erfolgt auf einem der Übungsblätter.

Beispiel $n = 2$:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} y^2 x^0.$$

9.3.3 *Beschränktheit der Folge x_n

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 x_n &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n+1-i)}{i!} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \frac{n-\nu}{n} \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Für $i = 0$ ist das Produkt per Definition gleich 1. Für $0 \leq \nu \leq i-1 < n$ gilt

$$0 < \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \leq 1,$$

also wegen $x \geq 0$

$$x_n \leq \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \leq \exp(x).$$

Die rechte Ungleichung folgt aus 7.16.

9.3.4 *Monotonie der Folge

Für $n \geq m$ gilt $x_n \geq x_m$ wegen

$$\begin{aligned}
 x_n &= \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \\
 &\geq y_{n,m} := \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \\
 &\geq x_m = \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{m}\right)
 \end{aligned}$$

denn $1 - \frac{\nu}{n} \geq 1 - \frac{\nu}{m} \Leftrightarrow \frac{\nu}{m} \geq \frac{\nu}{n} \Leftrightarrow n \geq m$ (für $\nu \neq 0$).

9.3.5 *Konvergenz der Folge

Da x_n monoton wächst, und $x_n \leq \exp(x)$ gilt, konvergiert die Folge (7.15), und aus 7.16 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \exp(x).$$

9.3.6 *Untere Schranke

Aus $(x_n - y_{n,m}) \geq 0$ für $n \geq m$ (Schritt 9.3.4) folgt (wegen 7.16)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_{n,m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,m} \geq 0,$$

denn der Limes

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,m} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!} \prod_{\nu=0}^{i-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

existiert. Also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \sum_{i=0}^m \frac{x^i}{i!}$$

und damit im Limes $m \rightarrow \infty$ wegen 7.16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \exp(x)$$

Übungsaufgabe: Zeige $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ existiert, sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

Bemerkung: Einen weniger mühevollen Beweis geben wir später in 16.7.2.

9.4 Umordnen

Eine Umordnung einer Reihe oder Folge wird definiert durch eine bijektive Abbildung

$$\alpha : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}.$$

Aus der Bijektivität folgt insbesondere: Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \in \mathbb{N}$ so, dass gilt

$$\alpha(\{0, 1, 2, \dots, M\}) \supseteq \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

9.4.1 Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergent. Sei $\alpha : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, und

$$y_n := x_{\alpha(n)}$$

die umgeordnete Folge. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

Beweis Umordnungssatz: Die Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^m x_n$ konvergieren.

Teil 1:

Nach dem Cauchy Kriterium gilt weiterhin $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit²

$$N \leq n \leq m \implies \left| \sum_{i=n}^m x_i \right| < \varepsilon$$

Teil 2:

Es existiert dann ein $M = M(\varepsilon, N)$, so dass gilt

$$\alpha(\{0, 1, \dots, M\}) \supseteq \{0, 1, \dots, N\}$$

insbesondere daher wegen $y_i = x_{\alpha(i)}$

$$x_0, x_1, \dots, x_N \quad \text{eine Teilfolge von} \quad y_0, \dots, y_M$$

²aufgrund der absoluten Konvergenz

Teil 3:

Sei nun $m \geq M = M(N, \varepsilon)$ beliebig. Bezeichne $\tilde{s}_m = \sum_{n=0}^m y_n$ die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe. Dann gilt³

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_m - s_m| &= \left| \sum_{n=0}^m y_n - \sum_{n=0}^m x_n \right| \\ &\stackrel{!}{=} \left| \sum_{i=N+1}^K \varepsilon_i x_i \right| \end{aligned}$$

Hierbei sind $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ geeignete Zahlen und $K = K(\varepsilon, N, m) \geq N + 1$ ist eine geeignete natürliche Zahl.

Teil 4:

Aus der Dreiecksungleichung folgt daher

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_m - s_m| &\leq \sum_{i=N+1}^K \underbrace{|\varepsilon_i|}_{\in \{1,0\}} |x_i| \\ &\leq \sum_{i=N+1}^K |x_i| < \varepsilon \end{aligned}$$

wegen $K \geq N + 1 \geq N = N(\varepsilon)$ und Schritt 1. Also ist $\tilde{s}_m - s_m$ eine Nullfolge.

Teil 5: Schluß des Beweises

Da s_m konvergiert, und da $\tilde{s}_m - s_m$ eine Nullfolge ist (Schritt 4), liefert $\tilde{s}_m = (\tilde{s}_m - s_m) + s_m$ im Limes $m \rightarrow \infty$ die Konvergenz von \tilde{s}_m mit dem Limes

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{s}_m = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m} .$$

9.4.2 Zerlegungssatz

Gegeben sei eine Folge x_n . Sei $\mathbb{N} = I_1 \sqcup I_2$ eine disjunkte Zerlegung in zwei unendliche Teilmengen. Dann existieren Bijektionen $\nu : \mathbb{N} \cong I_1$ und $\mu : \mathbb{N} \cong I_2$. Jede Wahl von ν und μ definiert eine Umordnung $y_{2i} = x_{\nu(i)}$ und $y_{2i+1} = x_{\mu(i)}$ der Folge x_n .

Ist $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$ absolut konvergent, dann kann man auf Grund des Umordnungssatzes anstelle von $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$ auch $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ schreiben. Die umgeordnete Reihe konvergiert gegen

$$\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{j \in I_2} x_j$$

³Hier benutzen wir, dass der Umordnungssatz für endliche Summen in jedem Körper gilt. Dies zeigt man durch Induktion nach der Zahl der Summanden mit Hilfe des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes. Übungsaufgabe!

(beide Reihen konvergieren absolut) und dies ist wegen dem Umordnungssatz gleich

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n .$$

Ohne die Annahme der absoluten Konvergenz ist diese Aussage im allgemeinen nicht mehr richtig. Siehe Abschnitt 1.1.

Verschärfung: Mit derselben Methode kann man für eine absolut konvergente Reihe sogar zeigen

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in I_{\nu}} x_j \right)$$

für eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{N} = \coprod_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu}$ in abzählbar viele Teilmengen I_{ν} .

9.5 Die Faltungsreihe

Die Folge $c_n := \sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i}$ nennt man die Cauchyfaltung der Folgen a_n und b_n und schreibt

$$c_n = (a * b)_n .$$

Konvergieren $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n$ absolut, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Beweis des Doppelreihensatzes: Aus den Folgen a_i und b_i definiert man eine Doppelfolge

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(i, j) \mapsto a_i \cdot b_j .$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann man mit den ganzzahligen Punkten im rechten oberen Quadranten in der Ebene identifizieren. Wählt man irgend eine Bijektion $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dann erhält man durch die Zusammensetzung eine Folge

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & \searrow \tilde{\xi} & \downarrow \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

1. Wahl: Eine mögliche Wahl für ξ ist gegeben durch den ‘Quadratweg’

$$\begin{array}{ccc} \bullet 8 & \bullet 7 & \bullet 6 \\ \bullet 3 & \bullet 2 & \bullet 5 \\ \bullet 0 & \bullet 1 & \bullet 4 \end{array}$$

Für diese Wahl von ξ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ absolut. Dazu genügt die Beschränktheit von $\sum_{k=0}^N |\tilde{\xi}_k|$. Dies lässt sich nach oben abschätzen durch

$$\begin{aligned}
& \sum_{(i,j) \in \text{genügend großes Quadrat}} |a_i||b_j| \\
= & \left(\begin{array}{c} \text{Oberkante des Quadrats} \\ \sum_{i=0} \end{array} |a_i| \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Oberkante des Quadrats} \\ \sum_{j=0} \end{array} |b_j| \right) \\
& \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|.
\end{aligned}$$

Ihr Grenzwert $\sum_{k=0}^N \tilde{\xi}_k$ ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen. Dieser Grenzwert stimmt überein mit dem Grenzwert der Teilfolge

$$\sum_{k=0}^N d_k$$

für

$$\begin{aligned}
d_0 &= a_0 b_0 \\
d_1 &= a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1 \\
d_2 &= a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_0 b_2
\end{aligned}$$

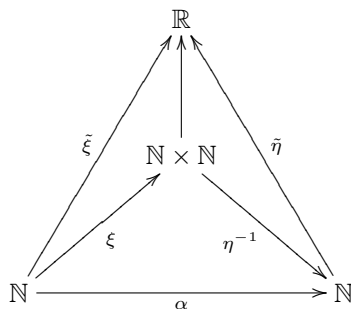
usw. Diesen Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k$ kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^N d_k \right) & \stackrel{!}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{(i,j) \in [0, \dots, N]^2} a_i \cdot b_j \right) \\
& \stackrel{\text{Distributivgesetz}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{i=0}^N a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^N b_j \right) \right] \\
& = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j
\end{aligned}$$

2.Wahl: Analog definiert man eine Bijektion $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit Hilfe des ‘Dreieckswegs’

$$\begin{array}{cccc}
\bullet & & & 9 \\
\bullet & & & 8 \\
\bullet & \bullet & & 7 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 6 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 5 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 4 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 3 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 2 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 1 \\
\bullet & \bullet & \bullet & 0
\end{array}$$

sowie eine zugeordnete Folge $\tilde{\eta} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\eta}_k$ konvergiert also nach dem Umordnungssatz, und hat denselben Grenzwert wie $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$. Die Umordnungsabbildung ist $\alpha = \eta^{-1} \circ \xi$



Andererseits gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\eta}_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$, da die Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^n c_k$ eine Teilfolge der konvergenten Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^n \tilde{\eta}_k$ ist. Es folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

wie behauptet.

Beispiel: Für $a_i = \frac{x^i}{i!}$ und $b_j := \frac{y^j}{j!}$ gilt nach dem Binomialtheorem

$$c_n := \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Daraus folgt wegen 9.5 die

9.5.1 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)}$$

Kapitel 10

Exkurs in die Lineare Algebra

10.1 Der n-dimensionale R-Vektorraum

Der Vektorraum \mathbb{R}^n ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} .$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ erklärt

$$\begin{aligned} \lambda x &= \lambda(x_1, \dots, x_n) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) . \end{aligned}$$

Sei $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Summe erklärt durch

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

10.2 Das Skalarprodukt

Sei $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das Skalarprodukt (x, y) eine reelle Zahl erklärt durch

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} .$$

10.3 Definition der Norm

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Die Norm $\|x\| = |x|_{\mathbb{R}^n}$ von x ist definiert durch

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x, x)}} .$$

Anmerkung: In einer der Übungsaufgaben haben wir gesehen, dass für jede reelle Zahl $\kappa \geq 0$ eine reelle Zahl $\eta \geq 0$ existiert, mit $\eta^2 = \kappa$. Die einzigen Lösungen der Gleichung $x^2 = \kappa$ sind dann $x = \pm\eta$. Man nennt $\eta =_+ \sqrt{\kappa}$ die positive Wurzel aus κ , und $-\eta =_- \sqrt{\kappa}$ die negative Wurzel aus κ . Für $\kappa = 0$ stimmen beide Wurzeln überein.

Wegen

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

ist also $\|x\|$ wohldefiniert und

10.3.1

Es gilt $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und $\|x\| = 0$ genau dann wenn $x = 0$.

Anschaulich ist $\|x\|$ die Länge des Vektors x , was man sich leicht mit Hilfe des Satzes von Pythagoras klar machen kann.

10.3.2 Eine triviale Abschätzung

Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ gilt

$$\max_{i=1, \dots, n} (|x_i|) \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i=1, \dots, n} (|x_i|).$$

Dies sieht man sofort durch Quadrieren!

10.4 Schwarz'sche Ungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|}.$$

Beweisskizze: Entweder gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x = t \cdot y$ (Proportionalität!), dann ist die Aussage trivial wegen

$$\|t \cdot x\| = |t| \cdot \|x\| \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Oder x ist nicht proportional zu y . Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$0 < \|x - t \cdot y\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - ty_i)^2 = \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2$$

wegen $(x_i - ty_i)^2 = x_i^2 - 2tx_iy_i + t^2y_i^2$. Sei nun obdA $y \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{2t(x, y)}{\|y\|^2} + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} &> 0 \\ t^2 - \frac{2t(x, y)}{\|y\|^2} + \left(\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\right)^2 &> \frac{(x, y)^2}{\|y\|^4} - \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} \\ \left(t - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}\right)^2 &> \frac{(x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2}{\|y\|^4} \end{aligned}$$

Setzt man $t = \frac{(x,y)}{\|y\|^2}$, dann folgt $(x,y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 < 0$.

10.4.1 Verschärfung

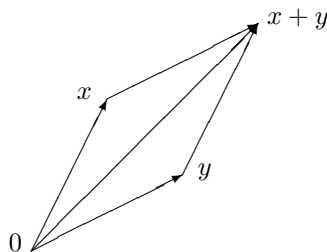
Dies zeigt sogar $|(x,y)| < \|x\| \cdot \|y\|$, wenn x, y nicht proportional zueinander sind.

10.4.2 Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|} .$$

10.4.3 Bild



Beweis der Dreiecksungleichung: Es genügt $\|x + y\|^2 \leq (\|x + y\|)^2$ zu zeigen, da beide Seiten der Dreiecksungleichung positiv sind. Also genügt zu zeigen

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 .$$

Die linke Seite ist $\|x\|^2 + 2 \cdot (x,y) + \|y\|^2$ (siehe oben für $t = -1$). Also folgt die gesuchte Dreiecksungleichung aus der Schwarz'schen Ungleichung

$$2 \cdot (x,y) \leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Bemerkung: Aus der Dreiecksungleichung $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|-y\|$ und $\|y\| = \|-y\|$ folgt nun

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Kapitel 11

Metrische Räume

Es sei X eine Menge und

$$\begin{aligned}d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\(x, y) &\mapsto d(x, y)\end{aligned}$$

Ein solches Paar (X, d) heißt metrischer Raum, wenn gilt

1. $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)

11.0.4 Beispiel

Der Euklidische Raum $X = \mathbb{R}^n$ ist ein metrischer Raum bezüglich der Euklidischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$.

Beweis: Die Symmetrie folgt aus $\| -z \| = \|z\|$. Die Dreiecksungleichung folgt aus 10.4.2, die erste Eigenschaft aus 10.3.1.

Konvention: Wir werden im folgenden oft von dem metrischen Raum \mathbb{R} oder \mathbb{R}^n sprechen, ohne d explizit zu nennen. In diesen Fällen ist stillschweigend immer die Euklidische Metrik gemeint.

11.0.5 Einschränken einer Metrik

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist (Y, d) wieder ein metrischer Raum.

11.1 Cauchyfolgen

Eine Folge $x_n \in X$ heißt Cauchyfolge im metrischen Raum (X, d) , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad (n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon) .$$

11.2 Konvergente Folgen

Eine Folge $x_n \in X$ heißt konvergent im metrischen Raum (X, d) falls gilt:

$$\exists x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies d(x, x_n) < \varepsilon) .$$

Wie im reellen Fall zeigt man nun

- Der Grenzwert x einer in (X, d) konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt, und man schreibt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n ,$$

und $d(x_n, x)$ ist eine reelle Nullfolge.

- Jede in (X, d) konvergente Folge ist eine Cauchyfolge in (X, d) .
- Jede Cauchyfolge in (X, d) ist beschränkt in (X, d) , das heisst: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $d(x_n, x_0) < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Beweise übertragen sich wörtlich.

11.3 Vollständige metrische Räume

Ein metrischer Raum (X, d) heisst vollständig, wenn jede Cauchyfolge in (X, d) in (X, d) konvergiert.

Beispiel: Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n ist vollständig. Dies folgt leicht aus der folgenden

Übungsaufgabe: Eine Folge von Punkten konvergiert im \mathbb{R}^n (ist eine Cauchyfolge im \mathbb{R}^n) genau dann wenn die n Koordinatenfolgen in \mathbb{R} konvergieren (bzw. Cauchyfolgen in \mathbb{R} sind).

11.4 Abgeschlossene Teilmengen

Eine Teilmenge

$$A \subseteq X$$

eines metrischen Raumes (X, d) heisst abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge x_n in (X, d) , deren Folgenglieder x_n in A liegen, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$$

Beispiel: Ein abgeschlossenes Intervall $A = [a, b]$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raumes \mathbb{R} . Siehe 7.16.

11.4.1

Ist $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen, metrischen Raum (X, d) , dann definiert die Einschränkung der Metrik d auf A einen vollständigen metrischen Raum (A, d) .

Beweis: Ist x_n eine Cauchyfolge in (A, d) , dann ist x_n auch eine Cauchyfolge in (X, d) . In (X, d) konvergiert daher die Folge x_n gegen einen Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, da (X, d) vollständig ist. Da A abgeschlossen in (X, d) ist, gilt $x \in A$. Man sieht dann sofort aus der Definition: x_n konvergiert gegen x in (A, d) .

11.5 Folgenkompaktheit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $x_n \in X$ eine in (X, d) konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiele:

- $X = [a, b]$ mit der Euklidischen Metrik. (Siehe 7.14).
- Jeder Quader $X = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ im \mathbb{R}^n mit der Euklidischen Metrik.

Offensichtlich ist jede abgeschlossene Teilmenge eines folgenkompakten metrischen Raumes wieder folgenkompakt (mit der eingeschränkten Metrik).

11.5.1 Hinweis

Offene Intervalle in \mathbb{R} mit der Euklidischen Metrik sind nicht folgenkompakt, ebensowenig wie \mathbb{R} selbst, denn die Folge $x_n = n$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

11.6 Der Banachsche Fixpunktsatz

Eine kontraktive Selbstabbildung f eines vollständigen metrischen Raums (X, d) in sich, besitzt einen eindeutig bestimmten Punkt¹ $\xi \in X$ mit der Eigenschaft

$$f(\xi) = \xi .$$

Zur Bezeichnung: Eine Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen heisst kontraktiv, wenn es eine reelle Zahl

$$\kappa < 1$$

gibt mit der Eigenschaft

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \kappa \cdot d_X(x, x')$$

für alle $x, x' \in X$.

11.6.1 Beweis der Eindeutigkeit

Wären $\xi \neq \xi' \in X$ Fixpunkte. Dann folgt aus $d(\xi, \xi') > 0$ und

$$d(\xi, \xi') = d(f(\xi), f(\xi')) \leq \kappa \cdot d(\xi, \xi')$$

ein Widerspruch.

11.6.2 Beweis der Existenz

Wir wählen $x_0 \in X$ beliebig und setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beschränktheit der Folge

Aus der Dreiecksungleichung folgt durch vollständige Induktion

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) .$$

Also

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + \kappa d(x_0, x_1) + \kappa^2 d(x_0, x_1) + \dots + \kappa^{n-1} d(x_0, x_1) ,$$

wegen der Kontraktivität. Z.B.

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \\ &\leq \kappa \cdot d(x_1, x_2) \\ &= \kappa \cdot d(f(x_0), f(x_1)) \leq \kappa^2 \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

¹genannt Fixpunkt

Wegen $|\kappa| < 1$ und $\frac{1}{1-\kappa} = 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots$,² erhält man

$$\boxed{d(x_0, x_n) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-\kappa}}$$

Cauchykonvergenz

Die Folge x_n ist eine Cauchyfolge in (X, d) : Sei oBdA $n, m \geq 1$ und wegen der Symmetrie von $d(\cdot, \cdot)$ obdA $n \leq m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \\ &\leq \kappa \cdot d(x_{n-1}, x_{m-1}), \end{aligned}$$

und durch Iteration:

$$d(x_n, x_m) \leq \kappa^n \cdot d(x_0, x_{m-n})$$

Aus der oben gefundenen Schranke folgt daher

$$d(x_n, x_m) \leq \kappa^n \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{1-\kappa}.$$

Da für eine beliebige Konstante C die geometrische Folge $\kappa^n \cdot C$ eine Nullfolge ist, gilt daher

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \left(N \leq n \leq m \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon \right).$$

Also ist x_n eine Cauchyfolge in (X, d) .

Konvergenz

Da X vollständig ist, konvergiert die Folge x_n in (X, d) . Sei

$$\boxed{\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

der Limes der Folge x_n .

Fixpunkteigenschaft

Aus der Dreiecksungleichung und der Kontraktivität folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq d(\xi, f(\xi)) \leq d(\xi, x_n) + d(x_n, f(\xi)) \leq d(\xi, x_n) + \kappa \cdot d(x_{n-1}, \xi).$$

Bildet man auf der rechten Seite den Limes $n \rightarrow \infty$, so folgt

$$0 \leq d(\xi, f(\xi)) \leq 0 + \kappa \cdot 0 = 0.$$

Also $d(\xi, f(\xi)) = 0$. Das heisst $f(\xi) = \xi$.

²siehe geometrische Reihe

11.7 *Das Newton Verfahren

Es gilt

$$\exp(0) = 1 .$$

Sei $\eta \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir suchen dann eine Lösung ξ der Gleichung

$$\exp(\xi) = 1 + \eta .$$

Wir wollen zeigen, dass für alle $|\eta| < 0.18$ eine solche Lösung ξ existiert.

Eine Hilfsfunktion: Betrachte dazu die reellwertige Hilfsfunktion

$$f(x) = x - \exp(x) + 1 + \eta$$

auf dem Intervall $X = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subseteq \mathbb{R}$. Das Intervall X ist ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der Euklidischen Metrik. Die Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine kontraktive Abbildung von (X, d) nach \mathbb{R}

$$d(f(x), f(y)) \leq \kappa \cdot d(x, y) \quad , \quad x, y \in X$$

für $\kappa = \exp(\frac{1}{2}) - 1 = 0.64\dots < 0.65$. Dies folgt aus der Monotonie von \exp (siehe Übungsaufgaben) und der nachfolgenden Hilfsrechnung 11.7.1.

Behauptung:

- f bildet X in sich ab, für $|\eta| < \frac{1-\kappa}{2}$.
- $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ ist kontraktiv

Die zweite Bedingung folgt aus $d(f(x), 0) \leq d(f(x), f(0)) + d(f(0), 0) \leq \kappa \cdot d(x, 0) + d(\eta, 0) \leq \frac{\kappa}{2} + \frac{1-\kappa}{2} = \frac{1}{2}$.

Fixpunktgleichung:

$$\xi = f(\xi) \iff \xi = \xi - \exp(\xi) + 1 + \eta \iff \exp(\xi) = 1 + \eta .$$

Somit zeigt der Fixpunktsatz im vorliegenden Fall:

$$[0.82, 1.18] \subseteq \exp\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Der Beweis des Fixpunktsatzes war konstruktiv, und liefert ein schnell konvergierendes, und leicht zu programmierendes Computerprogramm zur Bestimmung des Logarithmus $\xi = \log(1 + \eta)$.

11.7.1 Hilfsrechnung

Für die reelle Funktion $f(x) = 1 + x - \exp(x) + \eta$, definiert auf ganz \mathbb{R} , gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(y) &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-x^n + y^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} (y-x) \cdot \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}{n!} \\
 &= (y-x) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}{n!}
 \end{aligned}$$

Also wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 d(f(x), f(y)) &\leq |y-x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}}{n!} \right| \\
 &\leq |y-x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \max(|x|, |y|)^{n-1}}{n!} \\
 &= |y-x| \cdot \left(-1 + \exp(\max(|x|, |y|)) \right) \\
 &= d(x, y) \cdot \left(-1 + \exp(\max(|x|, |y|)) \right)
 \end{aligned}$$

Kapitel 12

Stetige Abbildungen

Eine Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen heisst stetig auf (X, d_X) , wenn die Abbildung f mit beliebiger Limesbildung¹ „vertauscht“

$$\boxed{f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}$$

12.0.2 Variante: Stetigkeit im Punkt ξ

Die Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heisst stetig im Punkt $\xi \in X$, falls für alle Folgen $x_n \in X$ gilt

$$\boxed{x_n \rightarrow \xi \text{ impliziert } f(x_n) \rightarrow f(\xi)}$$

Anders formuliert: $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ist stetig im Punkt $\xi \in X$, falls gilt

$$\lim_{x_n \rightarrow \xi} f(x_n) = f\left(\lim_{x_n \rightarrow \xi} x_n\right)$$

Offensichtlich ist $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ stetig genau dann, wenn f stetig in allen Punkten ξ von X ist.

12.0.3 Beispiele

Die folgenden Abbildungen sind stetig:

1. Die identische Abbildung $id_X : (X, d_X) \rightarrow (X, d_X)$ definiert durch

$$id_X(x) = x .$$

2. Die konstante Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$, definiert durch $f(x) = y_0$ (für einen festen Punkt y_0 von Y).

¹Insbesondere führt f konvergente Folgen in konvergente Folgen über. Erinnerung an die Eigenschaft linearer Abbildungen mit Addition und Skalarmultiplikation zu vertauschen.

3. Die Projektion $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf die i -te Koordinate

$$(x(1), x(2), \dots, x(n)) \mapsto x(i) .$$

4. Kontraktive Abbildungen sind stetig.

5. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann ist

$$f(x) = d(x, x_0)$$

stetig auf (X, d) mit Werten in \mathbb{R} .

(Also für $X = \mathbb{R}, x_0 = 0$ ist die Abbildung $f(x) = |x|$ stetig auf \mathbb{R}).

Beweis: 1) Für die Identität ist die Aussage trivial. 2) Für die konstante Abbildung ebenfalls, da die konstante Folge immer konvergiert. 3) Nur zur Projektionsabbildung: Nach einer Übungsaufgabe (benutze 10.3.2) konvergiert eine Folge von Vektoren in \mathbb{R}^n genau dann, wenn ihre n Koordinatenfolgen konvergieren. Dies impliziert die Stetigkeit der Koordinatenprojektionen. 4) Ist f kontraktiv, dann folgt aus $x_n \rightarrow \xi$ insbesondere $0 \leq d(f(x_n), f(\xi)) \leq \kappa \cdot d(x_n, \xi) \rightarrow 0$. Also $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. (Für das Argument wird $\kappa < 1$ nicht benötigt). 5) Es genügt für $f(x) = d_X(x, x')$ zu zeigen $d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x')$ wegen 4) mit $\kappa = 1$. Dies folgt aber aus der unteren Dreiecksungleichung

12.0.4 Untere Dreiecksungleichung

In einem metrischen Raum (X, d_X) gilt für alle $x, x', z \in X$

$$\boxed{|d_X(x, z) - d_X(x', z)| \leq d_X(x, x')} .$$

Beweis: Es gilt $d_X(x, z) \leq d_X(x, x') + d_X(x', z)$, also $d_X(x, z) - d_X(x', z) \leq d_X(x, x')$. Da die rechte Seite symmetrisch in x, x' ist und positiv, folgt durch vertauschen von x und x' daher $|d_X(x, z) - d_X(x', z)| \leq d_X(x, x')$.

12.1 Komposition

Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig: Ist f stetig im Punkt ξ und ist g stetig im Punkt $f(\xi)$, dann ist $g \circ f$ stetig im Punkt ξ .

Beweis: Seien $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ und $g : (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ stetig. Dann gilt für jede in (X, d_X) konvergente Folge $x_n \rightarrow \xi$

$$y_n = f(x_n) \rightarrow \eta = f(\xi) .$$

Da g stetig ist, gilt wegen $y_n \rightarrow \eta$ in (Y, d_Y)

$$g(y_n) = (g \circ f)(x_n) \rightarrow g(\eta) = (g \circ f)(\xi) .$$

Also folgt $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(\xi)$ aus $x_n \rightarrow \xi$. Somit ist $g \circ f$ stetig.

12.2 Weitere Permanenzeigenschaften

Für stetige, reellwertige Funktionen

$$f, g : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$$

und $\xi \in X$ ist

- $f \pm g$ stetig
- $f \cdot g$ stetig
- $\frac{f}{g}$ stetig in ξ , falls gilt $g(\xi) \neq 0$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den ersten Fall. Die anderen Beweise sind ähnlich. Für $x_n \rightarrow \xi$ ist zu zeigen

$$(f + g)(x_n) \rightarrow (f + g)(\xi),$$

das heisst $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(\xi) + g(\xi)$. Dies folgt aber sofort aus 7.8.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

12.2.1 Polynome sind stetig

Jedes Polynom

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ definiert eine stetige Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis: Satz 12.1 + 12.2

12.2.2 Gebrochen rationale Funktionen

Seien $P(x), Q(x)$ Polynome, und $Q(x)$ habe keine Nullstelle im Intervall $[a, b]$. Dann ist die gebrochen rationale Funktion

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig auf $[a, b]$.

12.2.3 Die Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig (ebenso die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$).

Beweis: Wegen $\exp(x) = \exp(x - \xi) \cdot \exp(\xi)$ ist $\exp = g \circ f$ für $f(x) = x - \xi$ und $g(y) = c \cdot \exp(y)$ für die Konstante $c = \exp(\xi)$. Um die Stetigkeit von \exp im Punkt $x = \xi$ zu zeigen, genügt es daher die Stetigkeit von g im Punkt $y = 0$ zu zeigen (benutze 12.1). Es genügt daher die Stetigkeit von \exp im Punkt Null zu zeigen.

Auf $I = [-0.5, 0.5]$ gilt $\exp(x) = 1 + x - f(x)$ für eine kontraktive Funktion (11.7). f ist daher stetig auf I (12.0.3), also auch $\exp(x)$ (12.2). Somit ist $\exp(x)$ stetig im Punkt Null.

12.3 Der Nullstellensatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$f(a) \leq 0 \quad , \quad f(b) \geq 0 \quad ,$$

(oder umgekehrt). Dann existiert eine Nullstelle ξ von f im Intervall $[a, b]$.

Beweis: Die Menge

$$X_f = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$$

ist als Teilmenge von \mathbb{R} nach oben beschränkt durch den Punkt b . Somit existiert das Supremum

$$\xi = \sup(X_f) \quad .$$

Wegen $f(b) > 0$ gilt $b \notin X_f$. Also $\xi < b$.

Suprema: Nach Konstruktion des Supremums (siehe 8.1) existieren dann Folgen a_n, b_n , so dass gilt

- $a_n \nearrow \xi \quad a_n \in X_f$
- $b_n \searrow \xi \quad \xi < b_n \notin X_f$.

Stetigkeitsbetrachtung: Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \quad .$$

Wegen $f(a_n) < 0$ folgt daraus $f(\xi) \leq 0$. Ebenso gilt

$$f(\xi) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right)$$

und wegen $f(b_n) \geq 0$ folgt daraus $f(\xi) \geq 0$. Also gilt $f(\xi) = 0$, d.h. $\xi \in [a, b]$ ist eine Nullstelle von f .

12.3.1 Zwischenwertsatz

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Funktionswert η zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Dies folgt, in dem man den Nullstellensatz auf die stetige Funktion $f(x) - \eta$ anwendet.

12.3.2 Folgerung

Die Exponentialfunktion definiert eine bijektive stetige Abbildung

$$\boxed{\exp : (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}^*, \cdot)} \quad .$$

Dies induziert wegen der Funktionalgleichung einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe² $(\mathbb{R}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}^*, \cdot)$. Die Umkehrfunktion ist die Logarithmus Funktion

$$\boxed{\log : \mathbb{R}_{>0}^* \rightarrow \mathbb{R}} .$$

Beweis: Die Exponentialfunktion ist streng monoton: $\exp(x) < \exp(y)$ für $x < y$ (siehe Übungsblatt). Also ist die Abbildung \exp injektiv. Für $x \geq 0$ ist nach Definition $\exp(x) = \sum_n \frac{x^n}{n!} \geq 1+x > 0$. Somit ist auch $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} > 0$ (Funktionalgleichung). Also liegen die Werte in $\mathbb{R}_{>0}$. Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}_{>0}$ das Bild ist, genügt es (wegen demselben Argument) zu zeigen $\exp([0, \infty)) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$. Wegen $\exp(0) = 1$ folgt dies aus dem Zwischenwertsatz, denn $\exp(x) \geq 1+x$ nimmt beliebig grosse Werte an für $x \geq 0$.

12.3.3 Information

Wegen $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$ nimmt die Exponentialabbildung nie den Wert Null an. Wie wir später sehen werden, ist die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

surjektiv, aber nicht injektiv! (Siehe 15.2. Beachte $w \in \mathbb{C}^*$ hat die Form $w = r \cdot z$ mit $r = |w| \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z = \frac{w}{|w|} = x + iy$ und $x^2 + y^2 = 1$).

12.3.4 Bemerkung

Genauso wie in Abschnitt 12.3.2 zeigt man mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung, dass die streng monotone Funktion $x \mapsto x^n$ (für natürliches $n \geq 1$) eine Bijektion definiert von $[0, \infty)$ auf $[0, \infty)$. Die Umkehrfunktion nennt man $\sqrt[n]{x}$.

Übungsaufgabe: $\sqrt[n]{x} = \exp(\frac{1}{n}\log(x))$ für alle $x > 0$.

12.3.5 Bemerkung

Genauso wie in Abschnitt 12.3.2 zeigt man:

Eine streng monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine bijektive Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$, welche eine Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ besitzt.

²Für den Begriff der Gruppe siehe die Vorlesung LA

12.4 Das Epsilon-Delta-Kriterium

Eine Funktion $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ist stetig im Punkt $\xi \in X$ genau dann³, wenn gilt:

$$(*) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(d_X(x, \xi) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon \right)} .$$

Man kann dies geometrisch interpretieren: Die offene Kugel

$$K_\delta(\xi) = \{x \in X \mid d_X(x, \xi) < \delta\}$$

vom Radius δ um den Mittelpunkt ξ wird in die Kugel $K_\varepsilon(f(\xi))$ abgebildet:

$$f : K_\delta(\xi) \rightarrow K_\varepsilon(f(\xi)) .$$

Beweis (*) impliziert Stetigkeit in ξ : Es gelte (*). Für eine konvergente Folge $x_n \rightarrow \xi$ müssen wir zeigen $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \delta(\varepsilon)$ wie in (*). Wegen $x_n \rightarrow \xi$ existiert ein $N = N(\delta)$ mit $d_X(x_n, \xi) < \delta$ für $n \geq N(\delta)$. Dann gilt wegen (*)

$$d_Y(f(x_n), f(\xi)) < \varepsilon \quad \text{falls } n \geq N(\delta(\varepsilon)) .$$

Das heisst $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Somit ist f stetig im Punkt ξ .

Beweis Stetigkeit im Punkt ξ impliziert (*): Sei f stetig in ξ . Wir führen einen indirekten Beweis, um (*) zu zeigen. Wäre (*) falsch, dann gilt

$$\exists \varepsilon = \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \left(d_X(x_\delta, \xi) < \delta \text{ und } d_Y(f(x_\delta), f(\xi)) \geq \varepsilon_0 \right) .$$

Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$ und schreiben dann x_n anstelle von x_δ . Wegen $d_X(x_n, \xi) < \frac{1}{n}$ folgt dann die Konvergenz $x_n \rightarrow \xi$. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt ξ folgt daraus dann

$$f(x_n) \rightarrow f(\xi)$$

im Widerspruch zu $d_Y(f(x_n), f(\xi)) \geq \varepsilon_0 > 0$ für das feste $\varepsilon_0 > 0$.

12.4.1 Folgerung

Eine unmittelbare Folgerung aus 12.4 ist: *Die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

einer strikt monotonen stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig⁴ .

³Dieses Kriterium ist oft nützlich, um die Stetigkeit einer gegebenen Funktion nachzuweisen

⁴Allgemeiner gilt: Ist $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ eine stetige bijektive Abbildung, und ist (X, d_X) folgenkompakt, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ stetig. Beweis: Sei $y_n \rightarrow \eta$ eine konvergente Folge in (Y, d_Y) . Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$ die Urbildfolge in (X, d_X) . Angenommen x_n konvergiert nicht gegen $\xi = f^{-1}(\eta)$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine unendliche Teilfolge \tilde{x}_n mit $d_X(\tilde{x}_n, \xi) \geq \varepsilon_0$. Da (X, d_X) folgenkompakt ist, kann man zu einer konvergenten Teilfolge $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{\xi}$ übergehen. Jede konvergente Teilfolge $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{\xi}$, hat die Eigenschaft $f(\tilde{x}_n) \rightarrow f(\tilde{\xi})$, da f stetig ist. Da aber $f(\tilde{x}_n)$ eine Teilfolge von y_n ist, gilt $f(\tilde{\xi}) = \eta$. Also $\tilde{\xi} = f^{-1}(\eta) = \xi$. Aber $d_X(\tilde{\xi}, \xi) = \lim_n d_X(\tilde{\xi}, \tilde{x}_n) \geq \varepsilon_0 > 0$. Ein Widerspruch. Also konvergiert x_n gegen ξ . Das heisst, f^{-1} ist stetig.

12.5 Gleichmässige Stetigkeit

Eine Funktion $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ heisst gleichmässig stetig, wenn gilt

$$(**) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \xi \in X \left(d_X(x, \xi) < \delta \implies d_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon \right)} .$$

Eine gleichmässig stetige Funktion ist offensichtlich stetig. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Jedoch gilt für folgenkompakte Räume die folgende Aussage

12.6 Stetig versus gleichmäßig stetig

Ist (X, d_X) folgenkompakt, dann ist jede stetige Funktion $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ gleichmässig stetig.

Beweis: Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis. Wäre die Aussage falsch (wäre f also nicht gleichmäßig stetig), dann würde gelten

$$\exists \varepsilon = \varepsilon_0 > 0 \forall \delta \exists \xi_\delta \exists x_\delta \left(d_X(x_\delta, \xi_\delta) < \delta \text{ und } d_Y(f(x_\delta), f(\xi_\delta)) \geq \varepsilon_0 \right) .$$

ObdA setzten wir wieder $\delta = \frac{1}{n}$ und benennen x_δ und ξ_δ um in x_n und ξ_n . Da (X, d_X) folgenkompakt ist, kann man durch (zweimaligen) Übergang zu einer Teilfolge die Konvergenz in (X, d_X) annehmen

$$x_n \rightarrow x \quad , \quad \xi_n \rightarrow \xi .$$

Daraus folgt wegen der Stetigkeit von f dann in (Y, d_Y)

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad , \quad f(\xi_n) \rightarrow f(\xi) .$$

Nun gilt wegen $d_X(x_n, \xi_n) < \frac{1}{n}$ (dies gilt auch für die Teilfolgen!) und der Dreiecksungleichung $0 \leq d_X(x, \xi) \leq d_X(x, x_n) + d_X(x_n, \xi_n) + d_X(\xi_n, \xi)$ im Limes $n \rightarrow \infty$ dann $d_X(x, \xi) = 0$. Also

$$x = \xi .$$

Daraus folgt $f(x) = f(\xi)$, und wegen der Dreiecksungleichung

$$d_Y(f(x_n), f(\xi_n)) \leq d_Y(f(x_n), f(x)) + d_Y(f(x), f(\xi)) + d_Y(f(\xi), f(\xi_n)) .$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ ist die rechte Seite als Summe von zwei Nullfolgen eine Nullfolge. Also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f(x_n), f(\xi_n)) = 0 .$$

Dies steht im Widerspruch zu $d_Y(f(x_n), f(\xi_n)) \geq \varepsilon_0 > 0$.

12.7 Maxima und Minima

Jede stetige reellwertige Funktion

$$f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$$

auf einem folgenkompakten metrischen Raum (X, d) ist

1. gleichmäßig stetig
2. f beschränkt
3. und nimmt ihr Maximum und Minimum an.

Im wichtigsten Fall ist später $X = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall.

Beweis: Teil 1. Wurde in 12.6 gezeigt. Teil 2. Wäre die Funktion f nicht nach oben beschränkt, würde eine Folge $x_n \in X$ existieren mit

$$f(x_n) \geq n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da (X, d) folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\tilde{x}_n \rightarrow x$. Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = f(x).$$

Aber $f(\tilde{x}_n) \geq n$ wächst über alle Schranken. Ein Widerspruch!

Teil 3. Da f nach Teil 2 nach oben beschränkt ist, existiert das Supremum

$$y := \sup(f(X)) \quad , \quad f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

der Menge $f(X) \subseteq \mathbb{R}$. Nach unserer Konstruktion des Supremums einer beschränkten Menge existiert eine Folge $x_n \in X$ mit

$$f(x_n) = y_n \nearrow y.$$

Da f stetig, erhält man nach Übergang zu einer konvergenten Teilfolge $\tilde{x}_n \rightarrow x$ (Folgenkompaktheit)

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n) = f(x).$$

Also liegt $y = f(x)$ im Bild von f . Somit ist y das Maximum der Funktion f .

Bilder von abgeschlossenen Intervallen

Kombiniert man den letzten Satz mit dem Mittelwertsatz, so erhält man

Korollar: *Das Bild eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ unter einer stetigen Abbildung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein abgeschlossenes Intervall.*

Kapitel 13

Integration

Wir fixieren ein Intervall $I = [a, b]$ und eine beschränkte Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_r\}$ des Intervall ist gegeben durch Punkte

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_r = b ,$$

welche Teilintervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ der Länge $l(I_i) = x_i - x_{i-1}$ definieren.

Verfeinerungen: Eine Zerlegung Z' heisst Verfeinerung von Z , wenn gilt $Z \subseteq Z'$.
Offensichtlich gibt es zu je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 eine gemeinsame Verfeinerung Z , zum Beispiel

$$Z = Z_1 \cup Z_2$$

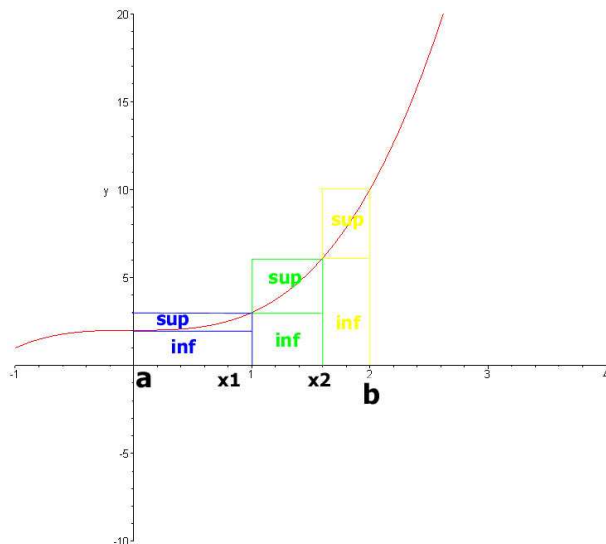
13.0.1 Ober/Untersummen

Wir definieren Obersummen $O(Z, f)$ und Untersummen $U(Z, f)$ bezüglich der Zerlegung Z

$$O(Z, f) = \sum_{i=1}^r |I_i| \cdot \sup_{x \in I_i} f(x)$$
$$U(Z, f) = \sum_{i=1}^r |I_i| \cdot \inf_{x \in I_i} f(x) .$$

Da f nach Annahme eine auf I beschränkte Funktion ist, existieren die Suprema $\sup_{x \in I_i} f(x)$ und Infima $\inf_{x \in I_i} f(x)$.

13.1 Visualisierung der Ober/Untersummen



Das Integral soll die Fläche ‘unter einer Funktion’ beschreiben. Dazu approximiert man die Funktion f durch Treppenfunktionen f_1, f_2 mit der Eigenschaft $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ für $x \in I$. Die Sprungstellen definieren eine Zerlegung Z . Fixiert man Z , visualisieren die Treppenfunktionen f_1 bzw. f_2 im Bild die ‘bestmögliche’ Approximation durch Treppenfunktionen mit Sprungstellen in Z . Die Werte dieser Approximationen werden durch die Suprema und Infima von f auf den Teilintervallen der Zerlegung Z definiert. Die zugehörigen Flächen definieren die Untersumme beziehungsweise Obersumme.

13.2 Offensichtliche Eigenschaften

1. $U(Z, f) \leq O(Z, f)$
2. $U(Z, f) \leq U(Z', f)$ falls $Z \subseteq Z'$
3. $O(Z', f) \leq O(Z, f)$ falls $Z \subseteq Z'$
4. Für beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt $U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$.

Beweis: Die ersten drei Aussagen sind evident. Die vierte Aussage folgt aus den ersten drei Aussagen. Wähle dazu eine gemeinsame Verfeinerung $Z' = Z_1 \cup Z_2$.

$$U(Z_1, f) \stackrel{(2)}{\leq} U(Z', f) \stackrel{(1)}{\leq} O(Z', f) \stackrel{(3)}{\leq} O(Z_2, f) .$$

Bei fester Wahl von Z_2 erhält man eine nach oben hin beschränkte Menge von Untersummen.

13.2.1 Beachte

Aus Rechenregel (4) folgt die Existenz des Supremums $\sup_{Z_1} U(Z_1, f)$ mit der Schranke $\sup_{Z_1} U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$ für beliebiges Z_2 . Analog folgt die Existenz von $\inf_{Z_2} O(Z_2, f)$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{Z_1} U(Z_1, f) \leq \inf_{Z_2} O(Z_2, f)$$

13.3 Integrierbare Funktionen

Eine beschränkte Funktionen

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt integrierbar auf dem Intervall $I = [a, b]$, falls gilt:

$$\sup_{Z_1} U(Z_1, f) = \inf_{Z_2} O(Z_2, f)$$

Diesen Wert nennt man das Integral der integrierbaren Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx} .$$

Das Epsilon-Kriterium:

Eine beschränkte Funktion f auf $[a, b]$ ist genau dann integrierbar, wenn gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z so, dass gilt

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon .$$

Der Beweis dieses Kriteriums ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition.

Beispiel: Die konstante Funktion $f(x) = 1$ ist integrierbar auf $[a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = (b - a)$, denn $U(Z, f) = O(Z, f) = (b - a)$ gilt in diesem Fall für alle Z .

13.3.1 Triviale Abschätzungen

Nach 13.2 (2) und (3) folgt bei Wahl von $Z = \{a, b\}$

$$(b - a) \cdot \inf_{x \in [a, b]} f(x) \stackrel{(2)}{\leq} \int_a^b f(x) dx \stackrel{(3)}{\leq} (b - a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} f(x) .$$

Also

- (Monotonie) Gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |b - a| \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

13.4 Stetige Funktionen sind integrierbar

Jede auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f ist integrierbar auf $[a, b]$.

Beweis: Schritt 1. Jede stetige Funktion f ist beschränkt auf $[a, b]$ nach Satz 12.7. Damit ist diese notwendige Voraussetzung für die Integrierbarkeit bereits erfüllt.

Schritt 2. Für die Integrierbarkeit von f genügt es nach dem ε -Kriterium zu zeigen, dass für $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung zu finden mit

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon .$$

Wegen

$$\begin{aligned} O(Z, f) - U(Z, f) &= \sum_{i=0}^r l(I_i) \cdot \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^r l(I_i) \cdot \max_{i=1, \dots, r} \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) \\ &= (b - a) \cdot \max_{i=1, \dots, r} \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right) \end{aligned}$$

genügt es für alle $i = 0, \dots, r$ zu zeigen

$$\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) < \frac{\varepsilon}{a - b} .$$

Der Einfachheit halber nehmen wir jetzt $a - b = 1$ an.

Schritt 3. Wir benutzen nun, dass jede stetige Funktion auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist (wiederum Satz 12.7). Sei Z irgend (!) eine Zerlegung mit $|I_i| < \delta$ für alle i . Ist dann $\delta > 0$ gewählt wie in 12.5 (**), so folgt

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon .$$

Dies Voraussetzung $|x - x'| < \delta$ ist nach Wahl von Z für alle $x, x' \in I_i$ (und alle i) erfüllt. Es folgt

$$\left| \sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right| < \varepsilon$$

Also ist f integrierbar.

Eine Abschätzung

Seien $f(x), g(x)$ stetig auf $[a, b]$, und sei $g(x) \geq 0$ und $|f(x)| \leq C$, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq C \int_a^b g(x)dx$$

wegen $f(x) \leq C \implies \int_a^b (C - f(x))g(x)dx \geq 0$ (benutze 13.3.1) und damit $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq C \int_a^b g(x)dx$ (benutze 13.5). Analog für die andere Ungleichung.

13.5 Linearität des Integrals

Seien f, g beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$, seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstant. Dann ist

$$h(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$$

beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Beweis: Schritt 1. Für eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad \alpha U(Z, f) + \beta U(Z, g) &\leq U(Z, \alpha f + \beta g) \\ &\leq O(Z, \alpha f + \beta g) \\ &\leq \alpha O(Z, f) + \beta O(Z, g) \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt dabei aus folgendem Hilfssatz (ohne Beweis)

$$\alpha \inf_{x \in I_\nu} f(x) + \beta \inf_{x \in I_\nu} g(x) \leq \inf_{x \in I_\nu} (\alpha f + \beta g)(x).$$

Die zweite Ungleichung folgt aus 13.2, die dritte ist analog zur ersten.

Schritt 2. Wähle nun Folgen von Zerlegungen Z resp. \tilde{Z} mit

$$U(Z, f) \nearrow \int_a^b f(t) dt \quad , \quad U(\tilde{Z}, g) \nearrow \int_a^b g(t) dt$$

und

$$O(Z, f) \searrow \int_a^b f(t) dt \quad , \quad O(\tilde{Z}, g) \searrow \int_a^b g(t) dt .$$

Schritt 3.

