Endoskopische Gruppen der unverzweigten einfachen Gruppen

Joachim Ballmann
Dan Fulea
Rainer Weissauer

12 2000

In dieser Arbeit werden alle endoskopischen Gruppen zu den einfachen Gruppen ausgerechnet, die Matchings ermöglichen, an denen primitive Tori beteiligt sind. "Primitiv" wurde in [BFW] definiert und bedeutet im wesentlichen, daß solche Tori in keine reduktive Untergruppe von $\tilde{G}$ "absteigen". (Vgl. Behauptung 2.6.)
Via Exponentialabbildung wird die Berechnung auf das Lösen einer Gleichung $(*)$ im Appartment eines maximalen Torus $\mathcal{T} \subset \hat{G}$ zurückgeführt. Die Lösungen in einer Kammer des Komplexes zu $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ werden angegeben im Dynkingraphen einer solchen Kammer. Zu Beginn werden die wichtigsten benötigten Resultate über diesen Kammerkomplex angegeben. (Details findet man z. B. in [Ball].)

1 Der affine Kammerkomplex zu (Φ, Θ)

(1.1) Sei V ein (reeller endlichdimensionaler) Vektorraum, V^* sein Dualraum, $\Phi \subset V^*$ ein **irreduzibles** Wurzelsystem, Δ eine Basis von Φ und $\Theta \in \mathrm{Aut}(\Phi, \Delta)$. Das von den Kowurzeln $\Phi^\vee$ erzeugte Gitter wird mit $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \subset V$ bezeichnet, das Gewichtegitter mit $\mathbb{Z}[\Phi]^* := \{v \in V_{der} \mid \langle \alpha, v\rangle \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in \Phi\}$, wobei $V_{der} := \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R} \subset V$.

Definition 1.2. *Sei P_Θ die Projektion $x \longmapsto \frac{1}{ord\Theta} \sum_{i=1}^{ord\Theta} \Theta^i(x)$ in V oder V^* und*

$$\Phi_\Theta := P_\Theta(\Phi) \qquad \textit{sowie} \qquad \Phi^\Theta = ((\Phi^\vee)_\Theta)^\vee.$$

Für einen Θ–Orbit $\mathcal{O} \subset \Phi$ (oder $\mathcal{O} \subset \Phi^\vee$) sei $S_\mathcal{O} = \sum_{\gamma \in \mathcal{O}} \gamma$ die Orbitsumme.

Satz 1.3 (Steinberg). *Sei G eine reduktive Gruppe, $B \subset G$ eine Borelgruppe, $T \subset B$ ein maximaler Torus und $\Theta \in Aut(G, B, T)$ ein Automorphismus von G, der B und T stabilisiert. Ferner sei $t \in T$ und $\Phi = \Phi(G, T)$ das Wurzelsystem von G. Die Einskomponente $(G^{t\Theta})^\circ$ der Fixgruppe von $\mathrm{int}t \circ \Theta$ in G ist eine reduktive Gruppe. Für ihr Wurzelsystem gilt*

$$\Phi(G^{t\Theta\circ}, T^{\Theta\circ}) \simeq \left\{ P_\Theta(\mathcal{O}_\alpha) \in \Phi_\Theta \;\middle|\; S_{\mathcal{O}_\alpha}(t) = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \textit{falls } \frac{1}{2}P_\Theta(\mathcal{O}_\alpha) \notin \Phi_\Theta \\ -1 & \textit{falls } \frac{1}{2}P_\Theta(\mathcal{O}_\alpha) \in \Phi_\Theta \end{array} \right\} \right\}.$$

Beweis: [Stein, 8.1] □

Lemma 1.4. (a) *Sei $\mathcal{O}_\alpha = \{\Theta^i(\alpha)\} \subset \Phi$. Dann gilt*

$$(P_\Theta(\alpha^\vee))^\vee = \left\{ \begin{array}{cl} S_{\mathcal{O}_\alpha} & \textit{falls } 2P_\Theta(\alpha) \notin \Phi_\Theta \\ 2 \cdot S_{\mathcal{O}_\alpha} & \textit{falls } 2P_\Theta(\alpha) \in \Phi_\Theta \end{array} \right\} =: c(\alpha) \cdot S_{\mathcal{O}_\alpha}$$