- Man überlege sich, daß man obdA $Z = \tilde{Z}$ gewählt werden kann (gemeinsame Verfeinerung!)
- Die Ungleichungskette (*) verifiziert das ε -Kriterium, und liefert im Limes

$$\begin{aligned} \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt &\leq \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) dt \\ &\leq \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

13.6 Intervalladditivität

Sei $\xi \in [a, b]$ ein Punkt und

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

beschränkt. Dann sind äquivalent:

1. f ist integrierbar $I_1 = [a, \xi]$ und $I_2 = [\xi, b]$
2. f ist integrierbar auf ganz $I = [a, b]$

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, gilt die Additivität:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx + \int_\xi^b f(x) dx$$

Zusatz: Setzt man formal $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, dann gilt dies für alle a, b, ξ .

13.6.1 Beweis

Schritt 1. Für den Nachweis der Integrierbarkeit von f auf I , kann man sich darauf beschränken Zerlegungen Z von I zu betrachten, die den Punkt ξ enthalten (mittels Verfeinerung!). Ist Z eine solche Zerlegung von I , dann gehört dazu eine Zerlegung Z_1 von I_1 und eine Zerlegung Z_2 von I_2 , und die Umkehrung davon gilt auch. Unmittelbar aus den Definitionen folgt weiterhin

$$U(Z, f) = U(Z_1, f) + U(Z_2, f) \quad , \quad O(Z, f) = O(Z_1, f) + O(Z_2, f) .$$

Schritt 2. Aus (1) folgt (2). Nach Annahme existieren nach dem ε -Kriterium dann Zerlegungen Z_1 und Z_2 von I_1 und I_2 mit

$$O(Z_i, f) - U(Z_i, f) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ist Z die zugehörige Zerlegung auf $[a, b]$, folgt daraus wegen Schritt 1

$$O(Z, f) - U(Z, f) = O(Z_1, f) + O(Z_2, f) - U(Z_1, f) - U(Z_2, f) < \varepsilon .$$

Dies impliziert auf Grund des ε -Kriteriums die Integrierbarkeit von f auf I .

Schritt 3. Aus (2) folgt (1). Sei Z eine Zerlegung von I mit

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon .$$

Wegen Schritt 1 gilt dann $O(Z_1, f) - U(Z_1, f) + O(Z_2, f) - U(Z_1, f) < \varepsilon$, und wegen $O(Z_i, f) - U(Z_i, f) \geq 0$ dann

$$O(Z_i, f) - U(Z_i, f) < \varepsilon$$

für $i = 1, 2$. Also ist f integrierbar auf I_1 und I_2 (ε -Kriterium). Aus der Formel in Schritt 1 für die Untersummen folgt daraus die Additivität des Integrals durch Limesbildung über Z .

13.7 Definition - Differenzierbarkeit

Eine Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad a < b$$

heißt differenzierbar im Punkt $\xi \in [a, b]$, falls für jede Folge $x_n \rightarrow \xi$ aus $[a, b]$ die Folge der reellen Zahlen

$$a_n = \frac{F(\xi) - F(x_n)}{\xi - x_n}$$

konvergiert, wobei nur angenommen wird:

- $x_n \neq \xi$ für alle n .

Es ist dann klar (Mischen der Folgen), dass der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge x_n abhängt. Den somit wohldefinierten Grenzwert nennt man die Ableitung $F'(\xi)$ der differenzierbaren Funktion F im Punkt ξ

$$(*) \quad F'(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\xi) - F(x_n)}{\xi - x_n}$$

F heißt differenzierbar auf $[a, b]$, falls F in allen Punkte $\xi \in [a, b]$ differenzierbar ist.

13.8 Der Hauptsatz (1. Version)

Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

eine differenzierbare Funktion auf $[a, b]$, und es gilt

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Hinweis

Dies ist eine nicht ganz vollständige Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Die vollständige Formulierung des Hauptsatzes findet sich in 14.8 (Seite 86) und besagt, dass die sogenannte Stammfunktion $F(x)$ auf $[a, b]$ durch die Gleichung $F'(x) = f(x)$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

13.8.1 Beweis

Wähle eine konvergente Folge $x_n \rightarrow \xi$ mit $x_n \neq \xi$ für alle n . Dann ist

$$\frac{F(\xi) - F(x_n)}{\xi - x_n} = \frac{\int_a^\xi f(t) dt - \int_a^{x_n} f(t) dt}{\xi - x_n} = \frac{\int_a^\xi f(t) dt + \int_{x_n}^a f(t) dt}{\xi - x_n} \stackrel{(13.6)}{=} \frac{\int_{x_n}^\xi f(t) dt}{\xi - x_n}.$$

Zu zeigen ist nun im Limes $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\int_{x_n}^\xi f(t) dt}{\xi - x_n} - f(\xi) \rightarrow 0.$$

Kleine Umformung

$$\int_{x_n}^\xi \underbrace{f(\xi)}_{\text{konst. Funktion}} dt = f(\xi) \int_{x_n}^\xi dt = f(\xi) \cdot (\xi - x_n).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\int_{x_n}^\xi f(t) dt}{\xi - x_n} - f(\xi) &= \frac{\int_{x_n}^\xi f(t) dt - \int_{x_n}^\xi f(\xi) dt}{\xi - x_n} \\ &\stackrel{\text{Linearität}}{=} \frac{\int_{x_n}^\xi (f(t) - f(\xi)) dt}{\xi - x_n} \end{aligned}$$

Dies liefert die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_{x_n}^\xi (f(t) - f(\xi)) dt}{\xi - x_n} \right| &\stackrel{13.3.1}{\leq} \frac{|\xi - x_n| \cdot \sup_{y \in [x_n, \xi]} |f(y) - f(\xi)|}{|\xi - x_n|} \\ &= \sup_{y \in [x_n, \xi]} |f(y) - f(\xi)| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

denn f ist stetig im Punkt $\xi \in I$: Es gilt also

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall y \left(|y - \xi| < \delta \implies |f(y) - f(\xi)| < \epsilon \right).$$

Aus $n \geq N(\delta)$ folgt daher $|x_n - \xi| < \delta$, und somit $\sup_{y \in [x_n, \xi]} |f(y) - f(\xi)| < \epsilon$.

Kapitel 14

Differenzierbare Funktionen

Sei nun $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein beliebige Funktion und sei $a < b$. Sei ξ ein Punkt in $[a, b]$ und n eine natürliche Zahl.

14.1 Definition - Ordnung

Wir schreiben $f(x) = o((x - \xi)^n)$ und sagen: f ist von der Ordnung klein n im Punkt ξ genau dann, wenn eine Funktion h existiert mit der Eigenschaft ¹

$$f(x) = (x - \xi)^n \cdot h(x)$$

so dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} |h(x)| = 0 ,$$

d.h. h ist stetig im Punkt $x = \xi$ mit $h(\xi) = 0$.

Intuitiv ausgedrückt: Man sollte sich vorstellen $f(x) = o((x - \xi)^n)$ bedeutet, dass $f(x)$ 'etwas mehr' als eine n -fache Nullstelle bei $x = \xi$ besitzt.

Beispiel: $f(x) = (x - \xi)^2$ ist $o(x - \xi)$ aber ist nicht $o((x - \xi)^2)$.

Beispiel: $f(x) = |x - \xi|^{\frac{3}{2}}$ ist $o(x - \xi)$ aber ist nicht $o((x - \xi)^2)$.

Bemerkung: Sind f, g von der Ordnung $o((x - \xi)^n)$, dann ist auch $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ von der Ordnung $o((x - \xi)^n)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Weiterhin: Aus $f(x) = o((x - \xi)^n)$ und $g(x) = o((x - \xi)^m)$ folgt

$$f(x) \cdot g(x) = o\left((x - \xi)^{n+m}\right)$$

Schliesslich gilt

$$f(x) \pm g(x) = o\left((x - \xi)^{\min(n,m)}\right) .$$

¹Man könnte äquivalent $f(x) = |x - \xi|^n \cdot H(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \xi} |H(x)| = 0$ fordern, denn $\text{sign}(x - \xi)^n$ ist eine beschränkte Funktion und $H(x) = \text{sign}(x - \xi)^n h(x)$.

14.1.1 Eine Äquivalenzrelation

$$f(x) \sim g(x) \stackrel{\text{Def.}}{\iff} f(x) - g(x) = o((x - \xi)^n)$$

definiert eine Äquivalenzrelation. Uns interessiert nun vor allem der Spezialfall $n = 1$.

14.2 Tangenten

f heißt linear approximierbar im Punkt ξ , wenn reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt

$$f(x) \sim g(x) = a + b(x - \xi)$$

genauer:

$$f(x) - a - b(x - \xi) = o(x - \xi)$$

Bemerkung: Die Funktion $g(x) = a + b(x - \xi)$ definiert eine Gerade. Ist f linear approximierbar im Punkt ξ , dann sind a, b (das heisst die Geradengleichung) eindeutig durch f und ξ bestimmt. Man nennt dann die durch $g(x)$ definierte Gerade die Tangente von $f(x)$ im Punkt ξ .

Begründung: Für jede Gerade $g(x) = mx + c$, welche durch den Punkt $(\xi, f(\xi))$, besitzt die Funktion $f(x) - g(x)$ eine Nullstelle bei $x = \xi$. Aber nur für die Tangente $g(x)$ besitzt die Differenz $f(x) - g(x)$ 'etwas mehr' als eine Nullstelle (im obigen Sinn). Das ist nicht schwer einzusehen. Gäbe es zwei solche $g_i(x) = a_i + b_i(x - \xi)$, dann hätte auch die Differenz $g_1(x) - g_2(x)$ 'etwas mehr' als eine Nullstelle bei $x = \xi$. Wir lassen es als instruktive Übungsaufgabe dem Leser, nachzuprüfen dass daraus $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ folgt!

14.3 Hinweis

Es wird empfohlen vor dem nächsten Lemma sich die Definition von 13.7 (siehe Seite 79) in Erinnerung zu rufen.

14.4 Differenzierbar versus linear approximierbar

Es sind äquivalent:

a) $f(x)$ ist differenzierbar in ξ mit Ableitung $f'(\xi)$

b) Die Funktion $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} & ; x \neq \xi \\ f'(\xi) & ; x = \xi \end{cases}$ ist im Punkt ξ stetig.

c) $f(x)$ ist linear approximierbar im Punkt ξ durch die Gerade

$$g(x) = a + b(x - \xi) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi)$$

d.h.

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi) + o(x - \xi)$$

Beweis: (a) \Rightarrow (b) Wegen (a) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(y_n) = f'(\xi)$$

für alle konvergenten Folgen $y_n \rightarrow \xi$ mit $y_n \neq \xi$ für alle n . Zu zeigen ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) = f'(\xi)$$

für alle Folgen $x_n \rightarrow \xi$. Dies folgt aber sofort aus dem Hilfssatz und der Wahl $a = f'(\xi) = \tilde{f}(\xi)$.

Hilfssatz: Sei x_n eine Folge und $y_n \rightarrow a$ eine konvergente Teilfolge mit Limes a . Sind alle Folgenglieder, welche nicht in der Teilfolge y_n liegen, gleich a , dann gilt $x_n \rightarrow a$.

(b) \Rightarrow (c): Aus der Definition von $\tilde{f}(x)$ folgt

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \underbrace{[\tilde{f}(x) - f'(\xi)] \cdot (x - \xi)}_{o(x - \xi)} .$$

Dann ist $h(x) := \tilde{f}(x) - f'(\xi)$ stetig in ξ ist, da \tilde{f} nach Annahme stetig in ξ ist, und $h(\xi) = \tilde{f}(\xi) - f'(\xi) = 0$. Dies zeigt (c).

(c) \Rightarrow (a). Aus (c) folgt für eine im Punkt ξ stige Funktion $h(x)$ mit $h(\xi) = 0$

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = f'(\xi) + h(x_n)$$

und im Limes $x_n \rightarrow \xi, x_n \neq \xi$ ergibt sich Aussage (a)

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi)$$

wegen der Stetigkeit von $h(x)$ im Punkt ξ und der Eigenschaft $h(\xi) = 0$.

14.5 Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Sei $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $\xi \in [a, b]$, dann ist f stetig im Punkt ξ .

Beweis: Sei $x_n \rightarrow \xi$ eine konvergente Folge mit $x_n \in [a, b]$. Dann konvergiert wegen der Implikation (a) \Rightarrow (c) von 14.4

$$f(x_n) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x_n - \xi) + H(x_n) \cdot |x_n - \xi|$$

gegen $f(\xi)$. Dies folgt aus den Permanenzsätzen für stetige Abbildungen, denn $h(x)$ und $d(x, \xi)$ sind stetig im Punkt ξ . Es folgt damit die Behauptung.

14.6 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

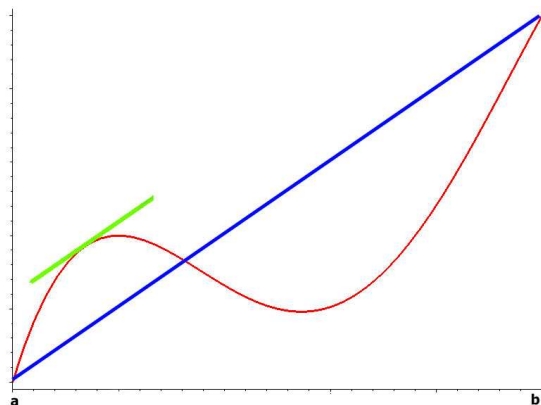
Sei $a < b$ und sei f differenzierbar auf $[a, b]$. Dann existiert ein Punkt $\xi \in (a, b)$, so dass gilt:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Bemerkung: Wie der Beweis zeigen wird, genügt für die Schlussfolgerung bereits die etwas schwächere Voraussetzung, dass $f(x)$ stetig ist auf $[a, b]$ und differenzierbar ist in jedem Punkt $\xi \in (a, b)$.

14.6.1 Visualisierung des Mittelwertsatzes

Der Satz sagt aus, dass es mindestens einen Punkt im Intervall gibt, der die selbe Steigung hat, wie die Sekante durch die beiden Eckpunkte des Integrals.



Beweis im Spezialfall $f(a) = f(b)$: Zu zeigen ist in diesem Fall $\exists \xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Aus den Annahmen folgt die Stetigkeit von f auf $[a, b]$. Also nimmt f sein Maximum und Minimum auf $[a, b]$ an, denn $[a, b]$ ist ein folgenkompakter metrischer Raum.

Wegen $f(a) = f(b)$ tritt dann einer der folgenden Fälle auf

- $f = \text{const}$, oder
- das Minimum wird in (a, b) angenommen
- das Maximum wird in (a, b) angenommen

Der Fall, wenn f konstant ist ist trivial. Wir können daher obdA annehmen, dass ein Extremwert von f in einem Punkt $\xi \in (a, b)$ angenommen wird. ObdA (ersetze sonst f durch $-f$) sei $f(\xi)$ im folgenden ein Maximum. Dann gilt

Linksseitiger Limes: Für jede linksseitige Folge $x_n \rightarrow \xi$, d.h. mit der Eigenschaft $x_n < \xi$, gilt dann

$$f'(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n}}^{\geq 0}$$

Da Zähler und Nenner positiv ist, gilt dann

$$\frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n} > 0.$$

Somit gilt für den Limes

$$f'(\xi) \geq 0$$

Rechtsseitiger Limes: Wähle nun $\tilde{x}_n \rightarrow \xi$ mit $x_n > \xi$. Dann gilt

$$\frac{f(\xi) - f(\tilde{x}_n)}{\xi - \tilde{x}_n} < 0,$$

denn der Zähler ist positiv und der Nenner ist negativ. Somit gilt dann für den Limes

$$f'(\xi) \leq 0$$

Vergleicht man beide Resultate, so folgt $f'(\xi) = 0$, also die Behauptung des Mittelwertsatzes in unserem Spezialfall, oder sogar etwas allgemeiner

Satz: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $\xi \in (a, b)$ ein lokaler Extremwert von f bei ξ , dann gilt

$$f'(\xi) = 0$$

Beweis im allgemeinen Wir wollen nun die Annahme $f(a) = f(b) = 0$ fallen lassen. Wir betrachten dann die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - f(a) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}_{\text{linear in } x}.$$

Offensichtlich gilt dann

- g ist differenzierbar auf $[a, b]$
- $g(a) = 0$
- $g(b) = 0$.

Wegen dieser Bedingungen existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$, wie wir bereits gezeigt haben. Wegen der üblichen Rechenregeln der Differentiation (siehe 14.10) gilt dann aber

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$

wegen $(x - a)' = x' = 1$. Löst man dies nach $f'(\xi)$ auf, folgt daraus die Aussage des Mittelwertsatzes.

14.7 Korollar

Eine differenzierbare Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$), deren Ableitung in jedem Punkt des Intervalls verschwindet, ist eine konstante Funktion.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Mittelwertsatz, denn $f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0$ für jeden Punkt $x \neq a$ aus dem Intervall $[a, b]$. Also gilt $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a, b]$.

14.8 Vollständige Formulierung des Hauptsatzes der Analysis

Sei $a < b$ und sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Eine differenzierbare Funktion $F(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt

$$F'(x) = f(x) .$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann ist wegen 14.10 auch

$$F(x) + C$$

für eine beliebige Konstante C eine Stammfunktion von $f(x)$. Aus dem letzten Korollar folgt umgekehrt:

Je zwei Stammfunktionen $F(x), \tilde{F}(x)$ einer stetigen Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ unterscheiden sich nur um eine Konstante C

$$\tilde{F}(x) = F(x) + C .$$

Beweis: Für die Differenz $g(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ gilt die Gleichung

$$g'(x) = (\tilde{F}(x) - F(x))' = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 .$$

Aus 14.7 folgt daher, dass $g(x) = C$ eine konstante Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ ist. Also

$$\tilde{F}(x) = F(x) + C .$$

14.8.1 Folgerung

Ist $f(x)$ stetig auf $[a, b]$ und ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf $[a, b]$, dann gilt

$$\int_a^x f(t) dt = F(t)|_a^x$$

wobei per Definition gelte $F(t)|_a^x := F(x) - F(a)$.

Beweis: Gilt dies für eine Stammfunktion, dann offensichtlich für alle Stammfunktionen, denn die Integrationskonstante hebt sich bei der Differenzbildung weg. Also folgt die Behauptung aus 13.8.

14.9 Schreibweise

Wir vereinbaren nun folgende recht bequeme Schreibweise: Die beiden Schreibweisen² seien im folgenden per Konvention äquivalent:

1. $x \rightarrow \xi$
2. $x_n \rightarrow \xi$ sei konvergent, so dass alle Folgenglieder x_n von ξ verschieden sind.

14.10 Ableitungsregeln

Seien f, g definiert auf $[a, b]$ und sei $a < b$. Sind f und g im Punkt $\xi \in [a, b]$ differenzierbar, dann sind auch $\alpha \cdot f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \cdot g$ und f/g (falls $g(\xi) \neq 0$) differenzierbar im Punkt ξ , und es gilt:

1. $(\alpha \cdot f)' = \alpha f'$ und Ableitungen von konstanten Funktionen sind Null.
2. $(f + g)' = f' + g'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Beweis:

1. Trivial.
2. Sei $\xi \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) + g(x) - f(\xi) - g(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{n \rightarrow \xi} \left[\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} + \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right] \\ &\stackrel{!}{=} \lim_{n \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} + \lim_{n \rightarrow \xi} \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \\ &= f'(\xi) + g'(\xi) \end{aligned}$$

Es folgt, dass der Limes (links) existiert und nicht von der Wahl der Folge $x_n \rightarrow \xi$ abhängt. Also ist $(f + g)$ differenzierbar im Punkt ξ . Ausserdem folgt

$$(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$$

3. Analog:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{n \rightarrow \xi} \left[\frac{f(x) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(x)}{x - \xi} + \frac{f(\xi) \cdot g(x) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x - \xi} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right) \cdot g(\xi) + \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \right) \cdot f(\xi) \end{aligned}$$

²Manchmal bezeichnen wir mit $x \rightarrow \xi$ allerdings auch beliebige konvergente Folgen, welche gegen ξ konvergieren

Beachte $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = g(\xi)$, da g als differenzierbare Funktion stetig ist im Punkt ξ nach 14.5. Es folgt

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

4. Schließlich gilt im Spezialfall $f(x) = 1$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

denn:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(\xi) - g(x)}{(x - \xi) \cdot g(x) \cdot g(\xi)} \\ &\stackrel{\text{Prod.Satz}}{=} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{g(\xi) - g(x)}{x - \xi} \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{g(x) \cdot g(\xi)} \\ &= -g' \cdot \frac{1}{g^2(\xi)} \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt dann zusammen mit der Produktregel 3.

14.11 Lemma - Ableitungen von Monomen

Es gilt für natürliche Zahlen $n \geq 1$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Beweis mittels Induktion: Im Fall $n = 1$ gilt

$$x'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{x - \xi}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} 1 = 1.$$

Die Behauptung gelte nun für festes n . Wir schliessen dann auf den Fall $n + 1$

$$\begin{aligned} (x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' \\ &= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \\ &= (n + 1) \cdot x^n \end{aligned}$$

14.12 Folgerung - Ableitungen von Polynomen

Für $f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^N n \cdot a_n x^{n-1}$.

14.13 Definition - n-mal differenzierbar

Ist die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall mit $a < b$ differenzierbar, dann definiert die Ableitung $f'(x)$ wieder eine Funktion. Ist die die Ableitung selbst wieder differenzierbar, nennt man die Funktion $f(x)$ zweimal differenzierbar. Analog n -mal differenzierbar, falls es differenzierbare Funktion $f(x) = f^{(0)}(x), f^{(1)}(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ gibt, derart dass gilt

$$f^{(i)}(x) = f^{(i-1)}(x)' \quad , \quad \forall i < n .$$

Man nennt dann die Ableitung $f^{(n)}(x)$ der Funktion $f^{(n-1)}(x)$ die n -te Ableitung von $f(x)$.

Viele wichtige Funktionen sind sogar unendlich oft differenzierbar, etwa Polynome oder die im nächsten Kapitel untersuchten Funktionen \exp, \sin, \cos, \log .

Kapitel 15

Einige wichtige Funktionen

15.1 Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion

$$f(x) = \exp(x)$$

ist als Funktion auf ganz \mathbb{R} unendlich oft differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{f'(x) = f(x)}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\exp(x) - \exp(\xi)}{x - \xi} &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\exp(x - \xi + \xi) - \exp(\xi)}{x - \xi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\exp(x - \xi) \cdot \exp(\xi) - \exp(\xi)}{x - \xi} \\ &= \exp(\xi) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\exp(x - \xi) - 1}{x - \xi} \end{aligned}$$

Dies ist gleich $\exp(\xi) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \exp(\xi)$, denn der folgende Ausdruck konvergiert gegen Null

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n+1)!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} \\ &= |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+2)!} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{Majorante} \\ \leq |x| \cdot \exp(|x|) \rightarrow 0 \end{array}$$

für $x \rightarrow 0$ wegen des Majorantenkriteriums und wegen 11.7 (Seite 62). Siehe auch Seite 62 für eine ähnliche Rechnung.

15.2 Sinus und Cosinus

Wir definieren die Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ als Real- und Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion

$$\boxed{\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}} .$$

Diese Funktionen werden dann offensichtlich auf ganz \mathbb{R} durch die absolut konvergenten Reihen

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dargestellt. Insbesondere gilt daher $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ sowie $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

Die Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind unendlich oft differenzierbar auf \mathbb{R} mit der Eigenschaft

$$\boxed{\sin(x)' = \cos(x) \quad , \quad \cos(x)' = -\sin(x)} .$$

Beweis: Dies folgt aus $\frac{\exp(i(x+y)) - \exp(ix)}{y} = \frac{\exp(iy) - 1}{y} \cdot \exp(ix) \rightarrow i \cdot \exp(ix)$ für $y \rightarrow 0$. Benutze dafür die Abschätzung von 15.1. Also $\cos(x)' + i \cdot \sin(x)' = i(\cos(x) + i \cdot \sin(x))$.

Hilfssatz: Es gilt $\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$.

Beweis: Dies gilt für $x = 0$. Daher genügt es zu zeigen, dass die Ableitung $(\cos^2 + \sin^2)' = 2 \cos \cdot (-\sin) + 2 \sin \cdot \cos = 0$ identisch verschwindet.

Folgerung: $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.

Wir werden nun zeigen, dass es eine reelle Zahl $x_1 \neq 0$ gibt mit $\sin(x_1) = 1$, oder äquivalent dazu (nach dem Hilfssatz)

$$\sin(x_1) = 1 \iff \exp(ix_1) = i .$$

Wegen der Asymmetrie von $\sin(x)$ genügt es für die Existenz von x_1 , dass $|\sin(x)|$ irgendwo den Wert 1 annimmt.

Existenzbeweis: $\sin(0) = 0$ und $\sin(x)'|_{x=0} = 1 > 0$ impliziert $\sin(x) > 0$ für $0 < x < \varepsilon$ und geeignetes $\varepsilon > 0$ (Mittelwertsatz, genauer 15.3). Wäre $|\sin(x)| < 1$ für alle x , hätte $\cos(x)$ keine reelle Nullstelle (siehe Hilfssatz) und wäre auf ganz \mathbb{R} positiv (Zwischenwertsatz); $\sin(x)$ wäre dann auf ganz \mathbb{R} eine strikt monotone wachsende Funktion nach oben beschränkte Funktion (Mittelwertsatz 15.3). Analog wäre $\cos(x)$ auf $[0, \infty)$ dann eine strikt monoton fallende durch Null nach unten beschränkte Funktion. Damit würde der Limes¹

$$z = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) + i \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \in \mathbb{C}$$

¹ Man sagt der Limes $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ existiert falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists C \in \mathbb{R} (x \geq C \implies |f(x) - f(+\infty)| < \varepsilon)$

existieren. Aus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) + i \sin(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x + x_0) + i \sin(x + x_0)$ folgt dann $z \cdot \exp(ix_0) = z$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). Dies ist nur möglich für $z = 0$, was aber wegen $|z| = 1$ (siehe Hilfssatz) ausgeschlossen ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass $|\sin(x)|$ wie behauptet den Wert 1 annimmt. Es folgt die Existenz einer reellen Zahl $x_1 \neq 0$ mit

$$\sin(x_1) = 1 \quad , \quad \cos(x_1) = 0$$

oder äquivalent dazu $\exp(ix_1) = i$.

Periodizität: Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion liefert dann

$$\boxed{\cos(x) = \sin(x + x_1) \quad , \quad -\sin(x) = \cos(x + x_1)}$$

also $\sin(x) = -\sin(x + 2x_1)$, $\cos(x) = -\cos(x + 2x_1)$. Daher haben die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ beide die Periode $4x_1$

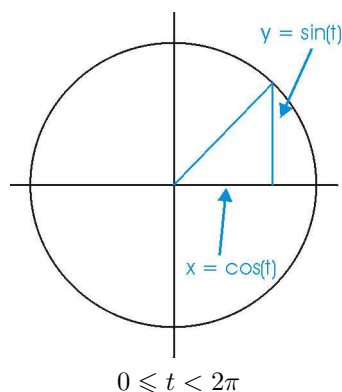
$$f(x + 4x_1) = f(x) .$$

Insbesondere kann man daher $x_1 > 0$ (obdA wie oben spezifiziert) als positive Zahl wählen. Die kleinste² positive Zahl $x_1 > 0$ mit der Eigenschaft $\sin(x_1) = 1$ nennt man

$$x_1 = \pi/2 .$$

Die Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ haben dann die Periode $4x_1 = 2\pi$.

Der komplexe Einheitskreis S^1 : Wir bemerken zum Abschluss, dass daher $\sin(x)$ alle Werte in $[-1, 1]$ annimmt (Zwischenwertsatz). Es folgt daraus dann leicht, dass jede Zahl $z = u + iv$ mit der Eigenschaft $|z|^2 = u^2 + v^2 = 1$ sich in der Gestalt $z = \cos(x) + i \sin(x) = \exp(ix)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.



Daraus folgt, dass die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

surjektiv ist, denn $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_{>0}^* \cdot S^1 = \exp(\mathbb{R}) \cdot \exp(i\mathbb{R}) = \exp(\mathbb{C})$.

²Da die Nullstellen einer stetigen Funktion $f(x)$ eine abgeschlossene Menge bilden, existiert eine kleinste positive Nullstelle, falls $f(x) > 0$ ist für alle $0 < x < \varepsilon$.

15.3 Monotonie und erste Ableitung

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Gilt

$$f'(\xi) > 0 \quad , \quad \forall \xi \in [a, b] \quad ,$$

dann ist f streng monoton wachsend auf $[a, b]$.

Beweis: Für $a \leq x < y \leq b$ liefert der Mittelwertsatz

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0$$

Wegen $(y - x) > 0$ folgt daher $f(y) - f(x) > 0$ oder

$$f(x) < f(y)$$

Anwendung: Ist beispielsweise $f(x)$ stetig differenzierbar, und gilt $f'(x_0) > 0$, dann ist $f(x)$ monoton steigend in einem kleinem Intervall um x_0 .

15.3.1 Umkehrfunktion

Als strikt monotone Funktion ist die Funktion f von 15.3 injektiv und erfüllt $\text{Bild}(f) = [f(a), f(b)]$. Also definiert f eine Bijektion

$$f : [a, b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$$

und es existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a, b] \quad .$$

Beweis: Nur die Aussage über das Bild bedarf der Begründung. Wegen der Monotonie gilt $\text{Bild}(f) \subseteq [f(a), f(b)]$. f ist differenzierbar, also stetig. Da f stetig ist, folgt nach dem Zwischenwertsatz die Gleichheit

$$\text{Bild}(f) = [f(a), f(b)] \quad .$$

15.3.2 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Nach 12.4.1 ist f^{-1} stetig, da f stetig ist.

15.4 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Sei

$$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

eine bijektive differenzierbare Funktion, mit der Eigenschaft $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$$

differenzierbar. Für $\xi \in [a, b]$ und $\eta = f(\xi) \in [c, d]$ gilt

$$\boxed{(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}}.$$

Beweis: Sei $y_n \rightarrow \eta$ mit $y_n \neq \eta$ eine konvergente Folge im Intervall $[f(a), f(b)]$. Setze $x_n = f^{-1}(y_n)$. Dann existiert der Limes

$$\lim_{y \rightarrow \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{y \rightarrow \eta} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow \eta} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}} = \frac{1}{f'(\xi)}.$$

Da der Limes $f'(\xi) \neq 0$ wegen der Annahme, ist die vorletzte Gleichheit eine Folge von 7.8.1. Beachte ausserdem

$$y \rightarrow \eta \Rightarrow x = f^{-1}(y) \rightarrow \xi = f^{-1}(\eta)$$

wegen 12.4.1. Daher ist

$$\lim_{y \rightarrow \eta} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi).$$

15.5 Folgerung - Ableitung des Logarithmus

Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$ hat auf ganz \mathbb{R} die Eigenschaft $f'(x) > 0$. Daher lässt sich obige Rechnung auf die Umkehrfunktion $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ anwenden:

Der Logarithmus ist eine differenzierbare Funktion auf $(0, \infty)$ mit der Ableitung

$$\boxed{\log(x)' = \frac{1}{x}}.$$

Beweis: Für die Umkehrfunktion von $f(x) = \exp(x)$ gilt $\log(\eta)' = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f(\xi)} = \frac{1}{\eta}$, wobei $\eta = f(\xi)$.

15.6 Die Kettenregel

Seien X, Y, Z abgeschlossene Intervalle in \mathbb{R} , welche nicht nur aus einem Punkt bestehen. Seien

$$f : X \rightarrow Y \quad , \quad g : Y \rightarrow Z$$

Funktionen. Sei $\xi \in X$ und $\eta = f(\xi)$. Ist f differenzierbar in ξ und ist g differenzierbar in η , dann ist die Komposition

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

differenzierbar in ξ , und es gilt die Kettenregel

$$\boxed{(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta) \cdot f'(\xi)} .$$

Oder anders formuliert: $\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)} .$

Beweis:

Zur Erinnerung: Nach 14.4 sind äquivalent

1. f ist differenzierbar im Punkt ξ
2. f ist linear approximierbar im Punkt ξ , d.h.

$$(**) \quad f(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot |x - \xi|$$

für eine Funktion $H(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow \xi} |H(x)| = 0$.

Analog gilt nach 14.4: g ist differenzierbar im Punkt η genau dann, wenn gilt

$$(*) \quad g(y) = g(\eta) + g'(\eta) \cdot (y - \eta) + \tilde{H}(y) \cdot |y - \eta|$$

für eine Funktion $\tilde{H}(y)$ mit $\lim_{y \rightarrow \eta} |\tilde{H}(y)| = 0$.

Durch Einsetzen folgt daraus

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \stackrel{(*)}{=} g(\eta) + g'(\eta) \cdot (f(x) - \eta) + \tilde{H}(f(x)) \cdot |f(x) - \eta| \\ &\stackrel{(**)}{=} g(\eta) + g'(\eta) \cdot \left(f'(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot |x - \xi| \right) + \tilde{H}(f(x)) \cdot \left| f'(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot |x - \xi| \right| \\ &= (g \circ f)(\xi) + \left(g'(\eta) \cdot f'(\xi) \right) \cdot (x - \xi) + H_1(x) \cdot |x - \xi| \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$H_1(x) = g'(\eta) \cdot H(x) + \tilde{H}(f(x)) \frac{|f'(\xi) \cdot (x - \xi) + H(x) \cdot |x - \xi||}{|x - \xi|} .$$

Durch zweimaligem Anwenden der Dreiecksungleichung folgt

$$|H_1(x)| \leq |g'(\eta)| \cdot |H(x)| + |\tilde{H}(f(x))| \cdot (|f'(\xi)| + |H(x)|) .$$

f ist stetig im Punkt $x = \xi$ nach 14.5. Also gilt $\lim_{x \rightarrow \xi} |\tilde{H}(f(x))| = \lim_{y \rightarrow \eta} |\tilde{H}(y)| = 0$. Somit folgt $\lim_{x \rightarrow \xi} |H_1(x)| = 0$. Daraus folgt wegen 14.4 die Behauptung.

15.6.1 Ableitungen von beliebigen Potenzen

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion x^α auf $(0, \infty)$ vermöge

$$x^\alpha := \exp(\alpha \cdot \log(x))$$

Dann gilt nach der Kettenregel, dass x^α differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \exp(\alpha \log(x)) \cdot (\alpha \cdot \log(x))' \\ &= \alpha \cdot \exp(\alpha \cdot \log(x)) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \alpha \cdot \exp((\alpha - 1) \cdot \log(x)) \\ &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

15.7 *Zur Erinnerung

Mit der Methode von 1.1 - Umordnen ist für endliche Summen erlaubt - zeigt man

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}.$$

Die Summe auf der rechten Seite ist die Untersumme der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung $Z = \{\frac{1}{2} + \frac{i}{2n} \mid i = 0, \dots, n\}$. Im Limes $n \rightarrow \infty$ konvergiert diese Summe daher gegen das Integral $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \log(t)|_{\frac{1}{2}}^1 = -\log(\frac{1}{2}) = \log(2)$. Dies zeigt

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = \log(2)$$

Zur Geschwindigkeit der Konvergenz, beachte

$$\log(2) - \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)(2i+2)}.$$

Dies ist $\geq \int_n^{\infty} \frac{dt}{(2t+1)(2t+2)} \geq \int_n^{\infty} \frac{dt}{4(t+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -4^{-1}(t+1)^{-1}|_n^x = \frac{1}{4(n+1)}$. Um $\log(2)$ auf n Stellen genau zu berechnen müsste man daher $\frac{10^n}{4}$ Terme summieren. Eine bessere Methode zur Berechnung von $\log(2)$ geben wir in 17.5.

Kapitel 16

Taylor Entwicklung

16.1 Taylor's Formel mit Lagrange Restglied

Sei $a < b$ und sei

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Dann existiert für $x \neq x_0$ und $x, x_0 \in [a, b]$ ein $\xi = \xi(x, n)$ im Intervall¹ (x_0, x) (welches von n und x_0, x abhängt) so dass gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n(x, x_0)$$

mit dem Restglied

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

16.1.1 Hinweise

- Achtung: Der Punkt ξ ist unbekannt, man weiss nur $\xi \in (x_0, x)$.
- Für die Formel würde die schwächere Voraussetzung genügen:
 n -mal stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und $(n + 1)$ -mal differenzierbar auf (a, b)

Beweis ObdA $x_0 = a$ und $x > a$. Wir fixieren x und betrachten für $t \in [a, x]$ folgende einmal differenzierbare Hilfsfunktion der Variable t auf dem Intervall $[a, x]$

$$F(t) = f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{(x-t)^i}{i!} \cdot f^{(i)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \kappa.$$

¹Die Formel gilt für $x < x_0$ mit $\xi \in (x, x_0)$

Hierbei ist κ eine noch geeignet zu wählende Konstante und $f(x)$ ist als Konstante aufzufassen. Per Definition

$$F(t)|_{t=x} = 0 .$$

Wegen $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \neq 0$ kann man $\kappa \in \mathbb{R}$ so wählen, dass ausserdem gilt

$$F(t)|_{t=a} = 0 .$$

Nun kann man den Mittelwertsatz auf die differenzierbare Funktion $F : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ anwenden. Dies liefert

$$\exists \xi \in (a, x) \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} F(\xi) = 0 .$$

Die Ableitung $F' = \frac{d}{dt} F$ ist

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) \\ &- \left[\frac{(x-t)^0}{0!} (-1) f'(t) + \frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) \right] \\ &- \left[\frac{(x-t)}{1!} (-1) f^{(2)}(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) \right] \\ &\quad \dots \\ &- \left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (-1) f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right] \\ &\quad - \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot \kappa . \end{aligned}$$

Da sich fast alle Terme wegheben ergibt sich $F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot \kappa$, also wegen $\xi \neq x$ und $F'(\xi) = 0$

$$\kappa = f^{(n+1)}(\xi) .$$

Daraus folgt die Taylorformel wegen $F(a) = 0$.

16.2 Taylorentwicklung des Logarithmus

Sei

$$f(x) = \log(1+x)$$

Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Also per Induktion für alle $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} .$$

Taylor's Formel (für $x_0 = 0$) zeigt daher

$$\log(1+x) = \underbrace{\log(1)}_{=0} + x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x, 0)$$

mit dem Restglied

$$R_n(x, 0) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (1 + \xi_n x)^{n+1}$$

für ein $\xi_n \in (0, 1)$. Für $x \in [0, 1]$ (oder sogar $x \in [-1/2, 1]$) konvergiert das Restglied im Limes $n \rightarrow \infty$ gegen Null, da sein Betrag durch $\frac{1}{n+1}$ abgeschätzt werden kann. Es folgt

16.2.1 Taylorreihe

Für alle $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ gilt

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} .$$

Insbesondere

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

Wir zeigen später, dass dies sogar für $x \in (-1, 1]$ gilt.

16.3 Ein instruktives Beispiel

Dass das Restglied nicht immer ein so schönes Verhalten wie im Fall des Logarithmus besitzt, zeigt das Beispiel der Funktion

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad (x \neq 0).$$

Man zeigt leicht durch vollständige Induktion, dass $f(x)$ zu einer auf ganz \mathbb{R} unendlich oft differenzierbaren Funktion fortgesetzt werden kann, so dass gilt

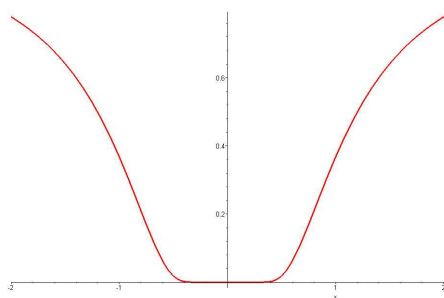
$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für alle } n$$

und

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \neq 0)$$

für gewisse Polynome $P_n(x)$. Für diese Funktion ist daher die Taylorentwicklung im Punkt $x_0 = 0$ nicht sehr informativ, denn

$$f(x) = R_n(x, 0) \quad \text{für alle } n$$



Man kann im übrigen die Funktion $f(x)$ im Bereich $x \leq 0$ durch die Nullfunktion ersetzen. Die so neu definierte Funktion $g(x)$ ist identisch Null für $x \leq 0$ und, da alle Ableiten von $f(x)$ im Punkt Null verschwinden, tatsächlich eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf ganz \mathbb{R} .

16.4 Exponentialfunktion

Sei $f(x) = \exp(x + y)$. Aus

$$f^{(n)}(0) = \exp(y)$$

für alle n folgt durch Taylorentwicklung im Punkt $x_0 = y$

$$\exp(x) = \exp(y) + \frac{\exp(y)}{1!}(x - y) + \dots + \frac{\exp(y)}{n!}(x - y)^n + \dots$$

denn das Restglied

$$R_n(x, y) = \exp(\xi_n) \cdot \frac{(x - y)^{n+1}}{(n + 1)!}, \quad \xi_n \in [x, y]$$

konvergiert im Limes $n \rightarrow \infty$ gegen Null (der Term $\exp(\xi_n)$ bleibt beschränkt!).
Man erhält also einen neuen Beweis der Funktionalgleichung

$$\exp(x) = \exp(y)\exp(x - y)$$

aus der Taylorentwicklung.

16.5 Variante des Taylor'schen Satzes

Sei $a < b$ und

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n -mal differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + o((x-a)^n).$$

16.5.1 Zur Erinnerung

Eine Funktion ist von der Ordnung $o((x-a)^n)$, wenn sie die Gestalt $h(x)(x-a)^n$ besitzt, so daß gilt:

- $h(x)$ ist stetig auf $[a, b]$
- $h(a) = 0$

Beweis 1. Schritt. Indem man $f(x)$ durch $f(x) - \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!} (x-a)^\nu$ ersetzt, kann man obdA annehmen

$$f(a) = f^{(1)}(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0.$$

Wenn alle Ableitung $f^{(\nu)}(a)$ für $\nu \leq n$ verschwinden, ist dann zu zeigen

$$f(x) \stackrel{?!}{=} o((x-a)^n)$$

ObdA können wir annehmen $a = 0$ und $f^{(\nu)}(0) = 0$, $\nu = 0, \dots, n$. Zu zeigen ist dann

$$f(x) = x^n \cdot h(x)$$

für eine im Punkt 0 stetige Funktion $h(x)$ mit der Eigenschaft $h(0) = 0$.

2. Schritt. Wir betrachten für festes $x \neq 0$ die Hilfsfunktion

$$F(t) = \frac{f(x \cdot t)}{x^n}$$

F ist n -mal differenzierbare Funktion der Variable $t \in [0, 1]$ mit

$$F^{(\nu)}(t) = x^{\nu-n} \cdot f^{(\nu)}(x \cdot t)$$

Somit gilt $F^{(\nu)}(0) = 0$ für alle $\nu = 0, \dots, n$ wegen Schritt 1.

Schritt 3. Es gilt für ein $\xi = \xi(x) \in (0, 1)$ wegen Taylor's Formel 16.1 für $F(t) = F^{(n-1)}(\xi t) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ entwickelt im Punkt $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} h(x) &\stackrel{!}{=} F(1) \\ &\stackrel{!}{=} \underbrace{F^{(n-1)}(\xi)}_{0 < \xi < 1} \frac{1^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{x^{-1} f^{(n-1)}(x \cdot t)}{(n-1)!} \Big|_{t=\xi} \\ &= x^{-1} \frac{f^{(n-1)}(x \cdot \xi)}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Da $f^{(n-1)}$ noch einmal differenzierbar ist, gilt wegen 14.4

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} &= \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} x + x \cdot \tilde{h}(x) \\ &= x \cdot \tilde{h}(x) \end{aligned}$$

mit \tilde{h} stetig bei Null und $\tilde{h}(0) = 0$. Einsetzen ergibt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{-1} \cdot (x \cdot \xi \cdot \tilde{h}(x \cdot \xi)) \\ &= \xi \cdot \tilde{h}(x \cdot \xi) \end{aligned}$$

4. Schritt. Beachte $|h(x)| \leq |\tilde{h}(\xi(x)x)|$. Also

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \xi(x) \cdot \tilde{h}(x \cdot \xi(x)) \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

da $\tilde{h}(x)$ stetig bei Null ist mit $\tilde{h}(0) = 0$. Beachte $x \rightarrow 0$ impliziert

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \xi(x) = 0$
- wegen $|\xi(x)| \leq 1$

16.6 *Eine Anwendung

$$f(n) = n \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{2}{3}$$

Beweis: Wegen 16.5 gilt

$$\begin{aligned} f(n) &= n \cdot \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} \pm o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= n \cdot \left[\frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{2}{3} + n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} + h\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

mit $h(0) = 0$ und h stetig bei Null. Im Limes folgt somit

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} + h\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\frac{1}{n}\right)}_{=0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

16.7 Regel von d'Hospital

Sei $n \geq 1$ und seien f, g n -mal differenzierbar auf $[a, b]$ sowie $a < b$. Verschwinden die i -ten Ableitungen von f und g im Punkt a für $0 \leq i < n$ und gilt $g^{(n)}(a) \neq 0$, dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Anders ausgedrückt: Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(a) &= f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \\ g(a) &= g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0 \\ g^{(n)}(a) &\neq 0 \end{aligned}$$

Beweis der Regel von d'Hospital: Nach 16.5 gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + h(x)(x-a)^n}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \tilde{h}(x)(x-a)^n} \\ &= \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \overbrace{h(x)}^0}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \underbrace{\tilde{h}(x)}_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} \end{aligned}$$

16.7.1 *Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Hierbei ist im obigen Sinne $n = 1$ und $f(x) = \log(1+x)$ sowie $g(x) = x$.

Beweis: Wegen $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ und $g'(x) = 1$ nach der Regel von d'Hospital im Fall $n = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

16.7.2 *Folgerung

Wir erhalten auf diese Weise einen neuen Beweis für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp(y)$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(n \cdot \log\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)$$

Mit der Substitution $x = \frac{y}{n}$ erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(n \cdot \log\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(y \cdot x^{-1} \log(1 + x)) \\ &= \exp\left(y \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{-1} \log(1 + x))\right)\end{aligned}$$

wobei die einzelnen Schritte durch die Stetigkeit der Multiplikationsabbildung und der Stetigkeit der Exponentialfunktion gerechtfertigt sind. Es folgt daher aus 16.7.1 wie behauptet

$$\exp\left(y \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + x)}{x}\right) = \exp(y)$$

16.8 Taylor's Formel mit Integralrestglied

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Für $x, x_0 \in [a, b]$ gilt dann

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot (x - x_0)^\nu + R_n(x, x_0)$$

mit

$$R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt$$

Wegen der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ existiert das Integral.

Beweis durch Induktion nach n

Induktionsanfang

Den Induktionsanfang $n = 0$ liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + R_0(x, x_0).$$

Induktionsschluss von n nach $n + 1$

Beachte, jetzt ist $f^{(n+2)}$ nach Annahme stetig, also integrierbar. Zum Beweis benutzen wir partielle Integration (siehe 16.9)

$$\begin{aligned} R_n(x, x_0) &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt \\ &\stackrel{\text{part. Int}}{=} -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+2)}(t) dt \\ &= -(-1) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0) - \int_{x_0}^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}(x, x_0) \end{aligned}$$

Beachte: $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0)$ ist der $(n+1)$ -te Summand des Taylorpolynoms von $f(x)$.

16.9 Partielle Integration

Für stetig differenzierbare² Funktionen f, g auf $[a, b]$ gilt

$$\int_a^x g(t) \cdot f'(t) dt = - \int_a^x f(t) \cdot g'(t) dt + f(t) \cdot g(t) \Big|_a^x .$$

Beweis: Benutze $f' \cdot g + f \cdot g' = (f \cdot g)'$. Es folgt daraus

$$\int_a^x f' \cdot g + \int_a^x f \cdot g' = f \cdot g \Big|_a^x$$

16.10 Integration durch Substitution

Seien

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow [c, d] \\ f : [c, d] &\rightarrow [e, h] \end{aligned}$$

Funktionen, so dass f stetig ist und g stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du .$$

Beweis: Nach dem Hauptsatz besitzt $f(x)$ eine stetig differenzierbare Stammfunktion $F(x)$, das heißt $F'(x) = f(x)$. Es gilt wegen der Kettenregel dann wie behauptet

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt &\stackrel{\text{HSatz}}{=} F(g(t)) \Big|_a^b \\ &= F(u) \Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &\stackrel{\text{HSatz}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u) du \end{aligned}$$

²das heißt: die Ableitungen seien stetig!