(b) *Sei $\Delta^* \subset V_{der}$ die Dualbasis zu Δ, genauer sei $\Delta^* = \{\beta_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$, so daß $\gamma(\beta_\alpha^\vee) = \delta_{\gamma,\alpha}$ für $\gamma \in \Delta$.*
Die Dualbasis von V_{der}^Θ zu $(P_\Theta(\Delta^\vee))^\vee$ ist die Menge der $\frac{1}{c(\alpha)} P_\Theta(\beta_\alpha^\vee)$ für alle Orbiten $\mathcal{O}_\alpha \subset \Delta$ mit $\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$. Dagegen bildet $P_\Theta(\Delta^*)$ eine $\mathbb{Z}$–Basis von $\mathbb{Z}[\Phi^\Theta]^* := \{v \in V_{der}^\Theta \mid \langle \alpha, v\rangle \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in \Phi^\Theta\}$.
Falls Φ_Θ ein reduziertes Wurzelsystem ist, ist $c(\alpha) = 1$ für alle α!

Beweis: Das rechnet man in allen Fällen sofort nach. $\square$

(1.5) Der Kammerkomplex: Durch die Hyperebenen (Wände)

$$H_{\mathcal{O}_\alpha,k} := \{v \in V^\Theta \mid (P_\Theta(\alpha^\vee))^\vee(v) = -k\} = \{v \in V^\Theta \mid (c(\alpha)\cdot S_{\mathcal{O}_\alpha})(v) = -k\}$$

für alle Θ–Orbiten $\mathcal{O}_\alpha \subset \Phi$ (mit $\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$) und alle $k \in \mathbb{Z}$ ist auf V^Θ folgender Kammerkomplex definiert: Die Kammern sind die Zusammenhangskomponenten von

$$V^\Theta \setminus \bigcup_{\substack{\mathcal{O}_\alpha \subset \Phi\ \Theta\text{–Orbit},\\ k\in\mathbb{Z}}} H_{\mathcal{O}_\alpha,k}.$$

Die Spiegelungen an den verschiedenen Wänden einer Kammer erzeugen die affine Weylgruppe $W_{aff}(\Phi,\Theta) = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$. Sie operiert einfach transitiv auf den Kammern.

Definition 1.6. *Sei $\tilde{\mathcal{O}} = \{\Theta^i(\tilde\alpha) \mid i \in \mathbb{Z}\} \subset \Phi^-$ der Θ–Orbit, für den folgende äquivalente Bedingungen gelten:*

- *Die Wände $H_{\mathcal{O}_i,0}$ für alle Θ–Orbiten $\mathcal{O}_i \in \Delta$ $(1 \le i \le Rang((\Phi^\vee)_\Theta))$ begrenzen zusammen mit dem "Deckel" $H_{\tilde{\mathcal{O}},1}$ eine Kammer ("Alkoven") des Kammerkomplexes V^Θ zu $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$.*
- *$-P_\Theta(\tilde\alpha^\vee)^\vee = -c(\tilde\alpha)S_{\tilde{\mathcal{O}}}$ ist die höchste Wurzel in $(P_\Theta(\Phi^\vee)^\vee)^+ = (\Phi^\Theta)^+$, bezüglich des Positivbereiches, der durch Δ definiert wird.*

Dem Paar (Φ,Θ) werde das affine Dynkindiagramm zugeordnet:

$$\begin{array}{rcl}\Delta_{aff}(\Phi,\Theta) & := & P_\Theta(\Delta) \cup \{c(\tilde\alpha)P_\Theta(\tilde\alpha)+1\}\\ & \overset{1.4}{=} & \left\{\frac{1}{c(\alpha_i)}(S_{\mathcal{O}_{\alpha_i^\vee}})^\vee \mid \alpha_i^\vee \in \mathcal{O}_{\alpha_i^\vee} \subset \Delta^\vee\right\} \cup \left\{(S_{\tilde{\mathcal{O}}^\vee})^\vee + 1 \mid \tilde{\mathcal{O}}^\vee = \{\Theta^i(\tilde\alpha^\vee)\}\right\}\end{array}$$