16.11 *Anwendung der Taylor-Formel auf die binomische Formel

Hinweis: Für

$$f(x) = x^m$$

verschwindet das Restglied im Fall $n = m$ und man erhält aus Taylor's Formel wegen

$$\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} = n(n-1)\cdots(n-i+1) \cdot \frac{x_0^{n-i}}{i!} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot x_0^{n-i} = \binom{n}{i} x_0^{n-i}$$

das Binomialtheorem. Wir definieren nun allgemeiner für α aus \mathbb{R} und $\nu \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$$

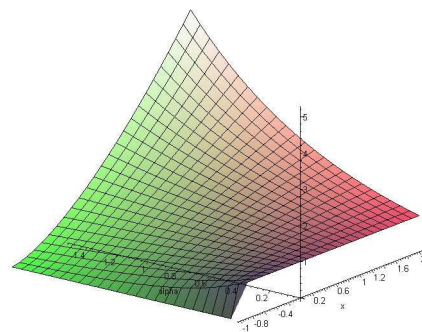
um eine Verallgemeinerung des Binomial Theorems zu beweisen. Dazu benutzen wir eine neue Form für das Restglied der Taylor Entwicklung. Beachte

$$\frac{(x^\alpha)^{(i)}}{i!} = \binom{\alpha}{i} \cdot x^{\alpha-i}.$$

Es gilt

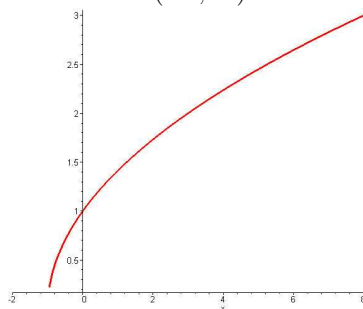
$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \cdot x^\nu$$

für alle $|x| \leq 1$, $x \neq -1$, falls $\alpha > 0$.



Wir haben bereits gezeigt, dass die Funktionen $(1+x)^\alpha$ unendlich oft differenzierbare Funktionen auf $(-1, \infty)$ sind. Die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ im Fall

$\alpha = 1/3$



16.11.1 Beweis

Es soll eine Entwicklung von $(1+x)^\alpha$ im Punkt $x_0 = 0$ durchgeführt werden.
Wir zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, 0) = 0$$

Man zeigt leicht durch Induktion

Vorbetrachtung

$$[(1+x)^\alpha]^{(n+1)} = (n+1)! \binom{\alpha}{n+1} \cdot (1+x)^{\alpha-n-1}$$

Somit

$$\begin{aligned} R_n(x, 0) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot (n+1)! \binom{\alpha}{n+1} \cdot (1+t)^{\alpha-n-1} dt \\ &= (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} x^n \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot (1+xt)^{\alpha-n-1} \cdot x dt \end{aligned}$$

Hinweis: Im letzten Schritt wurde die Substitution mit $t \rightarrow t \cdot x = g(t)$ durchgeführt. Somit folgt

$$R_n(x, 0) = (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^n \cdot \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+xt)^n} \cdot (1+xt)^{\alpha-1} dt$$

Wir behaupten für $x \in (-1, 1]$

$$|R_n(x, 0)| \leq \text{const}(\alpha) \cdot (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} \cdot |x|^n$$

denn wegen $0 \leq 1-t \leq 1+xt$ für $x \in (-1, 1]$ und $t \in [0, 1]$ gilt

$$0 \leq \frac{(1-t)^n}{(1+xt)^n} \leq 1.$$

Somit folgt die Behauptung wegen

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+xt)^n} \cdot (1+xt)^{\alpha-1} dt \right| &\leq \left| \int_0^1 (1+xt)^{\alpha-1} x dt \right| \\
 &\leq \left| \int_0^1 (1+xt)^{\alpha-1} x dt \right| \\
 &= \left| \frac{(1+xt)^\alpha}{\alpha} \Big|_0^1 \right| \\
 &= \left| \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} \right| \\
 &\leq \underbrace{\frac{2^\alpha - 1}{\alpha}}_{=const(\alpha)}
 \end{aligned}$$

Limesbetrachtung

Wir zeigen nun für $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} = 0$$

Offensichtlich gilt

$$\left| \frac{(n+1)\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-n-1+1)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} \right| \leq const_2(\alpha) \cdot \prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^n \frac{\nu-\alpha}{\nu}$$

für ein geeignetes $\nu_0(\alpha) > \alpha$. Die rechte Seite ist

$$const_2(\alpha) \cdot \prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^n \left(1 - \frac{\alpha}{\nu}\right)$$

Es genügt zu zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^n \left(1 - \frac{\alpha}{\nu}\right) = 0$$

oder dass der Kehrwert davon über alle Schranken wächst.

Kehrwertbetrachtung

Benutze

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\nu}\right)^{-1} = 1 + \frac{\alpha}{\nu} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \dots$$

da $\left|\frac{\alpha}{\nu}\right| < 1$ für $\nu \geq \nu_0(\alpha)$. Da ferner $\alpha > 0$ folgt:

$$1 + \frac{\alpha}{\nu} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \dots \geq 1 + \frac{\alpha}{\nu}$$

Wir reduzieren die Behauptung nunmehr wegen $\alpha > 0$ auf die Divergenz der harmonischen Reihe. Der von uns zu untersuchte Kehrwert ist nach unten abschätzbar durch das Produkt

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=\nu_0(\alpha)}^n \left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right) &\geq 1 + \sum_{\nu=0}^n \frac{\alpha}{\nu} + \text{höhere Produkte} \\ &\stackrel{\alpha > 0}{\geq} 1 + \alpha \cdot \sum_{\nu=\nu_0}^n \frac{1}{\nu} \end{aligned}$$

16.11.2 Resumée

Analog kann man auch den Fall $\alpha < 0$ oder die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ diskutieren, allerdings unter der schärferen Annahme $|x| < 1$. Wir überlassen dies dem Leser als Übungsaufgabe. Man muss die Konvergenz von $x^n(n+1) \binom{\alpha}{n+1}$ gegen Null zeigen für $n \rightarrow \infty$. Dazu genügt, dass $\binom{\alpha}{n+1}$ höchstens polynomial in n wächst. Für ein strukturell einfacheren Beweis verweisen wir auf 19.3.2.

Beispiel

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!} x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} x^3 + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots \end{aligned}$$

Betrachte:

$$(1-q)^{-1} = 1 + q + q^2 + q^3 \dots$$

für $q = -x$. Beachte $|q| < 1$ wegen $|x| < 1$.

Kapitel 17

Eulersche Formel

17.0.3 Bernoulli-Polynome

Die Bernoulli-Polynome sind wie folgt rekursiv definiert:

1. $B_0(t) = 1$

2. $B'_{n+1}(t) = (n+1) \cdot B_n(t)$, für alle $n \geq 0$

3. $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$ falls $n \geq 1$

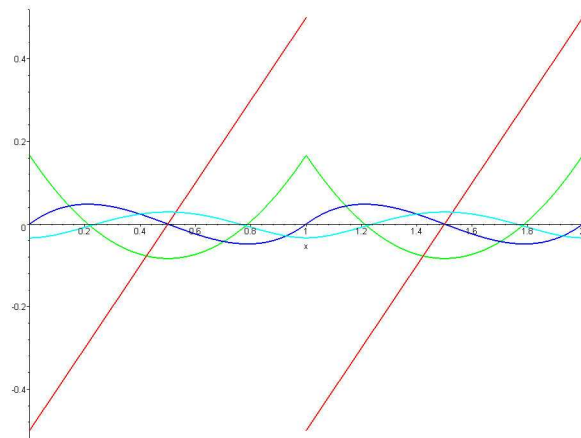
Beispiel

$$\begin{aligned} B_1(t) &= t - \frac{1}{2} \\ B_2(t) &= t^2 - t + \frac{1}{6} \\ B_3(t) &= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

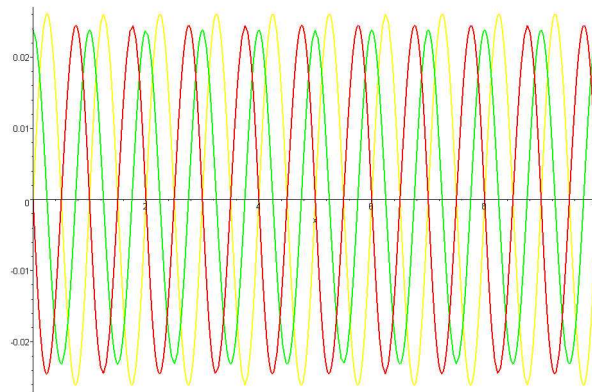
Visualisierung einiger Bernoulli-Polynome

Die Bernoulli-Polynome 1 bis 4 in der für den Beweis benötigten periodischen Form, können wie folgt visualisiert¹ werden:

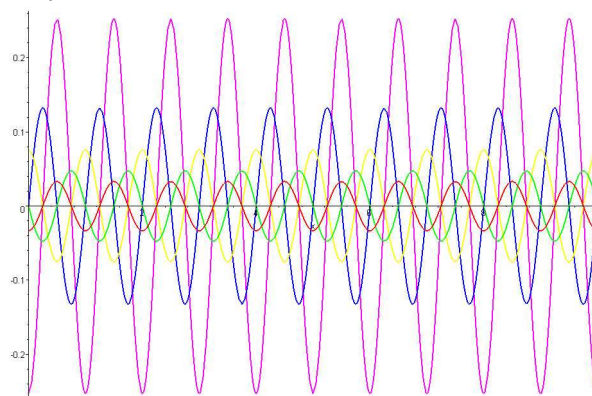
¹Diese genaue Visualisierung wurde vom Autor eigenhändig eingefügt



Ferner sind hier die Polynome 5 bis 12 skizziert:



Polynome 5 bis 7



Polynome 8 bis 12

Für weitere Informationen und Abbildungen, siehe A (Seite 231).

17.0.4 Eigenschaften der Bernoulli-Polynome

- Aus (2) und (3) folgt aufgrund des Hauptsatzes

$$\begin{aligned}
 B_n(1) - B_n(0) &= B_n(t) \Big|_0^1 \\
 &= \int_0^1 B_n'(t) dt \\
 &= n \cdot \int_0^1 B_{n-1}(t) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und somit

$$B_n(1) = B_n(0)$$

für alle $n \geq 2$ (für $n = 1$ gilt dies nicht!).

- Da die Polynome $P_n(t) = (-1)^n \cdot B_n(1-t)$ ebenso die Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzen, folgt:

$$B_n(t) = (-1)^n \cdot B_n(1-t).$$

- Aus den beiden zuletzt hergeleiteten Eigenschaften folgt $B_n(1) = B_n(0) = (-1)^n \cdot B_n(1)$, also für ungerades $n \geq 3$

$$B_n(0) = B_n(1) = 0 \quad , \quad n = 2m + 1 .$$

Bemerkung: $\sum_{\nu=0}^n \nu^i = \frac{B_{i+1}(n+1) - B_{i+1}(0)}{i+1}$.

Eine Bezeichnung

Jedes $t \in \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$t = \langle t \rangle + k$$

in eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ und eine Zahl $\langle t \rangle \in [0, 1)$. Als Funktion von t ist $\langle t \rangle$ periodisch mit der Periode 1

$$\langle t+1 \rangle = \langle t \rangle .$$

17.1 Eulersche Formel

Sei n eine natürliche Zahl und sei $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(2N + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n f(\nu) &= \int_0^n f(t) dt + \frac{f(0) + f(n)}{2} \\ &\quad + \sum_{m=1}^N \frac{B_{2m}(0)}{(2m)!} \cdot f^{(2m-1)}(t) \Big|_0^n \\ &\quad + \int_0^n \frac{B_{2N+1}(\langle t \rangle)}{(2N+1)!} f^{(2N+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Äquivalent dazu ist die Trapezformel:

$$\begin{aligned} \int_0^n f(t) dt &= \frac{f(0) + 2f(1) + \dots + 2f(n-1) + f(n)}{2} \\ &\quad - \sum_{m=1}^N \frac{B_{2m}(0)}{(2m)!} \cdot f^{(2m-1)}(t) \Big|_0^n \\ &\quad - \int_0^n \frac{B_{2N+1}(\langle t \rangle)}{(2N+1)!} f^{(2N+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Beweis:

1. Schritt

Es genügt die Trapez-Formel im Spezialfall $n = 1$ zu beweisen

$$\begin{aligned} (*) \int_0^1 f(t) dt &= \frac{f(0) + f(1)}{2} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^N \frac{B_{2\nu}(0)}{(2\nu)!} \cdot f^{(2\nu-1)}(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{B_{2N+1}(t)}{(2N+1)!} \cdot f^{(2N+1)}(t) dt \end{aligned}$$

wegen

$$\int_0^n f(t) dt = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\int_0^1 f(t + \nu) dt \right)$$

benutzt man die Formel (*) angewandt auf die Funktionen $f(t), f(t+1), \dots, f(t+n-1)$, so folgt durch Aufaddieren sofort die Trapezformel.

2. Schritt

Die Gleichung (*) beweist man durch Induktion nach N unter Berücksichtigung von

$$\int_0^1 \frac{B_\nu(t)}{\nu!} f^{(\nu)}(t) dt = - \int_0^1 \frac{B_{\nu+1}(t)}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(t) dt + \frac{B_{\nu+1}(t)}{(\nu+1)!} f^{(\nu)}(t) \Big|_0^1$$

mittels partieller Integration; beachte $\frac{B'_{\nu+1}(t)}{(\nu+1)!} = \frac{B_\nu(t)}{\nu!}$ sowie

$$B_{\nu+1}(1) = B_{\nu+1}(0) \quad , \quad \nu + 1 \geq 3 \text{ ungerade .}$$

3. Schritt

Der Induktionsanfang ergibt sich analog, denn

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 B_1(t) f'(t) dt$$

folgt aus $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ wieder durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_1(t) f'(t) dt &\stackrel{\text{partielle Int.}}{=} B_1(t) f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} f(1) - \left(-\frac{1}{2}\right) f(0) - \int_0^1 1 \cdot f(t) dt \end{aligned}$$

17.2 Sterling's Formel

Der Limes

$$\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}$$

existiert und ist von Null verschieden.

Bemerkung: Der Limes κ ist $\sqrt{2 \cdot \pi}$, was aber hier nicht bewiesen werden soll.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass der Limes der Folge

$$a_n = \log(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log(n) + n$$

existiert. Beachte, die Eulerformel liefert für $f(t) = \log(1+t)$

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \sum_{\nu=1}^n \log(\nu) \\ &\stackrel{\text{Euler}}{=} \int_1^n \log(t) dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(1) + \log(n)}{1} \\ &\quad + \frac{B_2(0)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right) \\ &\quad + \int_1^n \frac{B_3(\langle t \rangle) 2dt}{3! t^3} \end{aligned}$$

wegen $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ und $f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$. Aus dem

Hilfssatz: $\int_1^x \log(t) dt = x \cdot \log(x) - x + 1$.

folgt daher

$$a_n = \frac{B_2(0)}{2!} + \int_1^n \frac{B_3(\langle t \rangle) 2dt}{3! t^3}.$$

Da der linke Term eine Nullfolge ist, genügt es nach dem Cauchy Kriterium für Konvergenz zu zeigen

Cauchyabschätzung

$$\left| \int_{n_1}^{n_2} \frac{1}{3} \cdot B_3(\langle t \rangle) \cdot \frac{2}{t^3} dt \right| < \varepsilon$$

falls $n_1, n_2 \geq n(\varepsilon)$.

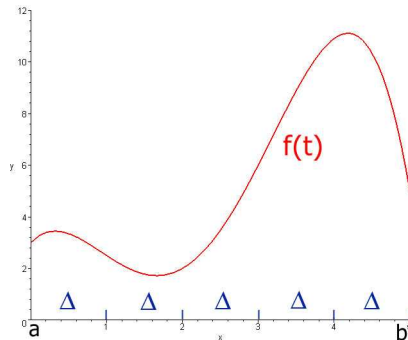
Dies ist aber klar, denn das Integral lässt sich nach 13.4 abschätzen durch

$$C \int_{n_1}^{n_2} \frac{dt}{t^3} \leq C \min(n_1, n_2)^{-2}.$$

für $C = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{B_3(t)}{3} \right|$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

17.3 *Die Simpson'sche Regel

Sei g eine vier mal stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Zerlegt man das Intervall in $2n$ gleiche Schritte der Länge Δ



dann gilt

$$\Delta = \frac{b-a}{2n}.$$

Die Stützpunkte auf der t-Achse sind dann die $(2n+1)$ Punkte

$$a + \frac{\nu}{2n}(b-a) \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n$$

Behauptung: Das Integral $\int_a^b g(t) dt$ ist gleich

$$\Delta \cdot \frac{g(a) + 4 \cdot g(a + \Delta) + 2g(a + 2\Delta) + 4g(a + 3\Delta) + 2g(a + 4\Delta) + \dots + 4g(b - \Delta) + g(b)}{3}$$

bis auf einen Fehler vom Typ

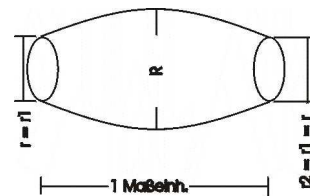
$$\frac{(b-a)^5}{n^5} \cdot C \cdot \max_{x \in [a,b]} |g^{(4)}(x)|$$

für eine nicht von g abhängende Konstante C .

Spezialfall: Für $n = 1$ und $g(x) = \pi \cdot x^2$ erhält man die

17.4 *Die Keplersche Faßregel

Das Volumen des nebenstehenden Fasses



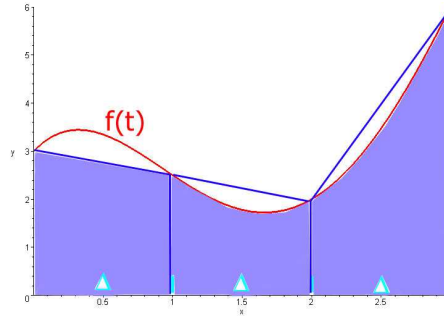
ist in erster Näherung

$$\text{Volumen} \approx \frac{\pi \cdot r_1^2 + 4 \cdot \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r_2^2}{6} \cdot \text{Länge}$$

17.4.1 Beweisskizze

Zum Beweis der Simpsonschen Regel sei der Einfachheit halber $\Delta = 1$. Der Beweis folgt aus dem Spezialfall $N = 1$ der Trapezregel mittels eines zusätzlichen Tricks. Beachte

$$\frac{3}{4} \int_0^{2n} g(t) dt = \int_0^{2n} g(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^n g(2t) dt .$$



Man wendet nun die Trapezregel zweimal an, nämlich einmal für $N = 1$, $f(t) = g(2t)$ und ein zweites Mal für $N = 1$, und $f(t) = g(t)$ aber $2n$ anstelle von n . Dies liefert für die rechte Seite

$$\begin{aligned} & \frac{g(0) + 2g(1) + g(2) + \dots + 2g(2n-1) + g(2n)}{2} \\ & - \frac{1}{2} \frac{g(0) + 2g(2) + 2g(4) + \dots + 2g(2n-2) + g(2n)}{2} \\ & = \frac{g(0) + 4g(1) + 2g(2) + \dots + 4g(2n-1) + g(2n)}{4} . \end{aligned}$$

Der nächste Term der Trapezformel fällt weg wegen $g'(x) - \frac{1}{2}g'(2x) = 0$, und es bleibt nur der Restterm (nach nochmaliger partieller Integration !)

$$\int_0^{2n} \frac{B_4(\langle t \rangle)}{4!} g^{(4)}(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^n \frac{B_4(\langle t \rangle)}{4!} 2^4 g^{(4)}(2t) dt .$$

Diesen Term kann man durch $c \cdot \max_{x \in [a,b]} |g^{(4)}(x)|$ abschätzen, wobei c nur von a, b, n abhängt, nicht aber von g .

17.5 Beispiel - Berechnung von $\log(2)$

Es gilt

$$\log(2) = 0,6931471806\dots$$

Berechnet man diesen Wert durch die Simpson'sche Formel, erhält man folgende Näherungen

n	Simpson ergibt Stellen	Approximationswert
1	1+2	0,6944...
2	1+4	0,69325...
3	1+8	0,693154...

Beachte

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 \frac{dt}{t} &= \log(t) \Big|_{1/2}^1 \\ &= \log(1) - \log(1/2) = \log(2)\end{aligned}$$

Mit $n = 1$ ergibt sich aus der Simpson'schen Formel für $g(t) = 1/t$ und $\Delta = 1/4$

$$\int_{1/2}^1 \frac{dt}{t} \approx \frac{1/4}{3} \left(g(1/2) + 4g(3/4) + g(1) \right),$$

das heisst in erster Näherung

$$\log(2) \approx \frac{1}{12} \left(2 + \frac{16}{3} + 1 \right) = 0,6944\dots$$

Dies steht im krassen Gegensatz zu der schlechten Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe in Abschnitt 15.7.

Kapitel 18

Differentialgleichungen

Der einfachste Beispiel einer Differentialgleichung ist die folgende Gleichung:

1. Beispiel: Gesucht ist für eine gegebene stetige reellwertige Funktion $h(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ eine differenzierbare Funktion $f(x)$, so dass gilt

$$f'(x) = h(x).$$

Lösung: Die gesuchte Antwort, Existenz und Eindeutigkeit, liefert der Hauptsatz

$$f(x) = \int_a^x h(t) dt + C$$

Beachte, man kann den Wert von $f(x)$ in einem Punkt x_0 vorschreiben durch geeignete Wahl der Integrationskonstante C . Dies bestimmt dann die Funktion $f(x)$ eindeutig.

Allgemeiner kann man eine stetige Funktion h betrachten, welche von zwei Variablen x und y abhängt, und eine differenzierbare Lösungsfunktion $f(x)$ der Gleichung

$$\boxed{f'(x) = h(x, f(x))}$$

suchen. Ein einfacher Fall ist $h(x, y) = c \cdot y$.

2. Beispiel: Gesucht ist auf einem Intervall oder auf ganz \mathbb{R} eine differenzierbare Funktion $f(x)$, welche der Differentialgleichung

$$f'(x) = c \cdot f(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

genügt, sowie der Anfangswertbedingung

$$f(x_0) = y_0$$

für einen festen Punkt $x_0 \in [a, b]$ und einen gegebenen Wert $y_0 \in \mathbb{R}$.

Lösung: Jede Lösung der Differentialgleichung hat die Gestalt

$$f(x) = C \exp(c \cdot x) \quad C \in \mathbb{R}$$

Setze $C = y_0 \exp(-cx_0)$.

Beweis(Eindeutigkeit): Setze

$$f(x) = g(x) \cdot \exp(c \cdot x)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot \exp(c \cdot x) + g(x) \cdot c \cdot \exp(c \cdot x) \\ &= (g'(x) + c \cdot g(x)) \cdot \exp(c \cdot x) \\ &= c \cdot f(x) \\ &= c \cdot g(x) \cdot \exp(c \cdot x) \end{aligned}$$

Die ursprünglich Differentialgleichung ist dann äquivalent zu

$$g'(x) = 0 \quad g(x) = C$$

C ist konstant.

Folgerung: Siehe auch 9.5.1 (Seite 52). Es ist $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$, denn beide Seiten erfüllen dieselbe Differentialgleichung mit demselben Anfangswert.

18.0.1 Höhere Ordnung

Um Differentialgleichungen vom Typ

$$\boxed{g^{(n)}(x) = H(x, g(x), \dots, g^{(n-1)}(x))}$$

mit der Anfangswertbedingung $g(x_0) = \eta_0, \dots, g^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$ zu behandeln, definiert man eine vektorwertige Hilfsfunktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \\ \dots \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

und erhält eine äquivalente Differentialgleichung ($f'(x)$ ist die komponentenweise Ableitung)

$$\boxed{f'(x) = h(x, f(x)) \quad , \quad f(x_0) = y_0}$$

wobei $h : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert ist durch

$$(x, y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_2, \dots, y_{n-1}, H(x, y_1, \dots, y_{n-1}))$$

und $y_0 = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$.

18.1 Ein metrischer Raum von Funktionen

Wir betrachten den Vektorraum aller stetigen vektorwertigen Funktion

$$\Xi = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \mid f \text{ ist stetig}\}$$

Wir versehen diesen Raum mit der folgenden Metrik ($[a, b]$ und \mathbb{R}^N tragen dabei stillschweigend die Standardmetrik)

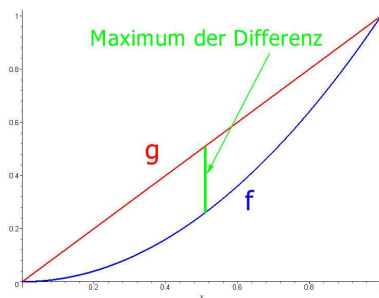
$$d_{\Xi}(f, g) = \|f - g\| \quad , \quad \|h\| = \sup_{x \in [a, b]} |h(x)|_{\mathbb{R}^N}$$

Man nennt $\|\cdot\|$ die l_{∞} -Norm oder die Norm der gleichmässigen Konvergenz.

Übungsaufgabe: d_{Ξ} definiert eine Metrik auf Ξ .

18.1.1 Visualisierung der Metrik

Für $N = 1$ gilt zum Beispiel:



Die maximale ‘Differenz’ zwischen beiden Funktionen f, g definiert die Distanz $d_{\Xi}(f, g)$.

18.2 Der Raum der stetigen Funktionen ist vollständig

Der metrische Raum (Ξ, d_{Ξ}) ist Cauchy-vollständig¹

Beweis: Gegeben sei eine Cauchyfolge $f_n \in \Xi$, das heisst

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \left(n, m > N(\varepsilon) \implies \|f_n - f_m\| < \varepsilon \right) .$$

Zu zeigen ist die Konvergenz, das heisst die Existenz eines $f \in \Xi$ mit

$$f_n \xrightarrow{d_{\Xi}} f .$$

¹Der Beweis zeigt allgemeiner, dass der Raum $\Xi = C(X, \mathbb{R}^N)$ der stetigen Funktionen $(X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}^N$ für einen beliebigen folgenkompakten metrischen Raum (X, d_X) Cauchy-vollständig ist.

Konstruktion von f :

Fixiere $x \in [a, b]$. Für eine Cauchyfolge in Ξ und festes x ist insbesondere $f_n(x)$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R}^N . \mathbb{R}^N ist Cauchy-vollständig. Also gilt punktweise

$$f_n(x) \rightarrow y \in \mathbb{R}^N$$

Ansatz: Dies definiert eine Funktion

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Wir zeigen nun folgende

Behauptungen:

1. f ist stetig, das heisst $f \in \Xi$.
2. $\|f - f_n\| < \epsilon$ für $n \geq N(\epsilon/2)$.

Hinweis: Die zweite Aussage impliziert $f_n \xrightarrow{d_\Xi} f$.

Das Schlüsselargument: Für $x_0 \in [a, b]$ gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$|f(x_0) - f_n(x_0)|_{\mathbb{R}^N} \leq |f(x_0) - f_m(x_0)|_{\mathbb{R}^N} + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|_{\mathbb{R}^N} .$$

Die Folge $f_m(x_0) \rightarrow f(x_0)$ konvergiert. Wählt man daher $m \geq N_1(\epsilon, x_0)$ genügend gross, gilt $|f(x_0) - f_m(x_0)|_{\mathbb{R}^N} < \epsilon/2$ (für gegebenes $\epsilon > 0$) sowie ausserdem $m \geq N(\epsilon/2)$. Es folgt

$$|f(x_0) - f_n(x_0)|_{\mathbb{R}^N} < \epsilon/2 + \|f_m - f_n\|$$

Für $n \geq N(\epsilon/2)$ gilt wegen $m \geq N(\epsilon/2)$ dann die Ungleichung $\|f_m - f_n\| < \epsilon/2$. Also ergibt sich der folgende

Hilfsatz: Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x_0) - f_n(x_0)|_{\mathbb{R}^N} < \epsilon$$

für alle $n \geq N(\epsilon/2)$ und alle $x_0 \in [a, b]$.

Dies zeigt insbesondere Behauptung 2. Abschliessend zeigen wir nun Behauptung 1, d.h. die

Stetigkeit von f : Für zwei beliebige Punkte $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} & |f(x_1) - f(x_2)|_{\mathbb{R}^N} \\ \leq & \underbrace{|f(x_1) - f_n(x_1)|_{\mathbb{R}^N}}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x_1) - f_n(x_2)|_{\mathbb{R}^N}}_{(2)} + \underbrace{|f_n(x_2) - f(x_2)|_{\mathbb{R}^N}}_{(3)} \\ < & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

18.2. DER RAUM DER STETIGEN FUNKTIONEN IST VOLLSTÄNDIG 129

Die letzte Zeile ergibt sich unter folgenden Voraussetzungen

- (1) für $n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)$ wegen des Hilfsatzes
- (2) für $|x_1 - x_2| < \delta\left(f_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, da $f_n \in \Xi$ gleichmässig stetig ist ².
- (3) für $n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)$ wieder wegen dem Hilfsatz.

Wir wählen nun $n = N\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)$. Dann gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)|_{\mathbb{R}^N} < \varepsilon$$

unter der Voraussetzung

$$|x_1 - x_2| < \delta = \delta\left(f_{N(\varepsilon/6)}, \frac{\varepsilon}{3}\right) = \delta(\varepsilon).$$

Also ist f (gleichmässig) stetig auf dem Intervall $[a, b]$.

²Das Intervall $[a, b]$ ist ein folgenkompakter metrischer Raum.

18.3 Lipschitz-stetige Funktionen

Wir nennen im folgenden eine Funktion

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, y) &\rightarrow h(x, y) \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig, falls gilt:

- h ist stetig
- $|h(x, y_1) - h(x, y_2)|_{\mathbb{R}^N} \leq M \cdot |y_1 - y_2|_{\mathbb{R}^N}$

Hierbei sei $M \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Diese Konstante nennt man Lipschitzkonstante.

18.3.1 Variante

Analog definiert man Lipschitz-stetig auf einem Intervall für

$$h : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

18.3.2 Wichtigstes Beispiel

Sei

$$h(x, y) = \underbrace{A(x) \cdot y}_{\text{Matrizenmultiplikation}} + b(x)$$

linear in y mit Koeffizienten $A(x)$ und $b(x)$, welche stetig von x abhängen. Falls die Matrixeinträge $A_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq N$ auf \mathbb{R} (oder $[a, b]$) durch eine Konstante C beschränkt sind, dann ist die Funktion $h(x, y)$ Lipschitz-stetig mit

$$M = \sqrt{N} \cdot C$$

Beweis: Aus 10.3.2 folgt wegen $\|A \cdot y\|_{\mathbb{R}^N} \leq \sqrt{N} \cdot \max_i |\sum_j A_{ij} y_j| \leq \sqrt{N} \cdot \max_{i,j} (|A_{ij}|) \cdot \max_j |y_j|$ sofort die Behauptung.

Bemerkung: Sind die Koeffizienten $A_{ij}(x)$ stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$, dann sind die Funktionen $A_{ij}(x)$ immer beschränkt durch eine geeignete Konstante C .

18.4 Existenz und Eindeutigkeit

Es sei h mit

$$h : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante M . Sei gegeben $x_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt für $\varepsilon = \frac{1}{M \cdot \sqrt{N}} > 0$, dass auf dem Intervall

$$[a, b] \cap (-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{f'(x) = h(x, f(x))}$$

existiert mit der Anfangswertbedingung

$$f(x_0) = y_0 .$$

18.4.1 Beweis

Nimmt man an, dass h stetig ist, dann ist die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung äquivalent zu einer Integralgleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ ist stetig auf } [a, b] \\ f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ ist differenzierbar auf } [a, b] \\ f'(x) = h(x, f(x)), f(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

Beweis der Äquivalenz von links nach rechts: $\int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt$ ist wohldefiniert, da f stetig ist und h (Lipschitz)-stetig, also insbesondere stetig ist. Aus dem Hauptsatz folgt daher, dass das vektorwertige Integral (komponentenweise definiert)

$$\int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt$$

existiert und alle Komponenten in der Variable x differenzierbare Funktion definieren. Der Hauptsatz impliziert ausserdem für den Vektor der Ableitungen

$$f'(x) = h(x, f(x))$$

Beweis der Äquivalenz von rechts nach links: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit. Aus dem Hauptsatz angewendet auf die Differentialgleichung liefert

$$f(x) = C + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt$$

Setzt man $x = x_0$ folgt $f(x_0) = C + \int_{x_0}^{x_0} h(t, f(t)) dt$, also $C = y_0$.

Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes

Es wird empfohlen nochmals die Aussage des Fixpunktsatzes zu lesen, (Seite 60). Wir definieren

$$\begin{aligned} F : \Xi &\rightarrow \Xi \\ f &\rightarrow F(f) \end{aligned}$$

durch

$$(F(f))(x) = y_0 + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt .$$

Beachte, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist stetig, daher ist $F(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ auch stetig, sogar komponentenweise differenzierbar.

Mit Hilfe der Abbildung $F : \Xi \rightarrow \Xi$ kann man

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ ist stetig auf } [a, b] \\ f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt \end{array} \right.$$

in der Form einer äquivalenten Fixpunktgleichung schreiben

$$F(f) = f \quad , \quad f \in \Xi .$$

Es bleibt zu untersuchen, ob F kontraktiv ist. In diesem Fall folgt die Existenz und Eindeutigkeit dann sofort aus dem Banachschen Fixpunktsatz!

Kontraktivität:

$$\begin{aligned} d_{\Xi}(F(f), F(g)) &= d_{\Xi} \left(y_0 + \int_{x_0}^x h(t, f(t)) dt , y_0 + \int_{x_0}^x h(t, g(t)) dt \right) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_{x_0}^x (h(t, f(t)) - h(t, g(t))) dt \right|_{\mathbb{R}^N} \end{aligned}$$

Durch Abschätzung des vektorwertigen Integrals (benutze 10.3.2 und 13.3.1) erhält man

$$\begin{aligned} d_{\Xi}(F(f), F(g)) &\leq \text{Länge}([a, b]) \cdot \sqrt{N} \cdot \sup_{t \in [a, b]} |h(t, f(t)) - h(t, g(t))|_{\mathbb{R}^N} \\ &\stackrel{\text{Lipschitz}}{\leq} (b - a) \cdot M \cdot \sqrt{N} \cdot \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|_{\mathbb{R}^N} \\ &= \kappa \cdot d_{\Xi}(f, g) \end{aligned}$$

wobei $\kappa = (b - a) \cdot M \cdot \sqrt{N}$ falls $b > a$. Falls man die Intervallbreite $b - a$ genügend verkleinert, kann man daher erreichen, dass die Konstante $\kappa < 1$ wird. Dann ist F kontraktiv.

18.5 Verheftung

Die Lipschitz-Stetigkeit in der Form von 18.3.1 ist eine sehr starke Bedingung. Betrachtet man die Aussage von Satz 18.4, dann ergibt sich sofort als Konsequenz, dass die Lösung der Differentialgleichung nicht nur existiert und eindeutig ist auf dem Teilintervall $[a, b] \cap (-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$, sondern sogar auf ganz $[a, b]$. Man überdeckt dazu das Intervall $[a, b]$ durch überlappende Teilintervalle der Länge $\frac{1}{M\sqrt{N}}$, und wählt Hilfspunkte x_i in den Überlappungen. Wendet man den Satz 18.4 sukzessive für alle Hilfspunkte x_i an, folgt

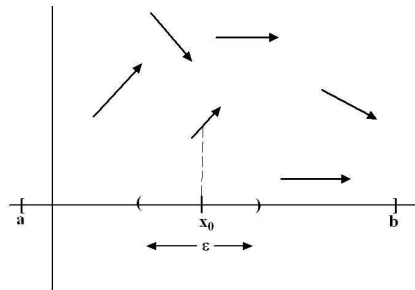
Satz: Es sei $h : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig auf dem Intervall $[a, b]$. Sei gegeben $x_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Dann existiert auf dem Intervall $[a, b]$ eine eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = h(x, f(x))$$

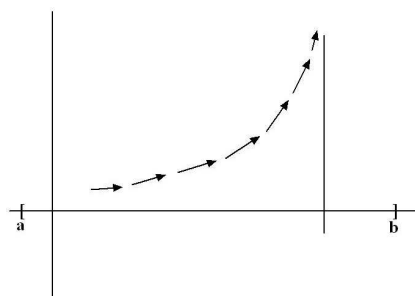
mit der Anfangswertbedingung

$$f(x_0) = y_0 .$$

18.5.1 Visualisierung



Problem: Die Vektoren können nicht so liegen, etwa für $f' = 1 + f^2$:



Die Funktion $h(x, y) = 1 + y^2$ ist nicht Lipschitz-stetig. In der Tat ist die Lösung der Differentialgleichung $f' = 1 + f^2$ mit dem Anfangswert $f(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, \pi/2)$ der Tangens $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$. Die Lösung 'explodiert' aber bei $x = \pi/2$.

18.5.2 Lineare Differentialgleichungen

Kombiniert man Satz 18.4 und die Methode 18.0.1 erhält man folgende Aussage über lineare Differentialgleichungen auf einem Intervall

Seien $a_1(x), \dots, a_n(x), b(x)$ stetige reellwertige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$. Seien $x_0 \in [a, b]$ und $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann besitzt die lineare Differentialgleichung (*)

$$g^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) \cdot g'(x) + a_n(x) \cdot g(x) = b(x)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$g(x_0) = \eta_0, \dots, g^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, welche n -mal stetig differenzierbar ist auf $[a, b]$ (im Fall $a < b$).

Beweis: Die Methode 18.0.1 führt auf die vektorwertige Differentialgleichung $f'(x) = A(x) \cdot f(x) + b(x)$ für die matrixwertige Funktion

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1}(x) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1(x) \end{pmatrix}$$

und man kann dann Satz 18.5 anwenden.

Beispiel: Die Funktionen $\sin(x)$ resp. $\cos(x)$ sind die eindeutig bestimmten (2-mal differenzierbaren) Funktionen auf \mathbb{R} , welche die Differentialgleichung $g''(x) + g(x) = 0$ erfüllen mit der Anfangswertbedingung $g(0) = 0, g'(0) = 1$ resp. $g(0) = 1, g'(0) = -1$.

18.5.3 Der Lösungsraum

Ist $b(x) = 0$, dann bilden die Lösungen einer linearen Differentialgleichung 18.5.2 auf dem Intervall $[a, b]$ einen reellen Vektorraum von Funktionen, wenn man die Anfangswertbedingungen weglässt. Denn für Lösungen $g(x)$ und $\tilde{g}(x)$ und beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot \tilde{g}(x)$ eine Lösung, wie man sofort sieht.

Behauptung: Der \mathbb{R} -Vektorraum V der Lösungen der Differentialgleichung (*) ist ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension n .

Beweis: Wähle $x_0 \in [a, b]$. Dann ist die Abbildung

$$eval_{x_0} : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) \mapsto (g(x_0), \dots, g^{(n-1)}(x_0))$$

ein \mathbb{R} -linearer Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen. $eval_{x_0}$ ist injektiv, wegen der Eindeutigkeitsaussage von 18.5.2, und surjektiv wegen der Existenzaussage von 18.5.2.

Kapitel 19

Vertauschungssätze

19.1 Normierte Räume

Unter einem normierten Raum V verstehen wir einen \mathbb{R} -Vektorraum V versehen mit einer Funktion

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

welche eine Norm ist, d.h. die Eigenschaft $\|x\| = 0 \iff x = 0$ hat, und die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

sowie

$$\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$$

erfüllt. Eine solche Norm definiert eine Metrik mittels $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definiert die Norm $\|\cdot\|$ auf diese Weise einen vollständigen metrischen Raum, nennt man den normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ einen Banachraum.

19.1.1 Stetige lineare Abbildungen

Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$L : V_1 \rightarrow V_2$$

zwischen normierten Räumen $(V_i, \|\cdot\|_i)$ ist stetig, genau dann wenn es eine Konstante C gibt mit der Eigenschaft

$$\|L(v)\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1$$

für alle $v \in V_1$.

Man nennt dann $\|L\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|L(v)\|_2}{\|v\|_1}$ die Norm der linearen Abbildung L .

Beweis: Ist L stetig im Punkt Null, dann gilt $\|L(v)\|_2 < 1$ für alle $\|v\|_1 < \delta = \delta(1)$. Dies impliziert obige Ungleichung für $C = 2/\delta(1)$, denn obdA genügt es dies für Vektoren v der Länge $\|v\|_1 = \delta/2$ zu zeigen. Umgekehrt folgt aus $\|L(v)\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1$ die Stetigkeit $\|v - \xi\|_1 < \delta = \frac{\varepsilon}{C} \implies \|L(v) - L(\xi)\|_2 < \varepsilon$.

Bemerkung: Aus dem Lemma folgt, dass eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen abbildet.

19.2 Der Raum $C^1(X)$

Sei $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ für $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und sei $(C(X), \|\cdot\|)$ der Banachraum der stetigen Funktionen auf X (siehe 18.1). In diesem Raum konvergente Folgen nennt man auch gleichmässig konvergente Folgen (stetiger Funktionen).

Wir definieren $C^1(X)$ als den \mathbb{R} -Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf X , versehen mit der Norm

$$\|f\|_1 = \|f'\| + \|f\| .$$

Auf dem Unterraum der konstanten Funktionen, den wir mit \mathbb{R} identifizieren, stimmt die Norm $\|\cdot\|_1$ mit dem reellen Absolutbetrag überein. Jede Cauchyfolge aus diesem Unterraum ist also konvergent.

Differentiation und Integration definieren stetige lineare Abbildungen zwischen den normierten Räumen $C^1(X)$ und $C(X)$:

Differentiation D : Wegen Lemma 19.1.1 definiert Ableiten $D(f) = f'$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$D : (C^1(X), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C(X), \|\cdot\|) ,$$

welche stetig ist wegen $\|D(f)\| = \|f'\| \leq \|f'\| + \|f\| = \|f\|_1$.

Integration I : Umgekehrt definiert Integration $I(g) = \int_a^x g(t)dt$ die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$I : (C(X), \|\cdot\|) \rightarrow (C^1(X), \|\cdot\|_1) .$$

Diese ist wiederum stetig wegen $\|I(g)\|_1 = \|g\| + \|I(g)\| \leq (1+b-a) \cdot \|g\|$ wegen 13.3.1.

Offensichtlich gilt $D \circ I = id_{C(X)}$ und $Kern(D) = \mathbb{R}$ sowie

$$\boxed{C^1(X) = \mathbb{R} + I \circ D(C^1(X))}$$

wegen dem Hauptsatz.

Satz: *Der normierte Raum $(C^1(X), \|\cdot\|_1)$ ist Cauchy-vollständig¹*

Folgerung: *Sei $f_n \rightarrow f$ eine gleichmässig konvergente Folge von stetig differenzierbaren Funktionen f_n auf einem Intervall $X = [a, b]$. Falls die Folge der Ableitungen f'_n gleichmässig auf X konvergiert, ist die Grenzfunktion f differenzierbar auf X und es gilt $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$, d.h.*

$$\boxed{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(x) \right)' .}$$

¹Analog definiert man den Raum $C^m(X)$ der m -fach stetig differenzierbaren Funktionen und eine entsprechende Norm $\|f\|_m = \|f^{(m)}\| + \dots + \|f\|$ und zeigt durch Induktion nach m , dass $(C^m(X), \|\cdot\|_m)$ Cauchy-vollständig ist.

Beweis des Satzes: Wir führen die Vollständigkeit von $C^1(X)$ mit Hilfe des Hauptsatzes auf die Vollständigkeit von $C(X)$ zurück.

Ist f_n eine Cauchyfolge in $(C^1(X), \|\cdot\|_1)$, dann ist auch $D(f_n)$ eine Cauchyfolge in $(C(X), \|\cdot\|)$. Nach 18.1 konvergiert $g_n = D(f_n) \rightarrow g$. Also konvergiert $I(g_n) \rightarrow I(g)$, denn I ist stetig. Folglich ist auch

$$\tilde{f}_n = f_n - I(g_n)$$

eine Cauchyfolge in $(C^1(X), \|\cdot\|_1)$, jetzt mit der Eigenschaft $(\tilde{f}_n)' = 0$. Die $\tilde{f}_n = c_n$ sind daher konstante Funktionen auf X (Hauptsatz). Cauchyfolgen konstanter Funktionen in $(C^1(X), \|\cdot\|_1)$ konvergieren aber, wie bereits bemerkt. Weil jetzt c_n und $I(g_n)$ konvergieren, konvergiert auch

$$f_n = c_n + I(g_n) = c_n + I \circ D(f_n) .$$

Beweis der Folgerung: Nach den Voraussetzungen ist f_n eine Cauchyfolge in $(C^1(X), \|\cdot\|_1)$. Diese konvergiert in $(C^1(X), \|\cdot\|_1)$ nach obigem Satz, und zwar dann notwendigerweise (!) zu der Funktion f , denn die Abbildung $f \mapsto f$ von $C^1(X) \rightarrow C(X)$ ist stetig. Die Folgerung ergibt sich dann unmittelbar aus der Stetigkeit der Abbildung D .

19.3 Das Beispiel der Potenzreihen

Sei

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten a_n . Für $x = 0$ konvergiert diese Reihe. Sei R das Supremum aller $0 \leq r \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert, oder $R = \infty$, falls diese Menge unbeschränkt ist. Man nennt R den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Eine Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ und divergiert für alle x mit $|x| > R$, denn

19.3.1 Konvergenzlemma

Konvergiert eine Potenzreihe im Punkt $x_0 \neq 0$, dann konvergiert sie in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_0|$ absolut.

Beweis: Wir benutzen das Cauchy Kriterium für Reihen. Es genügt zu zeigen

$$\left| \sum_{i=n}^m a_i x^i \right| \leq \sum_{i=n}^m |a_i x^i| \leq \sum_{i=n}^m |a_i x_0^i| \cdot |x/x_0|^i < \varepsilon$$

für $n, m \geq N(\varepsilon)$. Dies ist aber klar wegen $q = |x/x_0| < 1$ und der Beschränktheit der Folge $|a_i x_0^i|$ nach 9.1.1.

Bemerkung: Sei $I \subseteq (-R, R)$ ein abgeschlossenes Intervall. Obiges Konvergenzargument zeigt sogar, dass die Folge der stetigen Funktionen (Polynome)

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

eine Cauchyfolge in $(C(I), \|\cdot\|)$ ist. Somit gilt nach 18.2

Folgerung: Die Folge $f_n(x)$ konvergiert gleichmässig auf I .

Die formal abgeleitete Potenzreihe, und ebenso die formal integrierte Potenzreihe, besitzt denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Potenzreihe. Beachte $\lim_{i \rightarrow \infty} i^{\frac{1}{i-1}} = 1$, denn $i^{\frac{1}{i-1}} = 1 + c_i$ für $c_i \geq 0$. Daher gilt nach der binomischen Formel $i \geq 1 + (i-1)c_i + \frac{(i-1)(i-2)}{2}c_i^2 + \dots$. Dies impliziert $c_i^2 \leq \frac{2i}{(i-1)(i-2)}$ für $i \geq 3$. Also ist c_i^2 eine Nullfolge, somit auch c_i (rechtsseitige Stetigkeit der Wurzelfunktion im Punkt Null). Daraus folgt wegen

$$\left| \sum_{i=n}^m i a_i x^{i-1} \right| \leq \sum_{i=n}^m |a_i x_0^i| \cdot |x_0|^{-1} \cdot |(1+c_i)x/x_0|^{i-1}$$

die Konvergenz der formal abgeleiteten Potenzreihe auf dem offenen Intervall $(-R, R)$. Beachte $|(1+c_i)x/x_0| \leq \tilde{q} < 1$ für alle genügend grossen i . Auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $I \subseteq (-R, R)$ kann man daher auf die Folge der Partialsummen die Folgerung von Abschnitt 19.2 anwenden, und erhält

19.3.2 Gliedweises Ableiten von Potenzreihen

Ist der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum a_n x^n$ positiv, dann konvergiert die Potenzreihe, ebenso wie ihre formalen Ableitungen, absolut und gleichmässig in jedem angeschlossenen Teilintervall $I \subseteq (-R, R)$. Die Grenzfunktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

definiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf dem Intervall $(-R, R)$. Die Ableitung $f'(x)$ ist auf $(-R, R)$ gegeben durch die konvergente Potenzreihe

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} ,$$

und eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ ist gegeben durch die Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} .$$

1.Beispiel: Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$ und durch gliedweises Ableiten zeigt man $(1+x)f'(x) = \alpha \cdot f(x)$. Also ist $f(x) = (1+x)^\alpha$ auf $(-1, 1)$ (die eindeutige bestimmte Lösung dieser Differentialgleichung mit $f(0) = 1$).

2.Beispiel: Durch gliedweises Integrieren der Potenzreihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ vom Konvergenzradius $R = 1$ erhält man die Potenzreihendarstellung des Logarithmus auf dem Intervall $(-1, 1)$ in der Form $-\log(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + \dots$.

Durch m -faches Ableiten und anschliessendes Einsetzen von $x = 0$ folgt aus 19.3.2 sofort der

19.3.3 Identitätssatz

Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius. Gilt dann

$$f(x) = g(x)$$

für alle x aus einem offenen Intervall um Null (innerhalb der beiden Konvergenzbereiche), dann folgt für alle $m \geq 0$

$$a_m = b_m .$$

Beweis: Aus 19.3.2 folgt durch gliedweises Ableiten der Reihen

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} .$$

Nach Annahme stimmen $f(x)$ und $g(x)$ in der Umgebung von 0 überein. Daher gilt $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$. Also $a_n = b_n$.

19.4 Partielle Ableitungen

Für den Rest des Kapitels sei $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein abgeschlossener ‘Quader’ im \mathbb{R}^2 . Versehen mit der Euklidischen Metrik, ist X ein folgenkompakter metrischer Raum².

Für eine reellwertige Funktion $f(x, y)$ auf X kann man die Einschränkungen $f(x_0, y)$ ($x_0 \in [a_1, b_1]$ fixiert) und $f(x, y_0)$ ($y_0 \in [a_2, b_2]$ fixiert) auf die Achsenparallelen betrachten.

Warnung: Die Stetigkeit all dieser Einschränkungen impliziert noch nicht die Stetigkeit von f , obwohl dies umgekehrt der Fall ist.

Sind die obigen Einschränkungen $f(x, y_0)$ für $y_0 \in [a_2, b_2]$ alle differenzierbar, sagt man f ist partiell differenzierbar auf X in der Variable x , und man schreibt wahlweise

$$\frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = f_x(x, y) = D_1f(x, y).$$

Hierbei wird y beim Ableiten als Konstante aufgefasst. Analog erklärt man

$$\frac{d}{dy}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = f_y(x, y) = D_2f(x, y)$$

und nennt dies die partiellen Ableitungen der Funktion f nach x beziehungsweise y . Natürlich kann man jetzt auch wieder Funktionen betrachten, für die höhere partielle Ableitungen existieren. Diese werden definiert durch sukzessives Ableiten, indem man nacheinander immer eine der beiden Variablen als konstant betrachtet und nach der anderen Variable differenziert.

Beispiel: Für die Funktion $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$ existieren alle höheren partiellen Ableitungen. Man erhält etwa

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = 2x - 3y \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = -3x + 3y^2$$

und $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y) = 2$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y) = 6y$ sowie $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y) = -3 = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y)$.

Man sieht in diesem Beispiel, dass die gemischten zweiten partiellen Ableitungen nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängen. Dies ist keineswegs immer richtig (siehe Übungsblatt). Dennoch ist dies für zweimal stetig partiell differenzierbare Abbildungen der Fall, wie wir in Satz 19.7 zeigen werden.

Wir definieren $C^{a,b}(X)$ als den Raum aller reellwertigen stetigen Funktionen f auf X , für welche beliebige partielle Ableitung von f bis zur Ordnung a in $\partial/\partial x$ und bis zur Ordnung b in $\partial/\partial y$ existieren (in beliebiger Anordnung!), und zwar so, dass diese partiellen Ableitungen als Funktionen von beiden Variablen stetige Funktionen auf ganz X definieren. $C^m(X)$ sei der Durchschnitt aller $C^{a,b}(X)$ für $a + b \leq m$. $C^\infty(U)$ sind die unendlich oft partiell differenzierbaren Funktionen auf U .

²Wir beschränken uns hier auf 2 Variable, da dies keine wirklich wesentliche Einschränkung bedeutet. Alles gesagte lässt sich in offensichtlicher Weise auf den Fall von $n \geq 2$ Variablen verallgemeinern.

19.5 Vertauschung von Differentiation und Integration

Ist f eine Funktion aus $C^{1,0}(X)$, dann sind $f(x, y)$ und $D_1f(x, y)$ stetige Funktionen auf X . Letzteres definiert die obere Zeile des folgenden

19.5.1 Diagramms

$$\begin{array}{ccc} C^{1,0}(X) & \xrightarrow{D_1} & C^{0,0}(X) \\ I_2 \downarrow & & \downarrow I_2 \\ C^{1,1}(X) & \xrightarrow{D_1} & C^{0,1}(X) \end{array}$$

Die untere Zeile ist ebenso offensichtlich definiert. Die vertikalen Abbildungen seien durch die Formel

$$I_2(f)(x, y) = \int_{a_2}^y f(x, t) dt$$

definiert. Diese Integrale sind definiert, da f als Einschränkung einer stetigen Funktion stetig auf $\{x_0\} \times [a_2, b_2] \subseteq X$ ist. Zu zeigen ist $I_2(f) \in C^{0,1}(X)$ für stetiges f (rechte Seite), beziehungsweise $I_2(f) \in C^{1,1}(X)$ für $f \in C^{1,0}(X)$ (linke Seite).

Rechte Seite: $D_2(I_2(f)) = f$ ist stetig auf X . Es bleibt zu zeigen, dass $I_2(f)$ stetig auf X ist, wenn f stetig auf X ist. Da X folgenkompakt ist, ist f gleichmäßig stetig. Also $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ für $\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| < \delta = \delta(\varepsilon)$. Der Betrag von

$$I_2(f)(x_1, y_1) - I_2(f)(x_2, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} f(x_1, t) dt + \int_{a_2}^{y_2} (f(x_1, t) - f(x_2, t)) dt$$

lässt sich somit durch

$$|y_1 - y_2| \cdot \|f\| + |b_2 - a_2| \cdot \varepsilon$$

abschätzen im Fall $\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| < \delta$. Für δ klein genug, wird diese Schranke für festes f beliebig klein. Somit ist $I_2(f)$ stetig auf X .

Linke Seite: Für $f \in C^{1,0}(X)$ und $g := I_2(f)$ müssen g, D_1g, D_2g, D_1D_2g und D_2D_1g existieren und stetig sein auf X . Dass $g = I_2(f)$ stetig ist wurde oben bereits bewiesen. Wegen dem Hauptsatz (!) reduziert sich daher alles auf die Stetigkeit der Funktionen D_1g und D_2D_1g . Angenommen wir wüssten

$$D_1I_2f = I_2D_1f .$$

Dann wäre natürlich $D_1g = D_1I_2f = I_2D_1f \in I_2(C(X)) \subseteq C^{0,1}(X) \subseteq C(X)$ (siehe Beweis von 'Rechte Seite'). Weiterhin $D_2D_1g = D_2D_1I_2f = D_2I_2D_1f = D_1f$ nach dem Hauptsatz, also $D_2D_1g = D_1f \in C(X)$ wegen der Annahme. Es genügt somit die

19.5.2 Kommutativität des Diagramms

Es gilt $\boxed{D_1 I_2(f) = I_2 D_1(f)}$ für alle $f \in C^{1,0}(X)$.

Beweis: Der rechte Term $I_2 D_1(f)$ ist offensichtlich definiert. Linksseitig ist zu zeigen, dass $I_2(f)(x, y)$ partiell nach x differenzierbar ist und dass die Ableitung $D_1 I_2(f)$ gleich $I_2 D_1(f)$ ist. ObdA können wir hierfür $y = b_2$ annehmen. Betrachte den Differenzenquotient

$$\Delta(x, x_0) = \frac{I_2(f)(x, b_2) - I_2(f)(x_0, b_2)}{x - x_0}.$$

Da $D_1 f$ gleichmäßig (!) stetig auf X ist, gilt $|D_1 f(x_1, y_1) - D_1 f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ für $d_X((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta = \delta(\varepsilon)$. Wegen $\frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} = D_1 f(x_0 + \theta_t \cdot (x - x_0), t)$ für ein $0 < \theta_t < 1$ (Mittelwertsatz) kann der Absolutbetrag von

$$\Delta(x, x_0) - I_2 D_1 f(x_0, b_2) = \int_{a_2}^{b_2} [D_1 f(x_0 + \theta_t \cdot (x - x_0), t) - D_1 f(x_0, t)] dt$$

durch

$$|b_2 - a_2| \cdot \max_{t \in [a_2, b_2]} |D_1 f(x_0 + \theta_t \cdot (x - x_0), t) - D_1 f(x_0, t)|$$

abgeschätzt werden - oder durch $|b_2 - a_2| \cdot \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \delta = \delta(\varepsilon)$ (denn das impliziert $d_X(x_0 + \theta_t \cdot (x - x_0), t), (x_0, t)) < \delta$). Also existiert der Limes $D_1(I_2 f)(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x, x_0)$ und ist gleich $I_2 D_1 f(x, y)$ (hier obdA bewiesen im Punkt $(x, y) = (x_0, b_2)$). Damit ist die Aussage gezeigt. \square

Natürlich kann man die Rolle von x und y vertauschen, und erhält analog $D_2 I_1 = I_1 D_2$ auf $C^{0,1}(X)$ für $I_1(f)(x, y) = \int_{a_1}^x f(s, y) ds$.

19.6 Fubini (erste Version)

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^{0,0}(X) & \xrightarrow{I_1} & C^{1,0}(X) \\ I_2 \downarrow & & \downarrow I_2 \\ C^{0,1}(X) & \xrightarrow{I_1} & C^{1,1}(X) \end{array}$$

kommutiert, das heisst es gilt

$$\boxed{I_1 I_2(f) = I_2 I_1(f)}$$

für alle stetigen Funktionen f auf X .

Beweis: Dass die Abbildungen im Sinne des Diagramms wohldefiniert sind, zeigt man leicht unter Benutzung von 19.5.2. Wir überlassen dies als Übungsaufgabe.

Aus dem Hauptsatz folgt

$$D_1 I_1 I_2(f) = I_2(f).$$

Analog, wegen $I_1(f) \in C^{1,0}(X)$ und 19.5.2

$$D_1 I_2 I_1(f) = I_2 D_1 I_1(f) = I_2(f) .$$

Die Ableitung $D_1 g$ der Differenz $g = I_1 I_2(f) - I_2 I_1(f)$ ist also Null. Die Funktion $g(x, y)$ ist somit konstant in x . Aber dann ist wie behauptet $g = 0$, denn

$$g(x, y) = g(a_1, y) = \int_{a_1}^{a_1} \dots - \int_{a_2}^y \left(\int_{a_1}^{a_1} f(s, t) ds \right) dt = 0 - 0 = 0$$

wegen $\int_{a_1}^{a_1} \dots = 0$ und $\int_{a_2}^y 0 dt = 0$.

19.7 Vertauschung von Ableitungen

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^{1,1}(X) & \xrightarrow{D_2} & C^{1,0}(X) \\ D_1 \downarrow & & \downarrow D_1 \\ C^{0,1}(X) & \xrightarrow{D_2} & C^{0,0}(X) \end{array}$$

kommutiert, das heisst es gilt

$$\boxed{D_1 D_2(f) = D_2 D_1(f)}$$

für alle Funktionen f aus $C^{1,1}(X)$.

Beweis: Die Abbildungen des Diagramms sind trivialerweise definiert. Für $f \in C^{1,1}(X)$ ist natürlich $D_2 f \in C^{1,0}(X)$ etc.

Umgekehrt ist für $g \in C^{1,0}(X)$ die Funktion $f = I_2(g)$ in $C^{1,1}(X)$ nach 19.5.1. Nach 19.5.2 gilt daher

$$D_2 D_1 I_2(g) = D_2 I_2 D_1(g) = D_1(g) ,$$

letzteres wegen dem Hauptsatz. Analog wegen dem Hauptsatz

$$D_1 D_2 I_2(g) = D_1(g) .$$

Also annuliert die lineare Abbildung $D_1 D_2 - D_2 D_1$ den Teilraum $I_2(C^{1,0}(X))$ von $C^{1,1}(X)$. Andererseits zeigt man wie im Fall einer Variable in 19.2

$$C^{1,1}(X) = C^1([a_1, b_1]) + I_2 \circ D_2(C^{1,1}(X)) .$$

Der rechte Teilraum $I_2 \circ D_2(C^{1,1}(X)) \subseteq I_2(C^{1,0}(X))$ wird von $D_1 D_2 - D_2 D_1$ annulliert. Trivialerweise annulliert aber $D_1 D_2 - D_2 D_1$ Funktionen in $C^1([a_1, b_1])$, da diese nur von der x -Variable abhängen, und Ableiten nach D_2 solche Funktionen sowie deren Ableitungen annullieren. Also verschwindet $D_1 D_2 - D_2 D_1$ auf ganz $C^{1,1}(X)$ wie behauptet. \square

Allgemeiner: Durch Induktion folgt, dass für Funktionen in $C^m(X)$ gemischte partielle Ableitungen bis zur Ordnung $\leq m$ nicht von der Reihenfolge abhängen.

Kapitel 20

Alternierende Differentialformen

20.1 Offene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst offen, wenn ihr Komplement $X \setminus U$ abgeschlossen ist. Man beachte die Äquivalenz folgender Aussagen

- (i) U ist offen in (X, d) .
- (ii) Für jeden Punkt $\xi \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass die offene Kugel $K_\varepsilon(\xi) = \{x \in X \mid d(x, \xi) < \varepsilon\}$ in U liegt.

Beweis: (i) \implies (ii): Sei A das abgeschlossene Komplement von U . Gäbe es für festes $\xi \in U$ kein ε wie behauptet, könnte man eine Folge von Punkten $a_n \in A \cap K_{\frac{1}{n}}(\xi)$ finden. Die Folge a_n konvergiert dann gegen ξ . Da A abgeschlossen ist, folgt $\xi \in A$. Ein Widerspruch. Dies zeigt (ii).

(i) \implies (ii): Sei A das Komplement von U in X , sowie a_n eine in (X, d) konvergente Folge mit Grenzwert ξ . Wir müssen zeigen $\xi \in A$. Angenommen $\xi \in U$, dann gäbe es eine Kugel $K_\varepsilon(\xi) \subseteq U$ deren Durchschnitt mit A leer ist. Somit $a_n \notin K_\varepsilon(\xi)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $d(a_n, \xi) < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Dies zeigt 1.

20.2 Das \wedge -Produkt

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ der festen Kardinalität $|I| = i$ und Ausdrücke der Gestalt

$$\omega(x) = \sum_{I, |I|=i} \omega_I(x) dx_I .$$

Sind hierbei alle Koeffizienten $\omega_I(x) \in C^\infty(U)$, nennen wir ω eine alternierende i -Form auf U . Den \mathbb{R} -Vektorraum aller alternierende i -Formen auf U bezeichnen wir mit

$$A^i(U).$$

Schreibweise: Sei $I = \{n_1, \dots, n_i\}$ mit $n_1 < \dots < n_i$, dann schreiben wir auch $dx_I = dx_{n_1} \wedge \dots \wedge dx_{n_i}$ sowie $dx_\emptyset = 1$. Für die einelementigen Teilmengen $I = \{i\}$ schreiben wir meistens dx_i anstelle von $dx_{\{i\}}$.

Wir erhalten für $A^\bullet(U) = \bigoplus_{i=0}^n A^i(U)$

- $A^0(U) = C^\infty(U)$
- $A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx_1 \oplus \dots \oplus C^\infty(U) \cdot dx_n$
- \dots
- $A^n(U) = C^\infty(U) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Das \wedge -Produkt: Wir definieren $dx_I \wedge dx_J = 0$, falls $I \cap J \neq \emptyset$. Anderenfalls setzen wir $dx_I \wedge dx_J = \text{sign}(\sigma) dx_{I \cup J}$, wobei σ die Permutation ist, welche $n_1, \dots, n_i, m_1, \dots, m_j$ in eine aufsteigende Reihenfolge bringt. Hierbei seien $n_1 < \dots < n_i$ und $m_1 < \dots < m_j$ so gewählt, dass $dx_I = dx_{n_1} \wedge \dots \wedge dx_{n_i}$ und $dx_J = dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_j}$ gilt. Wir erhalten eine wohldefinierte \mathbb{R} -bilineare Abbildung¹

$$\begin{aligned} A^i(U) \times A^j(U) &\xrightarrow{\wedge} A^{i+j}(U) \\ \left(\sum_I \omega_I(x) dx_I, \sum_J \omega_J(x) dx_J \right) &\mapsto \sum_I \sum_J \omega_I(x) \omega_J(x) \cdot dx_I \wedge dx_J . \end{aligned}$$

Das \wedge -Produkt ist per Definition distributiv.

Beispiel: Aus der Definition des \wedge -Produkts folgt unmittelbar

- $dx_i \wedge dx_i = 0$
- $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

Allgemeiner gilt nach Definition $dx_I \wedge dx_J = (-1)^{|I||J|} dx_J \wedge dx_I$. Also für beliebige $\eta \in A^i(U)$ und $\omega \in A^j(U)$

$$\boxed{\eta \wedge \omega = (-1)^{ij} \cdot \omega \wedge \eta} .$$

¹Wir zeigen später, dass das \wedge -Produkt assoziativ ist $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$. Da es offensichtlich distributiv ist, wird dadurch $A^\bullet(U)$ zu einem (nichtkommutativen) Ring.

20.3 Die Cartanableitung d

Wir definieren nun eine Serie von Ableitungen

$$A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{n-1}(U) \xrightarrow{d} A^n(U) \xrightarrow{d} A^{n+1}(U) = 0 .$$

durch

$$d\left(\sum_I \omega_I(x) dx_I\right) = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_I(x) \cdot dx_i \wedge dx_I .$$

Beispiel: Für eine Funktion $f(x) \in A^0(U) = C^\infty(U)$ bedeutet dies gerade

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \cdot dx_i .$$

Man nennt dann $df \in A^1(U)$ das totale Differential von f (im Prinzip ist es dasselbe wie die Jacobimatrix von f , nur etwas anders geschrieben).

Spezialfall: Ist $f(x) = x_i$ die die i -te Koordinatenfunktion, das heisst die Zusammensetzung $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{pr^i} \mathbb{R}$, dann gilt

$$df = 1 \cdot dx_i = dx_i .$$

Also kurz $d(x_i) = dx_i$. Achtung: Dies erklärt die Schreibweise $dx_i = dx_i$.

20.4 Produktformel

Für $\eta \in A^i(U)$ und $\omega \in A^j(U)$ gilt

$$\boxed{d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^i \eta \wedge d\omega} .$$

Beweis: Wegen der Bilinearität des \wedge -Produkts können wir obdA annehmen $\eta = f(x) \cdot dx_I$ und $\omega = g(x) \cdot dx_J$ für $f, g \in C^\infty(U)$. Dann gilt

$$d(\eta \wedge \omega) = d(fg dx_I \wedge dx_J) = d(fg) dx_I \wedge dx_J$$

nach Definition der Cartanableitung. Die übliche Produktformel für die partiellen Ableitungen einer Funktion liefert

$$d(fg) = gdf + fdg .$$

Also $d(\eta \wedge \omega) = (gd(f) + fd(g)) \wedge (dx_I \wedge dx_J) = d(f) dx_I \wedge g dx_J + (-1)^i f dx_I \wedge (d(g) \wedge dx_J) = d\eta \wedge \omega + (-1)^i \eta \wedge d\omega$. Hierbei wurde benutzt $dx_i \wedge (dx_I \wedge dx_J) = (dx_i \wedge dx_I) \wedge dx_J = (-1)^i (dx_I \wedge dx_i) \wedge dx_J = (-1)^i dx_I \wedge (dx_i \wedge dx_J)$ vermöge des Assoziativgesetzes. Dies beweisen wir später und bleibt hier als Übungsaufgabe².

²Für $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$ benutze Induktion nach $i+j+k$ und bei festem $i+j+k$ Induktion nach $\max(i, j, k)$. Der Induktionsanfang $i = j = k = 1$ ist trivial. Sei $j > 1$, also $dx_J = dx_U \wedge dx_V$. Dann gilt $(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = (dx_I \wedge (dx_U \wedge dx_V)) \wedge dx_K = ((dx_I \wedge dx_U) \wedge dx_V) \wedge dx_K = (dx_I \wedge dx_U) \wedge (dx_V \wedge dx_K) = dx_I \wedge (dx_U \wedge (dx_V \wedge dx_K)) = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K)$. Ist $k > 1$ und $dx_K = dx_U \wedge dx_V$, dann $dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) = dx_I \wedge (dx_J \wedge (dx_U \wedge dx_V)) = dx_I \wedge ((dx_J \wedge dx_U) \wedge dx_V) = (dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_U)) \wedge dx_V = ((dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_U) \wedge dx_V = (dx_I \wedge dx_J) \wedge (dx_U \wedge dx_V) = (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K$. Analog für $i > 1$.

20.5 Cup und Cap

Setze

$$\boxed{dx_j \vee dx_J = 0}$$

im Fall $\beta \notin J$ und

$$\boxed{dx_j \vee dx_J = \varepsilon \cdot dx_{J \setminus \{\beta\}}}$$

im Fall $\beta \in J$ mit dem eindeutig bestimmten Vorzeichen $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ so, dass $dx_\beta \wedge \varepsilon \cdot dx_{J \setminus \{\beta\}} = dx_J$.

Der Operator E : Wir definieren einen \mathbb{R} -linearen Operator

$$E : A^j(U) \longrightarrow A^{j-1}(U)$$

durch $E(\sum_J \omega_J \cdot dx_J) = \sum_J \sum_{\beta=1}^n \omega_J(x) x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)$.

20.5.1 Ein Hilfssatz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und sternförmig³. Dann ist für $f(x) \in C^\infty(U)$ das Integral

$$\boxed{I^{(j)}(f) = \int_0^1 t^j f(tx) dt}$$

definiert, und ist selbst wieder eine Funktion in $C^\infty(U)$. Siehe 19.5.2.

Für $f(x) \in C^\infty(U)$ setzen wir $f_\alpha := \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f(x)$. Wegen $\frac{d}{dt} f(tx) = t \sum_\alpha x_\alpha f_\alpha$ und $f(x) = t^j f(tx)|_0^1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^j f(tx)) dt$ im Fall $j > 0$ folgt dann

Hilfssatz: $f(x) = j \cdot I^{(j-1)}(f)(x) + \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha)(x)$, falls $j > 0$.

20.5.2 Der Operator I

Für $j > 0$ definiert $I(\omega) = E(\sum_J I^{(j-1)}(\omega_J) \cdot dx_J)$, oder ausgeschrieben $I(\omega) = \sum_J \sum_{\beta=1}^n I^{(j-1)}(\omega_J) x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)$, einen \mathbb{R} -linearen Operator

$$\boxed{I : A^j(U) \longrightarrow A^{j-1}(U)}.$$

Bemerkung: $I \circ I = 0$ (wird nicht benötigt).

³Das bedeutet, es gibt einen Punkt $x_0 \in U$, so dass für alle $x \in U$ die Verbindungsgerade $x_0 + \{tx \mid 0 \leq t \leq 1\}$ in U liegt. Wir nehmen zur Vereinfachung der Notation $x_0 = 0$ an.

20.6 Der Differentialformenkomplex

Die zweimalige Hintereinanderausführung der Cartanableitung

$$d^2 : A^i(U) \rightarrow A^{i+2}(U)$$

ist die Nullabbildung

$$\boxed{d^2 = 0} .$$

Beweis: Sei $i = 0$, dann ist $d^2(f) = d(\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x) \cdot dx_\mu)$, oder

$$d^2(f) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x) \cdot dx_\nu \wedge dx_\mu .$$

Da $dx_\nu \wedge dx_\mu$ alternierend in ν und μ ist, und andererseits die zweiten partiellen Ableitungen symmetrisch in ν und μ sind nach 19.7, verschwindet dieser Ausdruck. Damit ist der Fall $i = 0$ gezeigt.

Im Fall $i > 0$ sei obdA $\omega = f(x)dx_I$ für $f \in C^\infty(X)$, und wir benutzen die Produktformel: Damit ist $d^2\omega = d(df \wedge dx_I + (-1)^0 f d(dx_I)) = d(df \wedge dx_I) = d(df) \wedge dx_I + (-1)^1 df \wedge d(dx_I) = 0$ wegen $d(df) = 0$ (der Spezialfall $i = 0$) und wegen $d(dx_I) = d(1 \cdot dx_I) = 0$ (Definition der Cartanableitung). \square

Wir haben gezeigt, dass alle exakten Formen $\omega = d\eta$ geschlossene Formen sind: $d\omega = d^2\eta = 0$. Die Umkehrung gilt für Differentialformen vom Grade > 0 auch.

20.6.1 Das Poincare Lemma

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $\omega \in A^j(U)$. Dann gilt

- $d\omega = 0$ für $j > 0 \implies \exists \eta \in A^{j-1}(U)$ mit $\omega = d\eta$.
- $d\omega = 0$ im Fall $j = 0 \implies \omega \in A^0(U)$ ist lokalkonstant.

Für $j = 0$ folgt das Poincare Lemma aus 21.4. Für $j > 0$ setzt man $\eta = I(\omega)$, und im Fall $d\omega = 0$ folgt dann $\omega = d\eta$ unmittelbar aus der

20.6.2 Die Homotopieformel

$$\boxed{(d \circ I + I \circ d) \omega = \omega} .$$

Die Homotopieformel ist linear in ω . Daher genügt zum Beweis dieser Formel anzunehmen, dass das Differential die Gestalt $\omega = f(x) \cdot dx_J$ besitzt.

20.6.3 Beweis der Homotopieformel

1.Schritt. Es gilt $I(\omega) = I^{(j-1)}(f) \cdot \sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)$. Nach der Produktformel für die Cartanableitung ist daher $(d \circ I)(\omega)$ gleich

$$d\left(I^{(j-1)}(f)\right) \wedge \left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right) + I^{(j-1)}(f) \cdot d\left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right).$$

Beachte: $dI^{(j-1)}(f) = \sum_\alpha (\partial_\alpha \int_0^1 t^{j-1} f(tx) dt) \cdot dx_\alpha = \sum_\alpha (\int_0^1 t^{j-1} \partial_\alpha f(tx) dt) \cdot dx_\alpha = \sum_\alpha (\int_0^1 t^j f_\alpha(tx) dt) \cdot dx_\alpha = \sum_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_\alpha$ wegen dem Vertauschungssatz 19.5.2 und der Kettenregel. Deshalb ist $(d \circ I)(\omega)$ gleich

$$\left(\sum_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_\alpha\right) \wedge \left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right) + |J| \cdot I^{(j-1)}(f) \cdot dx_J$$

oder

$$\begin{aligned} (d \circ I)(\omega) &= \left(\sum_{\alpha \notin J} I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_\alpha\right) \wedge \left(\sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee dx_J)\right) \\ &+ \left(\sum_{\alpha = \beta \in J} x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_J\right) + |J| \cdot I^{(j-1)}(f) \cdot dx_J. \end{aligned}$$

2.Schritt: Andererseits ist $(I \circ d)(\omega) = I(\sum_{\alpha \notin J} f_\alpha \cdot dx_\alpha \wedge dx_J)$ gleich

$$\sum_{\alpha \notin J} I^{(j)}(f_\alpha) \sum_{\beta \in \{\alpha\} \cup J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee (dx_\alpha \wedge dx_J))$$

oder

$$\begin{aligned} (I \circ d)(\omega) &= \left(\sum_{\alpha \notin J} I^{(j)}(f_\alpha) \sum_{\beta \in J} x_\beta \cdot (dx_\beta \vee (dx_\alpha \wedge dx_J))\right) \\ &+ \sum_{\alpha = \beta \notin J} x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha) \cdot dx_J. \end{aligned}$$

3.Schritt. Die jeweils ersten Terme in beiden Formeln unterscheiden sich nur um ein Vorzeichen⁴, und heben sich deshalb bei der Addition der beiden Formeln weg. Addition der Formeln in Schritt 1 und 2 liefert daher

$$(dI + Id)(\omega) = |J| \cdot I^{(j-1)}(f) \cdot dx_J + \left(\sum_\alpha x_\alpha I^{(j)}(f_\alpha)\right) \cdot dx_J = f(x) \cdot dx_J = \omega$$

nach Hilfsatz 20.5.1. \square

Bemerkung: Im Grad Null gilt $(I \circ d)f(x) = f(x) - f(0)$ wie man leicht zeigt.

⁴ $dx_\alpha \wedge (dx_\beta \vee dx_J) = -dx_\beta \vee (dx_\alpha \wedge dx_J)$ falls $\beta \in J$ und $\alpha \notin J$

20.6.4 Der eindimensionale Fall

Sei nun U eine offene Teilmenge in \mathbb{R} . Dann reduziert sich im Differentialformkomplex alles auf die Grade 0 und 1.

$$A^0(U) = C^\infty(U) \xrightarrow{d} A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx$$

wobei für $f(x) \in C^\infty(U)$ die Ableitung df die 1-Form

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

ist. Andererseits ist

$$A^0(U) = C^\infty(U) \xleftarrow{I} A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx$$

dann $I(g(x) \cdot dx) = (\int_0^1 g(tx) dt)E(dx) = \int_0^1 g(tx)x dt = \int_0^x g(t)dt$, also die übliche Stammfunktion

$$I(g(x) \cdot dx) = \int_{x_0}^x g(t)dt$$

von $g(x)$ auf U . Das Poincare Lemma ist daher in diesem Fall im Grunde genommen fast schon der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung einer Variable: Im Grad $j = 1$ besagt es, dass jede Funktion $g(x) \in C^\infty(U)$ eine Stammfunktion besitzt, da im letzten Grad $j = n$ (hier ist $n = 1$) automatisch für jede Differentialform $d\omega = 0$ gilt. Im Grad 0 besagt dann das Poincare Lemma, dass eine Stammfunktion eindeutig ist bis auf eine lokalkonstante Funktion.

Allerdings gibt es zwei Einschränkungen

- Erstens: Wir beschränken uns auf C^∞ -Funktion anstelle von stetigen Funktionen
- Zweiten: Es gibt keine direkte Verbindung der Aussage des Poincare Lemmas zur Integrationstheorie (obwohl dies für den Beweis des Poincare Lemmas natürlich so nicht zutrifft).

Zum zweiten Punkt ist zu sagen, dass erst der Satz von Stokes (siehe Analysis III) die noch fehlende Verbindung zur Integrationstheorie herstellen wird. Die höherdimensionale Integrationstheorie selbst wird zudem vorher noch entwickelt werden müssen. Diese Integrationstheorie ist für sich genommen im Grunde eigentlich subtiler als der genannte Satz von Stokes, und wird uns längere Zeit beschäftigen.

20.7 Maxwellgleichung

Betrachte \mathbb{R}^4 mit den Koordinaten (x, y, z, t) . Die Lichtgeschwindigkeit sei $c = 1$ und die Lorentz Metrik sei gegeben durch die Matrix $\text{diag}(-1, -1, -1, 1)$. Die Strom- und Ladungsdichte wird definiert durch eine 3-Form im \mathbb{R}^4

$$\eta = -j_1 \cdot dy \wedge dz \wedge dt - j_2 \cdot dz \wedge dx \wedge dt - j_3 \cdot dx \wedge dy \wedge dt + \rho \cdot dx \wedge dy \wedge dz .$$

Der Erhaltungssatz für die Ladung besagt

$$d\eta = 0 .$$

Nimmt man idealisiert an $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$, dann gilt nach dem Poincare Lemma

$$\eta = d\omega$$

für eine Form $\omega \in A^2(\mathbb{R}^4)$

$$\omega = D_1 \cdot dy \wedge dz + D_2 \cdot dz \wedge dx + D_3 \cdot dx \wedge dy - H_1 dx \wedge dt - H_2 dy \wedge dt - H_3 dz \wedge dt .$$

Maxwellgleichung: Betrachte nun die 2-Form

$$\hat{\omega} = B_1 \cdot dy \wedge dz + B_2 \cdot dz \wedge dx + B_3 \cdot dx \wedge dy + E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt .$$

Es gilt

$$\hat{\omega} = i\mu \cdot * \omega = i\mu(H_1 \cdot dy \wedge dz + H_2 \cdot dz \wedge dx + H_3 \cdot dx \wedge dy + D_1 dx \wedge dt + D_2 dy \wedge dt + D_3 dz \wedge dt) .$$

Hierbei ist $\mu\varepsilon = 1$ und $D_i = \varepsilon E_i = \mu^{-1} E_i$ und $H_i = \mu^{-1} B_i$. (μ ist die magnetische Permeabilität). Die Maxwell Gleichungen⁵ lauten dann

$$d(\hat{\omega}) = 0 \quad , \quad d\omega = \eta .$$

Man hat die 1-Form

$$*\eta = i(j_1 dx + j_2 dy + j_3 dz + \rho \cdot dt) .$$

Lorentz-Kraftdichte Die Kraftdichte und Energiedichte ist dual zu $-i(*\eta) \vee \hat{\omega}$, also $\mu \cdot (*\eta) \wedge \omega$

⁵Im Vakuum ist μ eine Konstante und kann in der Maxwellgleichung auch weggelassen werden.

Kapitel 21

Mehrdimensionale Differentiation

21.1 Approximation und Landausymbole

Seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(W, \|\cdot\|)$ zwei Banachräume. Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge und sei

$$f : U \rightarrow W$$

eine Funktion. Für gegebenes $\xi \in U$ schreiben wir

$$f(x) = o(x - \xi)$$

falls eine Funktion $H : U \rightarrow W$ existiert mit der Eigenschaft

$$f(x) = \|x - \xi\|_V \cdot H(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \|H(x)\|_W = 0 .$$

Das heisst, $H(x)$ ist stetig im Punkt ξ mit $H(\xi) = 0$.

Man sieht sofort, dass für Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auf U mit Werten in W gilt: $f_i(x) = o(x - \xi) \implies \alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x) = o(x - \xi)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

21.2 Differenzierbarkeit

Seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(W, \|\cdot\|)$ zwei Banachräume. Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge und sei

$$f : U \rightarrow W$$

eine Funktion.

Definition: f heisst differenzierbar im Punkt $\xi \in U$, wenn es eine stetige \mathbb{R} -lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ gibt, so dass gilt (*)

$$f(x) - f(\xi) - L(x - \xi) = o(x - \xi) .$$

Die stetige lineare Abbildung ist dann eindeutig bestimmt durch f und ξ , und heisst das Differential der Abbildung f im Punkt ξ und wir schreiben

$$L = Df(\xi) .$$

Beweis: Gäbe es zwei lineare Abbildungen mit der Eigenschaft (*), hätte die Differenz $L = L_1 - L_2$ (wieder eine stetige \mathbb{R} -lineare Abbildung) die Eigenschaft

$$L(x - \xi) = o(x - \xi)$$

auf U . Das heisst

$$L(x - \xi) = \|x - \xi\| \cdot H(x)$$

für alle $v = x - \xi \in K_\varepsilon(0)$ und ein geeignetes $\varepsilon > 0$, da U offen ist. Es folgt¹

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|=1/n} \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|v\|=1/n} \frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq \lim_{v+\xi \rightarrow \xi} \|H(v + \xi)\|_W = 0 . \end{aligned}$$

Beachte $1/n < \varepsilon$ für genügend grosses n . Also gilt $\|L\| = 0$. Somit $\|L(v)\| \leq \|L\| \cdot \|v\| = 0 \cdot \|v\| = 0$ und daher $L(v) = 0$. Das heisst $L_1 = L_2$.

21.3 Fundamentale Eigenschaften

21.3.1 Affin lineare Abbildungen

Seien $(V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)$ Banachräume, $c \in W$ eine Konstante und $L : V \rightarrow W$ stetige \mathbb{R} -linear. Dann ist die affin lineare Abbildung $f(x) = c + L(x)$ differenzierbar auf ganz V und hat in jedem Punkt $\xi \in V$ die Ableitung

$$Df(\xi) = L .$$

Der Beweis ist trivial, denn $f(x) - f(\xi) - L(x - \xi)$ ist identisch Null, also $o(x - \xi)$.

21.3.2 Eine Reduktion

Eine Abbildung f mit Werten in dem Euklidischen Vektorraum $W = \mathbb{R}^m$ besteht aus m reellwertigen Abbildungen f_1, \dots, f_m (den Komponenten von f)

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ f_{m-1}(x) \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

¹Beachte $\|L\| = \sup_{\|v\|=c} \frac{\|L(v)\|}{\|v\|}$ für beliebiges $c \neq 0$

Es gilt: $f(x)$ ist differenzierbar im Punkt ξ genau dann, wenn jede der Komponenten $f_1(x), \dots, f_m(x)$ differenzierbar ist im Punkt ξ .

Beweis: Die durch $f(x) - f(\xi) - L(x - \xi) = \|x - \xi\| \cdot H(x)$ definierte vektorwertige Funktion $H(x)$ konvergiert gegen Null für $x \rightarrow \xi$ genau dann, wenn ihre Komponenten $H_1(x), \dots, H_m(x)$ gegen Null konvergieren für $x \rightarrow \xi$. Siehe 10.3.2. Analog ist L stetig und \mathbb{R} -linear genau dann, wenn alle Komponenten L_1, \dots, L_m stetige \mathbb{R} -Linearformen sind.

21.3.3 Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Ist f differenzierbar im Punkt ξ , dann ist f stetig im Punkt ξ .

Dies gilt analog zu 14.5. Der Beweis überträgt sich wörtlich.

21.3.4 Kettenregel

Seien U, V, W Banachräume und $U_0 \subseteq U, V_0 \subseteq V$ offene Teilmengen. Gegeben

$$U_0 \xrightarrow{f} V_0 \xrightarrow{g} W_0$$

$$\xi \xrightarrow{f} \eta$$

Dann gilt: Ist f differenzierbar im Punkt ξ und ist g differenzierbar im Punkt η , dann ist die Zusammensetzung $g \circ f$ differenzierbar im Punkt ξ und es gilt

$$\boxed{D(g \circ f)(\xi) = Dg(\eta) \circ Df(\xi)}.$$

Auf der rechten Seite steht die Komposition der Ableitungen Df und Dg , also eine stetige \mathbb{R} -lineare Abbildung. Der Beweis von 15.6 überträgt sich daher wörtlich.

21.4 Die Jacobi-Matrix

Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des Euklidischen Raums und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine im Punkt $\xi \in U$ differenzierbare Abbildung.

Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ liegt $i_\nu(t) = \xi + t \cdot e_\nu$ in U (e_ν der ν -te Basisvektor). Bezeichne $p_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die μ -te Koordinate. Die drei Funktionen i_ν (affin linear), f und p_μ (linear) sind differenzierbar. Nach der Kettenregel ist daher auch die Zusammensetzung

$$f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n) = p_\mu \circ f \circ i_\nu(t)$$

eine differenzierbare Funktion, definiert auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ mit \mathbb{R} . Dies zeigt, dass f partiell nach der ν -ten Variable im Punkt ξ abgeleitet werden kann. Mehr noch: Die Kettenregel 21.3.4 liefert für die Ableitung nach t im Punkt $t = 0$

$$\left. \frac{d}{dt} f_\mu(\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu + t, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n) \right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} f_\mu(\xi)$$

den Wert $Di_\nu(0) \circ Df(\xi) \circ Dp_\mu(\eta)$, also wegen 21.3.1 die Formel

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} f_\mu(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot Df(\xi) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Df(\xi)_{\nu\mu}.$$

Hierbei fassen wir die lineare Abbildung $Df(\xi)$ als eine $n \times m$ -Matrix auf. Auf der rechten Seite steht dann der Matrixkoeffizient von $Df(\xi)$ an der ν, μ -ten Stelle.

Wir fassen zusammen: *Differenzierbarkeit im Punkt ξ impliziert partielle Differenzierbarkeit im Punkt ξ , und die Ableitung $Df(\xi)$ wird durch die Matrix der partiellen Ableitungen (Jacobimatrix) gegeben*

$$Df(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} f_\mu(\xi) \right)$$

für $\nu = 1, \dots, n$ und $\mu = 1, \dots, m$.

Bemerkung: Aus $Df(\xi) = 0$ für alle $\xi \in U$ folgt f ist lokalkonstant². Die folgt unmittelbar aus obigen Überlegungen zusammen mit dem eindimensionalen Hauptsatz 14.8.

²d.h., für jeden Punkt $x \in U$ gibt es eine offene Kugel um x in U , auf der ω konstant ist.

21.5 Stetig partiell differenzierbare Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine im Punkt $\xi \in U$ stetig partiell differenzierbare Funktion.

Behauptung: *Dann ist f differenzierbar im Punkt ξ .*

Beweis: Wegen 21.3.2 können wir obdA annehmen $m = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(\xi) &= f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

für gewisse θ_i zwischen x_i und ξ_i auf Grund des Mittelwertsatzes 14.6. Es folgt

$$f(x) - f(\xi) - \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi) = o(x - \xi).$$

Rechts steht $\sum_i (x_i - \xi_i) \cdot [\frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi)]$. Beachte $|x_i - \xi_i| \leq \|x - \xi\|$ und

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi) \right| = 0,$$

weil die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ stetig im Punkt ξ sind. Beachte $x \rightarrow \xi$ impliziert $\theta_i \rightarrow \xi_i$. Also ist f differenzierbar im Punkt ξ .

21.5.1 Kritische Punkte

Für f wie in 21.5 gelte $Df(\xi) = 0$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\|x - \xi\| < \delta \implies \|f(x) - f(\xi)\| < \varepsilon \cdot \|x - \xi\|.$$

Beweis: ObdA $m = 1$. Verschwindet die Ableitung $Df(\xi)$ von f im Punkt ξ

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) = 0,$$

liefert die Abschätzung in 21.5

$$\|f(x) - f(\xi)\| \leq n \cdot \|x - \xi\| \cdot \sup_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right|.$$

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Punkt ξ liefert $|\frac{\partial}{\partial x_i} f(y)| < \varepsilon_1$ für alle y mit $\|y - \xi\| < \delta$ für geeignetes $\delta = \delta(\varepsilon_1)$. Ausserdem: $\|x - \xi\| < \delta$ impliziert $\|y - \xi\| < \delta$ für $y = \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \theta_i, x_{i+1}, \dots, x_n$. Setze nun $\varepsilon_1 = \varepsilon/n$.

21.6 Der Umkehrsatz

Wir verallgemeinern jetzt 15.4. Sei U offen in \mathbb{R}^n und sei

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig partiell differenzierbare, also differenzierbare Funktion auf U . Beachte $n = m$. In jedem Punkt $\xi \in U$ ist daher die Jacobimatrix eine $n \times n$ -Matrix. Der folgende Satz liefert als hinreichende Bedingung für die Existenz einer lokalen Umkehrfunktion von f in der Nähe von ξ resp. $f(\xi)$, dass die Jacobimatrix $Df(\xi)$ im Punkt ξ invertierbar ist. Es dann gilt nämlich:

Satz: *Es gibt eine offene Teilmenge V von U , welche ξ enthält, für die f eingeschränkt auf V eine bijektive Abbildung von V auf $W = f(V)$ definiert, so dass gilt*

$$\boxed{W = f(V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist } \underline{\text{offen}} .}$$

Weiterhin: Die lokale Umkehrfunktion

$$\boxed{f^{-1} : W \rightarrow V}$$

ist stetig partiell differenzierbar, also differenzierbar auf $W = f(V)$.

Bemerkung: Dass die Invertierbarkeit von $Df(\xi)$ andererseits eine notwendige Bedingung für die Existenz einer differenzierbaren lokalen Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ in der Nähe von ξ ist, folgt sofort aus der Kettenregel: $g \circ f = id$ impliziert $Dg(\eta) \circ Df(\xi) = D(id)(\xi) = id$ für $\eta = f(\xi)$. Somit ist $Dg(\eta)$ die zu $Df(\xi)$ inverse Matrix.

21.6.1 Beweis

im Spezialfall $\xi = f(\xi) = 0$ und $Df(\xi) = id$.

Die Hilfsfunktion F :

$$\boxed{F(x) = x - f(x) + \eta}$$

für gegebenes konstantes³ $\eta \in \mathbb{R}^n$ hat verschwindende Ableitung im Punkt ξ . Für $\varepsilon = 1/4$ gilt $\|F(x) - F(y)\| \leq \|F(x) - F(\xi)\| + \|F(\xi) - F(y)\| < \frac{1}{2}\|x - y\|$ für alle x, y vom Abstand kleiner δ zu $\xi = 0$ (nach 21.5.1), wobei $\delta = \delta(1/4) > 0$.

$$\boxed{\|F(x) - F(y)\| < \frac{1}{2}\|x - y\| .}$$

Der vollständige Raum X : Wir wählen eine abgeschlossene Kugel⁴ X um $\xi = 0$ vom Radius r für ein $0 < r < \delta$. Dann ist F eine auf X definierte kontraktive Abbildung mit Werten im \mathbb{R}^n .

³Wir benutzen das Newton Verfahren wie in 11.7

⁴Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n , also versehen mit der Euklidischen Metrik nach 11.4.1 ein vollständiger metrischer Raum.

Bedingung an η : $F(0) = \eta$ und $\|F(x)\| \leq \|F(x) - F(0)\| + \|F(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|\eta\|$ impliziert für $x \in X$ (d.h. $\|x\| \leq r$) sowie gleichzeitig für

$$\|\eta\| < r/2$$

die Ungleichung $\|F(x)\| \leq r$, oder anders ausgedrückt

$$\boxed{F : X \rightarrow X}.$$

Fixpunktsatz: Der Fixpunktsatz von Banach liefert daher einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\xi \in X$ der kontraktiven Abbildung $F : X \rightarrow X$. Beachte $F(\xi) = \xi$ ist äquivalent zu $f(\xi) = \eta$. Mit anderen Worten $\xi = f^{-1}(\eta)$:

$$\exists! \xi \in X \text{ mit } f(\xi) = \eta, \text{ falls } \|\eta\| < r/2.$$

Konstruktion von V : Die offene Kugel aller $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\eta\| < r/2$ um Null definiert eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Ihr Urbild $f^{-1}(W)$ ist offen in \mathbb{R}^n , da f stetig ist (benutze 21.3.3 und 12.4). Für $V = f^{-1}(W) \cap X$ gilt wie bereits gezeigt

$$\boxed{f : V \cong f(V) = W}.$$

Kontroll-Abschätzungen: Die Kontraktivität von F auf X liefert für $x, y \in X$ mit Hilfe der unteren⁵ und oberen Dreiecksungleichung 12.0.4

$$\boxed{\frac{1}{2}\|x - y\| < \|f(x) - f(y)\| < \frac{3}{2}\|x - y\|}.$$

V ist offen: $\xi \in V \implies \eta = f(\xi) \in W$. Aus der unteren Kontroll-Abschätzung von f folgt für $x = \xi, y = 0$ dann $\frac{1}{2}\|\xi\| < \|\eta\|$. Andererseits $\|\eta\| < \frac{r}{2}$. Somit $\|\xi\| < r$. Also liegt ξ bereits in der offenen Kugel $X^0 \subset X$ vom Radius r um Null. Daher ist $V = f^{-1}(W) \cap X = f^{-1}(W) \cap X^0$ als Durchschnitt zweier offener Mengen selbst offen.

Stetigkeit von $f^{-1} : W \rightarrow V$. Eine unmittelbare Folge von

$$\frac{1}{2}\|f^{-1}(\eta_1) - f^{-1}(\eta_2)\| < \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

Dies gilt für alle $\eta_1, \eta_2 \in W$ wegen der linken Kontrollabschätzung.

Differenzierbarkeit von f^{-1} im Punkt 0: Für $\eta \neq 0 \iff f^{-1}(\eta) = \xi \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|f^{-1}(\eta) - f^{-1}(0) - id(\eta - 0)\|}{\|\eta - 0\|} &= \frac{\|f^{-1}(\eta) - \eta\|}{\|\eta\|} = \frac{\|\xi - f(\xi)\|}{\|f(\xi)\|} \\ &= \frac{\|\xi\|}{\|f(\xi)\|} \cdot \frac{\|f(\xi) - f(0) - id(\xi - 0)\|}{\|\xi - 0\|} \end{aligned}$$

Da f nach 21.3.3 stetig auf V ist, und f^{-1} stetig auf W ist, sind $\xi \rightarrow 0$ und $\eta = f(\xi) \rightarrow 0$ zueinander äquivalent. Da rechts der Limes $\xi \rightarrow 0$ existiert und Null ist (f ist differenzierbar im Punkt $\xi = 0$ mit der Ableitung id , und der Faktor $\|\xi\|/\|f(\xi)\|$ kann durch 2 abgeschätzt werden wegen der Kontrollabschätzungen) existiert der Limes $\eta \rightarrow 0$ links, und ist auch Null. Somit ist f^{-1} differenzierbar im Punkt $\eta = 0$ mit der Ableitung $Df^{-1}(0) = id$.

⁵D.h. $\|u\| - \|v\| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für $u = x - y$ und $v = F(y) - F(x)$.

Differenzierbarkeit von f^{-1} auf W : Hierzu nehmen wir an, dass der Radius r obdA so klein gewählt wurde, dass für alle $\xi \in X$ und damit für alle $\xi \in V$ die Ableitung von f im Punkt ξ invertierbar ist. Dann zeigt unser vorheriges Argument die Differenzierbarkeit von f^{-1} in allen Punkten $\eta = f(\xi) \in W$. Beachte 21.6.2.

Stetig partielle Differenzierbarkeit von f^{-1} auf W : Aus der Kettenregel folgt, dass die Jacobimatrix $Df^{-1}(\eta)$ die zu $Df(\xi)$ inverse Matrix ist. Die Cramersche Regel oder der Laplace Entwicklungssatz liefert daher die Formel

$$Df^{-1}(\eta) = (Df(\xi))^{-1} = \frac{Df(\xi)^{ad}}{\det(Df(\xi))}.$$

Beachte ξ hängt stetig von η ab, da f^{-1} stetig ist. Die Einträge der adjungierten Matrix und die Determinante von $Df(\xi)$ sind Polynome in den Matrixkoeffizienten von $Df(\xi)$, also stetig in ξ , da f stetig partiell differenzierbar ist. Andererseits sind die partiellen Ableitungen von f^{-1} die Koeffizienten der Jacobimatrix $Df^{-1}(\eta)$. Also sind dies stetige Funktionen der Variable $\eta \in W$.