(1.7) Der Alkovendeckel: Wenn man die Wurzeln der irreduziblen ADE–Systeme so numeriert, wie auf Seite 13 (das ist die Bourbakinotation [Bou, VI §4]), hat man folgende Orbiten $\tilde{\mathcal{O}} = \{\Theta^i(\tilde\alpha) \mid i \in \mathbb{Z}\}$, falls $\Theta \ne id$

$$\begin{array}{rl} {}^2A_{2n-1}: & \{-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{2n-2}), -(\alpha_2+\alpha_3...+\alpha_{2n-1})\}\\ {}^2A_{2n}: & \{-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n), -(\alpha_{n+1}+...+\alpha_{2n})\}\\ {}^2D_n: & \{-(\alpha_1+...+\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}), -(\alpha_1+...+\alpha_{n-2}+\alpha_n)\}\\ {}^2E_6: & \{-(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6), -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6)\}\\ {}^3D_4: & \{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), -(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4), -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)\}\end{array}$$

Bei diesen Fällen (außer den ${}^2A_{2n}$–Systemen) ist $-\tilde{\mathcal{O}}$ immer der Orbit höchster Höhe in Φ^+, der nicht aus einer Fixwurzel besteht. Im Ausnahmefall $\Phi = A_{2n}$ und $\Theta \ne id$ ist $2\cdot P_\Theta(\tilde\alpha) \in \Phi_\Theta$, d.h. $c(\tilde\alpha) = 2$! Falls $\Theta = id$, ist $-\tilde\alpha$ immer die höchste Wurzel in Φ^+.
Alle Dynkingraphen $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$ (mit irreduziblem Φ) sind in der Tabelle auf Seite 14 angegeben.

Definition 1.8. *Ein Punkt $v \in V^{\Theta}$ heißt speziell, falls für den Stabilisator von v gilt:*

$$\left(P_{\Theta}(\mathbb{Z}[\Phi^{\vee}]) \rtimes W^{\Theta}\right)_v \simeq W^{\Theta}.$$

Dann liegt ein spezielles v in einer Facette niedrigster Dimension einer Kammer und die Wurzel der gegenüberliegenden Wand in $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$ wird ebenfalls speziell genannt.

Für Stabilisatoren von Punkten $v \in V^{\Theta}$ in W_{aff} hat man den

Satz 1.9 (Chevalley-Steinberg). *Der Fixator $W_H := (P_{\Theta}(\mathbb{Z}[\Phi^{\vee}]) \rtimes W^{\Theta})_v$ von $v \in V^{\Theta}$ ist eine Spiegelungsgruppe, erzeugt von den Spiegelungen aus W_{aff}, die v festlassen.*
Sei C eine Kammer, so daß $v \in \overline{C}$. Ihre Wände seien die Hyperebenen $H_{\mathcal{O}_i,k_i}$ ($1 \leq i \leq r$).Dann ist $\{P_{\Theta}(\alpha_i^{\vee})^{\vee} \mid v \in H_{\mathcal{O}_i,k_i} \text{ und } \alpha_i \in \mathcal{O}_i\}$ eine Basis eines Wurzelsystems Φ_H, dessen Weilgruppe isomorph zu W_H ist.

Beweis: [Stein, 1.19] □

(1.10) Nach diesem Satz kann man die speziellen Ecken am Graphen von $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$ ablesen: Eine Ecke ist genau dann speziell, wenn die Weylgruppe von $P_{\Theta}(\Phi)$ gleich der Weylgruppe des Graphen ist, der entsteht, wenn man die Ecke (mit allen zu ihr führenden Kanten) aus dem Diagramm zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$ streicht. Auf Seite 14 sind genau alle speziellen Punkte geschwärzt.

Behauptung 1.11. *Genau dann ist $v \in V^{\Theta}$ speziell, wenn*

$$v \in \mathbb{Z}[(P_{\Theta}(\Delta^{\vee}))^{\vee}]^* \overset{Def}{=} \{x \in V^{\Theta}_{der} \mid \gamma(v) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \gamma \in P_{\Theta}(\Delta^{\vee})^{\vee}\} = \mathbb{Z}[\Phi^{\Theta}_{\text{lang}}]^*,$$

wobei $\Phi^{\Theta}_{\text{lang}} = \{\gamma \in \Phi^{\Theta} \mid 2 \cdot \gamma \notin \Phi^{\Theta}\}$ das reduzierte Wurzelsystem der längsten Wurzeln in $\Phi^{\Theta} = P_{\Theta}(\Phi^{\vee})^{\vee}$ ist.