21.6.2 Reduktion auf den Spezialfall

Dass die in 21.6.1 zum Beweis des Umkehrsatzes gemachten Annahmen

$$\xi = 0 \text{ und } \eta = f(\xi) = 0 \text{ und } Df(\xi) = id$$

unbedenklich sind, sieht man durch Modifikation von f mit affin linearen Abbildungen der Gestalt $\varphi(x) = L(x) + \xi$, $L \in Gl(n, \mathbb{R})$ und $\psi(x) = x - \eta$. Diese Abbildungen haben die Jacobimatrix L bzw. id , und sind invertierbar auf ganz \mathbb{R}^n . Ihre Umkehrabbildungen sind wieder affin linear. Hat daher

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi$$

eine lokale Umkehrfunktion bei $x = 0$, dann hat f wie behauptet eine lokale Umkehrfunktion⁶ bei $x = \xi$, nämlich

$$f^{-1} = \varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi.$$

Andererseits⁷ gilt $\tilde{f}(0) = 0$ und $D\tilde{f}(0) = id$, falls L geeignet gewählt wird, nämlich

$$L = Df(\xi)^{-1}.$$

Genau an dieser Stelle geht die Invertierbarkeit der Jacobimatrix $Df(\xi)$ ein!

⁶ $f \circ (\varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi) = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi = id$ und $(\varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \psi) \circ f = \varphi \circ \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1} = id$.

⁷Für die Funktion \tilde{f} folgt daher die Existenz der lokalen Umkehrfunktion bei $x = 0$ aus dem vorherigen Abschnitt.

21.7 Satz von der impliziten Funktion

Sei

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Schreibweise: $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Annahme: Die $m \times m$ -Matrix

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(x, y) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial y_m} f_1(x, y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_m(x, y) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial y_m} f_m(x, y) \end{pmatrix}$$

sei invertierbar im Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$.

Satz: *Unter obigen Annahmen existieren offene Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}^m$ um den Nullpunkt und eine eindeutig bestimmte stetig partiell differenzierbare Funktion $\varphi : V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft*

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad , \quad \varphi(0) = 0$$

und jede Lösung $(x, y) \in V \times W$ von $f(x, y) = 0$ ist von der Gestalt $(x, \varphi(x))$.

Mit anderen Worten: $y = \varphi(x)$ ist lokal die eindeutig bestimmte ‘Lösung’ des Gleichungssystems $f(x, y) = 0$.

Beweis: Wir führen den Satz zurück auf den Satz von der Umkehrfunktion. Betrachte die Abbildung $F(x, y) = (x, f(x, y))$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & & \\ & \swarrow pr_1 & \downarrow F = pr_1 \times f & \searrow f & \\ \mathbb{R}^n & & & & \mathbb{R}^m \\ & \swarrow pr_1 & & \searrow pr_2 & \\ & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

Es gilt

$$pr_1 \circ F = pr_1 \quad , \quad pr_2 \circ F = f \quad .$$

Die Jakobimatrix der Abbildung F hat in Blockgestalt die Form

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^n} & O^{(n,m)} \\ * & T(x, y) \end{pmatrix}$$

Diese Dreiecksmatrix ist invertierbar im Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$, denn $T(0, 0)$ ist nach Annahme invertierbar. Die Einträge der Matrix $DF(x, y)$ sind stetig in (x, y) : Dies ist klar für die oberen Einträge. In der unteren Blockzeile steht gerade die Jacobimatrix von f . Also sind auch die unteren Einträge stetig. Der Satz von der Umkehrfunktion, angewendet auf $F(x, y)$, liefert daher eine lokale

Umkehrfunktion G von F in der Umgebung vom Nullpunkt. Aus der Kommutativität des obigen Diagramms folgt⁸

$$pr_1 \circ G = pr_1 \quad , \quad f \circ G = pr_2 .$$

Das heisst $f(G(x, y)) = y$ und $G(x, y) = (x, g(x, y))$, beziehungsweise zusammen

$$f(x, g(x, y)) = y .$$

Da die $(x, g(x, y))$ eine offene Umgebung von Null parametrisieren, ist auf dieser Umgebung die gesuchte Funktion φ daher

$$\varphi(x) = g(x, 0) .$$

Die partiellen Ableitungen von $g(x, 0)$ sind partielle Ableitungen von $G(x, y)$ (bei $y = 0$), also stetig. Somit ist $\varphi(x)$ stetig partiell differenzierbar.

Bemerkung: Aus der Kettenregel folgt $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \varphi(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x) = 0$. Da $T(x, y)$ invertierbar im Punkt 0 ist, und damit aus Stetigkeitsgründen auch in der Nähe von Null, ist daher auf einer offenen Umgebung des Nullpunkts die Ableitung der impliziten Funktion φ im ‘Matrixsinne’ gegeben durch

$$D\varphi(x) = - \frac{\partial}{\partial y} f(x, \varphi(x))^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x} f(x, \varphi(x)) .$$

Bemerkung: Die Aussage des Satzes von der impliziten Funktion gilt für Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ anstelle des Nullpunktes, falls entsprechend $T(x_0, y_0)$ invertierbar ist. Ausserdem genügt es natürlich, wenn die Funktion f auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definiert ist, welche den Punkt (x_0, y_0) enthält.

Ein Beispiel: Sei $n = m = 1$ und $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Im Punkt (x_0, y_0) auf dem Einheitskreis ist $T(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0, y_0) = 2y_0$ invertierbar genau dann, wenn gilt $y_0 \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\varphi(x) = \text{sign}(y_0) \cdot +\sqrt{1 - x^2}$$

$$\varphi(x_0)' = -x_0/y_0 .$$

Ist andererseits $y_0 = 0$, existiert keine lokale Umkehrfunktion!

⁸ $pr_1 \circ G = pr_1 \iff pr_1 \circ G \circ F = pr_1 \circ F \iff pr_1 = pr_1 \circ F$ und analog für die andere Gleichung.

21.8 Verallgemeinerte Taylor-Entwicklung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $\xi \in U$, und sei $f \in C^{m+1}(U)$ eine $(m+1)$ -mal stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf U .

Sei x ein Punkt in U , so dass die Verbindungsstrecke von ξ nach x aller Punkte

$$\xi + t(x - \xi) \quad \text{für} \quad t \in [0, 1]$$

in U liegt.

Eine Hilfsfunktion: $F(t) = f(\xi + t(x - \xi))$ ist dann eine $(m+1)$ -mal stetig differenzierbare reellwertige Funktion der reellen Variable $t \in [0, 1]$. Dies folgt aus der Kettenregel durch Induktion nach m (siehe die Formeln weiter unten).

Beachte $F(1) = f(x)$ und $F(0) = f(\xi)$. Aus der Taylor Formel 16.1

$$F(1) = F(0) + F'(0) \cdots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}(\theta),$$

für geeignetes $\theta \in (0, 1)$, werden wir mit Hilfe der Kettenregel die höherdimensionale Taylorformel 21.8.2 ableiten.

Die Kettenregel: Nach 21.3.4 gilt allgemein

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{\nu=1}^n x'_\nu(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} f(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Also wegen $\frac{d}{dt}(\xi + t(x - \xi))_\nu = (x - \xi)_\nu = x_\nu - \xi_\nu$ erhält man sukzessive

$$\frac{d}{dt} F(t) = \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - \xi_\nu) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} f(\xi + t(x - \xi)).$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F(t) = \sum_{\nu_1=1}^n (x_{\nu_1} - \xi_{\nu_1}) \cdot \sum_{\nu_2=1}^n (x_{\nu_2} - \xi_{\nu_2}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu_2} \partial x_{\nu_1}} f(\xi + t(x - \xi))$$

usw ...

$$\frac{d^m}{dt^m} F(t) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=1}^n (x_{\nu_1} - \xi_{\nu_1}) \cdots (x_{\nu_m} - \xi_{\nu_m}) \cdot \frac{\partial^m}{\partial x_{\nu_m} \cdots \partial x_{\nu_1}} f(\xi + t(x - \xi)).$$

Die Summanden: Wegen $f \in C^{m+1}(U)$ sind die partiellen Ableitungen der Ordnungen $\leq m+1$ unabhängig von der Reihenfolge 19.7. Kommt im Multiindex $(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \{1, \dots, n\}^m$ die 1 genau m_1 mal, die 2 genau m_2 -mal, ... und n genau m_n mal vor, dann hängt der zugehörige Summand

$$(x_1 - \xi_1)^{m_1} \cdots (x_n - \xi_n)^{m_n} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} f(\xi + t(x - \xi))$$

eigentlich nur von den Zahlen $m_1 \geq 0, \dots, m_n \geq 0$ ab. Man nennt $\mu = (m_1, \dots, m_n)$ den zugehörigen Multiexponent vom Grad $\deg(\mu) = m_1 + \dots + m_n$. Beachte

$\deg(\mu) = m$. Der Summand wird im folgenden symbolisch geschrieben in der Form

$$(x - \xi)^\mu \cdot \frac{\partial^m}{\partial x^\mu} f(\xi + t(x - \xi)) .$$

Zurück zur Taylorentwicklung: Für die einzelnen Terme erhält man

$$\frac{d^m}{dt^m} F(t) = \sum_{\deg(\mu)=m} \binom{m}{\mu} \cdot (x - \xi)^\mu \cdot \frac{\partial^m}{\partial x^\mu} f(\xi + t(x - \xi)) .$$

Der verallgemeinerte Binomialkoeffizient $\binom{m}{\mu}$ ist dabei definiert als die Anzahl aller Indizes $(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \{1, \dots, n\}^m$, welche denselben Multiexponent

$$\mu = (m_1, \dots, m_n)$$

liefern.

21.8.1 Eine kombinatorische Formel

$$\binom{m}{\mu} = \frac{m!}{m_1! \cdots m_n!} .$$

Beweis: Man überlegt sich leicht

$$\binom{m}{\mu} = \sum_{i=1}^n \binom{m-1}{\mu_i}$$

für $\mu_i = (m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_n)$ vom Grad $\deg(\mu_i) = m - 1$. Betrachte dazu die Projektion $\{1, \dots, n\}^m \rightarrow \{1, \dots, n\}$ auf die letzte Koordinate ν_m . Aus der obigen Rekursionsformel folgt dann durch Induktion nach $m = \deg(\mu)$:

$$\binom{m}{\mu} = \sum_{i=1}^n \frac{(m-1)!}{m_1! \cdots (m_i - 1)! \cdots m_n!} = \frac{(m-1)!}{m_1! \cdots m_n!} \cdot \sum_{i=1}^n m_i = \frac{m!}{m_1! \cdots m_n!} .$$

Zusammengefasst

21.8.2 Taylorformel mit Restglied

Sei $f \in C^{m+1}(U)$ und die Verbindungsgerade zwischen ξ und x liege in U . Dann gibt es einen Punkt $\tilde{x} = \xi + \theta(x - \xi)$ auf der Verbindungsstrecke zwischen ξ und x (genauer gesagt $0 < \theta < 1$) so, dass gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^m \sum_{m_1+\dots+m_n=i} \frac{(x_1 - \xi_1)^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{(x_n - \xi_n)^{m_n}}{m_n!} \cdot \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_n}}{\partial x_n^{m_n}} f(\xi) \\ &+ \sum_{m_1+\dots+m_n=m+1} \frac{(x_1 - \xi_1)^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{(x_n - \xi_n)^{m_n}}{m_n!} \cdot \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_n}}{\partial x_n^{m_n}} f(\tilde{x}) . \end{aligned}$$

Die Summationen erfolgen hierbei über Exponenten $m_i \geq 0$.

21.9 Extremwerte

Sei f eine differenzierbare reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge U von \mathbb{R}^n . Ist $\xi \in U$ ein Extremwert

$$f(\xi) = \max_{x \in U} f(x) ,$$

dann verschwindet die Jacobimatrix im Punkt ξ

$$\boxed{Df(\xi) = 0} .$$

Beweis: $x_i = \xi_i$ ist ein Extremwert der eingeschränkten Funktion $f(\xi_1, \dots, x_i, \dots, \xi_n)$. Daher gilt $D_i f(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n) = D_i f(\xi) = 0$ für alle i . Das heisst $Df(\xi) = 0$.

Die Umkehrung gilt bekanntlich nicht! Die Funktion $f(x) = x^3$ hat Ableitung Null im Punkt $x = 0$, obwohl an dieser Stelle kein Extremwert vorliegt. Aber in diesem Beispiel verschwindet auch die zweite Ableitung im Punkt Null!

21.9.1 Die Hessematrix

Für $f \in C^2(U)$ ist die Hessematrix $H(f)(x)$ für alle Punkte $x \in U$

$$H(f)(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \right)$$

eine symmetrische $n \times n$ -Matrix nach 19.7. Die Koeffizienten $H(f)_{ij}(x)$ der Hessematrix sind nach Annahme stetige Funktionen auf U .

Eine symmetrische $n \times n$ -Matrix H mit reellen Koeffizienten heisst positiv definit, wenn für alle Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$ des \mathbb{R}^n gilt

$$v' H v = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i v_j H_{ij} > 0 .$$

Man schreibt dann $H > 0$. Ist $-H$ positiv definit, nennt man H negativ definit und schreibt $H < 0$.

21.9.2 Lokale Maxima

Gilt für $f \in C^2(U)$ und $\xi \in U$ sowohl $Df(\xi) = 0$ als auch $H(f)(\xi) < 0$ ($H(f)(\xi) > 0$), dann ist $f(\xi)$ ein lokales Maximum (Minimum). D.h. es gibt eine offene Teilmenge V von U , welche ξ enthält, so dass gilt

$$\boxed{f(\xi) = \max_{x \in V} f(x)}$$

(resp. $f(\xi) = \min_{x \in V} f(x)$).

Beweis: Auf Grund der Annahmen gilt wegen der Taylorformel 21.8.2

$$f(x) = f(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\tilde{x})$$

für alle Punkte x in einer genügend kleinen offenen Kugel V um ξ , so dass V in U liegt. Der Punkt \tilde{x} liegt zwischen ξ und x , also auch in V . Für den Beweis genügt es daher zu zeigen, dass die symmetrische Matrix $H(\tilde{x}) := H(f)(\tilde{x})$ negativ definit ist für alle $\tilde{x} \in V$, falls der Radius $r > 0$ der Kugel V genügend klein gewählt wurde.

Hilfssatz: *Ist $H(\xi) < 0$, dann gilt $H(x) < 0$ für alle x in einer genügend kleinen nichtleeren offenen Kugel um ξ .*

Beweis: 1. Schritt. Die durch $(v, x) \mapsto \sum_{i,j} v_i v_j H_{ij}(x)$ definierte Funktion

$$q : \mathbb{R}^n \times \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \xi\| \leq r\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig. Sei S^{n-1} die Sphäre vom Euklidischen Radius 1 um Null im \mathbb{R}^n . Es genügt zu zeigen, dass q in allen Punkten (v, x) mit $v \in S^{n-1}$ negative Werte annimmt wegen $q(\lambda \cdot v, x) = \lambda^2 \cdot q(v, x)$.

2. Schritt. Die Einschränkung von $q(v, x)$ auf den kompakten⁹ Raum $S^{n-1} \times \{\xi\}$ hat Werte < 0 . Nach 12.7 wird das Maximum angenommen. Also $\exists C > 0$

$$q(v, \xi) \leq -C < 0 \quad , \quad \forall v \in S^{n-1} .$$

3. Schritt. q ist stetig, also gleichmässig stetig, auf dem kompakten Raum

$$S^{n-1} \times \{x \mid \|x - \xi\| \leq r\} .$$

Für geeignetes $\delta = \delta(C/2) > 0$ und $\|(v, x) - (w, y)\| < \delta$ impliziert dies

$$|q(v, x) - q(w, y)| \leq C/2 .$$

Wählt man oBdA $r < \delta$, folgt $|q(v, x) - q(v, \xi)| < C/2$ aus $\|x - \xi\| < r$. Also

$$q(v, x) \leq q(v, \xi) + |q(v, x) - q(v, \xi)| \leq -C + C/2 = -C/2 < 0$$

für alle $v \in S^{n-1}$ und $\|x - \xi\| < r$. Wegen Schritt 1 zeigt dies den Hilfssatz.

⁹Im Vorgriff auf 22.2

Kapitel 22

Kompakte metrische Räume

22.1 Kompaktheit

Sei $K \subseteq X$ Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) . Ist (K, d) bezüglich der eingeschränkten Metrik folgenkompakt, dann gilt

- (i) K ist abgeschlossen in jedem Teilraum $(U, d) \subseteq (X, d)$, welcher K enthält.
- (ii) K ist beschränkt in (X, d) .

Beweis:

(i) Sei $x_n \in K$ eine Folge, welche in (U, d) gegen x konvergiert. Zu zeigen ist $x \in K$. Eine Teilfolge \tilde{x}_n der Folge konvergiert nach Annahme gegen ein $k \in K$. Die Teilfolge konvergiert aber auch gegen x . Es folgt $x = k \in K$. Also ist K abgeschlossen in (U, d) .

(ii) Für $x_0 \in X$ ist die Abbildung $K \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $x \mapsto d(x, x_0)$, stetig und nimmt daher auf K ihr Maximum an. Folglich ist K beschränkt in (X, d) .
 \square

Für eine offene Teilmenge des Euklidischen Raums \mathbb{R}^n , versehen mit der Euklidischen Metrik d , gilt

22.1.1 Vereinigung zweier kompakter Mengen

Die Vereinigung zweier (endlich vieler) folgenkompakter Mengen K, K' ist wieder folgenkompakt.

Beweis: Ist nämlich x_n eine Folge in $K \cup K'$, dann existiert eine Teilfolge in K oder in K' . Und davon existiert eine konvergente Teilfolge.

22.2 Heine-Borel (1.Version)

Eine Teilmenge K einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist im \mathbb{R}^n .

Beweis: Sei K beschränkt. Dann ist K in einem abgeschlossenen Quader $I \subseteq \mathbb{R}^n$ enthalten. Ist $x_n \in K$ eine Folge, dann gibt es eine Teilfolge \tilde{x}_n welche in dem Quader I gegen eine Grenzwert $x \in I$ konvergiert 11.5. Ist K nun ausserdem abgeschlossen im \mathbb{R}^n , dann liegt x notwendiger Weise in K . Also ist K folgenkompakt. Die andere Richtung folgt aus 22.1.

Warnung: Eine Teilmenge $K \subseteq U$ einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nicht notwendig im \mathbb{R}^n abgeschlossen, wenn sie in U abgeschlossen ist, obwohl die Umkehrung trivialerweise richtig ist.

Beispiel: Der Schnitt K der x -Achse mit dem offenen Einheitskreis $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen in U , aber nicht in \mathbb{R}^2 . Obwohl diese Menge K abgeschlossen und beschränkt ist in U , ist sie nicht folgenkompakt.

Der eigentliche Satz von Heine-Borel macht darüber hinaus eine Aussage über Überdeckungen und ergibt sich aus der obigen Version des Satzes mittels der Charakterisierung von kompakten metrischen Räumen, welche wir im nächsten Abschnitt geben.

22.3 Überdeckungen (2.Version)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $K \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine Menge \mathcal{U} von offenen Teilmengen U_i (i aus einer Indexmenge I) in X nennt man eine Überdeckung von K , wenn gilt

$$K = \bigcup_{i \in I} U_i .$$

Man nennt die Überdeckung abzählbar bzw. endlich, wenn die Indexmenge I als Menge isomorph zu \mathbb{N} ist bzw. wenn die Indexmenge I endlich ist.

Satz: Für einen metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) (X, d) ist folgenkompakt.
- (ii) (X, d) ist (überdeckungs)kompakt¹, d.h.: Jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis: (ii) \implies (i). Sei $x_n \in X$ eine Folge und $x \in X$. Wenn keine Teilfolge gegen x konvergiert, gibt es eine offene Kugel $U = K_\varepsilon(x)$ von Radius $\varepsilon > 0$ um x , welche nur endlich viele Folgenglieder enthält. Wäre (X, d) nicht folgenkompakt,

¹oder kurz: kompakt

würden solche Kugeln X überdecken, und wegen (i) sogar endlich viele solche Kugeln. Dann wäre aber die Folge endlich. Ein Widerspruch!

(i) \implies (ii). Stützpunkte. Für gegebenes $r > 0$ wählen wir sukzessive Punkte $\xi_n \in X$ mit der Eigenschaft

$$\xi_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} K_r(\xi_i)$$

solange dies geht. Wir behaupten, diese Konstruktion muss nach endlich vielen Schritten abbrechen, denn anderenfalls hätte man eine Folge in X konstruiert, welche wegen $d(\xi_n, \xi_m) \geq r$ keine konvergente Teilfolge in X besitzt!

Reduktion auf abzählbare Überdeckungen. Sei nun \mathcal{U} eine beliebige offene Überdeckung von (X, d) . Für $x \in X$ existiert also ein $U \in \mathcal{U}$ und eine offene Kugel $K_\varepsilon(x)$ mit

$$x \in K_\varepsilon(x) \subseteq U \in \mathcal{U}$$

für geeignetes $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Schritt 1 für jedes fixierte positive $r < \varepsilon/2$ einen der endlich vielen konstruierten Stützpunkte $\xi_\nu \in X$, für den gilt

$$x \in K_r(\xi_\nu) \subseteq K_\varepsilon(x) \subseteq U \in \mathcal{U} .$$

Da diese Stützpunkte nur von r und (X, d) abhängen, erhalten wir etwa für die Wahlen $r = 1/k, k \in \mathbb{N}$ abzählbar² viele solche Stützpunkte. Zum Beweis können wir aber nunmehr die ursprüngliche Überdeckung von X durch die abzählbare Überdeckung ersetzen, welche durch die Kugeln $K_{1/k}(\xi_\nu)$ definiert werden.

Abzählbare Überdeckungen. Sei U_1, U_2, \dots eine Folge offener Mengen, welche X überdecken. Wir wollen durch einen Widerspruchsbeweis zeigen, dass endlich viele der U_i bereits X überdecken. Wäre dies nicht der Fall könnten wir (wie oben) sukzessive unendlich viele Punkte $x_n \in X$ wählen mit der Eigenschaft

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i .$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir obdA annehmen, dass die Folge x_n in (X, d) gegen einen Grenzwert x konvergiert. Nun liegt aber x in einer der Mengen U_m . Da U_m offen ist, liegen dann sogar fast alle Folgenglieder in U_m . Das heisst: Es gibt ein N so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$x_n \in U_m .$$

Für $n > m$ ein Widerspruch zur Wahl von x_n !

²Mit Hilfe dieses Arguments sieht man, dass ein kompakter metrischer Raum eine abzählbare Basis im Sinne von 23.4.4 besitzt.

Kapitel 23

Monotone Limiten

23.1 Vorbemerkungen

Wie wir bereits gesehen haben, ist der Grenzwert einer gleichmässig konvergenten Folge stetiger Funktionen (zumindestens auf einem kompakten metrischen Raum) wieder eine stetige Funktion. Diese Aussage besitzt zahlreiche Anwendungen in der Analysis. Überhaupt spielte die gleichmässige Konvergenz bei unseren bisherigen Betrachtungen eine bedeutende Rolle. So angenehm wie diese Sätze über gleichmässige Konvergenz einerseits sind, sollten sie uns dennoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz immer eine substantielle Annahme darstellt. Dies wird besonders dann empfunden, wenn man versucht die bisherigen Sätze der Integrationstheorie zu verallgemeinern auf Funktionen, die nicht stetig sind. Dass es oft sinnvoll und notwendig ist die stetige Welt hinter sich zu lassen, zeigt sich an der Frage, die wir ja bereits im einfacheren Kontext diskutiert haben, in wie weit verschiedenartige Grenzprozesse miteinander vertauschen. Konkret etwa am Problem, wann eine Identität der Gestalt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx$$

erfüllt ist. Im Fall einer gleichmässig konvergenten Funktionenfolge ist dies auf einem kompakten Intervall als Integrationsbereich erfüllt, wie bereits gezeigt wurde. Die Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz ist eine zu starke Einschränkung für manche Anwendungen. Viele natürlich auftretende Funktionenfolgen konvergieren nicht gleichmässig. Ihr Grenzwert ist daher in der Regel keine stetige Funktion.

Ein Beispiel: Betrachte das kompakte Intervall $X = [-1, 1]$ und auf X die Funktionenfolge

$$f_n(x) = 1 - x^{2n} ,$$

welche für $n \rightarrow \infty$ gegen die konstante Funktion 1 konvergiert, allerdings nur für $x \neq 1, -1$. In diesen beiden Punkten konvergiert die Folge gegen den Grenzwert Null. Die Limesfunktion ist daher die nichtstetige charakteristische Funktion

$$\chi_U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

des offenen Intervalls

$$U = (-1, 1) \subseteq X = [-1, 1].$$

Insbesondere kann daher die Folge nicht gleichmässig konvergieren, denn sonst wäre die Grenzfunktion χ_U ja eine stetige Funktion, was nicht der Fall ist. Dies ist auf den allerersten Blick schon überraschend!

Immerhin - bei genauerem Besehen - ist die Folge $f_n \nearrow f = \chi_U$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen. In der Tat gilt sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = \int_{-1}^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx,$$

wovon man sich durch Nachrechnen leicht überzeugen kann. Ist dies ein Zufall? Die Antwort lautet Nein. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass mit dem richtigen Begriff der Integration diese Eigenschaft immer erfüllt ist. Dies ist die Theorie von Lebesgue. Unser bisheriger Integralbegriff leistet dies im allgemeinen nicht. Wir werden im folgenden ein Beispiel dafür angeben.

Lebesgue Integration: Eine der herausragenden Eigenschaften des Lebesgue Integrals ist die folgende Kompatibilität mit monotonen Limiten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx$$

für jede monoton wachsende Folge von Lebesgue integrierbaren Funktionen g_n , falls der Limes der Integrale links (existiert und) endlich ist. Insbesondere ist der Limes $g = \lim_n g_n$ dann Lebesgue integrierbar.

Das Lebesgue Integral verallgemeinert das Riemann Integral, welches wir bislang betrachtet haben. Funktionen, die im Riemannschem Sinn integrierbar sind, sind auch Lebesgue integrierbar und die Integrale stimmen überein. Die Umkehrung gilt nicht. Es gibt Funktionen, die Lebesgue integrierbar sind, aber nicht integrierbar sind im Riemannschem Sinn.

Ein typisches Beispiel: Betrachte die Funktion

$$g = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ mit $g(x) = 1$ für alle rationalen x und $g(x) = 0$ für alle irrationalen x . Diese Funktion ist nicht Riemann integrierbar, denn das Supremum aller Untersummen ist Null, das Infimum aller Obersummen ist 1. g unterscheidet sich von der Nullfunktion nur an den rationalen Zahlen, also einer abzählbaren Menge

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

von Punkten. Beginnend mit der Nullfunktion $g_0 = 0$ erlaubt dies eine monoton wachsende Folge von Funktionen

$$g_n \nearrow g$$

zu konstruieren, so dass gilt $g_0 = 0$ und

$$g_n(x) = g_{n-1}(x) \quad , \quad \forall x \neq x_n$$

und $g_n(x_n) = 1$. Offensichtlich sind alle Funktionen $g_n(x)$ Riemann integrierbar (sie unterscheiden sich von Nullfunktion nämlich nur an endlich vielen Punkten). Also gilt

$$\int_0^1 g_n(x) dx = 0$$

für alle n . Würde für das Riemann Integral gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx \quad ,$$

wäre in der Tat auch $g(x)$ Riemann integrierbar. Wir haben aber oben bereits gesehen, dass dies nicht der Fall ist. Also vertauscht das Riemann Integral nicht mit monotonen Limiten! Dagegen ist g Lebesgue integrierbar mit dem Integral Null.

Das Lebesgue Integral ist natürlich monoton, d.h. $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx$ folgt aus $f \leq g$. Da es (wie bereits erklärt) ausserdem mit monotonen Limiten verträglich ist, besitzt es die folgende

Daniell Eigenschaft: Für alle Lebesgue integrierbaren Funktionen f und g_n gilt

$$\boxed{f \leq g \quad \text{und} \quad g_n \nearrow g \quad \implies \quad \int f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) dx} \quad .$$

Wir werden die Lebesgue Integration entwickeln nach der Methode von Daniell-Stone. Hierbei startet man mit einem Integral $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Verband von Funktionen $B(X)$. Hierbei versteht man unter einem Integral einfach eine \mathbb{R} -Linearform, welche positiv ist, d.h. welche Funktionen $f \geq 0$ auf positive Werte $I(f) \geq 0$ abbildet. Ein solches Integral I nennt man ein Daniell Integral, wenn es die Daniell Eigenschaft besitzt. Ein Daniell Integral kann auf die Halbverbände $B^+(X)$ und $B^-(X)$ (siehe 23.2 und 24.1) fortgesetzt werden.

Eine Lebesgue integrierbare Funktion wird dann per Definition eine Funktion sein, welche gut approximiert werden kann von oben durch eine Funktion $g \in B^+(X)$ und von unten durch ein Funktion $h \in B^-(X)$, so dass das Integral von g endlich ist und die Differenz der Integrale von g und h beliebig klein ist.

Ein entscheidendes Hilfsmittel zum Nachweis der Daniell Eigenschaft wird der Satz von Dini sein. Dieser Satz zeigt, dass man beim Studium von monotonen Limiten stetiger Funktionen letztlich immer noch ‘einen Fuss’ in der Welt der gleichmässigen Konvergenz behält. Dieses verbleibende Standbein wird von uns entscheidend benutzt, um die Theorie des Lebesgue Integrals zu begründen.

23.2 Funktionsverbände

Wir betrachten Funktionen auf einer Menge X mit Werten in

$$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \infty \quad \text{oder} \quad \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup -\infty .$$

Im Gegensatz zu den reellwertigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, welche auf natürliche Weise einen \mathbb{R} -Vektorraum bilden, ist der Raum solcher Funktionen nur unter Addition und unter Multiplikation mit positiven Skalaren $\lambda > 0$ abgeschlossen.

Definition: Eine Teilmenge $B(X)$ des Raums aller \mathbb{R}^+ - (oder \mathbb{R}^-)-wertigen Funktionen auf X heißt Halbverband, wenn $B(X)$ die Nullfunktion enthält und unter den Bildungen

$$(f \sqcap g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

$$(f \sqcup g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

sowie Addition und Multiplikation mit positiven Skalaren abgeschlossen ist.

Ist $B(X)$ ein Halbverband, dann auch $-B(X)$. Gilt $B(X) = -B(X)$, d.h. ist $B(X)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum, nennen wir $B(X)$ einen Verband. In diesem Fall liegen die Funktionswerte in \mathbb{R} .

Definition: Sei $B(X)$ ein Verband. Wir definieren nun $B^+(X)$ als die Menge aller Funktionen

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ := \mathbb{R} \cup \infty$$

für die es eine punktweise monotone Folge $f_n \in B(X)$ gibt

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots \quad \text{für alle } x \in X ,$$

mit

$$f(x) = \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Schreibweise: Wir schreiben kurz

$$f_n \nearrow f ,$$

wenn f als punktweise ‘monotoner Limes’ von Funktionen f_n definiert ist.

Bemerkung: Analog definiert man $f_n \searrow f$ und $B^-(X)$ mittels monoton fallender Limiten. Funktionen in $B^-(X)$ haben Werte in $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \cup -\infty$. Beachte

$$B^-(X) = -B^+(X) .$$

23.3 Permanenzeigenschaften

$B^+(X) \supseteq B(X)$ ist ein Halbverband.

Beweis: Für $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$ mit $f_n, g_n \in B(X)$ und $\lambda > 0$ gilt

$$f_n \sqcap g_n \nearrow f \sqcap g \quad , \quad f_n \sqcup g_n \nearrow f \sqcup g \quad , \quad f_n + g_n \nearrow f + g \quad , \quad \lambda f_n \nearrow \lambda f .$$

Bemerkung: In den ersten beiden Fällen folgt

$$f_n \sqcup g_n \leq f_{n+1} \sqcup g_n \leq f_{n+1} \sqcup g_{n+1}$$

$$f_n \sqcap g_n \leq f_{n+1} \sqcap g_n \leq f_{n+1} \sqcap g_{n+1}$$

aus $f \sqcap g = g \sqcap f, f \sqcup g = g \sqcup f$, da allgemein die Ungleichung $h \leq g$ folgende Ungleichungen impliziert

$$h \sqcup f \leq g \sqcup f \quad , \quad h \sqcap f \leq g \sqcap f .$$

23.3.1 Abgeschlossenheit unter monotonen Folgen

Der neue Halbverband $B^+(X)$ ist gegenüber monoton wachsenden Limiten abgeschlossen

$$\text{Aus } f_i \nearrow f \text{ für } f_i \in B^+(X) \text{ folgt } f \in B^+(X).$$

Beweis: Wähle $f_{ij} \nearrow f_i$, mit $f_{ij} \in B(X)$.

Es gilt¹ dann

$$F_n := \bigsqcup_{i+j=n} f_{ij} \nearrow f ,$$

für $F_n \in B(X)$. Daraus folgt $f \in B^+(X)$.

Bemerkung: Die für uns wichtigsten Beispiele liefern der Verband der stetigen Funktionen beziehungsweise der Verband der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, welche im nächsten Abschnitt betrachtet werden.

¹Benutze $f_{ij} \leq f_{i,j+1}$ für alle $i+j=n$.

23.4 Funktionen mit kompaktem Träger

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $C(X)$ der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf X .

Bezeichnung: $f \in C(X)$ hat kompakten Träger, wenn $f(x) = 0$ gilt für alle $x \in X$ ausserhalb einer folgenkompakten Teilmenge $K \subseteq X$.

Der Untervektorraum

$$C_c(X) \subseteq C(X)$$

aller stetigen Funktionen in $C(X)$ mit kompakten Träger ist, ebenso wie $C(X)$ selbst, unter Multiplikation und den Bildungen $(f \sqcap g)(x) = \min(f(x), g(x))$ sowie $(f \sqcup g)(x) = \max(f(x), g(x))$ sowie Addition abgeschlossen. Die Gleichheit $C_c(X) = C(X)$ gilt genau dann, wenn X kompakt ist.

Beweis: Beachte

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

Daher sind $f \cdot g$, $f \sqcap g$ und $f \sqcup g$ wegen der Permanenzsätze wieder stetige Funktionen, wenn f und g stetige Funktionen waren. Die Aussage über den Träger folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen wieder kompakt ist 22.1.1.

Folgerung: Insbesondere sind $C(X)$ und $C_c(X)$ Verbände.

Den Halbverband $B^+(X)$ der monotonen Limiten von Funktionen aus $B(X) = C_c(X)$ nennen wir Baire'schen Halbverband.

23.4.1 Offene Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ liegt die charakteristische Funktion des Intervalls $U = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$

$$\chi_U(x) = 1 \text{ für } x \in U \text{ und } \chi_U(x) = 0 \text{ für } x \notin U$$

im Baire'schen Halbverband $B^+(\mathbb{R})$. Beachte

$$\chi_n \nearrow \chi_U$$

für die stetigen 'dachförmigen' Funktionen $\chi_n \in C_c(\mathbb{R})$, welche Null sind im Komplement von U , 1 sind im Intervall $[a + \frac{b-a}{2n}, b - \frac{b-a}{2n}]$, und durch Geraden gegeben sind auf den Teilintervallen $[a, a + \frac{b-a}{2n}]$ beziehungsweise $[b - \frac{b-a}{2n}, b]$.

23.4.2 Charakteristische Funktionen

Halbstetigkeit: Gilt $f(x_0) > 0$ für f im Baire'schen Halbverband $B^+(X)$, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > 0$ gilt für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$.

Beweis: Aus $f_n \nearrow f$ für $f_n \in C_c(X)$ sowie $f(x_0) > 0$ folgt $f_n(x_0) > 0$ für ein n . Da f_n stetig ist, folgt $f_n(x) > 0$ (und damit auch $f(x) > 0$) für alle x in einer kleinen offenen Kugel um x_0 .

Folgerung: Liegt die charakteristische Funktion χ_U einer Teilmenge U von X im Baire'schen Halbverband, dann ist U offen in (X, d) .

Für eine Folge von Mengen $U_i \subseteq X$ sei U die Vereinigungsmenge

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i .$$

Lemma: Für die charakteristischen Funktionen gilt

$$\chi_{U_i} \in B^+(X) \implies \chi_U \in B^+(X) .$$

Beweis: Allgemein gilt

$$\boxed{\chi_V \sqcap \chi_W = \chi_{V \cap W} \quad , \quad \chi_V \sqcup \chi_W = \chi_{V \cup W}} .$$

Also $\chi_{V_n} = \sqcup_{i=1}^n \chi_{U_i} \in B^+(X)$ für $V_i = \bigcup_{i=1}^n U_i$ wegen 23.3. Aus $\chi_{V_n} \nearrow \chi_U$ folgt $\chi_U \in B^+(X)$ wegen 23.3.1. \square

23.4.3 *Lokalkompakte metrische Räume

Ein metrischer Raum (X, d) heisst lokalkompakt, wenn für jeden Punkt $x \in X$ ein $r = r(x) > 0$ existiert so, dass die zugehörige abgeschlossene Kugel um x

$$\{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$$

kompakt ist (für die eingeschränkte Metrik d). Dann sind natürlich auch alle abgeschlossenen Kugeln um x mit einem kleinerem Radius als r kompakt.

Beispiel: Offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sind lokalkompakt.

Sei (X, d) lokalkompakt: Wähle $\chi_n \nearrow \chi = \chi_{(-r, r)}$ wie in 23.4.1. Dann liegt die Funktion

$$f_n(y) = \chi_n(d(y, x))$$

in $C_c(X)$, und $f_n \nearrow f$ konvergiert monoton gegen die charakteristische Funktionen der offenen Kugel²

$$K_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} ,$$

welche somit in $B^+(X)$ liegt. Also liegen die charakteristischen Funktionen von allen 'genügend' kleinen offenen Kugeln von X in $B^+(X)$.

²Bemerkung: Beachte $f_n =: f_n^U > 0$ auf der offenen Kugel $U = K_r(x_0)$ und $f_n^U \in C_c(X)$. Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq (X, d)$ existiert daher eine stetige Funktion $f_K \geq 0$ in $C_c(X)$, welche auf K strikt positiv ist. Überdecke $K = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch 'genügend' kleine Kugeln U_i (obdA ist dann I endlich) und setze $f_K = \sum_{i \in I} f_1^{U_i}$ in $B^+(X)$.

23.4.4 *Metrische Räume mit abzählbarer Basis

Gibt es in X eine Folge x_1, x_2, \dots von Punkten, welche in (X, d) dicht³ liegen, dann sagt man (X, d) besitzt eine abzählbare Basis.

Beispiel: Offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzen eine abzählbare Basis (etwa $\mathbb{Q}^n \cap U$).

Satz: Für einen lokalkompakten metrischen Raum (X, d) mit abzählbarer Basis⁴ liegt die charakteristische Funktion χ_U einer Teilmenge $U \subseteq X$ genau dann im Baire'schen Halbverband $B^+(X)$, wenn U offen in (X, d) ist.

Beweis: Die eine Richtung haben wir bereits in Folgerung 23.4.2 gezeigt. Sei umgekehrt (X, d) lokalkompakt mit abzählbarer Basis und U offen in X : Für $x \in U$ wähle $r = r(x) > 0$ wie in 23.4.3 (obdA rational $r = 1/k, k \in \mathbb{N}$) mit $K_r(x) \subseteq U$. Wähle ein x_n aus der dichten Folge mit $d(x, x_n) < r/2$. Dann ist die abgeschlossene Kugel vom Radius $r/2$ um x_n kompakt, denn sie ist enthalten in der kompakten abgeschlossenen Kugel vom Radius r um x . Daher ist die charakteristische Funktion der offenen Kugel $K_{r/2}(x_n)$ vom Radius $r/2$ um x_n in $B_+(X)$ nach 23.4.3. Die Indizes $i = (r, k)$ durchlaufen eine abzählbare Menge $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Hierbei ist $U_i = K_{r/2}(x_n)$ mit $\chi_{U_i} \in B^+(X)$. Wegen

$$x \in U_i = K_{r/2}(x_n) \subseteq K_r(x) \subseteq U,$$

und da dies alle $x \in U$ ein solches i existiert, ist U eine abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln $U_i = K_{1/2k}(x_n)$ für $n = n(i) \in \mathbb{N}$ und gewisse $r = 1/k, k = k(i) \in \mathbb{N}$

$$U = \bigcup_{i \in I \subset \mathbb{N}} U_i,$$

so dass die charakteristischen Funktionen χ_{U_i} in $B^+(X)$ liegen. Aus Lemma 23.4.2 folgt die Behauptung $\chi_U \in B^+(X)$.

Bemerkung: Ist (X, d) lokalkompakt und $Y \subseteq X$, dann gilt $\chi_Y \in B^-(X)$ genau dann, wenn Y kompakt in (X, d) ist.

23.5 Der Satz von Dini

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Ist $f_n \nearrow f$ eine monotone Folge stetiger Funktionen $f_n \in C(X)$ mit einer stetigen Grenzfunktion $f \in C(X)$, dann konvergiert f_n auf X gleichmässig gegen f .

Beweis: ObdA sei $f = 0$, indem man f_n durch $f_n - f$ ersetzt. Wähle dann $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in X$ existiert nach Annahme ein m mit $-\varepsilon < f_m(x) \leq 0$. Da f_m stetig ist, gilt diese Ungleichung auch noch auf einer offenen Menge U_x , welche x enthält. Endliche viele U_x überdecken X , da X kompakt ist. Sei N das Maximum der endlich vielen zugehörigen Zahlen $m = m(x)$. Dann gilt $-\varepsilon < f_n(x) \leq 0$ für alle $n \geq N$ wegen der Monotonie der Funktionenfolge. Das heisst aber gerade, dass f_n gleichmässig auf X gegen Null konvergiert.

³d.h., jede nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ enthalte mindestens ein Folgenglied x_n

⁴Die für uns relevanten Beispiele sind die offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n (insbesondere \mathbb{R}^n selbst) oder die kompakten metrischen Räume.

23.6 Die Daniell Eigenschaft

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei I ein Integral auf $C_c(X)$, d.h. eine \mathbb{R} -Linearform

$$I : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft $f \geq 0 \implies I(f) \geq 0$. Wir nehmen nun zusätzlich⁵ noch an, die Einschränkung von I auf die Teilräume $C_K(X) \subseteq C_c(X)$ aller Funktionen in $C_c(X)$ mit Träger in einer festen kompakten Menge $K \subseteq X$ sei stetig bezüglich der Norm der gleichmässigen Konvergenz auf $C(K)$. Dann gilt

Lemma: Jede in diesem Sinne stetige Linearform auf $C_c(X)$ ist ein Daniell Integral auf $C_c(X)$.

Beweis: Für $f \in C_c(X)$ und $g_n \in C_c(X)$ mit $g_n \nearrow g$ gilt $f \sqcap g_n \leq g_n$, somit $I(f \sqcap g_n) \leq I(g_n)$ und $\sup \{I(f \sqcap g_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \sup \{I(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zum Nachweis der Daniell-Bedingung

$$f \leq g \implies I(f) \leq \sup \{I(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

genügt daher

$$I(f) = \sup \{I(f \sqcap g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Letzteres folgt aus dem Satz von Dini: Auf jedem Kompaktum K , das den Träger von f und $f \sqcap g_1$ enthält, gilt für $f \leq g$

$$f \sqcap g_n \nearrow f.$$

Da $f \sqcap g_n$ und f alle stetig auf K sind, konvergiert somit $f \sqcap g_n \nearrow f$ auf K gleichmässig nach 23.5. Aus der Stetigkeit der Einschränkung von I auf den Teilraum $C_K(X) \subseteq C_c(X)$ der stetigen Funktionen mit Träger in K folgt dann $I(f \sqcap g_n) \rightarrow I(f)$. Also gilt $I(f) = \sup \{I(f \sqcap g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ wie behauptet.

Bemerkung: Die Stetigkeit von I im obigen Sinne zu fordern, ist oft unnötig. Existiert für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ eine auf K strikt positive Funktion f_K in $C_c(X)$ (wie zum Beispiel für lokalkompakte metrische Räume 23.4.3), kann man die Stetigkeitsforderung auch weglassen⁶. Das letzte Lemma gilt im Fall lokal kompakter Räume (X, d) daher für beliebige Integrale auf $C_c(X)$.

⁵Diese zusätzliche Annahme ist unnötig wenn (X, d) lokal kompakt ist. Siehe die Bemerkung weiter unten.

⁶Es gilt dann automatisch $I(f) \leq C_K \cdot \sup_{x \in K} |f(x)|$ für $C_K = (\min_{x \in K} |f_K(x)|)^{-1} I(f_K)$ und stetige Funktionen $f \in C_K(X)$ mit Träger in K .

Kapitel 24

Lebesgue Integration

24.1 Integrale

Sei $B(X)$ ein Verband und sei

$$I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

eine \mathbb{R} -Linearform mit der Eigenschaft $f \geq 0 \implies I(f) \geq 0$. Dann gilt sogar

$$f \leq g \implies I(f) \leq I(g) .$$

Wir nennen ein solches Funktional I im folgenden ein Integral auf $B(X)$.

Daniell Integrale: Wir wollen nun I auf den Halbverband $B^+(X)$ der monotonen Limiten fortsetzen lässt. Da wir nicht erwarten können, dass diese Fortsetzung reellwertig wird, suchen wir eine Fortsetzung mit Werten in $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \infty$

$$O : B^+(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ .$$

Ansatz: Naheliegender für $B(X) \ni g_n \nearrow g \in B^+(X)$ ist die folgende Definition

$$O(g) := \limsup_n I(g_n) := \sup\{I(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Beachte $I(g_n) \nearrow O(g)$ für $g_n \nearrow g$.

Wohldefiniertheit: Dafür ist zu zeigen, dass der so erhaltene Wert $O(g)$ nicht von der Wahl der Folge g_n mit $g_n \nearrow g$ abhängt. Dazu machen wir die Annahme, dass I ein Daniell Integral ist.

Daniell Bedingung: Man nennt I ein Daniell Integral auf $B(X)$, wenn für alle monotonen Folgen $B(X) \ni g_n \nearrow g \in B^+(X)$ und alle $f \in B(X)$ gilt

$$\boxed{f \leq g \implies I(f) \leq \sup \{I(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}} .$$

Behauptung: Sei $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Daniell Integral. Dann lässt sich I mit obigem Ansatz zu einer Funktion $O : B^+(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ wohldefiniert fortsetzen.

Beweis der Wohldefiniertheit: Gegeben $f_n \nearrow g$ und $g_n \nearrow g$. Aus $f_n \leq g$ folgt $I(f_n) \leq \sup\{I(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ unter Annahme der Daniell Bedingung, und somit $\sup\{I(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{I(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Durch Vertauschen der Rollen von f_n und g_n folgt $\sup\{I(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{I(g_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. \square

Analog kann ein Daniell Integral I zu einer Funktion $U : B^-(X) \rightarrow \mathbb{R}^-$ fortgesetzt werden. Für $h_n \searrow h$ und $h_n \in B(X)$ ist nämlich $U(h) = \liminf_n I(h_n)$ wohldefiniert, und hängt nur von $h \in B^-(X)$ ab wegen $U(h) = -O(-h)$. Offensichtlich gilt $O(f) = U(f) = I(f)$ für $f \in B(X)$.

24.1.1 Die wesentlichen Monotonieeigenschaften

1. $U(h) \leq U(f)$ für $h \leq f$ und $h, f \in B^-(X)$
2. $O(f) \leq O(g)$ für $f \leq g$ und $f, g \in B^+(X)$
3. Für $h \in B^-(X)$ und $g \in B^+(X)$

$$\boxed{h \leq g \implies U(h) \leq O(g)}.$$

Beweis von 2. Für $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$ mit $g_n, f_n \in B(X)$ beachte $f_n \leq f \leq g$. Also wegen der Daniell Bedingung $I(f_n) \leq O(g)$. Daher $O(f) = \limsup_n I(f_n) \leq O(g)$ für das Supremum. Der Beweis von 1. geht analog.

Beweis von 3. Wähle $h_n \searrow h$ und $g_n \nearrow g$ mit $h_n, g_n \in B(X)$. Dann gilt

$$f_n := g_n - h_n \nearrow f := g - h \geq 0$$

mit $f_n \in B(X)$. Daher $\limsup_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = O(f) \geq O(0) = 0$ wegen 2. Wegen $\limsup_n I(f_n) = \limsup_n I(g_n) - \liminf_n I(h_n) = O(g) - U(h)$ folgt somit wie behauptet $O(g) - U(h) \geq 0$.