Beweis: Nach Chevalley–Steinberg 1.9 und der Inspektion in (1.10) ist $v \in V^I$ genau dann speziell, wenn es zu jedem Orbit $\mathcal{O}_{\alpha} \subset \Phi$ ein $k_{\mathcal{O}_{\alpha}} \in \mathbb{Z}$ gibt mit $v \in H_{\mathcal{O}_{\alpha},k_{\mathcal{O}_{\alpha}}}$, d.h. $(P_{\Theta}(\alpha^{\vee})^{\vee})(v) = k_{\mathcal{O}_{\alpha}} \in \mathbb{Z}$. Falls Φ nicht vom Typ ${}^2A_{2n}$ ist, ist (nach 1.4) $P_{\Theta}(\Delta^{\vee})^{\vee}$ eine Basis von $\Phi^{\Theta} = \Phi^{\Theta}_{\text{lang}}$. Falls Φ vom Typ ${}^2A_{2n}$ ist, errechnet man (mit 1.4), daß $P_{\Theta}(\Delta^{\vee})^{\vee}$ eine Basis von $\Phi^{\Theta}_{\text{lang}}$ ist. □

(1.12) Die Ecken des Alkovens: Sei $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{O}}$ wie in Definition 1.6. Dann gibt es für alle Θ–Orbiten $\Theta_{\alpha} \subset \Delta \cup \tilde{\mathcal{O}}$ Zahlen $c_{\mathcal{O}_{\alpha}} \in \mathbb{Z}_{>0}$, so daß

$$0 = \sum_{\mathcal{O}_{\alpha} \subset \Delta \cup \tilde{\mathcal{O}}} c_{\mathcal{O}_{\alpha}} P_{\Theta}(\alpha^{\vee})^{\vee} = \sum_{\mathcal{O}_{\alpha} \subset \Delta \cup \tilde{\mathcal{O}}} c_{\mathcal{O}_{\alpha}} c(\alpha) S_{\mathcal{O}_{\alpha}} \,,$$

wobei das $c(\alpha)$ aus Lemma 1.4 ist. Dabei gilt $c_{\tilde{\mathcal{O}}} = 1$. Die Dualbasis zu $P_\Theta(\Delta^\vee)^\vee$ wurde in 1.4 angegeben. Mit den Bezeichnungen von dort sind die Ecken das Alkovens zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$, abgesehen vom Ursprung, genau die Punkte

$$\frac{1}{c_{\mathcal{O}_\alpha} \cdot c(\alpha)} P_\Theta(\beta_\alpha^\vee), \qquad\qquad \alpha\mathcal{O}_\alpha \subset \Delta.$$

Die folgende Tabelle gibt die $c_{\mathcal{O}_\alpha}$ für alle irreduziblen Systeme an: Die Orbiten $\mathcal{O}_\alpha$ sind dabei genau so angeordnet, wie die $(S_{\mathcal{O}_\alpha^\vee})^\vee$ in der Tabelle auf Seite 14.

Φ	$\Theta^* = id$	Ord$\Theta = 2$
A_{2n-1}	alle $c_{\mathcal{O}_\alpha} = 1$	$\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ 2 2 ... 2 2 2
C_n	1 2 2 ... 2 2 1	
A_{2n}	alle $c_{I\alpha} = 1$	1 2 2 ... 2 2 1
D_{n+1}	$\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ 2 2 ... 2 2 $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$	1 2 2 ... 2 2 1
B_n	$\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ 2 2 ... 2 2 2	
E_8	$\begin{smallmatrix} & & 3 & & & & & \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{smallmatrix}$	
E_7	$\begin{smallmatrix} & & & 2 & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1\end{smallmatrix}$	
E_6	1 2 3 $\begin{smallmatrix}2 & 1\\2 & 1\end{smallmatrix}$	2 4 3 2 1
F_4	1 2 3 4 2	
		Ord$\Theta=3$
D_4	$\begin{smallmatrix} & & 1\\1 & 2 & 1\\ & & 1\end{smallmatrix}$	3 2 1
G_2	1 2 3	