24.1.2 Approximation von unten und oben

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty \cup -\infty$ eine beliebige Funktion. Definiert man die Ober- und Unterintegrale von f als Werte in $\mathbb{R} \cup \infty \cup -\infty$ wie folgt

$$I^+(f) = \inf\{O(g) \mid g \in B^+(X) \text{ mit } f \leq g\}$$

(ist diese Menge leer definieren wir das Infimum formal als ∞) beziehungsweise

$$I^-(f) = \sup\{U(h) \mid h \in B^-(X) \text{ mit } h \leq f\}$$

(ist diese Menge leer definieren wir das Supremum formal als $-\infty$), so gilt

$$\boxed{I^-(f) \leq I^+(f)}.$$

Beweis: Beachte $U(h) \leq O(g)$ für alle $h \leq f \leq g$ nach 3. Somit $I^-(f) = \limsup_{h \in B^-(X), h \leq f} U(h) \leq O(g)$, sowie dann erneut im Limes $I^-(f) \leq I^+(f) = \liminf_{g \in B^+(X), f \leq g} O(g)$.

24.1.3 Daniell-Lebesgue integrierbare Funktionen

Eine Funktion

$$f : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \infty \cup -\infty$$

heißt Daniell-Lebesgue-integrierbar (bezüglich $(B(X), I)$) oder auch nur kurz integrierbar, falls gilt

$$I^-(f) = I^+(f)$$

und falls der gemeinsame Wert endlich ist, also von $\pm\infty$ verschieden. Diesen Wert nennt man das Daniell-Lebesgue Integral bezüglich $(B(X), I)$ und schreibt dafür

$$\boxed{I(f)} .$$

Das Epsilon-Kriterium:

f ist genau dann Daniell-Lebesgue-integrierbar bezüglich $(B(X), I)$, wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existieren¹ $h \leq f \leq g$ mit $h \in B^-(X)$ und $g \in B^+(X)$ so dass gilt

$$O(g) - U(h) < \varepsilon$$

und

$$O(g) < \infty \text{ (oder äquivalent } U(h) > -\infty \text{)} .$$

Das Kriterium folgt unmittelbar aus der Definition.

24.1.4 Erste Beispiele

4. Für $f \in B^+(X)$ ist $I^-(f) = I^+(f) = O(f)$

5. Für $f \in B^-(X)$ ist $I^-(f) = I^+(f) = U(f)$

Funktionen f aus $B^+(X)$ resp. $B^-(X)$ sind daher Daniell-Lebesgue integrierbar bezüglich $(B(X), I)$ genau dann wenn gilt $O(f) < \infty$ resp. $U(f) > -\infty$.

Inbesondere sind Funktionen aus $B(X)$ integrierbar, und das Lebesgue Integral stimmt auf $B(X)$ mit dem ursprünglich gegebenen Integral $I : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$ überein.

Beweis von 4. $f \leq g$ für $f, g \in B^+(X)$ impliziert $O(f) \leq O(g)$ nach 2. Das Infimum $I^+(f)$ aller $O(g)$ für $f \leq g \in B^+(X)$ wird daher für $g = f$ angenommen. Das heißt

$$I^+(f) = O(f) .$$

Wegen $I^-(f) \leq I^+(f)$ genügt es somit $I^-(f) \geq O(f)$ zu zeigen. Wähle dazu $f_n \in B(X)$ mit $f_n \nearrow f$. Dann gilt $U(f_n) = I(f_n) \nearrow O(f)$ nach Definition von $O(f)$. Es folgt

$$I^-(f) := \limsup_{h \in B^-(X), h \leq f} U(h) \geq \lim_n U(f_n) = O(f) .$$

¹Man sieht dann auch sofort, dass es reicht wenn für alle $\varepsilon > 0$ Lebesgue integrierbare Funktionen h und g existieren mit $h \leq f \leq g$ und $I(g) - I(h) < \varepsilon$. Denn $g \leq g^+, g^+ \in B^+(X)$ mit $I(g) \leq O(g^+)$ und $O(g^+) - I(g) < \varepsilon/2$ und $h^- \leq h, h^- \in B^-(X)$ mit $U(h^-) \leq I(h)$ und $I(h) - U(h^-) < \varepsilon/2$. Somit $h^- \leq f \leq g^+$ mit $O(g^+) - U(h^-) < \varepsilon + I(g) - I(h) < 2\varepsilon$.

24.1.5 Permanenzeigenschaften

Die Menge aller Daniell-Lebesgue integrierbaren Funktionen ist unter reeller Skalarmultiplikation, Addition² und den Bildungen \sqcap, \sqcup abgeschlossen.

Beweis: Schritt 1. Wie man leicht sieht gilt $I^+(f_1 + f_2) \leq I^+(f_1) + I^+(f_2)$ und $I^+(\lambda f) \leq \lambda I^+(f)$ für $\lambda > 0$. Entsprechendes gilt für I^- mit den umgekehrten Ungleichungen. Weiterhin $I^+(-f) = -I^-(f)$ und $I^-(-f) = -I^+(f)$. Daraus folgt die \mathbb{R} -Linearität von I , d.h.

$$\boxed{I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)}$$

und

$$\boxed{I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f)}$$

für alle Daniell-Lebesgue integrierbaren Funktionen f_1, f_2, f und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Schritt 2. Wegen $f \sqcap \tilde{f} = -(-f \sqcup -\tilde{f})$ genügt, dass für integrierbares f und \tilde{f} die Funktion $f \sqcup \tilde{f}$ integrierbar ist. Notation: $f^+ = \max(f, 0) = f \sqcup 0$.

Schritt 3. Wähle $h \leq f \leq g$ mit $O(g) - U(h) = O(g - h) < \varepsilon$ und $\tilde{h} \leq \tilde{f} \leq \tilde{g}$ mit $O(\tilde{g}) - U(\tilde{h}) = O(\tilde{g} - \tilde{h}) < \varepsilon$ wie im ε -Kriterium so dass $O(\tilde{g}) < \infty$ und $O(g) < \infty$. Es folgen daher die Ungleichungen $h \sqcup \tilde{h} \leq h \sqcup \tilde{f} \leq f \sqcup \tilde{f} \leq g \sqcup \tilde{f} \leq g \sqcup \tilde{g}$ mit $O(g \sqcup \tilde{g}) - U(h \sqcup \tilde{h}) = O(g \sqcup \tilde{g} - h \sqcup \tilde{h}) \leq O(g - h) + O(\tilde{g} - \tilde{h}) < 2\varepsilon$ wegen³

$$g \sqcup \tilde{g} - h \sqcup \tilde{h} \leq (g - h) + (\tilde{g} - \tilde{h}) .$$

Mittels des ε -Kriteriums ist deshalb $f \sqcup \tilde{f}$ integrierbar, falls $g \sqcup \tilde{g}$ integrierbar ist (d.h. falls gilt $O(g \sqcup \tilde{g}) < \infty$). Beachte g, \tilde{g} und $g \sqcup \tilde{g} \in B^+(X)$.

Schritt 4. Für $g_n \nearrow g$ und $\tilde{g}_n \nearrow \tilde{g}$ mit $g_n, \tilde{g}_n \in B(X)$ gilt $g_n - \tilde{g}_n \leq G_n := g_n - \tilde{g}_1$. Es gilt $g_n \sqcup \tilde{g}_n = \tilde{g}_n + (g_n - \tilde{g}_n)^+ \leq \tilde{g}_n + G_n^+$. Also bleibt $O(g \sqcup \tilde{g}) \leq I(\tilde{g}) + \limsup_n I(G_n^+) < \infty$ beschränkt, falls $I(G_n^+)$ beschränkt bleibt. Wegen $I(G_n^+) = I(G_n) - I(G_n^-)$ und $I(G_n) \nearrow O(g) - I(\tilde{g}_1) < \infty$ genügt es dazu die Integrale von $G_n^- = \min(G_n, 0) = G_n - G_n^+$ zu beschränken. Dies folgt aber aus

$$G_1^- \leq G_n^- \leq 0 .$$

Somit gilt $O(g \sqcup \tilde{g}) < \infty$.

Korollar: Die Menge aller reellwertigen Daniell-Lebesgue integrierbaren Funktionen bildet einen Verband $L(X) \supseteq B(X)$.

Lemma: Das Daniell-Lebesgue Integral I definiert ein Integral auf $L(X)$.

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, dass I eine \mathbb{R} -lineare Abbildung ist. Wir zeigen nun $I(f) \geq 0$ für beliebiges integrierbares $f \geq 0$. Beachte $I(f) = I^+(f) = \liminf O(g)$ für Funktionen $g \geq f \geq 0$ mit $g \in B^+(X)$. Es gilt dann $O(g) \geq O(0) = 0$ wegen 2., und somit $I(f) = \limsup O(g) \geq 0$.

²Hierbei müssen wir annehmen, dass beide Funktionen in \mathbb{R}^+ oder \mathbb{R}^- liegen.

³Ist $g(x) \geq \tilde{g}(x)$, dann ist $g \sqcup \tilde{g} - h \sqcup \tilde{h} \leq g - h \leq (g - h) + (\tilde{g} - \tilde{h})$ im Punkt x .

24.2 Satz von Beppo Levi

Für eine monoton wachsende Folge $f_n \nearrow f$ von integrierbaren Funktionen f_n definiert $I(f_n)$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen. Gilt

$$\boxed{\kappa = \limsup_n I(f_n) < \infty},$$

dann ist die Grenzfunktion f integrierbar und es gilt $I(f) = \lim_n I(f_n) = \kappa$.

Bemerkung: Eine analoge Aussage gilt für monoton fallende Folgen integrierbarer Funktionen f_n im Fall $\liminf_n I(f_n) > -\infty$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $h_n \leq f_n \leq g_n$ mit $h_n \in B^-(X)$ sowie $g_n \in B^+(X)$ und den Abschätzungen $O(g_n) - U(h_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ und $O(g_n) < \infty$ (ε -Kriterium).

Untere Abschätzung. Beachte $B^-(X) \ni h_n \leq f \implies I^-(f) \geq \limsup_n I(h_n)$ und $I(f_n - h_n) \leq I(g_n - h_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \implies I(h_n) \geq I(f_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Also für $n \rightarrow \infty$

$$I^-(f) \geq \kappa.$$

Obere Abschätzung. $\tilde{g}_n = \sqcup_{i=1}^n g_i \in B^+(X)$ erfüllt $\tilde{g}_n \geq f_n$. Die \tilde{g}_n konvergieren monoton gegen eine Grenzfunktion $g_n \nearrow \tilde{g}$, welche nach 23.3.1 in $B^+(X)$ liegt. Die triviale Abschätzung $\tilde{g}_n - f_n \leq \sum_{i=1}^n (g_i - f_i) \leq \sum_{i=1}^n (g_i - h_i)$ liefert

$$I(\tilde{g}_n - f_n) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Für $n \rightarrow \infty$ daher $O(\tilde{g}) - \kappa \leq \varepsilon$. Wegen $f \leq \tilde{g} \in B^+(X)$ gilt $I^+(f) \leq O(\tilde{g})$. Es folgt $I^+(f) \leq \kappa + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, also

$$I^+(f) \leq \kappa.$$

Wegen $I^+(f) \geq I^-(f) \geq \kappa$ folgt somit $I^+(f) = I^-(f) = \kappa < \infty$.

24.3 Satz von Lebesgue

Sei $f_n \rightarrow f$ eine punktweise konvergente Folge von integrierbaren Funktionen f_n auf X , so dass eine integrierbare Funktion F existiere mit $|f_n| \leq F$ für alle n . Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\boxed{I(f) = \lim_n I(f_n)} .$$

Man nennt diesen Satz auch den Satz von der dominierten Konvergenz, da die Funktionen f_n von der festen integrierbaren Funktion F dominiert werden.

Beweis: Schritt 1. Es gilt

$$\varphi_n(x) = \inf_{i \geq n} (f_i(x)) \nearrow f(x) .$$

Für festes n gilt für die Funktionen $\varphi(x) = \varphi_n(x)$

$$\psi_m(x) := \inf_{m \geq i \geq n} (f_i(x)) \searrow \varphi(x) .$$

Wegen $-F \leq \psi_m$ gilt $\lim_n I(\psi_m) > -\infty$, und somit ist φ_n integrierbar (Beppo Levi). Wegen $\varphi_n \leq F$ gilt $\lim_n I(\varphi_n) < \infty$, und somit ist f integrierbar erneut nach Beppo Levi.

Schritt 2. Das Argument zeigt automatisch die Konvergenz $I(\varphi_n(x)) \rightarrow I(f)$. Analog definiert man $\tilde{\varphi}_n(x) = \sup_{i \geq n} (f_i(x)) \searrow f(x)$ und zeigt die Konvergenz $I(\tilde{\varphi}_n(x)) \rightarrow I(f)$. Wegen

$$\varphi_n \leq f_n \leq \tilde{\varphi}_n$$

folgt dann wie behauptet die Konvergenz $I(f_n) \rightarrow I(f)$.

24.4 Nullmengen

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heisst endlich messbar, wenn ihre charakteristische Funktion integrierbar ist. Man nennt die reelle Zahl $\text{vol}(Y) = I(\chi_Y) \geq 0$ das Volumen von Y . Sind Y_1, Y_2 endlich messbar, dann auch $Y_1 \cap Y_2$ und $Y_1 \cup Y_2$ und

$$\boxed{\text{vol}(Y_1) + \text{vol}(Y_2) = \text{vol}(Y_1 \cup Y_2) + \text{vol}(Y_1 \cap Y_2)} .$$

Dies ist klar wegen $\chi_{Y_1} + \chi_{Y_2} = \chi_{Y_1 \cup Y_2} + \chi_{Y_1 \cap Y_2}$.

Eine Nullmenge ist eine endlich messbare Menge vom Volumen Null.

Eine abzählbare Vereinigung Y von Nullmengen Y_i ist eine Nullmenge.

Beweis: Für $Z_n = \cup_{i=1}^n Y_i$ gilt $\chi_{Z_n} \nearrow \chi_Y$. Nach Beppo Levi genügt daher $\text{vol}(Z_n) = 0$ für alle n . Dies zeigt man induktiv mittels $\text{vol}(Y_n) + \text{vol}(Z_{n-1}) = \text{vol}(Z_n) + \text{vol}(Y_n \cap Z_{n-1})$. Beachte $\text{vol}(Y_n \cap Z_{n-1}) = 0$, denn es gilt ganz allgemein nach dem ε -Kriterium (genauer dessen Fussnote) und dem Satz von Beppo Levi

Jede Funktion mit Werten in $\mathbb{R} \cup \infty \cup -\infty$ und Träger in einer Nullmenge ist integrierbar mit Integral Null. Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.

24.4.1 ε -Kriterium für Nullmengen

$Y \subseteq X$ ist eine Nullmenge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Überdeckung von Y durch endlich messbare Mengen U_i existiert mit $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(U_i) < \varepsilon$.

Beweis: $U = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ ist messbar mit $\text{vol}(U) < \varepsilon$ (Beppo Levi). Für $\varepsilon = 1/n$ nenne dies $U(n)$. Dann ist $Z_n = \cap_{i=1}^n U(n)$ eine absteigende Kette endlich messbarer Mengen mit $\text{vol}(Z_n) < \frac{1}{n}$. Also ist $Z = \cap_{i=1}^{\infty} Z_n$ eine Nullmenge (Beppo Levi). Aus $Y \subseteq Z$ folgt die Behauptung.

24.4.2 Der Funktionswert unendlich

Sei⁴ $\chi_X \in B^+(X)$ und $c > 0$. Dann sind $B^+(X)$ und $B^-(X)$ unter $f \mapsto f \sqcap c \cdot 1_X$ abgeschlossen. Dasselbe gilt dann auch für die integrierbaren Funktionen, wie man leicht sieht.

Sei $\chi_X = 1_X \in B^+(X)$. Dann ist für integrierbares $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty \cup -\infty$ die Menge der Unendlichkeitsstellen $f^{-1}(\pm\infty)$ jeweils eine Nullmenge in X .

Beweis: Für $c > 0$ sind auch $h = \max(0, \min(c\chi_X, f))$, sowie dann $f^+ - h$ und $f_n = 1_X \sqcap n \cdot (f^+ - h)$ integrierbar. Beachte $f_n \nearrow \chi_Y$ für $Y = \{x \in X \mid f(x) > c\}$. Wegen $\chi_Y \leq \frac{f}{c}$ ist dann χ_Y endlich messbar (Beppo Levi). Für $Y = Y(c)$ folgt daher $\text{vol}(Y(c)) \leq I(f)/c$. Wegen $\chi_{Y(n)} \searrow \chi_M$ für $M = f^{-1}(\infty)$ folgt nach Beppo Levi $\chi_M \in L(X)$ mit $I(M) = 0$ [letzteres wegen $0 \leq \text{vol}(M) \leq I(f)/n$ für alle n]. Also ist $f^{-1}(\infty)$ eine Nullmenge. Für $-\infty$ ersetze man f durch $-f$.

⁴Dies gilt für den Baireschen Verband genau dann, wenn X lokalkompakt ist mit abzählbarer Basis. Eine Richtung ist der Satz 23.4.4.

Kapitel 25

Integration im Euklidschen

25.1 Fortsetzung des Riemann Integrals

Sei $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader. In 19.6 haben wir gezeigt, dass für stetige Funktionen f auf Q die partiellen Integrale

$$I_i(f) = \int_{a_i}^{b_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

definiert sind und stetige Funktionen in stetige Funktionen überführen. Dies zeigt, dass das Integral $I(f) = I_1 \circ I_2 \circ \dots \circ I_n(f)$ oder

$$I(f) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1$$

wohldefiniert ist und eine reelle Zahl liefert, welche nicht von der Reihenfolge der Integrationen abhängt. Wir schreiben kurz $\int_Q f = \int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ für dieses Zahl. Offensichtlich gilt $\int_Q f \geq 0$ für $f \geq 0$.

Dies definiert nun in natürlicher Weise ein Integral

$$I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} .$$

Jedes $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ besitzt nämlich einen kompakten Träger, welcher in einem genügend gross gewählten abgeschlossenen Quader enthalten ist. Wir definieren dann $I(f) = \int_Q f$, was offensichtlich unabhängig von der Auswahl des Quaders Q ist, solange dieser den Träger von f enthält. Dies ist ein Daniell Integral nach 23.6.

Verallgemeinerung: Sei allgemeiner $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann gilt¹

$$C_c(U) \subseteq C_c(\mathbb{R}^n) .$$

Das obige Daniell Integral $I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^n definiert somit durch Einschränkung ein Daniell Integral auf $C_c(U)$. Analoges gilt für abgeschlossene Quader oder allgemeiner kompakte Teilmengen K von \mathbb{R}^n .

Dieses Daniell Integral kann nunmehr wie im letzten Kapitel zu dem Lebesgue Integral auf dem Raum der Lebesgue integrierbaren Funktionen fortgesetzt werden. Im folgenden werden wir nur noch Integrale in diesem verallgemeinerten Lebesgue'schen Sinn betrachten.

¹Siehe die Fussnote auf Seite 199.

25.2 Kompatibilität

Sei $X = [a, b]$ ein reelles Intervall. Dann ist X kompakt. Somit sind die charakteristischen Funktionen von abgeschlossenen und offenen Teilintervallen in $B^-(X)$ respektive $B^+(X)$ wegen 23.4.1 und 23.4.4. Insbesondere gilt dies dann auch für die charakteristische Funktion von einzelnen Punkten. Somit gilt

Beliebige Treppenfunktionen mit endlich vielen Treppenstufen sind Lebesgue integrierbar.

Die Werte an den Sprungstellen können dabei beliebig sein.

Zur Erinnerung: Eine auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion f ist nach 13.3 Riemann integrierbar genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_r\}$ von $[a, b]$ existiert, so dass gilt

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon .$$

Die Treppenfunktionen

$$h = \sum_{i=1}^r \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \cdot \chi_{[x_{i-1}, x_i]} \quad , \quad g = \sum_{i=1}^r \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i]}$$

können in den endlich vielen Punkten x_0, \dots, x_n so abgeändert werden, dass für die abgeänderten Funktionen gilt

$$h \leq f \leq g .$$

Andererseits sind (wie oben bemerkt) die abgeänderten Funktionen Lebesgue (oder auch Riemann) integrierbar mit Integral $I(h) = U(Z, f)$ beziehungsweise $I(g) = O(Z, f)$. Somit ist eine Riemann integrierbare Funktion f auch Lebesgue integrierbar auf $[a, b]$ wegen der Fussnote zum ε -Kriteriums 24.1.3.

Satz: *Ist f beschränkt und Riemann integrierbar auf $[a, b]$, dann ist f auch Lebesgue integrierbar auf $[a, b]$ und das Lebesgue Integral von f ist gleich dem Riemann Integral $\int_a^b f(x) dx$.*

Korollar: *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Riemann)-integrierbar auf jedem Teilintervall $[-n, n]$ für $n \in \mathbb{N}$. Existiert² der Limes $I = \lim_n \int_{-n}^n |f(x)| dx < \infty$, dann ist f Lebesgue integrierbar auf \mathbb{R} mit Lebesgue Integral $I(f) = I$.*

Beweis: Beachte $f \in L(X) \implies |f| = f^+ - f^- \in L(X)$. Wegen $|f| \cdot \chi_{[-n, n]} \nearrow |f|$ und dem letzten Satz ist daher $F = |f|$ integrierbar (Beppo Levi). Wegen $f \cdot \chi_{[-n, n]} \rightarrow f$ punktweise, folgt die Behauptung dann aus dem Satz von der dominierten Konvergenz.

²Dies wäre falsch ohne die Betragsstriche, wie man am Beispiel $f(x) = \sin(x)/x$ durch partielle Integration leicht sieht!

25.3 Einige Anwendungen

1) Exponentialfunktion: $g(x) = \exp(-x)$ ist Lebesgue integrierbar auf $[0, \infty)$ mit Integral 1 nach dem letzten Korollar, nämlich $g_n(x) = \chi_{(0,n)} \cdot \exp(-x) \nearrow \exp(-x)$. Die Funktionen $g_m(x)$ liegen in $B^+([0, \infty))$ und sind Riemann integrierbar. Der Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n) = 1 < \infty$ ist endlich.

2) Gaussische Funktion: $f(x) = \exp(-x^2)$ ist Lebesgue integrierbar auf $[0, \infty)$, denn nach 19.3.2 gilt ³

$$f_n(x) = \max\left(0, \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\right) \nearrow f(x) = \exp(-x^2).$$

Jedes $f_n(x)$ ist Riemann integrierbar. Die Konvergenz wird dominiert etwa (außerhalb von $[-1, 1]$) durch die Lebesgue integrierbare Funktion $F(x) = \exp(-x)$ aus Beispiel 1). Nach Lebesgue 24.3 folgt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^\infty \exp(-x^2) dx.$$

Wegen $I_r = \int_0^1 (1 - x^2)^r dx = \frac{2r}{2r+1} I_{r-1}$ für reelles $r > 0$ (folgt durch partielle Integration) und $I_0 = 1$ ergibt sich die Wallis'sche Produktformel

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)},$$

oder auch

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\sqrt{n}} = \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx}.$$

Mittels der Sterlingschen Formel 17.2 ergibt sich auf der linken Seite alternativ der Wert $\kappa/\sqrt{2}$, wobei κ die noch unbestimmte Konstante in der Stirlingschen Formel ist. Die Bestimmung der Konstante $\kappa = \sqrt{2\pi}$ läuft daher auf folgende Formel hinaus

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}}.$$

Beweis: In obiger Rechnung ersetzen wir jetzt die natürlichen Zahlen n durch die Folge der halbganzen Zahlen $\frac{1}{2} + \mathbb{N}$. Dies zeigt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-x^2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1/2 + n} \int_0^1 (1 - x^2)^{n+1/2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1/2 + n} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)} \cdot I_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit der obigen Wallis'schen Formel folgt wie behauptet

$$\left(\int_0^\infty \exp(-x^2) dx\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n + \frac{1}{2})} \cdot \frac{2}{2n+2} \cdot I_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

³ $\log(f_n(x)) = -\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m+1} \frac{x^{2m+2}}{n^m} \leq -\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(n+1)^m} = \log(f_{n+1}(x))$ für $0 \leq x^2 < n$.

wegen $I_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$ (Fläche des Viertelkreises)⁴.

3) Analog: $f(x) = \exp(-x^3)$ ist Lebesgue integrierbar auf $[0, \infty)$ mit

$$\int_0^\infty \exp(-x^3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n^3}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n^3 + 1)}.$$

4) Potenzen: Die Funktion $f(x) = x^\alpha$ ist für $\alpha > -1$ Lebesgue integrierbar auf $[0, 1]$. Sie ist nicht Riemann integrierbar im Fall $-1 < \alpha < 0$.

5) Hyperbenen: Die Hyperebene $Y = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ im \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge $\text{vol}(\chi_Y) = 0$. Dies folgt aus dem ε -Kriterium für Nullmengen, indem man Y durch immer grösser werdende Quader

$$Q_m = \left[-\frac{\varepsilon}{2^m}, \frac{\varepsilon}{2^m}\right] \times \prod_{i=1}^{n-1} [-m, m]$$

überdeckt. Beachte $\sum_m \text{vol}(Q_m) = 2\varepsilon \sum_m \frac{(2m)^{n-1}}{2^m} < \text{const}(n) \cdot \varepsilon$.

6) Kugelvolumina: Das Volumen der Kugel $K_r(0)$ vom Radius r im \mathbb{R}^n wird gegeben durch

$$\text{vol}(K_r(0)) = c(n) \cdot r^n$$

für eine universelle Konstante $c(n)$, welche nur von n abhängt. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion nach n mit Hilfe des Satzes von Fubini 25.4

$$\text{vol}(K_r(0)) = c(n-1) \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x_n^2})^{n-1} dx_n = 2 \cdot c(n-1) I_{\frac{n-1}{2}} \cdot r^n.$$

Also gilt

$$c(n) = 2 \cdot c(n-1) \cdot I_{\frac{n-1}{2}}.$$

Man sieht jetzt sofort mit Hilfe der Rekursionsformel für die Funktion I_r von 25.3 Beispiel 2)

$$c(2n), c(2n+1) \in \pi^n \cdot \mathbb{Q}.$$

Etwa $c(1) = 2, c(2) = \pi, c(3) = \frac{4}{3}\pi, c(4) = \frac{1}{2}\pi^2$ usw. Beachte $I_{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}I_{\frac{1}{2}} = \frac{3\pi}{16}$.

7) Abgeschlossene und offene Mengen: Jede im \mathbb{R}^n beschränkte offene oder abgeschlossene Teilmenge Y ist endlich messbar.

Beweis: Wegen 23.4.4 und 24.1.4 genügt es $O(Y)$ (für Y offen) beziehungsweise $U(Y)$ (für U kompakt) durch das endliche Volumen eines Quaders abzuschätzen, welcher Y enthält.

⁴Die Substitution $t = \sin(x)$ liefert $I_{\frac{1}{2}} = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$. Partielle Integration gibt $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \sin(x)\cos(x)|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$. Also wegen $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ folgt $2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \pi/2$ oder $I_{\frac{1}{2}} = \pi/4$.

25.4 Der Satz von Fubini

Sei $X = X_1 \times X_2$ und $X_1 = \mathbb{R}^n$ und $X_2 = \mathbb{R}^m$. Für jede Lebesgue integrierbare Funktion $f = f(x_1, x_2) \in L(X)$ gilt dann

Es gibt eine Nullmenge N_1 in X_1 , so dass für $x_1 \notin N_1$ die Funktion $f(x_1, -)$ für festgehaltenes x_1 Lebesgue integrierbar auf X_2 ist. Das Integral $I_2(f)$ existiert daher. Es definiert eine integrierbare Funktion $f_1(x_1)$ auf X_1 , dessen Integral $I_1(f_1)$ gleich $I(f)$ ist. Kurz

$$\boxed{I(f) = I_1(I_2(f))}.$$

Und dann gilt natürlich auch $I_1(I_2(f)) = I_2(I_1(f))$.

Beweis: Schritt 1. Der stetige Fall. Die analoge Aussage für stetige Funktionen mit kompaktem Träger ist offensichtlich richtig. Dies folgt aus 19.6.

Schritt 2. Der Spezialfall $f =: g \in B^+(X)$. Für Funktionen $g \in B^+(X)$ gilt $g_n \nearrow g$ für eine geeignete Folge $g_n \in C_c(X)$. Es folgt

- $g_n(x_1, -) \in C_c(X_2)$
- $g_n(x_1, -) \nearrow g(x_1, -)$, also $g(x_1, -) \in B^+(X_2)$
- Es gibt eine Nullmenge $N \subseteq X_1$, so dass für $x_1 \notin N$ die Funktion $g(x_1, -)$ integrierbar auf X_2 ist, d.h. wegen 24.1.4

$$I_2(g(x_1, -)) = O(g(x_1, -)) = \limsup I_2(g_n(x_1, -)) < \infty.$$

Für letzteres beachte $N = \{x_1 \in X_1 \mid I_2(g_n(x_1, -)) \nearrow +\infty\}$ ist eine Nullmenge:

$$N \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} N_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{x_1 \in X_1 \mid \exists n \ I_2(g_n(x_1, -)) > m\}$$

und $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$ und N_m offen mit $\text{vol}(N_m) \leq I(|g|)/m$. Also folgt nach Beppo Levi $\text{vol}(N) = 0$. Für $x_1 \notin N$ ist somit c) richtig

$$\boxed{g(x_1, -) \text{ integrierbar auf } X_2 \text{ für } x_1 \notin N}.$$

Für $x_1 \notin N$ impliziert b) und Beppo Levi $I_2(g_n(x_1, -)) \nearrow I_2(g(x_1, -)) < \infty$. Nach Schritt 1 sind die Integrale $I_2(g_n(x_1, -))$ in $C_c(X_1)$. Es folgt

$$\boxed{f_1(x_1) = I_2(g(x_1, -)) \in B^+(X_1)}$$

und dann per Definition von $O(f_1)$

$$\begin{aligned} O(I_2(g(x_1, -))) &=_{Def} \limsup_n I_1(I_2(g_n(x_1, -))) \\ &=_{Def} \limsup_n I(g_n) \\ &=_{Def} I(g) < \infty \end{aligned}$$

wegen der Definition von I als Daniellfortsetzung von $I = I_1 \circ I_2 : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Aus 24.1.4 folgt daher $O(f_1) = I_1(f_1)$ und

$$\boxed{f_1 = I_2(g(x_1, -)) \text{ ist integrierbar auf } X_1}$$

mit

$$\boxed{I_1(I_2(g(x_1, -))) = I(g)} .$$

Schritt 3. Der allgemeine Fall. Sei f integrierbar auf $X = X_1 \times X_2$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es dann $h \leq f \leq g$ mit $g, -h \in B^+(X)$ und $O(g-h) < \varepsilon$ und $O(g) < \infty$ wegen dem ε -Kriterium.

Nach Schritt 2: \exists eine Nullmenge $N \subseteq X_1$, so dass für alle $x_1 \notin N$ gilt

$$h(x_1, -) \leq f(x_1, -) \leq g(x_1, -)$$

$$-h(x_1, -), g(x_1, -) \in B^+(X_2) \text{ sind integrierbar} .$$

Angenommen wir könnten eine Nullmenge $N_1 \supseteq N$ finden, so dass für $x_1 \notin N_1$ gilt

$$I_2(g(x_1, -) - h(x_1, -)) < \varepsilon \quad , \quad I_2(g(x_1, -)) < \infty \quad ,$$

dann wäre wegen dem ε -Kriterium $f(x_1, -)$ integrierbar auf X_2 . Aus der Monotonie des Integrals würde ausserdem für $x_1 \notin N_1$ folgen

$$I_2(h(x_1, -)) \leq I_2(f(x_1, -)) \leq I_2(g(x_1, -)) .$$

Wegen Schritt 2 gelten andererseits wegen $g \in B^+(X)$ und $g-h \in B^+(X)$ bereits die Aussagen

$$I_1(I_2(g(x_1, -))) = I(g) < \infty$$

$$I_1(I_2(g(x_1, -) - h(x_1, -))) = I(g-h) < \varepsilon .$$

Zusammen ergibt dies

$$\boxed{I_2(f(x_1, -)) \text{ ist integrierbar auf } X_1}$$

und durch Vergleich mit den einschachtelnden Integralen von h und g folgt

$$\boxed{I_1(I_2(f(x_1, -))) = I(f)} ,$$

da diese Aussage für h und g nach Schritt 2 bereits gilt.

Schritt 4. Konstruktion von N_1 . Wir wählen Folgen g_n, h_n anstelle der bisher festgewählten Funktionen g, h , so dass jetzt gilt

$$O(g_n - h_n) < \frac{1}{n} .$$

Setzt man

$$N' = \bigcap_{n=1}^{\infty} N'_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_1 \in X_1 \mid I_2((g_n - h_n)(x_1, -)) < \varepsilon\} ,$$

dann ist N' wegen $vol(N'_n) \leq \frac{1}{n\varepsilon}$ nach Beppo Levi eine Nullmenge in X_1 , und die Nullmenge $N_1 = N \cup N'$ hat die in Schritt 3 benötigten Eigenschaften.

25.5 Substitutionsregel

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei

$$\varphi : U \rightarrow V$$

eine bijektive stetig partiell differenzierbare Abbildung, so dass gilt

$$\det D\varphi(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U .$$

Dann ist für jede Lebesgue integrierbare Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$ Lebesgue integrierbar auf U und es gilt

$$(*) \quad \boxed{\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|dx} .$$

Beweis: 1.Schritt. Reduktion auf $f \in C_c(V)$. Angenommen die Aussage gelte für alle $f \in C_c(V)$. Dann gilt sie auch für $f \in B^+(V)$ (oder $B^-(V)$). Für $f_n(y) \nearrow f(y)$ mit $f_n \in C_c(V)$ gilt nämlich $f_n(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \nearrow f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$. Der Grenzwert liegt in $B^+(U)$ wegen $f_n(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \in C_c(U)$. Somit folgt die Behauptung nach Beppo Levi. Mit dem ε -Kriterium schliesst man aus der Gültigkeit für $h \in B^-(X), g \in B^+(X)$ durch Einschachtelung $h(y) \leq f(y) \leq g(y)$ auf die Gültigkeit für alle $f \in L(V)$. Wir nehmen daher im folgenden an $f \in C_c(V)$. Dann ist $f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|$ in $C_c(U)$, also integrierbar. Zu zeigen bleibt die Integralformel (*).

2.Schritt. Gilt die Aussage für $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$, dann gilt sie für $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$. Klar (Kettenregel)!

3.Schritt. Die Aussage gilt für die Einschränkung $\varphi : U \rightarrow V$ von linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Beweis: Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von oberen und unteren Dreiecksmatrizen. Mittels Schritt 2 reduziert man somit auf den Fall oberer und unterer Dreiecksmatrizen (sogar Elementarmatrizen). Mittels Fubini reduziert dies auf den eindimensionalen Fall \mathbb{R} (insbesondere die Aussage, dass das Riemann Integral translationsinvariant ist).

4.Schritt. Zum Beweis genügt es in (*) die Ungleichung \leq zwischen beiden Seiten zu zeigen. Die entsprechende Ungleichung für die Umkehrfunktion $\psi = \varphi^{-1}$ liefert nach kurzer Rechnung die Gleichheit (Übungsaufgabe).

5.Schritt. Angenommen die Ungleichung \leq wäre falsch, und die linke Seite etwa um $\kappa > 0$ grösser als die rechte. Wir legen den Träger K (in U) von $f(\varphi(x))$ in einen Quader $Q = Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, und halbieren diesen iteriert (Quaderschachtelung).

Schubfachschluss(!): Es gibt eine absteigende Folge von Teilquadern $Q_m \subseteq Q_0$ mit $\text{vol}(Q_m) = 2^{-mn} \text{vol}(Q_0)$ und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{\varphi(Q_m)} f(y)dy}{\text{vol}(Q_m)} \geq \frac{\kappa}{\text{vol}(Q_0)} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|dx}{\text{vol}(Q_m)}$$

sowie $\bigcap Q_m = \{x_0\}$ (Quaderschachtelung).

Hinweis: Lasse den Limes weg und multipliziere mit $vol(Q_m)$. Wie findet man wohl den Quader Q_m in Q_{m-1} ? Natürlich durch einen Schubfachschluss!

6.Schritt. Wegen der Stetigkeit von f gilt für den Limes rechts

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |det D\varphi(x)| dx}{vol(Q_m)} = f(\varphi(x_0)) \cdot |det D\varphi(x_0)|.$$

Wir wollen einen Widerspruch herleiten!

7.Schritt. Durch Komposition mit einer linearen Abbildung (benutze Schritt 2,3) kann dazu obdA $D\varphi(x_0) = id_{\mathbb{R}^n}$ angenommen werden. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{Q_m} f(\varphi(x)) \cdot |det D\varphi(x)| dx}{vol(Q_m)} = f(\varphi(x_0)).$$

8.Schritt. Abschätzung der linken Seite. Wendet man 21.5.1 auf φ an folgt $\|\varphi(x) - D\varphi(x_0)(x - x_0)\| < \varepsilon \|x - x_0\|$, falls gilt $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Nach Annahme gilt $D\varphi(x_0) = id_{\mathbb{R}^n}$. Ist daher m gross genug, ist wegen dieser Abschätzung das Bild $\varphi(Q_m)$ in einem Quader mit Mittelpunkt $\varphi(x_0)$ und Kanten der Längen $< (1 + \varepsilon) \cdot const. \cdot 2^{-m}$ enthalten ($const$ sei die Kantenlänge von Q_0). Aus Stetigkeitsgründen gilt für den Limes der linken Seite mit $y_0 := \varphi(x_0)$

$$(1 + \varepsilon)^n \cdot f(y_0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{\varphi(Q_m)} f(y) dy}{vol(Q_m)}.$$

Aus Schritt 5,7 und 8 folgt

$$(1 + \varepsilon)^n \cdot f(y_0) - f(y_0) \geq \frac{\kappa}{vol(Q_0)} > 0.$$

Wählt man ε genügend klein wird die rechte Seite $f(y_0) \cdot [(1 + \varepsilon)^n - 1] = O(\varepsilon)$ kleiner als $\frac{\kappa}{vol(Q_0)}$. Ein Widerspruch zur Annahme $\kappa > 0$ in Schritt 5. Dies zeigt in Schritt 5 die gewünschte Ungleichung, und damit wegen Schritt 4 die Behauptung. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Einige zusätzliche Erläuterungen⁵⁶⁷⁸⁹¹⁰

⁵2.Schritt: Wendet man rechts in $\int_W g(z) dz = \int_V g(\psi(y)) \cdot |det D\psi(y)| dy$ die Substitutionsregel an, ergibt dies $\int_U g(\psi(\varphi(x))) \cdot |det D\psi(\varphi(x))| \cdot |det D\varphi(x)| dx = \int_U g(\psi(\varphi(x))) |det D(\psi \circ \varphi)(x)| dx$. Also $\int_W g(z) dz = \int_U g((\psi \circ \varphi)(x)) |det D(\psi \circ \varphi)(x)| dx$.

⁶3.Schritt: Jede lineare Abbildung ist ein Produkt von Diagonalmatrizen und elementaren Scherungsmatrizen. Für Scherungen ist die Funktionaldeterminante 1. Mittels Fubini reduziert man den Fall der Diagonalmatrizen auf die eindimensionale Substitutionsregel. Im Scherungsfall ist nach Fubini obdA $n = 2$ und die Aussage folgt aus $\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda \cdot x + y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy) dx$ wegen $\int_{\mathbb{R}} h(y_0 + y) dy = \int_{\mathbb{R}} h(y) dy$.

⁷4.Schritt: $\int_U g(x) dx \leq \int_V g(\psi(y)) |D\psi(y)| dy$ gibt für $\psi = \varphi^{-1}$ und $g(x) = f(\varphi(x)) |D\varphi(x)|$ mit Hilfe der Kettenregel $det D\psi(\varphi(x)) \cdot det D\varphi(x) = 1$ die gewünschte inverse Ungleichung $\int_V f(y) dy \geq \int_U f(\varphi(x)) \cdot |det D\varphi(x)| dx$.

⁸5.Schritt: Eigentlich müsste als Integrationsbereich dastehen $Q_m \cap U$ respektive $\varphi(Q_m \cap U)$. Aber für $m \gg 0$ gilt $Q_m \subseteq U$ wegen $x_0 \in K \subseteq U$.

⁹Schubfachschluss: Gilt $\kappa \geq \lambda_{Q_{m-1}} / vol(Q_{m-1}) = \sum_{\nu=1}^{2^n} \lambda_{Q_{m,\nu}} / vol(Q_{m-1})$, und ist Q_m einer der 2^n Teilquader $Q_{m,\nu}$ mit maximalem $\lambda_{Q_{m,\nu}}$, dann gilt $\kappa \geq 2^n \cdot \lambda_{Q_m} / vol(Q_{m-1}) = \lambda_{Q_m} / vol(Q_m)$.

¹⁰6.Schritt: Es gilt $vol(Q_m) \cdot \min_{x \in Q_m} h(x) \leq \int_{Q_m} h(x) dx \leq vol(Q_m) \cdot \max_{x \in Q_m} h(x)$, und somit $\lim_{m \rightarrow \infty} vol(Q_m)^{-1} \int_{Q_m} h(x) dx = h(x_0)$ für jede stetige Funktion h .

Kapitel 26

Kohomologie

Zur Erinnerung: Der Träger einer Form $\omega \in A^\nu(M)$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq M$, welche die Punkte $x \in M$ mit $\omega(x) \neq 0$ enthält.

Alternativ: Das Komplement $U = A^c$ des Trägers ist die offene Teilmenge U aller Punkte $y \in M$, für die es eine offene Umgebung V um y gibt, so dass $\omega|_V = 0$. Es gilt $\omega \in A_c^\nu(M)$ genau dann, wenn der Träger von ω kompakt ist. Jede Form $\omega \in A_c^\nu(U)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ hat eine kanonische NullFortsetzung

$$NFS_M(\omega) \in A_c^\nu(M) ,$$

welche per Definition Null¹ ist im Komplement des Trägers von ω . Dies definiert kanonische Einbettungen

$$A_c^\nu(U) \rightarrow A_c^\nu(M) .$$

Beachte

$$A_c^\nu(M) \wedge A^\mu(M) \subseteq A_c^{\nu+\mu}(M) .$$

Zur Erinnerung: Für eine Mannigfaltigkeit sei

$$H^i(M) = \text{Kern}(d : A^i(M) \rightarrow A^{i+1}(M)) / \text{Bild}(d : A^{i-1}(M) \rightarrow A^i(M))$$

$$H_c^i(M) = \text{Kern}(d : A_c^i(M) \rightarrow A_c^{i+1}(M)) / \text{Bild}(d : A_c^{i-1}(M) \rightarrow A_c^i(M)) .$$

Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, gilt natürlich $A^i(M) = A_c^i(M)$ und somit $H^i(M) = H_c^i(M)$ für alle i .

Beachte $H^0(M)$ ist der Vektorraum der lokal konstanten Funktionen auf M . Ist M die disjunkte Vereinigung von r wegzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, gilt daher

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}^r .$$

¹Die Fortsetzung ist unendlich oft differenzierbar, denn für festes $x \notin A$ und beliebiges $y \in A$ gibt es disjunkte offene Mengen $x \in W_y$ und $y \in W'_y$. Endlich viele W_y überdecken den kompakten Träger A . Dann ist der entsprechende endlich Durchschnitt V der W'_y offen, enthält x und ist disjunkt zu A . Ableitungen in x können daher in V berechnet werden, wo $NFS(\omega)$ Null ist.

26.0.1 Fortsetzungslemma

Sei $M = U \cup V$ Vereinigung zweier offener Teilmengen. Dann existieren $\psi_U, \psi_V \in C^\infty(M)$ mit $\psi_U + \psi_V = 1_M$, und den Eigenschaften

- Für $\phi \in A_c^\nu(U \cup V)$ lässt sich $\phi\psi_U$ durch Null zu einer Form in $A_c^\nu(U)$ fortsetzen, und $\phi\psi_V$ zu einer Funktion in $A_c^\nu(V)$.
- ψ_U verschwindet auf $V \setminus (U \cap V)$, und ψ_V auf $U \setminus (U \cap V)$.
- Für $\phi \in A^\nu(U \cap V)$ lässt sich $\phi\psi_U$ durch Null zu einer Form in $A^\nu(U)$ fortsetzen, und $\phi\psi_V$ zu einer Funktion in $A^\nu(V)$.

Beweis: Sei Φ eine Partition der 1 von M bezüglich der Überdeckung $M = M_1 \cup M_2$ für $M_1 = U$ und $M_2 = V$. Für jedes $\varphi \in \Phi$ existiert ein Index $i = i(\varphi)$ mit $\varphi \in C_c^\infty(M_i)$. Dies zerlegt $\Phi = \Phi_1 \amalg \Phi_2$ disjunkt. $\psi_U = \sum_{\varphi \in \Phi_1} \varphi$ und $\psi_V = \sum_{\varphi \in \Phi_2} \varphi$ erfüllen die Behauptungen. Als lokal endliche Summen sind ψ_U, ψ_V wohldefiniert, unendlich oft partiell differenzierbar, und ihre Summe ist konstant 1 auf M . ψ_U verschwindet auf $V \setminus U$ und ψ_V auf $U \setminus V$.

Zur ersten Aussage: Für $\phi \in A_c^\nu(U \cup V)$ sei $K \subseteq U$ kompakter Träger von ϕ . Dann gibt es eine Überdeckung von K durch offene Teilmenge $U_i \subseteq (U \cup V) = M$ (obdA endlich $i = 1, \dots, n$), so dass die Summe $\psi_U = \sum_{\varphi \in \Phi_1} \varphi$ auf $U_1 \cup \dots \cup U_n$, und damit auf K , (de fakto) eine endliche Summe ist. Da ϕ ausserhalb von K verschwindet, folgt dann auf ganz M (!)

$$\phi\psi_U = \sum_{i=1}^n \phi\varphi_i .$$

Wegen $\varphi_i \in C_c^\infty(U)$ und $\phi|_U \in A^\nu(U)$ gilt $\phi\varphi_i \in A_c^\nu(U)$. Daher als endliche Summe

$$\phi\psi_U \in A_c^\nu(U) .$$

Zur letzten Aussage: Wir setzen $\phi\psi_U \in A^\nu(U \cap V)$ durch Null zu einer Form φ auf V fort. Wir müssen zeigen, dass φ unendlich oft partiell differenzierbar auf V ist. Zu $x \in V \setminus U$ wähle $V' \subseteq K' \subseteq V$ mit V' offen und K' kompakt. Auf K' ist wieder ϕ_U eine endliche Summe von Funktionen mit kompaktem Träger K in U . Für jedes $y \in K$ gilt $x \neq y$. Also existieren disjunkte Umgebungen W_y von y und $W'_y \subseteq V'$ von x . Endlich viele der W_y überdecken K . Der Durchschnitt der endlich vielen zugehörigen W'_y definiert eine offene Umgebung V'' von x , welche disjunkt zu K ist. Somit verschwindet $\phi\psi_U$ in V'' identisch und φ kann glatt durch Null fortgesetzt werden auf $(U \cap V) \cup V''$.