Beispiel 1.13. Φ vom Typ A_m (mit $m = 2n$) und $\Theta \neq id$.
Mit den Bezeichnungen aus [BFW] (oder [Bou, VI §4]) hat man folgende (reelle) Alkoven

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi, id)) &:= \{(x_1, ..., x_{m+1}) \in V \mid 1 + x_{m+1} > x_1 > x_2 > ... > x_m > x_{m+1}\} \\
\mathrm{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi_\Theta, id)) &= \left\{(x_1, ..., x_n, 0, -x_n, ... - x_1) \in V^\Theta \mid \frac{1}{2} > x_1 > ... > x_n > 0\right\} \\
\mathrm{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)) &= \left\{(x_1, ..., x_n, 0, -x_n, ... - x_1) \in V^\Theta \mid \frac{1}{4} > x_1 > ... > x_n > 0\right\}.
\end{aligned}$$

Obwohl die Dynkindiagramme der letzten beiden Alkoven gleich aussehen, sind die entsprechenden Alkoven nicht gleich. Insbesondere hat man folgende Stabilisatorgruppe dieser Alkoven in $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \rtimes W^\Theta$:

$$\Omega_{\mathrm{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi_\Theta, id))} \simeq \mathbb{Z}/2 \qquad \text{aber} \qquad \Omega_{\mathrm{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi,\Theta))} \simeq 1.$$

(1.14) Im Folgenden sei stets Λ das Gitter (in V^Θ_{der}) der speziellen Punkte. Nach Behauptung 1.11 ist $\Lambda = \mathbb{Z}[\Phi^\Theta_{\mathrm{lang}}]^*$. Falls $(\Phi, \Theta) \neq (A_{2n}, \mathrm{Flip})$, hat man nach Lemma 1.4 $\Lambda = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$. Im Ausnahmefall ist $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ und $\mathbb{Z}/2 \simeq \Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) = \Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$.
Bezeichne $\mathrm{Aut}(\Phi)^\Theta := \mathrm{Cent}(\Theta, \mathrm{Aut}(\Phi))$. Wähle eine Kammer $C \subset V^\Theta$ mit $0 \in \overline{C}$. Folgende Stabilisatoren der Kammer C werden benötigt:

$$\begin{aligned}
\Omega_C &:= \mathrm{Stab}_C(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \rtimes W^\Theta),\\
\Omega_C^{\mathrm{spez}} &:= \mathrm{Stab}_C(\Lambda \rtimes W^\Theta),\\
\Omega_C^{\mathrm{ext}} &:= \mathrm{Stab}_C(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi)^\Theta) \simeq \mathrm{Aut}(\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)) \text{ und}\\
\Omega_C^{\mathrm{spez,ext}} &:= \mathrm{Stab}_C(\Lambda \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi)^\Theta).
\end{aligned}$$

Weil sowohl die Operation von $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ auf den Kammern von V^Θ als auch die Operation von Ω_C^{ext} auf den speziellen Punkten von C (bzw. $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$) einfach transitiv ist, hat man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Lambda \rtimes W^\Theta \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Omega_C^{\mathrm{spez}} \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[l, bend left] & 1 \\
1 \arrow[r] & P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta \arrow[r] & \Lambda \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi)^\Theta \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \Omega_C^{\mathrm{spez,ext}} \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[l, bend left] & 1 \\
 & & \mathrm{Aut}(\Delta(\Phi,\Theta)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Stab}_0(\Omega_C^{\mathrm{spez,ext}}), \arrow[u, bend right] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\Delta(\Phi,\Theta) = \Delta_{aff}(\Phi,\Theta) \backslash \{1 + S^\vee_{\tilde{\mathcal{O}}^\vee}\}$. Dadurch erhält man Isomorphismen

$$\pi_1(\Phi_\Theta) \overset{\mathrm{Def}}{=} P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \simeq \Omega_C \qquad \text{und} \qquad \Omega_C^{\mathrm{spez}} \simeq \Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]).$$