26.1 Mayer-Vietoris Sequenzen

26.1.1 Lemma

Auf $M = U \cup V$ hat man die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow A^\nu(U \cup V) \xrightarrow{i} A^\nu(U) \oplus A^\nu(V) \xrightarrow{p} A^\nu(U \cap V) \rightarrow 0 \quad ,$$

$$0 \rightarrow A_c^\nu(U \cap V) \xrightarrow{i} A_c^\nu(U) \oplus A_c^\nu(V) \xrightarrow{p} A_c^\nu(U \cup V) \rightarrow 0 \quad .$$

Beweis: Die Abbildungen der ersten Sequenz sind gegeben durch

$$i : A^\nu(U \cup V) \ni \omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V) \in A^\nu(U) \oplus A^\nu(V)$$

(i ist offensichtlich injektiv) sowie

$$p : A^\nu(U) \oplus A^\nu(V) \ni (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1|_{U \cap V} - \omega_2|_{U \cap V} .$$

Der Kern von p ist das Bild von i (Verheftungseigenschaft). Nichttrivial ist: p ist surjektiv. Dies folgt aus der letzten Aussage von Lemma 26.0.1, denn für $\phi \in A^\nu(U \cap V)$ existieren Nullfortsetzungen $\omega_2 = -\phi\psi_U$ auf V und $\omega_1 = \phi\psi_V$ auf U , so dass gilt

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \phi\psi_U|_{U \cap V} - (-\phi\psi_V|_{U \cap V}) = \phi \cdot (\psi_U + \psi_V) = \phi .$$

Zur zweiten Sequenz: Die linke Abbildung

$$i : A_c^\nu(U \cap V) \ni \omega \mapsto (NFS_U(\omega), NFS_V(\omega)) \in A_c^\nu(U) \oplus A_c^\nu(V)$$

ist offenbar injektiv. Die Abbildung

$$p : A_c^\nu(U) \oplus A_c^\nu(V) \ni (\omega_1, \omega_2) \mapsto NFS_M(\omega_1) - NFS_M(\omega_2)$$

hat die Eigenschaft $\text{Kern}(p) = \text{Bild}(i)$, denn aus $i(\omega_1, \omega_2)$ folgt $\omega_1 = \omega_2$ auf $U \cap V$ und $\omega_1 = 0$ auf $U \setminus V$ respektive $\omega_2 = 0$ auf $V \setminus U$. Nichttrivial ist dagegen wieder die Surjektivität von p . Diese folgt aus der ersten Aussage von Lemma 26.0.1. \square

Nach dem Abschnitt über Kohomologie des Skripts LA II folgt aus Lemma 26.1.1 die Existenz langer exakter Mayer-Vietoris Sequenzen von Kohomologiegruppen

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^\nu(U \cup V) \longrightarrow H^\nu(U) \oplus H^\nu(V) \longrightarrow H^\nu(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \dots$$

sowie

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^\nu(U \cap V) \longrightarrow H_c^\nu(U) \oplus H_c^\nu(V) \longrightarrow H_c^\nu(U \cup V) \xrightarrow{\delta} \dots .$$

Wir beweisen hier pars pro toto

26.1.2 Lemma

Es gibt Isomorphismen

$$\delta : H^{\nu-1}(U \cap V) / (H^{\nu-1}(U) \oplus H^{\nu-1}(V)) \cong \text{Kern}(H^\nu(U \cup V) \rightarrow H^\nu(U) \oplus H^\nu(V)).$$

Ditto

$$\delta : H_c^{\nu-1}(U \cup V) / (H_c^{\nu-1}(U) \oplus H_c^{\nu-1}(V)) \cong \text{Kern}(H_c^\nu(U \cap V) \rightarrow H_c^\nu(U) \oplus H_c^\nu(V)).$$

Beweis: Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^\nu(U \cup V) & \longrightarrow & A^\nu(U) \oplus A^\nu(V) & \longrightarrow & A^\nu(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\ 0 & \longrightarrow & A^{\nu-1}(U \cup V) & \longrightarrow & A^{\nu-1}(U) \oplus A^{\nu-1}(V) & \xrightarrow{p} & A^{\nu-1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc} \omega & \xrightarrow{i} & (\omega_1, \omega_2) & \xrightarrow{p} & 0 \\ \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\ \eta & \xrightarrow{i} & (\eta_1, \eta_2) & \xrightarrow{p} & (\eta_1 - \eta_2)|_{U \cap V} = \rho \end{array}$$

Für $\rho \in A^{\nu-1}(U \cap V)$ mit $d\rho = 0$, existieren wegen der Surjektivität von p Urbilder $(\eta_1, \eta_2) \in A^{\nu-1}(U) \oplus A^{\nu-1}(V)$. Deren Ableitungen $\omega_i = d\eta_i$ werden unter p auf Null abgebildet (Kommutativität des rechten Quadrats!). Daher gilt $(\omega_1, \omega_2) = i(\omega)$ für ein $\omega \in A^\nu(U \cup V)$. Wir setzen

$$\delta([\rho]) = [\omega] \in H^\nu(U \cup V).$$

Dieses ist wohldefiniert, denn ändert man die Repräsentanten η_1, η_2 um ein Element aus $A^{\nu-1}(U \cup V)$ ab, so ändert dies ω nur um ein Element aus $dA^{\nu-1}(U \cap V)$ ab, ändert also nicht die Kohomologieklass $[\omega]$. Das gleiche gilt, wenn man ρ durch $\rho + d\tilde{\rho}$ ersetzt für ein $\tilde{\rho} \in A^{\nu-2}(U \cap V)$. Für Urbilder $(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ ersetzt dies η_i durch $\eta_i + d\tilde{\eta}_i$, lässt aber deren Bilder ω_i unter der Ableitung d unverändert. Damit ist δ wohldefiniert.

Offensichtlich liefern Repräsentanten der Gestalt $\rho = (\eta_1 - \eta_2)|_{U \cap V}$ Elemente $[\rho]$ im Kern von δ im Fall $d\eta_1 = d\eta_2$. Ist umgekehrt $\delta([\rho]) = 0$, dann gilt $\omega = d\eta$ für ein $\eta \in A^{\nu-1}(U \cup V)$. In diesem Fall kann man η_i durch $\eta_i - i(\eta)$ ersetzen, und erreicht obdA $d\eta_i = \omega_i = 0$. Also $\text{Kern}(\delta) = \text{Bild}(H^{\nu-1}(U) \oplus H^{\nu-1}(V))$.

Offensichtlich liegt $[\omega]$ im Kern von $H^\nu(U \cup V) \rightarrow H^\nu(U) \oplus H^\nu(V)$, denn $[\omega_i] = [d\eta_i] = 0$. Ist $[\omega]$ in diesem Kern, gilt umgekehrt $\omega|_U = d\eta_1$ und $\omega|_V = d\eta_2$ und somit $[\omega] = \delta([\rho])$ für $\rho = (\eta_1 - \eta_2)|_{U \cap V}$.

26.2 Kohomologie der Sphäre

Für das Komplement

$$M = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus 0)$$

eines k -dimensionalen linearen Teilraums der Dimension $k \leq n-1$ beweisen wir durch absteigende Induktion nach k das folgende

26.2.1 Lemma

Im Fall $k = n-1$ gilt $H^0(M) \cong \mathbb{R}^2$, sowie $H^\nu(M) = 0$ für $\nu > 0$. Für $k < n-1$ gilt

- $H^\nu(M) \cong \mathbb{R}$ für $\nu = 0$ oder $\nu = n - k - 1$.
- $H^\nu(M) = 0$ für alle $\nu \neq 0$ und $\nu \neq n - k - 1$.

Beweis: Betrachte die offene Überdeckung $M = U \cup V$ für

$$U = \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus A) \quad , \quad V = \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus B)$$

mit

$$U \cup V = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \quad , \quad U \cap V = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{k+1} .$$

Hierbei sei A resp. B die Teilmengen aller $(x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-k}$ mit $x \geq 0$ resp. ≤ 0 . U und V sind sternförmige offene Teilmengen des \mathbb{R}^n . Daher gilt $H^\nu(U) = H^\nu(V) = 0$ für alle $\nu \neq 0$ nach dem Poincaré Lemma. Aus Lemma 26.1.2 folgt daher

$$\delta : H^{\nu-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{k+1}) \cong H^{\nu+1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k)$$

für alle $\nu > 0$. Absteigende Induktion nach k beweist daher die Behauptung für alle $\nu > 0$. Zum Fall $\nu = 0$: Für $k = n-1$ zerfällt M in zwei disjunkte wegzusammenhängende Komponenten $M = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Dies zeigt $H^0(M) \cong \mathbb{R}^2$ im letzteren Fall. \square

Explizite Erzeuger: Im Spezialfall $M = \mathbb{R}^n \setminus 0$ ist $H^\nu(\mathbb{R}^n \setminus 0) = 0$ für $\nu \neq 0$ und $\nu \neq n-1$, und es gilt

$$\boxed{H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0) = \mathbb{R} \cdot [\sigma]} .$$

Wir geben einen Erzeuger $\sigma \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ dieser Kohomologiekategorie explizit an

$$\boxed{\sigma = \frac{\lambda}{r^n} \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)}$$

für $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ und

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i \cdot *dx_i \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n) .$$

Hierbei sind $*dx_i$ die eindeutig bestimmten $n-1$ -Form mit $dx_j \wedge *dx_i = \delta_{ij}$.

Beispiele: $\lambda = xdy - ydx$ im \mathbb{R}^2 und $\lambda = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ im \mathbb{R}^3 .

Es gilt $d\lambda = ndx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = n \cdot dv_{Euklid}$ und $(\sum x_i dx_i) \wedge \lambda = r^2 dv_{Euklid}$. Allgemein gilt $d(r^{-\alpha}) = -\alpha r^{-\alpha-1} \cdot dr = -\alpha r^{-\alpha-2} \sum_{i=1}^n x_i dx_i$. Also $d(r^{-\alpha} \cdot \lambda) = d(r^{-\alpha}) \wedge \lambda + r^{-\alpha} d\lambda = -\alpha r^{-\alpha-2} r^2 dv_{Euklid} + nr^{-\alpha} dv_{Euklid} = \frac{n-\alpha}{r^\alpha} dv_{Euklid}$. Also für $\alpha = n$

$$d\sigma = 0.$$

Somit ist die Kohomologieklass $[\sigma] \in H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ definiert.

26.2.2 Ein Erzeuger

Die Klasse $[\sigma]$ ist nicht Null, und daher für $n > 1$ ein Erzeuger von $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Weiterhin: Eine Klasse $[\eta] \in H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ verschwindet genau dann, wenn gilt

$$\int_{S^{n-1}} \eta = 0.$$

Beweis: a) Für die Einbettung der Einheitssphäre $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$ hat man folgendes Diagramm (verallgemeinerte Polarkoordinaten) mit einem Diffeomorphismus² oben

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^n \setminus 0 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \uparrow \iota \\ S^{n-1} & \xlongequal{\quad} & S^{n-1} \end{array}$$

Die obere Abbildung wird definiert durch $S^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0} \ni (x, r) \mapsto r \cdot x$.

b) Der Satz von Stokes für die kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ mit Rand $\delta M = S^{n-1}$ liefert³ (wegen $r = 1$ auf S^{n-1})

$$\int_{S^{n-1}} \iota^*(\sigma) = \int_{S^{n-1}} \iota^*(\lambda) = \int_M d\lambda = n \cdot \text{vol}_{Euklid}(M) > 0.$$

c) Angenommen es gilt $\sigma = d\eta$ für ein $\eta \in A^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Dann wäre $\iota^*(\sigma) = \iota^*(d\eta) = d\iota^*(\eta) = d\rho$ für ein $\rho \in A^{n-2}(S^{n-1})$, dann folgt erneut aus dem Satz von Stokes (nun für die kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit S^{n-1} ohne Rand)

$$\int_{S^{n-1}} \iota^*(\sigma) = \int_{S^{n-1}} d\rho = 0.$$

Ein Widerspruch! Dies beweist das Lemma, und sogar die Verschärfung

² Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heisst glatt, wenn gilt $f^*(\varphi) \in C^\infty(M)$ für alle $\varphi \in C^\infty(N)$. f heisst Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} glatt sind.

³Ist M_R die Vollkugel vom Radius R zeigt man analog $n \cdot \text{vol}_{Euklid}(M_R) = R^n \int_{S^{n-1}} \sigma$ oder $\text{vol}_{Euklid}(M_R) = \int_0^R \int_{S^{n-1}} r^{n-1} dr \sigma$.

Zusatz: Die Kohomologieklassse von $\iota^*(\sigma)$ (kurz $\sigma|_{S^{n-1}}$ oder nur σ) ist nicht-trivial in $H^{n-1}(S^{n-1})$.

Folgerung: Es gilt $H^\nu(S^\nu) \cong H^\nu(\mathbb{R}^n \setminus 0)$, und somit für $n > 1$ insbesondere

$$\boxed{H^{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{R} \cdot [\iota^*(\sigma)] \cong \mathbb{R}}.$$

Beweis: Sei $\omega \in A^\nu(S^{n-1})$ eine geschlossene Differentialform (obdA $\nu > 0$). Dann ist auch $\eta = pr_1^*(\omega) \in A^\nu(S^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0})$ geschlossen. Da $S^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0}$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus 0$ ist, folgt aus Lemma 26.2.1 somit $\eta = d\rho$ (im Fall $\nu = n - 1$ muss man gegebenenfalls noch ein Vielfaches von σ abziehen). Somit ist $\omega = id_{S^{n-1}}^*(\omega) = (pr_1 \circ \iota)^*(\omega) = \iota^*(\eta) = \iota^*(d\rho) = d(\iota^*(\rho))$ eine exakte Form (bis auf ein Vielfaches von $\iota^*(\sigma)$ im Fall $\nu = n - 1$). Also $H^\nu(S^{n-1}) = 0$ für $\nu \neq n - 1$ und $H^\nu(S^{n-1}) = \mathbb{R} \cdot [\iota^*(\sigma)]$. \square

26.3 Das duale Poincare Lemma

Sei U sternförmig offen im \mathbb{R}^N . Sei $x_0 = 0$ der Sternmittelpunkt. Das Poincare Lemma besagt $H^\nu(U) = 0$ für $\nu \neq 0$ und $H^0(U) \cong \mathbb{R}$. Wir wollen analog $H_c^\nu(U)$ berechnen. Die erste überraschende Beobachtung: $H_c^N(U) \neq 0$. Ist $\omega \in A_c^N(U)$ von der Gestalt $\omega = d\rho$ für ein $\rho \in A_c^{N-1}(U)$, dann gilt

$$\int_U \omega = 0$$

(1.Variante des Satzes von Stokes für offene Teile des \mathbb{R}^N). Man erhält allgemeiner eine kanonische Abbildung

$$Tr : H_c^N(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

definiert durch $[\omega] \mapsto \int_U \omega$. Daher $\int_U \omega = \int_U (\omega + d\rho)$ für $\rho \in A_c^{N-1}(U)$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von Tr .

Behauptung: Die \mathbb{R} -lineare Abbildung Tr ist surjektiv.

Beweis: Andererseits ist für $\omega = \varphi(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$ und eine nichtverschwindende glatte Funktion $\varphi(x)$ mit kompaktem Träger in U und Werten in $[0, 1]$ automatisch $\omega \in A_c^N(U)$ mit $\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi > 0$.

Satz: Sei U sternförmig und offen im \mathbb{R}^N . Dann gilt $H_c^i(U) = 0$ für alle $i \neq N$ und

$$\boxed{Tr : H_c^N(U) \cong \mathbb{R}}.$$

Beweis: Sei $i \neq N$. Wir müssen dann zeigen, dass jede geschlossene Form $\omega \in A_c^i(U)$ von der Gestalt $\omega = d\rho$ für ein $\rho \in A_c^{i-1}(U)$. Der Fall $i = 0$ ist trivial, denn dann ist ω konstant auf U und wegen des kompakten Trägers K von ω sogar identisch Null⁴. Sei daher $i > 0$.

1.Schritt (geometrische Vorbereitung). Sei r_0 die Distanz von K zum abgeschlossen Komplement U^c . Dann gilt $r_0 > 0$. Für jeden Punkt⁵ $x \in S^{N-1}$ sei $R(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \lambda \cdot x \in K}(\lambda)$. Mit Hilfe (!) einer Partition der 1 auf S^{N-1} verschafft man sich C^∞ -Funktionen $a(x), b(x)$ auf S^{N-1} mit der Eigenschaft $R(x) < a(x) < b(x) < R(x) + r_0$. Das Intervall $(a(x), b(x))$ ist diffeomorph zum Intervall $(0, 1)$ vermöge des Diffeomorphismus $t \mapsto a(x) + t(b(x) - a(x))$. Dies liefert einen Diffeomorphismus $S^{N-1} \times (0, 1) \cong V$ für die offene Teilmenge

$$V = \{v \in \mathbb{R}^N \mid v = r \cdot x, x \in S^{N-1}, a(x) < r < b(x)\}$$

von U . Da $(0, 1)$ diffeomorph ist zu $(0, \infty)$ vermöge der Abbildung $t \mapsto \frac{1}{t} - 1$, ist V diffeomorph zu $\mathbb{R}^N \setminus 0$. Also verschwindet die Kohomologie $H^\bullet(V)$ fast immer (ausser in den Graden $\nu = 0$ und $\nu = N - 1$).

⁴ U ist nicht selbst kompakt. Sonst wäre U abgeschlossen und beschränkt im \mathbb{R}^N (Heine-Borel). Da \mathbb{R}^N zusammenhängend ist, würde folgen $U = \emptyset$ im Widerspruch zur Existenz des Sternmittelpunkts. Für $x \in U \setminus K$ ist dann $\omega(x) = 0$ und wegen der Konstanz identisch Null.

⁵Man zeigt leicht, dass $R(x)$ stetig von $x \in S^{N-1}$ abhängt.

2.Schritt (ein neues U). Zum Beweis können wir U durch die sternförmige offene Menge $\{v \in \mathbb{R}^N \mid v = r \cdot x, x \in S^{N-1}, r < b(x)\}$ ersetzen. Dann ist $V \subseteq U$ und $V \cap K = \emptyset$. Nach wie vor $\omega \in A_c^i(U)$. Somit genügt es $\rho \in A_c^i(U)$ zu konstruieren für das neue U .

3.Schritt (Abschneidefunktion). Wähle eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(U)$ mit $\varphi|_K = 1$. Ihr Träger sei K' . Es gilt $K \subseteq K' \subseteq U$. Setze $\psi = 1 - \varphi$.

4.Schritt. Wegen $i \neq 0$ und $d\omega = 0$ folgt aus dem gewöhnlichen Poincaré Lemma

$$\omega = d\eta \quad \text{für ein } \eta \in A^{i-1}(U) .$$

Dann gilt wegen $\omega|_V = 0$ (beachte $K \cap V = \emptyset$) also

$$d\eta|_V = 0 .$$

Da $i \neq N$ und somit $i - 1 \neq N - 1$ gilt $H^{i-1}(V) = 0$ (!) mit Ausnahme des Falls $i - 1 = 0$. Also für $i - 1 \neq 0$ somit

$$\eta|_V = d\tilde{\eta} \quad \text{für ein } \tilde{\eta} \in A^{i-2}(V) .$$

Dann gilt wegen $dd = 0$ auch

$$\omega = d\rho \quad , \quad \rho = \eta - d(\psi\tilde{\eta})$$

auf ganz U . Aber ausserhalb von $K' \subseteq U$ gilt $\psi = 1$. Also

$$\rho|_{U \setminus K'} = (\eta - d(\tilde{\eta}))|_{U \setminus K'} = 0 .$$

Also ist ρ die gesuchte Form. Sie hat Träger in dem Kompaktum K' .

5.Schritt (Der Fall $i - 1 = 0$). Verfährt man wie in Schritt 3, ist jetzt $\eta|_V = C$ konstant auf der zusammenhängenden Menge V . Zieht man diese Konstante von $\eta \in A^0(U)$ auf ganz U ab, gilt für $\rho = \eta - C$ immer noch $d\rho = \omega$, aber ρ hat jetzt kompakten Träger: $\rho \in A_c^0(U)$.

6.Schritt (Der Fall $i = N$). Wie in Schritt 4, nur dass wir zusätzlich zu $d\omega = 0$ und $\omega \in A_c^N(U)$ voraussetzen müssen

$$\int_U \omega = 0 ,$$

um $\rho \in A_c^{N-1}(U)$ mit $\omega = d\rho$ konstruieren zu können. Dann gilt nach dem Satz von Stokes

$$0 = \int_U \omega = \int_M \omega = \int_{\partial M} \eta$$

für die kompakte Mannigfaltigkeit $M = \{r \cdot x \mid x \in S^{N-1}, 0 \leq r \leq (a(x) + b(x))/2\}$, deren Rand $\partial M \subseteq V$ zu einer Sphäre in $\mathbb{R}^N \setminus 0$ diffeomorph ist. Somit ist wegen Lemma 26.2.2 die Klasse $[\eta] \in H^{N-1}(V)$ von η trivial, und man schliesst weiter wie in Schritt 4.

26.4 Poincare Dualität

Sei M ein Mannigfaltigkeit und $\eta \in A^i(M)$ und $\omega \in A^j(M)$. Dann gilt

$$d\eta = 0, d\omega = 0 \implies d(\eta \wedge \omega) = 0$$

(Produktformel). Gilt zusätzlich $\eta = d\rho$ oder $\omega = d\sigma$, dann ist

$$\eta \wedge \omega = d(\rho \wedge \omega) \quad \text{oder} \quad \eta \wedge \omega = d((-1)^{|\eta|} \eta \wedge \sigma)$$

sogar eine exakte Form. Daher definiert

$$[\eta] \cap [\omega] = [\eta \wedge \omega]$$

eine wohldefinierte \mathbb{R} -bilineare Abbildung, das sogenannte Cupprodukt

$$\boxed{H^i(M) \times H^j(M) \rightarrow H^{i+j}(M)} .$$

Das Cupprodukt macht $H^\bullet(M) = \bigoplus_i H^i(M)$ zu einem Ring.

Funktorialität: Ist $f : M \rightarrow N$ eine unendlich oft differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, dann definiert der Pullback $[\omega] \mapsto [f^*(\omega)]$ einen Pullback von Kohomologieklassen $f^* : H^i(N) \rightarrow H^i(M)$. Der Pullback

$$\boxed{f^* : H^\bullet(N) \rightarrow H^\bullet(M)}$$

definiert einen Ringhomomorphismus. Dies liefert einen Funktor von der Kategorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der \mathbb{R} -Algebren.

Variante: Ist eine der beiden Formen η, ω eine Form mit kompaktem Träger, dann ist auch $\eta \wedge \omega$ eine Form mit kompaktem Träger. Man erhält daher analog wie oben eine wohldefinierte \mathbb{R} -bilineare Abbildung

$$H^i(M) \times H_c^j(M) \rightarrow H_c^{i+j}(M) .$$

Allerdings ist $H_c^\bullet(-)$ kein Funktor, denn der Pullback erhält in der Regel nicht den kompakten Träger.

Annahme: Wir nehmen jetzt zusätzlich an M sei zusammenhängend von der Dimension N und orientierbar. Dann ist die Abbildung

$$Tr : H_c^N(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

eine wohldefinierte \mathbb{R} -Linearform. Man erhält auf diese Weise ein kanonische \mathbb{R} -bilineare Abbildung

$$H^i(M) \times H_c^{N-i}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

via $([\omega], [\eta]) \mapsto Tr([\omega \wedge \eta])$. Anders ausgedrückt liefert dies durch die Zuordnung $[\omega] \mapsto ([\eta] \mapsto Tr([\omega \wedge \eta]))$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\boxed{PD : H^i(M) \rightarrow H_c^{N-i}(M)^*} .$$

Kompatibilität bei Restriktionen: Sei $U \subseteq M$ eine offene Untermannigfaltigkeit und sei $j : U \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Sei $[\eta] \in H^i(M)$ und sei $[\omega] \in H_c^{N-i}(U)$ gegeben. Setze

$$j^*([\eta]) = [\eta|_U] \in H^i(U) \quad , \quad j_*([\omega]) = [NFS(\omega)] \in H_c^{N-i}(M) .$$

Dann sind $j^* : H^i(M) \rightarrow H^i(U)$ und $j_* : H_c^{N-i}(U) \rightarrow H_c^{N-i}(M)$ \mathbb{R} -lineare Abbildungen.

Behauptung: *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^i(M) & \xrightarrow{j^*} & H^i(U) \\ PD \downarrow & & \downarrow PD \\ H_c^{N-i}(M)^* & \xrightarrow{(j_*)^*} & H_c^{N-i}(U)^* \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis: Wähle $[\eta] \in H^i(M)$. Das Bild von $[\eta]$ im Diagramm rechts unten ist eine Linearform auf den Klassen $[\omega] \in H_c^{N-i}(U)$. Oben herum ist der Wert gegeben durch

$$\int_U \eta|_U \wedge \omega .$$

Unten herum ist der Wert gegeben durch

$$\int_M \eta \wedge NFS(\eta) .$$

Die beiden Integrale stimmen überein, da die Nullfortsetzung $NFS(\eta)$ ausserhalb von U verschwindet. \square

Kompatibilität mit Mayer-Vietoris: Dualisiert man die Mayer-Vietoris Sequenz, erhält man wieder eine lange exakte Sequenz. Schreibt man die gewöhnliche Mayer-Vietoris Sequenz darüber, kann man in den vertikalen Richtungen die Abbildungen PD betrachten. Aus der Kompatibilität mit Restriktionen folgt, dass alle Quadrate im folgenden Diagramm (mit Ausnahme des δ -Quadrats) kommutieren

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{\nu-1}(U) \oplus H^{\nu-1}(V) & \longrightarrow & H^{\nu-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^{\nu}(U \cup V) & \longrightarrow & H^{\nu}(U) \oplus H^{\nu}(V) & \longrightarrow & H^{\nu}(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_c^{N-\nu+1}(U)^* \oplus H_c^{N-\nu+1}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{N-\nu+1}(U \cap V)^* & \xrightarrow{\delta} & H_c^{N-\nu}(U \cup V)^* & \longrightarrow & H_c^{N-\nu}(U)^* \oplus H_c^{N-\nu}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{N-\nu}(U \cap V)^* \end{array}$$

Dass auch das δ -Quadrat kommutiert bleibt als Übungsaufgabe zu zeigen.

Das Fünfer-Lemma (siehe Skript LA II) zeigt daher: Sind die PD -Abbildungen Isomorphismen jeweils in den beiden rechten vertikalen und den beiden linken Vertikalen, dann ist auch die Abbildung PD in der Mitte ein Isomorphismus.

Dies zeigt den folgenden Satz durch Induktion nach der Zahl r der offenen Mengen U_i

Poincare Dualität: Sei M eine (zusammenhängende) orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension N und sei $M = \bigcup_{i=1}^r U_i$ eine endliche Überdeckung durch offene Teilmannigfaltigkeiten U_i . Wir nehmen an die Überdeckung sei zulässig in folgendem Sinn:

Alle endlichen Teildurchschnitte $U_i, U_i \cap U_j, U_i \cap U_{jk}, \dots$ usw. seien diffeomorph zu sternförmigen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^N .

Für alle i gilt dann Poincare Dualität in der Form

$$\boxed{PD : H^i(M) \cong H_c^{N-i}(M)^*},$$

und die Kohomologiegruppen sind endlich dimensionale \mathbb{R} -Vektorräume.

Beweis: Sei $M_i = \bigcup_{\nu=1}^i U_\nu$, dann gilt $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_r = M$, und die definierende Überdeckung von M_i ist zulässig. Man beweist dann leicht durch Induktion nach i die gemachte Aussage. Den Induktionsanfang liefert das Poincare Lemma und das duale Poincare Lemma. Hier muss man nur zeigen, dass $H^0(M) \in 1(H_c^N(M) \ni [\omega] \mapsto \int_M 1 \wedge \omega)$ ein Isomorphismus ist. Das ist aber klar!

Der Induktionsschritt von i nach $i+1$. Indem man die Mayer-Vietoris Sequenzen für $U = M_i$ und $V = U_{i+1}$ mit $U \cup V = M_{i+1}$ betrachtet, zeigt man Behauptung mittels des Fünfer-Lemmas! Beachte $U \cap V = \bigcup_{\nu=1}^i (U_\nu \cap U_{i+1})$ ist eine zulässige Überdeckung, und somit kann man wiederum per Induktion annehmen, dass Poincare Dualität für $U \cap V$ gilt.

Korollar: Sei U eine endliche Vereinigung von konvexen⁶ offenen Teilmengen des \mathbb{R}^N . Dann sind alle Kohomologiegruppen $H^i(U)$ endlich dimensional und es gilt $PD : H^i(U) \cong H_c^{N-i}(U)^*$.

Beweis: Eine Teilmenge des \mathbb{R}^N heisst konvex, wenn sie sternförmig ist bezüglich jedes ihrer Punkte als Sternmittelpunkt. Mit anderen Worten, wenn für alle $x, y \in U$ auch die verbindende Gerade $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$ in U liegt.

Offensichtlich gilt: Endliche Durchschnitte von konvexen offenen Mengen sind wieder konvex und offen. Somit ist eine endliche Überdeckung durch konvexe offene Mengen zulässig. Das Korollar folgt daher sofort aus der Poincare Dualität.

Mit derselben Methode zeigt man – indem man konvexe offene Menge durch geodätisch⁷ konvexe offene Mengen ersetzt – (wir verweisen hierzu auf Spivak Band 1)

Satz: Sei M eine zusammenhängende kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension N . Dann sind alle Kohomologiegruppen $H^i(M)$ endlich dimensionale \mathbb{R} -Vektorräume und es gilt

$$\boxed{PD : H^i(M) \cong H^{N-i}(M)}.$$

⁶Zum Beispiel sind offene Kugeln oder Quader konvex.

⁷Man wählt dazu eine Metrik auf M und kann damit Geodäten definieren als Ersatz für die Geraden im \mathbb{R}^N .

26.5 Ströme

Sei M eine zusammenhängende orientierbare N -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann hat man kanonische Abbildungen

$$A^i(M) \hookrightarrow A_c^{N-i}(M)^*$$

definiert durch $A^i(M) \ni \eta \mapsto T_\eta \in A_c^{N-i}(M)^*$ und

$$T_\eta(\omega) = \int_M \eta \wedge \omega \quad , \quad \omega \in A_c^{N-i}(M)$$

vollkommen analog zu den Abbildungen PD der Kohomologie. Man zeigt leicht, dass diese Abbildungen \mathbb{R} -linear und injektiv sind (mit Hilfe von Partitionen der 1 reduziert man das auf eine lokale Aussage!). Diese Abbildungen sind aber nicht surjektiv.

Definition: Den \mathbb{R} -Vektorraum $S^i(M) = A_c^{N-i}(M)^*$ nennen wir den Raum der (verallgemeinerten) i -Ströme⁸

$$\boxed{A^i(M) \subseteq S^i(M)} .$$

Man kann die Cartanableitung auf den Raum der Ströme ausdehnen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{i-1}(M) & \xrightarrow{d} & A^i(M) & \xrightarrow{d} & A^{i+1}(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & S^{i-1}(M) & \xrightarrow{d} & S^i(M) & \xrightarrow{d} & S^{i+1}(M) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

für $T \in S^i(M) = A_c^i(M)^*$ durch die Definition

$$\boxed{dT(\omega) := (-1)^{i+1} \cdot T(d\omega)} \quad , \quad \omega \in A_c^{N-i-1}(M)$$

für $\omega \in A_c^{N-(i+1)}(M)$ sowie $d\omega \in A_c^{N-i}(M)$.

Beweis: Für $T = T_\eta$ im Unterraum $A^i(M) \subseteq S^i(M)$ gilt nämlich $d\eta(\omega) = \int_M d\eta \wedge \omega = \int_M d(\eta \wedge \omega) - (-1)^i \int_M \eta \wedge d\omega = -(-1)^i \int_M \eta \wedge d\omega$ wegen des Satzes von Stokes und der Produktformel der Cartan Ableitung.

Wegen $ddT(\omega) = \pm dT(d\omega) = \pm T(dd\omega) = 0$ ist $(S^\bullet(M), d)$ ein Komplex! Unmittelbar aus der Definition und etwas linearer Algebra folgt, dass die Kohomologiegruppe des verallgemeinerten Ströme (S^\bullet, d) an der Stelle i nichts anderes ist als $H_c^{N-i}(M)^*$, während die Kohomologie des Differentialformenkomplexes $(A^\bullet(M), d)$ gerade $H^i(M)$ ist. Die natürliche Abbildung $(A^\bullet, d) \rightarrow (S^\bullet(M), d)$ induziert die Poincare Abbildungen $PD : H^i(M) \rightarrow H_c^{N-i}(M)^*$. Gilt für die Mannigfaltigkeit M Poincare Dualität, dann liefern beide Komplexe (Formen und Ströme) auf kanonische Weise dieselben Kohomologiegruppen!

⁸In der Literatur betrachtet man genau genommen einen Unterraum von $S^i(M)$, nämlich nur diejenigen \mathbb{R} -Linearformen auf $A_c^i(M)$, welche stetig sind bezüglich der Normen aller Banachräume $C^r(K)$ für alle r und alle Kompakta $K \subseteq M$. Die so definierten Ströme haben dann bessere Eigenschaft. Für unsere Zwecke reichen die verallgemeinerten Ströme in $S^i(M)$ bereits aus.

26.6 Beispiele für Ströme

Sei $f : L \rightarrow M$ eine Inklusion eines linearen Unterraumes L der Dimension

$$\dim(L) = k$$

in einem Euklidischen Raum $M = \mathbb{R}^n$ ⁹. Dann gilt trivialerweise

Lemma 1: L definiert einen Strom in $S^{\dim(M)-k}(M)$ vermöge

$$A_c^k(M) \ni \omega \mapsto \delta_L(\omega) = \int_L f^*(\omega) .$$

Wichtig ist hierbei nur, dass die Abbildung f eigentlich ist, das heisst Urbilder von Kompakta unter f bleiben kompakt. Dies impliziert $f^*(\omega) \in A_c^k(L)$, und somit ist das Integral $\int_L f^*(\omega)$ wohldefiniert.

Lemma 2: Es gilt $\boxed{d(\delta_L) = 0}$ ¹⁰.

Beweis: $d(\delta_L)(\omega) = \pm \delta_L(d\omega) = \pm \int_L f^*(d\omega) = \pm \int_L df^*(\omega) = \pm \int_{\partial L} f^*(\omega) = 0$ für $\omega \in A_c^{k-1}(M)$ nach dem Satz von Stokes. \square

Da für \mathbb{R}^n Poincare Dualität gilt und das Poincare Lemma, muss der geschlossene k -Strom δ_L auf \mathbb{R}^n notwendigerweise exakt sein falls $k \neq 0$, d.h. es gilt $\delta_L = dT$ für einen $(k-1)$ -Strom $T \in S^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen im vorliegenden Fall T explizit angeben. Bis auf eine Konstante handelt es sich um einen alten Bekannten: Beachte

$$M \setminus L \cong (\mathbb{R}^{n-k} \setminus 0) \times \mathbb{R}^k .$$

Wir nehmen an $k < n-1$. Sei $pr_1 : M \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \setminus 0$ die erste Projektion, und sei $r^2 = \sum_{i=1}^{n-k} x_i^2$. Wir haben in Lemma 26.2.1 eine nichttriviale Kohomologiekategorie von $M \setminus L$ gefunden im Grad $i = n-k-1$ gegeben durch die Kohomologiekategorie von

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = pr_1^* \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-k} x_i \cdot (*dx_i)}{r^{n-k}} \right) \in A^{n-k-1}(M \setminus L) .$$

Die Form σ ist geschlossen auf $M \setminus L$. Man kann sie nicht zu einer Differentialform auf ganz $M = \mathbb{R}^n$ fortsetzen, denn sie hat Singularitäten in dem linearen Unterraum $\{0\} \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n$. (Das muss natürlich auch so sein wegen des Poincare Lemmas!) Allerdings kann man σ zu einem Strom T_σ in $S^{n-k-1}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen!

Beweis: Definiere $T_\sigma \in S^{n-k-1}(\mathbb{R}^n)$ als die Linearform

$$T_\sigma(\omega) \mapsto \int_{M \setminus L} \sigma \wedge \omega \quad , \quad \omega \in A_c^{k+1}(M) .$$

⁹allgemeiner sei L eine Untermannigfaltigkeit von M , das heisst $f : L \rightarrow M$ sei eine eigentliche Immersion einer orientierbaren Mannigfaltigkeit L in eine Mannigfaltigkeit M (also etwas das lokal so aussieht wie die Inklusion eines linearen Teilraumes in einen Euklidischen Raum)

¹⁰dies gilt auch allgemeiner, falls L eine orientierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand ist

Für die Existenz des Integrals benutzen wir Polarkoordinaten $(\mathbb{R}^{n-k} \setminus 0) \times \mathbb{R}^k \cong S^{n-k-1} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^k$. So wird σ der Pullback der Form $\iota^*(\sigma)$ auf S^{n-k-1} unter der Projektion $(M \setminus L) \rightarrow S^{n-k-1}$. Schreibt man $\omega \in A_c^{k+1}(M)$ in Polarkoordinaten $\omega = \omega(v, r, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$, dann ist das Integral gegeben durch $\int_M \sigma \wedge \omega = \int_{S^{n-k-1}} \iota^*(\sigma) \wedge \left(\int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{R}^k} \omega(*, r, x_{n-k+1}, \dots, x_n) \right)$, ein wohldefinierter endlicher Wert!

Lemma 3: Für den Strom $T_\sigma \in S^{n-k-1}(M)$ definiert wie oben gilt

$$\boxed{dT_\sigma = \text{vol}(S^{n-k-1}) \cdot \delta_L} .$$

Beweis: Für $\omega = h(x) \cdot dx_{n-k+1} \wedge \dots \wedge dx_n + \dots$ aus $A^{n-k}(M)$ gilt $dT_\sigma(\omega) = -(-1)^{n-k+1} T_\sigma(d\omega) = \pm \int_{M \setminus L} \sigma \wedge d\omega = - \int_{M \setminus L} d(\sigma \wedge \omega)$ da $d\sigma = 0$ auf $M \setminus L$. Offensichtlich kann man im Integral $- \int_{M \setminus L} d(\sigma \wedge \omega)$ die Form ω wegen der speziellen Gestalt von σ obdA durch

$$\omega = h(x) \cdot dx_{n-k+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

ersetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} dT_\sigma(\omega) &= - \lim_{R \rightarrow 0} \int_{S^{n-k-1}} \int_R^\infty \int_L d(\sigma \wedge h(x)) \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \int_{S^{n-k-1}} \int_L \iota^*(\sigma) \wedge h(Rv, x_{n-k+1}, \dots, x_n) \\ &= \left(\int_{S^{n-k-1}} \iota^*(\sigma) \right) \int_L h(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n) dx_{n-k+1} \cdots dx_n \\ &= \text{vol}(S^{n-k-1}) \cdot \int_L f^*(\omega) \\ &= \text{vol}(S^{n-k-1}) \cdot \delta_L(\omega) . \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde der Satz von Stokes angewendet, und es ist eigentlich der Pullback der Form auf den Rand S^{n-k-1} gemeint!

26.7 Der Sternoperator

Auch für Ströme $T \in S^i(M)$ ist der Sternoperator definiert, nämlich durch

$$(*T)(\omega) = (-1)^{i(n-i)} \cdot T(*\omega) .$$

Ist T eine gewöhnliche Form $\eta \in A^i(M) \subseteq S^i(M)$, so stimmt $*T_\eta$ mit der Form $T_{*\eta}$ überein. Dies folgt aus dem zweiten Lemma in 27.1.

Lemma: Die Form $*T_\sigma \in S^{k+1}(M)$ ist exakt, insbesondere $d(*T_\sigma) = 0$

$$\boxed{*T_\sigma = dT_\rho} \quad , \quad \rho = \text{const} \cdot \frac{dx_{n-k+1} \wedge \dots \wedge dx_n}{r^{n-k-2}} .$$

Beweis: Integration in Polarkoordinaten zeigt wie beim Beweis von Lemma 2, dass $T_\rho(\omega) = \int_{M \setminus L} \rho \wedge \omega$ für $\omega \in A_c^{n-k}(M)$ wohldefiniert ist! Dann ist $dT_\rho(\omega) = -(-1)^k T_\rho(d\omega) = -(-1)^k \int_{M \setminus L} \rho \wedge d\omega = \int_{M \setminus L} (d\rho) \wedge \omega$, denn $\int_{M \setminus L} d(\rho \wedge \omega) = 0$ (wieder ein Limeschluss; der Grenzwert verschwindet diesmal wegen der schwächeren Divergenz des Integranden!). Aber

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{k+2-n}{r^{n-k-1}} \cdot dr \wedge dx_{n-k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \frac{k+2-n}{r^{n-k}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-k} x_i dx_i \right) \wedge dx_{n-k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n = (-1)^k (-1)^{k(n-k)} (k+2-n) (*\sigma). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} dT_\rho(\omega) &= \int_{M \setminus L} (-1)^k (-1)^{k(n-k)} (k+2-n) (*\sigma) \wedge \omega \\ &= (-1)^{k(n-k+1)} (k+2-n) \cdot (*T_\sigma)(\omega), \end{aligned}$$

wie behauptet mit $const = \frac{(-1)^{k(n-k+1)}}{k+2-n}$.

Kapitel 27

Metriken

27.1 Der Euklidische Sternoperator

Für Differentialformen auf offenen Teilmengen U eines Euklidischen Raumes \mathbb{R}^N haben wir bereits den Sternoperator definiert

$$* : A^i(U) \rightarrow A^{N-i}(U)$$

$$*\left(\sum_I \eta_I \cdot dx_I\right) = \sum_I \eta_I \cdot (*dx_I),$$

wobei $*dx_I$ die eindeutig bestimmte Form in $A^{N-i}(U)$ ist mit der Eigenschaft $dx_I \wedge *dx_J = \delta_{IJ} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$. Bis auf Vorzeichen gilt $*dx_I = \pm dx_J$ für $J = I^c$.

Lemma: Das Quadrat $*^2$ des Sternoperators ist $(-1)^{i(N-i)} \cdot id$.

Beweis: Für $I = \{1, \dots, i\}$ gilt $*(dx_I) = *(dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_N) = (-1)^{i(N-i)} dx_I$. Da für jedes J mit $|J| = i$ eine orthogonale Matrix σ existiert mit $\sigma^*(dx_I) = dx_J$ folgt die Behauptung aus der Existenz eines kommutativen Diagramms für lineare Abbildungen σ aus der orthogonalen Gruppe (siehe 27.3)

$$\begin{array}{ccc} A^i(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{*} & A^{N-i}(\mathbb{R}^N) \\ \sigma^* \downarrow & & \downarrow \det(\sigma) \cdot \sigma^* \\ A^i(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{*} & A^{N-i}(\mathbb{R}^N) \end{array} .$$

Alternativ folgt die Behauptung auch durch mühevolleres Nachrechnen.

Definition: Wir setzen $\delta = -(-1)^{(i+1)(n-i)} *d*$ (Koableitung) und $\Delta = \delta \circ d + d \circ \delta$ (Laplace). Dann gilt

$$\delta \circ \delta = 0$$

$$d\Delta = \Delta d, \quad \delta\Delta = \Delta\delta$$

wegen $\delta\delta = \pm *d* *d* = \pm *dd* = 0$ und $d\Delta = d\delta d = \Delta d$.

Lemma: Für $\eta, \omega \in A^i(\mathbb{R}^N)$ gilt $\eta \wedge (*\omega) = (-1)^{i(N-i)} \cdot (*\eta) \wedge \omega = \omega \wedge (*\eta)$.

Beweis: Aus $(-1)^{i(N-i)} \cdot (*dx_I) \wedge dx_J = dx_J \wedge (*dx_I) := \delta_{JI} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$ folgt $(*\eta) \wedge \omega = \sum_I \eta_I \omega_I (*dx_I) \wedge dx_I = (-1)^{i(N-i)} \sum_I \eta_I \omega_I dx_I \wedge (*dx_I) = (-1)^{i(N-i)} \eta \wedge (*\omega)$.

27.2 Exkurs in die lineare Algebra

Sei K ein Körper, in dem 2 invertierbar ist. Sei V ein K -Vektorraum der Dimension N . Sei e_1, \dots, e_N eine K -Basis und e_1^*, \dots, e_N^* eine Dualbasis. Ist

$$g : V \times V \rightarrow K$$

eine symmetrische nichtausgeartete K -Bilinearform auf V , dann induziert g auf kanonische Weise einen Isomorphismus $\varphi : V \rightarrow V^*$ durch

$$V \ni v \mapsto g(v, -) \in V^* .$$

Sei $g(e_i, e_j) = g_{ij}$. Die symmetrische Matrix (g_{ij}) ist invertierbar. Seien g^{ij} die Koeffizienten der inversen Matrix, d.h. $\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik}$. Setze $S = (g^{ij})$. Dann gilt $\varphi : Se_i \mapsto e_i^*$ und $g(v, w) = v' S^{-1} w$. Die Umkehrabbildung φ^{-1} definiert eine symmetrische Bilinearform $b = g \circ (\varphi^{-1}, \varphi^{-1}) : V^* \times V^* \rightarrow K$. Auf der Dualbasis ist b gegeben durch

$$b(e_i^*, e_j^*) = (Se_i)' S^{-1} (Se_j) = e_i' Se_j = g^{ij} .$$

Die zugeordnete Matrix der Bilinearform b auf V^* ist also die Matrix S gegeben, die Matrix der Bilinearform g auf V durch die Matrix S^{-1} .

Bemerkung: Ist $h \in Gl(V)$ ein Koordinatenwechsel (aufgefasst als Matrix zur Basis e_1, \dots, e_N), dann ist der zugehörige Koordinatenwechsel in $Gl(V^*)$ gegeben durch die Matrix $(h')^{-1}$ (aufgefasst als Matrix zur Basis e_1^*, \dots, e_N^*). h ist orthogonal für g genau dann wenn $(h')^{-1}$ orthogonal für b ist.

27.2.1 Fortsetzung auf alternierende Tensoren

Ist e_1^*, \dots, e_N^* eine Basis von V^* , dann bilden die e_I^* mit $T \subseteq \{1, \dots, N\}$ und $|I| = i$ eine Basis der alternierenden i -Formen $A^i(V) = \Lambda^i(V^*)$ auf V . Sei $f : V \rightarrow V$ eine K -lineare Abbildung (aufgefasst als Matrix bezüglich der Basis der e_i^*). Sei

$$\Lambda^i(f) : \Lambda^i(V^*) \rightarrow \Lambda^i(V^*)$$

der induzierte Pullback. Bezüglich der Basis der e_I^* schreibt sich $\Lambda^i(f)$ als Matrix.

Lemma: Für I, J mit $|I| = |J| = i$ ist der Koeffizient $\Lambda^i(f)_{I,J}$ gleich der Unterdeterminante der Matrix von f , aus der alle Zeilen und Spalten gestrichen werden ausser den Spalten aus I und den Zeilen aus J .

Beweis: Übungsaufgabe!

Aus dem Lemma ergibt sich unmittelbar für die Transponierte

Korollar: $\Lambda^i(f)' = \Lambda^i(f')$.

Beweis: Beachte $(\Lambda(f'))_{I,J} = \Lambda(f)_{J,I}$. Dies ist die Unterdeterminante von f getragen von den Spalten in J und den Zeilen in I . Der Wert der Unterdeterminante ändert sich nicht beim Transponieren. Die Transponierte kann aber aufgefasst werden als die Unterdeterminante von der transponierten Matrix f' getragen von den Zeilen in J und den Spalten in I . Der Wert ist daher $\Lambda^i(f')_{I,J}$.

Korollar: Für eine symmetrische $N \times N$ -Matrix $S = S'$ bezüglich der Basis der e_i^* ist $\Lambda^i(S) = \Lambda^i(S')$ eine symmetrische Matrix bezüglich der Basis der e_I^* .

Ist daher

$$b_S : V^* \times V^* \rightarrow K$$

eine symmetrische nichtausgeartete K -Bilinearform auf V , dann induziert b_S auf kanonische Weise symmetrische Bilinearformen

$$\Lambda^i(b_S) : \Lambda^i(V^*) \times \Lambda^i(V^*) \rightarrow K .$$

Diese induzierten Bilinearformen hängen nur von b ab und nicht von der Wahl der Basis e_i^* . Ist nämlich T die Basiswechselmatrix zu einer anderen Basis \tilde{e}_i^* , dann ist $\Lambda^i(T)$ die Basiswechselmatrix von den e_I^* zur Basis der \tilde{e}_I^* . Aus $T'ST = \tilde{S}$ folgt aber $\Lambda(T)'\Lambda^i(S)\Lambda^i(T) = \Lambda^i(\tilde{S})$ wegen $\Lambda^i(T') = \Lambda^i(T)'$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von $\Lambda^i(b_S)$.

1.Bemerkung: Bilden die e_i^* eine Orthogonalbasis von b_S (eine solche existiert immer), dann ist $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ eine Diagonalmatrix. Die zugehörige Form $\Lambda^i(b_S)$ hat dann die Eigenschaft

$$\Lambda^i(b_S)(e_I^*, e_J^*) = \left(\prod_{i \in I} \lambda_i \right) \cdot \delta_{IJ} \quad (\text{Kronecker-Delta}) .$$

Folgerung: Ist b_S nichtausgeartet, dann sind alle $\Lambda^i(b_S)$ nicht ausgeartet.

2.Bemerkung: Ist $h \in \text{Gl}(V)$ orthogonal bezüglich b_S , dann ist $\Lambda^i(h)$ orthogonal bezüglich $\Lambda^i(b_S)$, denn

$$\Lambda^i(T)'\Lambda^i(S)\Lambda^i(T) = \Lambda^i(T')\Lambda^i(S)\Lambda^i(T) = \Lambda^i(T'ST) = \Lambda^i(S) .$$

27.3 Der *-Operator einer Bilinearform

Eine nichtausgeartete symmetrische K -Bilinearform b auf $W = V^*$ induziert eine nichtausgeartete K -Bilinearform $\Lambda^i(g_S)$ auf $\Lambda^i(W)$, also einen Isomorphismus

$$u : \Lambda^i(W)^* \cong \Lambda^i(W) .$$

Das \wedge -Produkt definiert nichtausgeartete Paarungen $\Lambda^i(W) \times \Lambda^{N-i}(W) \rightarrow \Lambda^N(W)$. Identifiziert man $\Lambda^N(W)$ mit K indem man einen Erzeuger ω_0 auswählt (dies ist nicht kanonisch!), so erhält man einen Isomorphismus

$$v : \Lambda^{N-i}(W) \cong \Lambda^i(W)^* .$$

Die Zusammensetzung $*_b = u \circ v$ definiert einen Isomorphismus, den Sternoperator zur Metrik b

$$*_b : \Lambda^{N-i}(W) \cong \Lambda^i(W),$$

welcher nur von b und der Wahl des Erzeugers in $\Lambda^N(W)$ abhängt.

Bemerkung: Für eine lineare Isomorphismus $f : W \rightarrow W$ ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{N-i}(W) & \xrightarrow{*_b} & \Lambda^i(W) \\ \Lambda^{N-i}(f) \downarrow & & \downarrow \det(f) \cdot \Lambda^i(f) \\ \Lambda^{N-i}(W) & \xrightarrow{*_b} & \Lambda^i(W) \end{array}$$

für $\tilde{b}(v, w) = b(f^{-1}(v), f^{-1}(w))$.

Beweis: Das ist klar, denn v vertauscht mit einem beliebigen Diffeomorphismus $f : W \cong W$ bis auf einen Jacobi Determinantenfaktor $f^*(v(\eta))(x) = v(f^*(x))(x) \cdot \det(Df)(x)$. Dagegen gilt $f^*(u(\eta)) = u(f^*(\eta))$ für lineares f aus der orthogonalen Gruppe von b .

In Koordinaten: Ist $f_1 = e_1^*, \dots, f_N = e_N^*$ eine Orthogonalbasis von $W = V^*$ und b , dann wählen wir $f_{\{1, \dots, N\}}$ als Erzeuger von $\Lambda^N(W)$. Dann ist diese Abbildung gegeben als Komposition der Abbildungen

$$f_J \mapsto (*_{Eukl} f_J)^* \quad \text{und} \quad \left(\prod_{i \notin J} \lambda_i \right) \cdot (*_{Eukl} f_J)^* \mapsto *_{Eukl} f_J.$$

Hierbei ist $*_{Eukl} e_J$ definiert durch den Euklidischen Sternoperator $f_I \wedge (*_{Eukl} f_J) = \delta_{IJ} \cdot f_{\{1, 2, \dots, N\}}$.

Lemma: Es gilt $*_b(f_J) = \left(\prod_{i \notin J} \lambda_i^{-1} \right) \cdot (*_{Eukl} f_J)$.

27.4 Der Fall $K = \mathbb{R}$

In diesem Fall kann man einen kanonischen Erzeuger von $\Lambda^N(W)$ finden - zumindestens bis auf ein Vorzeichen (das heisst bis auf die Wahl einer Orientierung). Man wählt dazu eine Form $\omega_0 \in \Lambda^N(W)$, deren Länge vom Absolutbetrag 1 ist

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1 \cdots \lambda_N|}} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_N^*.$$

Mit dieser Wahl hängt der Sternoperator $* = *_{b, \varepsilon}$ nur ab von der Bilinearform b (oder g) und der Wahl einer Orientierung $\varepsilon = \pm 1$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} *_{b, 1}(1) &= \omega_0 \\ *_{b, 1}(e_I^*) &= \frac{\prod_{i \in I} \lambda_i}{\sqrt{|\lambda_1 \cdots \lambda_N|}} *_{Eukl}(e_I^*). \end{aligned}$$

Über $K = \mathbb{R}$ besitzt jede nichtausgeartete Bilinearform eine Sylvesterbasis, in der gilt $\lambda_i \in \{\pm 1\}$. Bezüglich einer Sylvesterbasis gilt $*_{b, 1} e_I^* = \text{sign}(\prod_{i \in I} \lambda_i) \cdot *_{Eukl}(e_I^*)$.

27.5 Der globale Fall

Eine Metrik auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ist eine symmetrische matrixwertige Funktion $g : U \rightarrow M_{N,N}(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

- $g(x) = (g_{ij}(x))$ mit $g_{ij}(x) \in C^\infty(U)$ (Symmetrie)
- $\det(g(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$ (nichtausgeartet)

Eine solche Metrik heisst Riemannsche Metrik auf U , wenn ausserdem gilt $g(x) > 0$ (positiv definit) für alle $x \in U$.

Allgemeiner: Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Atlas $M = \bigcup_{\nu \in I} U_\nu$ und $\psi_\nu : M_\nu \cong U_\nu \subseteq \mathbb{R}^N$. Eine Metrik g auf M ist eine Kollektion von Metriken $g(\nu, x)$ auf den Karten U_ν , welche sich unter den Kartenwechselabbildung $\psi_{\nu\mu}$ verheften, d.h.

$$g(\nu, x) = D\psi'_{\nu\mu}(x)g(\mu, \psi_{\nu\mu}(x))D\psi_{\nu\mu}(x) \quad \text{für } x \in U_{\nu\mu} .$$

Man nennt g eine Riemannsche Metrik auf M , wenn g in allen Karten positiv definite ist.

Ist die Mannigfaltigkeit M orientiert, dann definiert man wie im letzten Abschnitt einen globalen Sternoperator

$$* = *_{g,b} : A^i(M) \rightarrow A^{N-i}(M) .$$

Man zeigt leicht, dass dieser Operator wohldefiniert ist, also nicht von irgendwelchen Wahlen abhängt. Es gilt dann insbesondere

$$*_{g,1}(1) = \omega_0 \in A^N(M) ,$$

wobei die Differentialform ω_0 in lokalen Karten durch

$$\omega_0(x) = \sqrt{|g(x)|} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$$

gegeben ist. Dies liefert uns eine globale N -Form, welche durch die Metrik g festgelegt ist. Dies erlaubt es das Volumen einer Mannigfaltigkeit mit Metrik (M, g) zu erklären, falls M kompakt ist

$$\text{vol}_g(M) = \int_M \omega_0 .$$

Analog kann man auf (M, g) wieder die Operatoren $d, \delta, \Delta = d\delta + \delta d$ erklären (wie im Euklidischen Fall).

27.6 Kurvenlängen

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine glatte Kurve γ in M ist eine (mindestens einmal in lokalen Karten) stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Man erklärt dann die Länge einer Kurve γ durch

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\gamma^*(g)(t)} dt .$$

Hierbei wird der Pullback des symmetrischen Tensors g analog erklärt wie für alternierende Tensoren, nämlich mit Hilfe der lokalen Karten. Betrachte $t \in [0, 1]$ mit $\gamma(t) \in M_i$ und $\psi_\nu(\gamma(t)) \in U_\nu$. Dann sei per Definition

$$\gamma^*(g)(t) = D(\psi_\nu \circ \gamma)'(t)g(\nu, \psi_\nu u \circ \gamma(x))D(\psi_\nu \circ \gamma)(t) \in \mathbb{R} .$$

Wie man sofort mit Hilfe der Kettenregel sieht, hängt die so definierte reelle Zahl $\gamma^*(g)(t)$ nur von $t \in [0, 1]$ aber nicht von der Wahl der Karte M_ν ab, welche $\gamma(t)$ enthält. Da nach Annahme $g(\nu, \cdot)$ positiv definit ist, ist die reelle Zahl $\gamma^*(g)(t) > 0$ positiv und die Wurzel aus dieser Zahl hängt stetig von t ab. Somit ist das Längenintegral wohldefiniert.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^N$ und sei die Metrik gegeben durch die konstante Funktion $g(x) = E$ (Einheitsmatrix). Für eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ ist dann die Länge im obigen Sinn gegeben durch

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^N \dot{\gamma}_i(t)^2} \cdot dt$$

für $\dot{\gamma}_i(t) = \frac{d}{dt}\gamma_i(t)$.

Kapitel 28

Hilberträume

28.1 Messbare Funktionen

Sei X ein metrischer Raum und I ein Daniell Integral auf dem Verband $C_c(X)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Sei $L(X)$ der Verband der reellwertigen Lebesgue integrierbaren Funktionen. Wir gehen in diesem Abschnitt über zu den \mathbb{C} -wertigen Räumen $L(X, \mathbb{C})$ und $C_c(X, \mathbb{C})$. Damit sei gemeint, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil im entsprechenden Raum liegen. Setze $I(u + iv) = I(u) + iI(v)$.

Definition: Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heisst messbar, wenn es eine Folge $f_n \in C_c(X, \mathbb{C})$ gibt, welche punktweise fast überall (d.h. ausserhalb einer Nullmenge) gegen f konvergiert

$$f_n \rightarrow f \quad (f\ddot{u}) .$$

Offensichtliche Permanenzeigenschaften des Raumes $M(X, \mathbb{C})$ der messbaren Funktionen

1. Die messbaren reellwertigen Funktionen bilden einen Verband $M(X)$.
2. $M(X, \mathbb{C})$ ist eine \mathbb{C} -Algebra
3. $f \in M(X, \mathbb{C}) \implies \bar{f}$ und $|f| \in M(X, \mathbb{C})$
4. Aus $f_n \rightarrow f$ fast überall und $f_n \in M(X, \mathbb{C})$ folgt $f \in M(X, \mathbb{C})$.
5. $M(X)$ ist abgeschlossen unter abzählbarer Supremums- und Infimumsbildung.
6. Ist $|f| \leq g$ f.ü. und $f \in M(X, \mathbb{C})$ sowie $g \in L(X)$. Dann gilt $f \in L(X, \mathbb{C})$.

Zum Beweis: 1., 2. und 3. folgt sofort aus den Permanenzsätzen der Konvergenz und der entsprechenden Eigenschaft von $C_c(X)$. 4. folgt ähnlich mittels des Diagonalfolgentricks. 5. folgt unmittelbar aus 4. und der Abgeschlossenheit 1. unter endlichen Suprema (Infima). Zur letzten Aussage. ObdA f reellwertig. Für $f = f_+ + f_-$ genügt es f_{\pm} zu betrachten. Das heisst obdA $f \geq 0$. Wähle $f_n \rightarrow f$

(fü) mit $f_n \in C_c(X)$. Dann gilt $f_n \sqcap g \rightarrow f \sqcap g = f$ (fü). Wegen $|f_n \sqcap g| \leq g$ folgt $f \in L(X)$ wegen $f_n \sqcap g \in L(X) \sqcap L(X) \subseteq L(X)$ dank des Satzes von der dominierten Konvergenz.

28.2 L^2 -Räume

Seien f, g Funktionen mit Werten in \mathbb{C} . Dann gelten die trivialen Abschätzungen

1. $|\bar{f} \cdot g| \leq \sup(|f|, |g|)^2 = \sup(|f|^2, |g|^2)$
2. $|f + g|^2 \leq (|f| + |g|)^2 \leq 4 \cdot \sup(|f|, |g|)^2 = 4 \cdot \sup(|f|^2, |g|^2)$

Wir definieren $\mathcal{L}^2(X, I) = \mathcal{L}^2$

$$\mathcal{L}^2(X, I) = \left\{ f \in M(X, \mathbb{C}) \mid |f|^2 \in L(X) \right\}.$$

Lemma: \mathcal{L}^2 ist ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Beweis: $M(X, \mathbb{C})$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum. Daher folgt die Behauptung aus der zweiten obigen Abschätzung mit Hilfe der Permanenzeigenschaften 28.1.6 und 28.1.2. \square

Analog zeigt dieses Permanenzargument mit Hilfe der ersten trivialen Abschätzung $f\bar{g} \in L(X)$ für $f, g \in \mathcal{L}^2$. Somit ist

$$\langle f, g \rangle = I(\bar{f} \cdot g)$$

definiert für alle $f, g \in \mathcal{L}^2$. Dies definiert eine positiv semidefinite hermitesche Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wie in 10.1 folgt daraus das nächste Lemma für

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Lemma: Es gilt die Schwarzungleichung und die Dreiecksungleichung. Gleichheit wird nur für proportionale Vektoren angenommen.

Lemma: $\|f\| = 0 \iff$ Träger von f ist eine Nullmenge.

Beweis: \Leftarrow klar. \Rightarrow : $\text{vol}\{x \in X \mid |f|^2 \geq 1/n\} = 0$ für alle n wegen der Abschätzung $\frac{1}{n} \cdot \text{vol}(\cdot) \leq \|f\|^2$. Wegen Beppo Levi folgt im aufsteigenden Limes $\text{vol}\{x \in X \mid |f| > 0\} = 0$. \square

Die Nullfunktionen (Funktionen in \mathcal{L}^2 mit Träger in einer Nullmenge) bilden einen \mathbb{C} -Untervektorraum von \mathcal{L}^2 . Der Quotientenraum sei $L^2 = \mathcal{L}^2 / \text{Nullfunktionen}$. Die Werte $\|f\| = \|f\|_{L^2}$ und $\langle f, g \rangle$ hängen offensichtlich nur von der Äquivalenzklasse von f und g in L^2 ab. Es folgt aus dem letzten Lemma daher sofort

Korollar: $(L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2})$ ist ein normierter Raum.

28.3 Satz von Fischer-Riesz

Für lokalkompaktes X mit abzählbarer Basis ist $(L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2})$ vollständig.

Beweis: Schritt 1. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^2(X, I)$. Sei $\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon$ für $n, m > C(\varepsilon)$. Durch Übergang zu einer Teilfolge gilt obdA $\|f_n - f_m\|_{L^2} \leq 2^{-\min(n, m)}$ (wähle etwa $\tilde{f}_i = f_{n_i}$ mit $n_i > C(2^{-i})$). Wir müssen dann zeigen $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - f_m\|_{L^2} = 0$ für ein $f \in L^2(X, I)$. Gilt dies für die Teilfolge, dann auch für die ursprüngliche Folge.

Schritt 2. Nach Annahme gilt $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ für Kompakta K_i . Wir zeigen $f_n \rightarrow f$ punktweise (fü). Dazu genügt $f_n|_K \rightarrow f|_K$ punktweise (fü) für jedes $K = K_i$. Nach Bemerkung 23.4.4 liegt die charakteristische Funktion χ_K in $M(X)$ und nach 28.1.6 in $L(X)$, definiert also wegen $\chi_K = |\chi_K|^2$ eine Funktion in $L^2(X)$. $|f_n - f_{n+1}|$ ist messbar mit $|f_n - f_{n+1}|^2 \in L(X)$. Also $|f_n - f_{n+1}| \in L^2(X)$. Setze

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_K(x) \cdot |f_{\nu}(x) - f_{\nu+1}(x)| \in \mathbb{R} \cup \infty.$$

Für die Partialsummen $F_N \in L(X)$ gilt $F_N \nearrow F$. Beachte $\lim_N I(F_N) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle \chi_K, |f_{\nu} - f_{\nu+1}| \rangle$. Die Schwarzsche Ungleichung gibt als obere Schranke $\text{vol}(K) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_{\nu} - f_{\nu+1}\|_{L^2} \leq \text{vol}(K) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} < \infty$. Nach Beppo Levi ist daher F als Funktion von X nach $\mathbb{R} \cup \infty$ Lebesgue integrierbar. Die Menge $M = \{x \in X \mid F(x) = \infty\}$ ist nach 24.4.2 eine Nullmenge in K . Sei $x \in K \setminus M$. Dann konvergiert $F(x)$. Aus dem Cauchy Kriterium für Reihen und der Dreiecksungleichung folgt dann $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{\nu=n}^m |f_{\nu}(x) - f_{\nu+1}(x)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(x, \varepsilon)$. $f_n(x)$ ist daher für $x \in K \setminus M$ eine reelle Cauchyfolge, also konvergent. Auf $K \setminus M$ konvergiert somit $f_n(x)$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f , d.h. $f_n \rightarrow f$ (fü) auf X . Aus $f_n \in M(X, \mathbb{C})$ folgt $f \in M(X, \mathbb{C})$ nach 28.1.4. Aus $f_n \rightarrow f$ (fü) folgt $|f_n|^2 \rightarrow |f|^2$ (fü).

Schritt 3. Also $h_n = \inf(|f_n|^2, |f_{n+1}|^2, \dots) \nearrow |f|^2$ (fü) und h_n ist wegen der Permanenzeigenschaft 28.1.5 messbar. Wegen 28.1.6 und $|h_n| \leq |f_n|^2$ sowie $|f_n|^2 \in L(X)$ folgt dann $h_n \in L(X)$. Wegen $h_n \nearrow |f|^2$ folgt daher $|f|^2 \in L(X)$ (Beppo Levi), falls $\limsup I(h_n) < \infty$. Aber $I(h_n) \leq I(|f_n|^2) = \|f_n\|_{L^2}^2$ ist beschränkt (f_n ist eine Cauchyfolge!). Also kann Beppo Levi angewendet werden und man erhält

$$f \in \mathcal{L}^2(X, I)$$

sowie $I(|f|^2) = \lim_n I(h_n)$. Aus $I(h_n) \leq \|f_n\|_{L^2}^2$ folgt daher die Ungleichung (*)

$$I(|f|^2) \leq \sup_n \|f_n\|_{L^2}^2.$$

Schritt 4. Durch Übergang von $f_n \rightarrow f$ zur Folge $f_n - f_m \rightarrow f - f_m$ (für $n \geq m$ und festes m) zeigt das Beppo Levi Argument (*) des zweiten Schritts vollkommen analog $I(|f - f_m|^2) \leq \sup_{n \geq m} \|f_n - f_m\|^2 \leq 2^{-2m}$. Das heisst

$$\|f - f_m\|_{L^2} \leq 2^{-m}.$$

28.4 $C_c(X, \mathbb{C})$ liegt dicht

X sei lokal kompakt und abzählbar im Unendlichen. Dann gilt

$$C_c(X, \mathbb{C}) \text{ liegt dicht in } (L^2(X, I), \|\cdot\|_{L^2}).$$

Beweis: Für jedes $f \in L^2(X, \mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $g \in C_c(X, \mathbb{C})$ finden mit $I(|g - f|^2) < \varepsilon$. ObdA f reell. Wegen $\chi_{K_i} \cdot f \rightarrow f$ (in der L^2 -Norm) hat f obdA kompakten Träger.

Beachte $\lim_n \inf(n, f) \rightarrow f$ in $L^2(X, I)$. Somit ist obdA f durch eine Konstante C nach oben beschränkt. Analog dann auch nach unten. Man kann also f durch solche Abschneidungen \tilde{f} in der L^2 -Norm beliebig gut approximieren. Es gilt $|\tilde{f}| \leq C = n$. Analog kann man $g \in C_c(X)$ abschneiden und erhält dadurch wieder eine Funktion $\tilde{g} \in C_c(X)$. Dann gilt

$$\|\tilde{f} - \tilde{g}\|^2 \leq 2C \cdot I(|\tilde{f} - \tilde{g}|) \leq 2C \cdot I(|f - g|) < \varepsilon$$

falls g so gewählt werden kann, dass gilt $I(|f - g|) < \varepsilon/2C$. Beachte $|f - g|$ ist messbar, beschränkt mit kompaktem Träger, also integrierbar nach 28.1.6. Aber $I(|f - g|) \leq I(|f - h|) + I(|h - g|)$; der erste Term kann durch eine Funktion $h \in B^+(X)$ beliebig klein gemacht werden, der zweite dann durch geeignete Wahl einer Funktion $g \in C_c(X)$. Also existiert $g \in C_c(X)$ mit $I(|f - g|) < \varepsilon/2C$.

28.5 Der Folgenraum $L^2(\mathbb{Z})$

Wir betrachten nun den diskreten metrischen Unterraum $X = \mathbb{Z}$ (versehen mit der Einschränkung der Metrik von \mathbb{R}). Eine Teilmenge von \mathbb{Z} ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist. Somit

$$C_c(X, \mathbb{C}) = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid a(n) = 0 \text{ für fast alle } n\}.$$

Das Integral

$$I(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)$$

auf $C_c(\mathbb{Z})$ ist ein Daniell-Integral. Der Raum $M(X, \mathbb{C})$ ist der Raum aller Folgen $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, der Raum $L(X, \mathbb{C})$ ist der Unterraum aller absolut konvergenten Folgen (siehe Übungsaufgabe Ana II). Wie man unmittelbar sieht, gilt

$$L^2(X, I) = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)|^2 < \infty\}$$

sowie

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a(n)} \cdot b(n).$$

Die Funktionen

$$f_\nu(n) = \delta_{\nu n} \in C_c(\mathbb{Z})$$

haben die Eigenschaften

- $\langle f_\nu, f_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu}$ (Orthogonalität).
- Für alle $f \in L^2(\mathbb{Z})$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche \mathbb{C} -Linearkombination g der f_ν mit $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$ (Dichtigkeit).

28.6 Orthonormalbasen

Ein Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein vollständig normierter Raum, dessen Norm $\|v\|$ durch ein positiv definites hermitesches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist

$$\boxed{\|v\|^2 = \langle v, v \rangle}.$$

Beispiel: $L^2(X, I)$ für lokalkompaktes X mit abzählbarer Basis.

Definition: Eine (abzählbare) Hilbertraum-Basis¹ f_n ($n \in \mathbb{Z}$) eines Hilbertraums H ist per Definition eine Folge von Vektoren $v_n \in H$ mit der Eigenschaft

- Orthonormalität: $\langle v_\nu, v_\mu \rangle = \delta_{\nu, \mu}$ (Kronecker Delta)
- Dichtigkeit: Für alle $f \in H$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche \mathbb{C} -Linearkombination g der v_ν so dass gilt $\|f - g\| < \varepsilon$.

Die erste Eigenschaft impliziert die lineare Unabhängigkeit der Vektoren v_ν : Aus $g = \sum_n a(n)v_n = 0$ (endliche Summe) folgt $a(m) = \langle g, v_m \rangle = 0$ für alle m .

Satz: Ist v_ν eine abzählbare Hilbertraum-Basis eines Hilbertraumes $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dann induziert $L^2(\mathbb{Z}) \ni a \mapsto \sum_n a(n) \cdot v_n$ einen isometrischen Isomorphismus von Hilberträumen

$$\boxed{i : L^2(\mathbb{Z}) \cong H}.$$

Die Umkehrabbildung ordnet einem Vektor v die Folge $a(n) = \langle v_n, v \rangle$ zu.

Beweis: Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren v_n ist die Abbildung i auf dem Teilraum $C_c(\mathbb{Z}) \subseteq L^2(\mathbb{Z})$ wohldefiniert (fast alle $a(n)$ sind Null) und es gilt wegen der Orthonormalität

$$\|i(a)\|^2 = \left\langle \sum_n a(n) \cdot v_n, \sum_m a(m) \cdot v_m \right\rangle = \sum_n |a(n)|^2 = \|a\|_{L^2(\mathbb{Z})}^2.$$

$C_c(\mathbb{Z})$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{Z})$. Wegen der Isometreeigenschaft lässt sich daher die Abbildung i durch Limesbildung auf ganz $L^2(\mathbb{Z})$ wohldefiniert fortsetzen: Für $a \in L^2(\mathbb{Z})$ wähle $a_n \rightarrow a$ im L^2 -Sinn mit $a_n \in C_c(\mathbb{Z})$. Dann ist $i(a_n)$ eine Cauchyfolge in H wegen $\|i(a_n) - i(a_m)\| = \|i(a_n - a_m)\| = \|a_n - a_m\|$. Ihr Grenzwert sei $i(a)$. Man sieht sofort, dass i linear ist. Es gilt $\|i(a)\| = \lim_n \|i(a_n)\| = \lim_n \|a_n\| = \|a\|$. Das Bild von i ist daher abgeschlossen in H und $L^2(\mathbb{Z})$ ist isomorph zu B .

Aus der Annahme folgt, dass das Bild B einen dichten Teilraum enthält. Das heisst für $f \in H$ existiert ein $g \in B$ mit $\|f - g\| < \varepsilon$. Somit gibt es eine Folge von $g_n \in B$ welche gegeben f konvergiert. Da B abgeschlossen ist, folgt $f \in B$. Daher ist i surjektiv.

¹Es handelt sich dabei nicht um eine Basis im Sinne der linearen Algebra.

28.7 L^2 -Fourier Transformation

Mittels der Parameterisierung

$$t \rightarrow \exp(2\pi it)$$

entsprechen Funktionen g auf dem Einheitskreis $X = S^1$ periodischen Funktionen $f(t) = g(\exp(2\pi it))$ auf \mathbb{R} mit der Periode 1 und umgekehrt. Der Raum $C_c(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{C})$ kann dabei mit dem Raum aller stetigen periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t+1) = f(t)$ identifiziert werden. Das Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

definiert ein Daniell-Integral auf $C_c(X)$. Sei I das zugehörige Lebesgue Integral.

Satz Die Funktionen $\chi_n(t) = \exp(2\pi int)$ definieren eine Hilbertraum-Basis von $L^2(S^1, I)$. Das heisst: Jede Funktion $f \in L^2(S^1)$ schreibt sich als L^2 -Limes

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) \exp(2\pi it)$$

mit

$$a(n) = \int_0^1 f(t) \exp(-2\pi int) dt$$

und es gilt die *Plancherel Formel*

$$\sum_n |a(n)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Die Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) \exp(2\pi it)$ konvergiert punktweise für alle $f \in C^2(S^1)$.

Beweis: Nach 28.6 genügt es zu zeigen, dass die $\chi_n(t) = \exp(2\pi int)$ eine Hilbertraumbasis von $L^2(S^1, I)$ bilden. Der Rest folgt dann aus $i : L^2(\mathbb{Z}) \cong L^2(S^1, I)$.

Orthonormalität.

$$\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \int_0^1 \exp(2\pi ikt) dt$$

für $k = m - n$. Für $k = 0$ ist das Integral gleich 1 und für $k \neq 0$ gleich $(2\pi ik)^{-1} \exp(2\pi ikt)|_0^1 = 0$ nach 15.2.

Dichtigkeit. Der von den endlichen Linearkombinationen $g(t)$ der Funktionen $\chi_n(t)$ aufgespannte \mathbb{C} -Untervektorraum definiert eine \mathbb{C} -Algebra A in $C(X, \mathbb{C})$. Offensichtlich trennt die Funktion $\chi_1 = \exp(2\pi it)$ die Punkte von S^1 . Also gibt es für jede Funktion $f \in C(X, \mathbb{C})$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $g(t) \in A$ mit

$$\|f - g\|_{L^2}^2 \leq \text{vol}(S^1) \cdot \sup_{t \in S^1} |f(t) - g(t)|^2 < \varepsilon$$

wegen des Satzes von Stone-Weierstrass (nächster Paragraph). Andererseits liegt $C(X, \mathbb{C})$ dicht in $L^2(X, \mathbb{C})$ nach 28.4, und damit auch bereits A .

28.8 Stone-Weierstrass

Sei X kompakt und sei $C(X, \mathbb{C})$ der Banachraum der stetigen \mathbb{C} -wertigen Funktion mit der Supremumsnorms $\|\cdot\|_\infty$ (siehe 18.1). Betrachte $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$ mit

- A ist eine \mathbb{C} -Unteralgebra von $C(X, \mathbb{C})$, insbesondere $1 \in A$
- $f \in A \implies \bar{f} \in A$
- Für $x \neq y$ in X existiert $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$ (Punktentrennung)

Hat A diese Eigenschaft, dann auch der Abschluss \bar{A} von A in $C(X)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Dies folgt aus den bekannten Permanenzsätzen aus §7 der punktweise Limesbildung von Funktionen. Der Abschluss \bar{A} ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $C(X)$, die A enthält. Beachte

$$g \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f \in A \text{ mit } \|g - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Satz: Ist A abgeschlossen in $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ mit obigen Eigenschaften und ist X kompakt, dann gilt $A = C(X)$.

Beweis: Schritt 1. A ist ein Verband. Dazu genügt $f \in A \implies |f| \in A$ (siehe Definition von \sqcap, \sqcup auf Seite 176). Dazu genügt es aus $0 \leq h = f \cdot \bar{f} \in A$ eine positive Wurzel $+\sqrt{h} \in A$ ziehen zu können. Gilt $0 < c_1 \leq h \leq c_2 < 1$, dann schreibt sich $h = 1 - g$ mit $\|g\|_\infty < 1$ und die Taylorentwicklung $\sqrt{h} = 1 - \frac{1}{2}g + \dots$ konvergiert in $C(X)$ nach 16.11. Ersetzt man ein beliebiges nichtnegatives $h \in A$ durch $c \cdot (h + d)$ mit kleinem positiven Konstanten c, d , kann man daher aus h die Wurzel in A ziehen. Da man aus c die Wurzel ziehen kann, existiert $\sqrt{h + d} \in A$. Im Limes $d \rightarrow 0$ folgt $\sqrt{h} \in A$. Wir haben dabei mehrfach benutzt, dass A in $C(X)$ unter Limesbildung abgeschlossen ist!

Schritt 2. Gegeben $g \in C(X)$ und $\varepsilon > 0$. Da A Punkte trennt und eine Algebra ist, findet man für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine Hilfsfunktion $f_{x,y} \in A$ mit $f_{x,y}(x) = g(x)$ und $f_{x,y}(y) = g(y)$. Bei festem x gibt es dann zu jedem y eine offene Umgebung $V(y)$ von y mit $\sup_{y' \in V(y)} |f_{x,y}(y') - g(y')| < \varepsilon$. Endlich viele $V(y_1), \dots, V(y_m)$ der $V(y)$ überdecken X . Also gilt

$$F_x(x) = g(x) \quad , \quad F_x(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall y \in X)$$

für $F_x = \inf(f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_m})$ in A (Verbandseigenschaft). Für jedes x gibt es eine offene Umgebung $U(x)$ mit $\sup_{x' \in U(x)} |g(x') - F_x(x')| < \varepsilon$. Endlich viele $U(x_1), \dots, U(x_n)$ überdecken X . Es folgt

$$f(x) > g(x) - \varepsilon \quad , \quad f(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall x, y \in X)$$

für $f = \sup(F_{x_1}, \dots, F_{x_n}) \in A$. Das heisst

$$\|g - f\|_\infty < \varepsilon \quad , \quad f \in A.$$

Schritt 3. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, gibt es eine Folge $f_n \in A$ mit $g = \lim_n f_n$. Also $g \in \bar{A}$. Da A abgeschlossen ist, folgt $g \in A$. Daher gilt $C(X) = A$.

28.9 *Orthoprojektion

Sei $B \subseteq H$ ein abgeschlossener \mathbb{C} -Untervektorraum eines beliebigen Hilbertraums H . Sei v ein Vektor aus H . Wir betrachten den Abstand von v zur abgeschlossenen Teilmenge $B \subseteq H$

$$d := d_B(v) = \inf_{p \in B} \|v - p\| .$$

Wähle irgend eine Folge $p_n \in B$ mit $\|q_n\|^2 \rightarrow d^2$ für $q_n = v - p_n$. Dann gilt

$$\|v - \frac{p_n + p_m}{2}\| \leq \left\| \frac{v - p_n}{2} \right\| + \left\| \frac{v - p_m}{2} \right\| \rightarrow d/2 + d/2 = d$$

für $n, m \rightarrow \infty$. Also $\|q_n + q_m\|^2 \rightarrow (2d)^2$. Aus der Binomialformel für Skalarprodukte

$$\|q_n - q_m\|^2 = 2\|q_n\|^2 + 2\|q_m\|^2 - \|q_n + q_m\|^2$$

folgt daher $\|q_n - q_m\|^2 \rightarrow 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Die q_n definieren daher eine Cauchyfolge, welche in dem vollständigen Raum H notwendiger Weise konvergiert: $q_n \rightarrow q$. Der Grenzwert q ist eindeutig und hängt nicht von Wahl der Folge $q_n = v - p_n$ ab (dies sieht man durch Mischen solcher Folgen p_n).

Folgerung: Das Infimum $d_B(v) = \inf_{p \in B} d(v, p)$ wird von einem eindeutig bestimmten Punkt $p = v - q$ aus B angenommen. Wir schreiben

$$p = p(v) \in B .$$

Offensichtlich gilt $p(v) = v$ für $v \in B$, also ist p ein Projektor $p^2(v) = p(v)$.

Für $v \in H$, $p = p(v)$ sowie $q = v - p(v)$ gilt $d_B(v)^2 = \|q\|^2$. Es folgt

$$\langle b, q \rangle = 0 \quad \forall b \in B ,$$

denn sonst gäbe es ein t mit $d_B(v)^2 \leq \|q - tb\|^2 < \|q\|^2$ (die Ableitung nach t im Punkt $t = 0$ ist dann nämlich obdA reell und negativ). Ein Widerspruch! Also liegt q im Orthokomplement $Q = B^\perp$ von B .

Korollar: Für abgeschlossene \mathbb{C} -Unterräume B eines Hilbertraumes H gilt

$$H = B \oplus B^\perp .$$

Übungsaufgabe: Zeige $p : H \rightarrow B$ ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\langle p(v), w \rangle = \langle v, p(w) \rangle$. Benutze z.B. Satz 28.10.1 angewendet auf den Hilbertraum B .

28.10 *Das stetige Dual

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein beliebiger Hilbertraum mit Norm $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$. Das positiv definite hermitesche Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert eine kanonische \mathbb{C} -antilineare Abbildung

$$j : H \longrightarrow \left(Hom_{stetig}(H, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{op} \right)$$

in den Raum der stetigen \mathbb{C} -linearformen auf H vermöge

$$j(v)(w) = \langle v, w \rangle .$$

Die Operatornorm der linearen Abbildung $j(v)$ ist definiert durch

$$\|j(v)\|_{op} = \sup_{v \neq 0} \frac{|j(v)|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\|} \leq \|v\|$$

wegen der Schwarzschen Ungleichung (die in jedem Hilbertraum gilt). Das Supremum wird im Fall $v \neq 0$ aber tatsächlich bei $w = v$ angenommen. Es folgt

Lemma: Die obige Abbildung j ist eine \mathbb{C} -antilineare injektive Isometrie, d.h.

$$\boxed{\|j(v)\|_{op} = \|v\|} .$$

28.10.1 *Autodualität

j ist ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $T \in Hom_{stetig}(H, \mathbb{C})$ eine stetige nichttriviale \mathbb{C} -Linearform auf dem Hilbertraum $(H, \|\cdot\|)$. Der Kern

$$B = Kern(T)$$

ist ein abgeschlossener Unterraum von H , daher gilt

$$H = B \oplus B^\perp .$$

T induziert einen Isomorphismus $B^\perp \cong \mathbb{C}$. Wähle $v \in B^\perp$ von der Länge $\|v\| = 1$. Jeder Vektor u aus H schreibt sich dann in der Form $u = \lambda \cdot v + w$ für ein $w \in B$ mit $\langle v, w \rangle = 0$. Für $\bar{c} = T(v) \in \mathbb{C}$ gilt dann $T(u) = \lambda T(v) + T(w) = \lambda T(v) = \lambda \bar{c} \langle v, v \rangle = \langle cv, \lambda v + w \rangle = \langle cv, u \rangle$. Somit $T = j(cv)$. Also ist j surjektiv.

Anhang A

Anhang – Bernoulli Polynome

Nachfolgend eine Tabelle der Bernoulli-Polynome von 0 bis 10:

Ordnungszahl	Polynomschreibweise	Faktorisierung
0	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}(x-1)(2x-1)x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)x$
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$
7	$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6} \cdot x$	$\frac{1}{6}(x-1)(2x-1)(3x^4-6x^3+3x+1)x$
8	$x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}$	identisch mit Polynomschreibw.
9	$x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x$	$\frac{1}{10}(x-1)(2x-1)x$ $\cdot (5x^6 - 15x^5 + 5x^4 + 15x^3 - x^2 - 9x - 3)$
10	$x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}$	identisch mit Polynomschreibw.

A.1 Hinweise für Maple-Benutzer

Maple bietet eine sehr einfache Möglichkeit, die Bernoulli-Polynome auszugeben. Über den Befehl

```
bernoulli(grad, x);
```

wobei `grad` der gewünschte Grad des Polynoms ist, erhält man das Bernoulli-Polynom. Eine Faktorisierung wie in obiger Tabelle erhält man durch die Sequenz

```
factor(bernoulli(grad,x));
```


Anhang B

Anhang – Hinweise für Maple-Benutzer

B.1 Allgemeine Hinweise

Maple, als neuer, interessanter Ansatz zur Lösung von (komplexen) mathematischen Methoden, bietet bereits im Grundstudium (und sogar während der Oberstufe) interessante Möglichkeiten die Voraussetzungen einer Aufgabe zu visualisieren. Allerdings sind einige programmiertechnische Grundlagen Voraussetzungen, die allerdings schnell erlernt sind. Im nachfolgenden sollen einige zentrale Befehle und Routinen beschrieben werden, die bei der Erstellung der in diesem Skript vorhandenen Visualisierungen verwendet wurden. Ein Einführungsskript zur Mapleprogrammierung findet man unter anderem unter folgenden URLs:

- <http://www.physik.uni-regensburg.de/edv/schriften/maple/>
- <http://saaz.lanl.gov/Maple/MapleWHome.html>
- <http://www.rz.uni-hohenheim.de/anw/c-alg/maple/kurs/maplekurs.html>
und <http://www.rz.uni-hohenheim.de/anw/c-alg/maple/kurs/tutorial.html>
- <http://www.uni-essen.de/hrz/mathe/maple/>
- <http://www-math.cc.utexas.edu/math/Maple/Maple.html>
- <http://www.links2go.com/topic/Maple>

B.2 Quickstart in Maple

B.2.1 Semikolon und Doppelpunkt - wird schnell vergessen

Jeder Befehl in Maple wird entweder durch ein Semikolon (auch Strichpunkt genannt, also `;`) oder einem Doppelpunkt (`:`) beendet. Im ersten Falle wird das Ergebnis ausgegeben, im letzteren wird es unterdrückt.

Ist man nicht so geübt in Programmiersprachen wie C oder C++, so vergißt man

gerne dieses Zeichen am Ende jeder Zeile. Maple quittiert dies dann mit der Fehlermeldung **Warning, premature end of input**. Taucht also diese Meldung auf und jegliche Ausgabe wird unterdrückt, dann sollte man mal auf die Endungen der Befehle schauen, ob da nicht vielleicht etwas „wichtiges“ fehlt.

B.2.2 Restart und with - so fängt es an

Der Befehl

```
> restart;
```

löscht alle Zuweisungen (von Variablen) und startet die internen Rechenroutinen neu. Es empfiehlt sich, diesen Befehl standardmäßig immer am Anfang eines Dokumentes einzufügen, da man so beim weiteren Programmieren durch „Durchdrücken“ der Eingabetaste von Anfang an, alle Befehle frisch auslöst, und somit schnell die Übersicht wieder gewinnen kann, falls sie denn einmal verloren gegangen ist. Meist folgt auf den **restart**-Befehl gleich ein Laden von speziellen Paketen. Dies geschieht durch den Befehl

```
> with(Paketname);
```

Zum Beispiel existieren folgende Pakete in der bei der Vorlesung aktuellen Version:

- plots
- linalg
- student
- geom3d
- ...

B.2.3 Plot - Zeichnen im Zweidimensionalen

Das Zeichnen von einer Funktion geht relativ zügig von statten. So zeichnet die Befehlssequenz

```
> restart:
> plot (x^2, x=0..2);
```

die Parabel zweiter Ordnung von den x -Werten 0 bis 2. Auch komplexere Funktionen, wie z. B.

```
> restart:
> plot (sum(x^n/n!, n=0..infinity), x=1..4);
```

werden zügig ausgegeben.

B.3 Problemlösungen für Fortgeschrittene

B.3.1 Das Zeichnen einer Folge

Definiert man eine Funktion durch

```
> f := x -> 1/x;
```

und zeichnet diese dann mit dem Befehl

```
> plot (f(x), x=1..10, style=point);
```

so stellt man fest, daß dies fast die Ausgabe einer Folge ist. Allerdings werden auch Werte aus dem Definitionsbereich außerhalb von \mathbb{N} verwendet. Somit ist diese Darstellung nicht verwendbar. Abhilfe schafft hier die Verwendung folgender Routine:

```
> restart:
> f := x-> 1/x;
> liste := []:
  for i from 1 to 10 do
    liste := [op(liste), [i, f(i)]];
  od:
  liste;
> plot (liste, x=1..10, style=point);
```

Aus Optimierungsgründen kann man die Funktion auch durch

```
> ...
> f := x->evalf(1/x);
> ...
```

definieren. Da zum Zeichnen so oder so nur eine endliche Genauigkeit zur Verfügung steht, muß man nicht die unendliche Genauigkeit von Maple zur Berechnungszeit verwenden. Im Falle, daß die standardmäßige Genauigkeit von 10 Stellen nach dem Komma nicht ausreicht, kann man diese mit dem Befehl

```
> Digits := 20;
```

wie im Beispiel auf 20 Stellen erhöhen.

Index

- $\sum_{n=0}^N q^n$, 42
- $\frac{1}{n}$, 33
- $(1 + \frac{1}{n})^n$, 44
- $\sum_{n=0}^{\infty} 1$, 42
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, 42
- ε - δ -Kriterium, 70
- $f''(x) = -f(x)$, 92
- $f'(x) = c \cdot f(x)$, 125
- $f'(x) = g(x)$, 125
- $o((x - \xi)^n)$, 81
- q^n , 33
- über, 44
 - Beispiele, 44
- Abbildung
 - bijektive, 47
 - kontraktiv, 60
- Ableitung
 - 1. Ableitung = 0, 85
 - exp, 91
 - Kettenregel, 96
 - Logarithmus, 95
 - Monotonie, 94
 - Polynome, 88
 - Rechenregeln, 87, 88
- absolute Konvergenz, 44, 47
- Anordnung
 - von \mathbb{C} , 26
- Anordnungsaxiome
 - Folgerung, 19
- Assoziativgesetz, 15
- Axiom, 15, 19
- Beispiel
 - für „über“, 44
 - für das Binomialtheorem, 44
 - für Fakultät, 44
 - Stetigkeit, 65
- Bernoulli
 - Polynome, 115
 - Ungleichung, 28
- beschränkt, 36
- Beschränktheit
 - Cauchyfolgen, 31
 - von stetigen Funktionen, 72
- Betragsfunktion, 24
- Binomialtheorem, 44
- binomische Formel
 - Anwendung von Taylor, 110
- Cauchy
 - folge, 30
- Cauchyfolge, 30, 36
 - Beschränktheit, 31
 - Konvergenz, 31
 - Teilfolge, 31
- Cosinus, 92
- Definition
 - \mathbb{R}^n , 53
 - \mathbb{C} , 25
 - \mathbb{N} , 20
 - Abbildung, 12
 - Ableitung, 82
 - Cauchyfolge, 30, 57
 - cauchyvollständig, 58
 - Cosinus, 92
 - diffbar, 79
 - n-mal, 89
 - differenzierbar, 79
 - Differenzierbarkeit, 82
 - eulersche Zahl, 44
 - exp, 44
 - Folge, 29
 - folgenkompakt, 59
 - Grenzwert, 30
 - gute Mengen, 11
 - Integral, 75

- Intervall, 19
- Körper, 15
- Konvergenz, 30
- Limes, 58
- natürliche Zahlen, 20
- Norm in \mathbb{R}^n , 53
- Nullfolge, 32
- Ordnung, 81
- Produkt, 12
- Sinus, 92
- Skalarprodukt, 53
- Stetigkeit, 65
 - Lipschitz, 130
- Tangentensteigung, 82
- Umordnen, 47
- Verfeinerung, 73
- Delta-Epsilon-Kriterium, 70
- Dichtigkeit, 27
- diffbar, 79
 - n-mal, 89
 - Umkehrfunktion, 95
- Differentialgleichung
 - $f'(x) = c \cdot f(x)$, 125
 - $f'(x) = g(x)$, 125
 - Cosinus, 92
 - Sinus, 92
- Differentialgleichung $f''(x) = -f(x)$, 92
- Differentiation, 82
- differenzierbar
 - n-mal, 89
- Differenzierbarkeit, 82
- Distanzfunktion, 24
- Distributivgesetz, 15
- Doppelreihensatz, 50
- Dreiecksungleichung, 23
- Eindeutigkeit des Grenzwertes, 30
- Entwicklungssatz, 99
- Epsilontik, 30
- Eudoxos, 27
- Euler
 - Formel, 118
- eulersche Zahl, 44
- Exkurs
 - in LA, 53
- exp, 44, 68
 - Ableitung, 91
 - beliebige Potenzen, 97
- Exponentialfunktion, 44
- Ableitung, 91
 - beliebige Potenzen, 97
 - in \mathbb{C} , 67
 - und Nullstellensatz, 68
- Fakultät, 44
 - Beispiele, 44
- Faßregel
 - Kepler, 121
- Fixpunktsatz, 60
- Folge, 29
 - beschränkt, 31
 - Cauchy, 30
 - sich verdichtende -, 30
- folgenkompakt, 59
- Funktion
 - konstant, 85
- geometrische Reihe, 42
- Grenzwert, 30
 - Eindeutigkeit, 30
 - eulersche Zahl, 44
 - Exponentialfunktion, 44
- Hauptsatz
 - der Analysis, 86
 - der Integralrechnung, 79
- Hintereinanderausführung
 - diffbar, 96
 - stetig, 66
- Hospital
 - Regel von, 106
- Inhaltsverzeichnis, 1
- Integral
 - restglied (Taylor), 108
 - R-linear, 77
 - Addition, 77
 - elementare Eigenschaften, 78
 - Grenzen aufspalten, 78
 - Hauptsatz, 79
 - integrierbar, falls stetig, 76
 - Rechenregeln, 78
- Integration
 - partiell, 109
- integrierbar, 76
- Intervall
 - definition, 19
 - schachtelung, 34
- inverses Element, 15

- Körper, 12, 15
 - C, 25
 - Beispiele, 17
 - der komplexen Zahlen, 25
- Körperaxiome, 15
- kartesisches Produkt, 12
- Keplersche Faßregel, 121
- Kettenregel, 96
 - der Integration, 109
- Kommutativgesetz, 15
- kompakt
 - folgen-, 59
- Komposition
 - diffbar, 96
 - Stetigkeit, 66
- kontraktive Abbildung, 60
- Konvergenz, 30
 - absolut, 44, 47
 - beschränkt und monoton, 36
 - cauchyvollständig, 58
 - eulersche Zahl, 44
 - Exponentialfunktion, 44
 - Folgen, 30
 - Hauptlemma, 40
 - Leibniz, 40
 - Majorantenkriterium, 41
 - metrischer Raum, 58
 - monoton und beschränkt, 36
 - Nullfolge, 32
 - Teilfolgen, 34
 - von Cauchyfolgen, 31
 - von Reihen, 30, 43
- Kriterium
 - ε - δ -, 70
 - Leibniz, 40
- Lagrange
 - Restglied, 99
- Leibnizsche Reihe, 43, 97
- Leibnizkriterium, 40
- Leibnizsche Reihe, 9, 41
- Limes
 - berechnen nach Taylorentwicklung, 104
 - metrischer Raum, 58
- Limes-Begriff, 58
- Lineare Algebra, 53
- Lipschitz
 - stetig, 130
- log
 - Ableitung, 95
- Maple
 - :, 185
 - ;, 185
 - Plot, 186
 - Restart, 186
 - With, 186
 - Hinweise, 185
- Menge, 10
- Mengenlehre, 10
- metrischer Raum
 - Cauchyfolge, 57
 - cauchyvollständig, 58
 - Konvergenz, 58
- Mittelpunkt, 34
- Mittelwertsatz
 - der Differentiation, 84
- monoton, 41
- Monotonie
 - 1. Ableitung, 94
- monoton, 36
- Natürliche Zahlen, 20
- neutrales Element, 15
- Norm, 53
- Notation
 - Quantoren, 13
- Nullfolge, 32, 33
 - monoton, 41
- Ordnung, 81
- Ordnungsaxiome, 19
- partielle Integration, 109
- Polynom
 - nach Bernoulli, 115
- Polynome
 - Stetigkeit, 67
- Potenzen
 - als Exponentialfunktion, 97
- Produkt
 - kartesisch, 12
- Produktregel, 109
- Quantoren, 13
- Rechengesetze
 - $o(x - \xi)^n$, 81
- Rechenregeln
 - Ableitungen, 87, 88

- Reichhaltigkeitsaxiom, 15
- Reihe
 - absolute Konvergenz, 44
 - geometrische, 42
 - Konvergenz, 43
 - Konvergenz der enth. Folge, 40
 - Leibnizsche, 9
 - Majorantenkriterium, 41
- Reihen, 39
- Relation, 12
- Restglied
 - Integral, 108
- Satz
 - der Dichtigkeit, 27
- Schwartz'sche Ungleichung, 54
- Simpson'sche Regel, 121
- Sinus, 92
- Skalarprodukt, 53
- Sterling's Formel, 120
- Stetigkeit, 65
 - ε - δ -Kriterium, 70
 - Addition, 67
 - Beispiele, 65
 - beschränkt, 72
 - Definition, 65
 - Division, 67
 - gebrochene Funktionen, 67
 - gleichmäßig stetig, 71
 - Hintereinanderausführung, 66
 - integrierbar, 76
 - Komposition, 66
 - Lipschitz, 130
 - Multiplikation, 67
 - Polynome, 67
 - Rechengesetze, 67
 - Subtraktion, 67
- Substitutionsregel, 109
- Taylor's Satz, 99
 - binomische Formel, 110
 - Intragrestglied, 108
 - Limes berechnen, 104
- Teilfolge, 31
- Teilfolgen
 - Konvergenz, 34
- Umkehrfunktion
 - diffbar, 95
- Umordnen, 47
- Umordnungssatz, 47
- Ungleichung
 - Bernoulli, 28
 - Dreiecks-, 23
 - nach Schwartz, 54
- Verdichtung, 30
- Verdichtungstrick, 43
- Verfeinerung, 73
- Visualisierung des Integrals, 74
- Zahlen
 - natürlich, 20