2 Die Gleichung $(*)$

Definition 2.1. *Betrachtet werden Sextupel* $(V, \Phi, \Theta, \sigma, \mathrm{Fr}, \beta^\vee)$ *mit*

- V *ist ein Vektorraum und* $\Phi \subset V^*$ *ein Wurzelsystem.*
- $\Theta \in \mathrm{Aut}(\Phi, \Delta_{aff})$
- $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Cent}(\Theta, \mathrm{Aut}(\Phi)) \overset{Def}{=} \mathrm{Aut}(\Phi)^\Theta$

- σ *ist das Bild von* Fr *unter der Projektion auf den zweiten Faktor bei der Zerlegung* $\mathrm{Aut}(\Phi) = W \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi, \Delta)$. *Offensichtlich vertauscht* σ *mit* Θ.

- $\beta^\vee \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$

Sextupel heißen ***anisotrop****, wenn* $(\mathrm{Fr}-1)V^\Theta = V^\Theta$. *Anisotrope Sextupel heißen* ***primitiv****, wenn* Fr *primitiv ist im Sinne von [BFW], d.h.* $|\big(\Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])\big)^{\mathrm{Fr}}| = |H^1(\langle \mathrm{Fr}\rangle, P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]))|$
Äquivalent *sind zwei Sextupel* $(V, \Phi, \Theta, \sigma, \mathrm{Fr}, \beta^\vee) \approx (V, \Phi, \Theta, \tilde{\sigma}, \tilde{\mathrm{Fr}}, \tilde{\beta}^\vee)$, *wenn ein* $t \rtimes w \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ *existiert, so daß einerseits* $\tilde{\mathrm{Fr}} = w\,\mathrm{Fr}\,w^{-1}$ *und andererseits* $P_\Theta(\tilde{\beta}^\vee) = (t \rtimes w)(P_\Theta(\beta^\vee))$. *Klarerweise ist dabei* $\tilde{\sigma} = \sigma$.

(2.2) In dieser Arbeit soll für alle irreduziblen Φ und alle Äquivalenzklassen von anisotropen, primitiven Sextupeln $(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]\otimes\mathbb{R}, \Phi, \Theta, \sigma, \mathrm{Fr}, \beta^\vee)$ folgende Gleichung (in v) gelöst werden

$$(*) \qquad \boxed{\mathrm{Fr}(v) \equiv v + \beta^\vee \mod \mathbb{Z}[\Phi^\vee] + (1-\Theta)V}$$

oder äquivalent umformuliert

$$(**) \qquad \boxed{(\mathrm{Fr}-1)(P_\Theta(v)) \equiv P_\Theta(\beta^\vee) \mod P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])}$$

Der Abschluß des Alkovens zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$, der in (1.6) (oder (1.12)) beschrieben wurde, ist ein (schwacher) Fundamentalbereich für die Operation von $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ auf V^Θ. Indem man das Sextupel innerhalb seiner Äquivalenzklasse geeignet abändert, sucht man also Lösungen der Gleichung $(*)$ in dem (abgeschlossen) Alkoven zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$.

Satz 2.3. *Sei* $(G, \theta, \mathbf{a})$ *ein Tripel wie in [KS]. Dabei sei* G *eine einfache* F*–Gruppe, die über einer endlichen unverzweigten Erweiterung* F'/F *zerfällt. (*F *ist ein* p*–adischer Körper.) Bezeichne* $\Phi := \Phi(\hat{G}) \simeq \Phi^\vee(G)$ *und* Θ *den von* θ *induzierten Diagrammautomorphismus aus* $\mathrm{Aut}(\Phi, \Delta)$. *Sei*

$$\Phi(v) := \left\{ P_\Theta(\alpha) \mid \alpha \in \Phi \text{ und } S_{\{\Theta^i(\alpha)\}}(v) \in \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{Z} & \text{falls } \frac{1}{2}P_\Theta(\alpha) \notin \Phi_\Theta \\ \frac{1}{2} + \mathbb{Z} & \text{falls } \frac{1}{2}P_\Theta(\alpha) \in \Phi_\Theta \end{array} \right\} \right\}.$$

Dann sind äquivalent (Die Bezeichnungen für endoskopische Daten sind aus [KS, (2.1)].)

- $(\Phi(v))^\vee$ *ist das Wurzelsystem einer endoskopische Gruppe* H *zu* (G, θ, a') *(mit* $\mathcal{H} \simeq {}^L H$*), so daß erstens* $\Phi(\hat{H}) = \Phi(v)$ *und zweitens das Bild des Frobenius* $\mathrm{Frob} \in Gal(F'/F)$ *unter* $\xi : {}^L H \to {}^L G$ *gleich* Fr *ist.*

- *v löst die Gleichung $(*)$ für ein Sextupel* $(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]\otimes\mathbb{R}, \Phi, \Theta, \rho_G(\mathrm{Frob}), \rho_{\mathcal{H}}(\mathrm{Frob}), \beta^\vee)$ *mit $\beta^\vee \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$ so, daß $\exp\beta^\vee = a'(\mathrm{Frob}) \in \mathcal{T} \overset{\exp}{\simeq} (V \otimes \mathbb{C})/X_*(\mathcal{T})$ für einen maximalen Torus $\mathcal{T} \subset \hat{G}$.*

Äquivalente Sextupel ergeben dabei isomorphe endoskopische Daten.

Beweis: Nach der Definition in [KS, (2.1)] und mit den Bezeichnungen und Konventionen zu Beginn des Beweises von [KS, Theorem 3.3.A] ist ein endoskopisches Datum mit $\mathcal{H} \simeq {}^L H$ gegeben durch ein $s \in \mathcal{T} \subset \hat{G}$ und einen Homomorphismus $\xi : {}^L H \to {}^L G$ mit den Bedingungen (1) bis (3) unten. Dabei ist $\mathcal{T}$ Torus eines galoisstabilen Splittings $\mathbf{spl}_{\hat{G}}$ von $\hat{G}$, $\hat{\theta} \in \mathrm{Aut}(\hat{G}, \mathbf{spl}_{\hat{G}}) \simeq \mathrm{Out}(\hat{G})$ der zu θ duale Automorphismus von $\hat{G}$, der $\mathbf{spl}_{\hat{G}}$ stabilisiert, und ${}^L H = \hat{H} \rtimes W_F$ die L–Gruppe der endoskopischen Gruppe H. Die Annahme $\mathcal{H} \simeq {}^L H$ ist harmlos, da man hier nur mit unverzweigten Gruppen G und H arbeitet: Siehe [Hal, Lemma 6.1] oder [Ball, Lemma 5.53] für getwistete Endoskopie.
Die Bedingungen an $({}^L H, s, \xi)$ sind dann

(1) $\hat{H} = (\hat{G}^{s\hat{\theta}})^\circ$ ist die Einskomponente der Fixgruppe unter $\mathrm{int}s \circ \hat{\theta}$ von $\hat{G}$.

(2) $\xi(h \rtimes w) =: h \cdot m_\xi(w) \rtimes w \in \hat{G} \rtimes W_F$ (für alle $h \in \hat{H}$, $w \in W_F$) ist ein Homomorphismus, d.h. $m_\xi \in Z^1(W_F, \hat{G})$.

(3)
$$s \cdot \Big(\hat{\theta}(m_\xi(w)) \rtimes w\Big) \cdot s^{-1} = a'(w) \cdot m_\xi(w) \rtimes w,$$
wobei a' ein 1–Kozykel in der Klasse von $\mathbf{a} \in H^1(W_F, \mathrm{Cent}(\hat{G}))$ ist.

Ein Isomorphismus zweier endoskopischer Daten $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ und $(H', \mathcal{H}', s', \xi')$ ist ein Element $g \in \hat{G}$ mit

$$g\xi(\mathcal{H})g^{-1} = \xi'(\mathcal{H}') \qquad \text{und} \qquad gs\hat{\theta}(g)^{-1} \in s' \cdot \mathrm{Cent}(\hat{G}).$$

Bis auf Isomorphie darf man nach [KS, Beweis zu 3.3.A] annehmen, daß $\xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}^{\hat{\theta}\circ}$ für einen maximalen Torus $\mathcal{T}_H \subset \hat{H}$, der galoisinvariant ist. Dann stabilisieren sowohl $\xi(w)$ als auch die W_F–Operation von ${}^L G$ den Torus $\mathcal{T}^{\hat{\theta}\circ}$. Also liegt $m_\xi(w) \in \mathrm{Norm}(\mathcal{T}^{\hat{\theta}\circ}, \hat{G}) = \mathcal{T} \cdot \mathrm{Norm}(\mathcal{T}^{\hat{\theta}\circ}, \hat{G}^{\hat{\theta}\circ})$. (Diese Zerlegung gilt, weil es stark reguläre Elemente in $\mathcal{T}^{\hat{\theta}\circ}$ gibt.)
Sei $m_\xi(\mathrm{Frob}) = t_\xi \cdot n_\xi$ mit $t_\xi \in \mathcal{T}$ und $n_\xi \in \mathrm{Norm}(\mathcal{T}, \hat{G}) \cap \hat{H}$. Dann besagt (3)

$$\Big(\xi\big(\rho_H(\mathrm{Frob})\big)\Big)(s) = a'(\mathrm{Frob})^{-1} \cdot s \cdot \hat{\theta}(t_\xi) \cdot t_\xi^{-1}.$$

Bezeichne $\Theta := \hat{\theta}$. Benutze die Exponentialsequenz

$$1 \longrightarrow X_*(\mathcal{T}) \longrightarrow V \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathcal{T} \longrightarrow 1,$$

um $s = \exp(v)$ zu schreiben. Durch $(\xi \circ \rho_H)(\mathrm{Frob})$ wird ein $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Aut}(\Phi)^\Theta$ gegeben (denn $((\xi \circ \rho_H)(w))(\mathcal{T}^{\hat\theta\circ}) = \mathcal{T}^{\hat\theta\circ}$). Man hat $X_*(\mathcal{T}_{sc}) = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \subset X_*(\mathcal{T}) \subset \mathbb{Z}[\Phi]^*$ und $(\mathrm{Fr}-1)\mathbb{Z}[\Phi]^* \subset \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$. Mit diesen Bezeichnungen ist die Bedingung (3) die Gleichung $(*)$. Die Bedingung (1) besagt nach Steinberg 1.3 gerade $\Phi(v) = \Phi(\hat G^{s\hat\theta}) = \Phi(\hat H)$. Weil G unverzweigt ist, ist die Bedingung (2) leer: Die Operation von W_F faktorisiert über $W_F/I_F \simeq \langle \mathrm{Frob}\rangle \simeq \mathbb{Z}$, d.h. $m_\xi(\mathrm{Frob})$ ist frei wählbar in $\mathrm{Norm}(\mathcal{T}^{\hat\theta}, \hat G)$. Zwei äquivalente Sextupel werden nach Definition durch ein $x \rtimes w \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ ineinander übergeführt. Wenn v eine Lösung von $(*)$ mit Fr und $\beta^\vee$ ist, so ist $w(v)$ eine Lösung von $(*)$ mit $w\,\mathrm{Fr}\,w^{-1} = \tilde{\mathrm{Fr}}$ und $(x \rtimes w)(\beta^\vee) = \tilde\beta^\vee$. Weil $\hat\theta$ ein Splitting von $\hat G$ stabilisiert, gibt es ein Urbild $g \in \mathrm{Norm}(\mathcal{T}, \hat G)^{\hat\theta}$ von $w \in W^\Theta$. Somit ist durch g ein Isomorphismus von endoskopischen Daten gegeben, denn $s' = \exp(\tilde v) = (\exp(w(v))) = g\exp(v)g^{-1} = g \cdot s \cdot \hat\theta(g)^{-1}$. □

(2.4) Nach diesem Satz ist (2.2) gleichbedeutend zur Klassifikation aller Isomorphieklassen von unverzweigten endoskopischen Gruppen zu den einfachen algebraischen Gruppen, für die die Operation des Frobenius für ein $\hat T \subset \hat G$ anisotrop und primitiv in $W^{ext} := \mathrm{Aut}(\Phi(\hat T, \hat G))$ ist. Für nicht einfach zusammenhängenden Gruppen G kommen dabei nur Sextupel in Betracht, für die $\beta^\vee$ in $\pi_1(\hat G) \subset \pi_1((\hat G)_{ad}) = \mathbb{Z}[\Phi]^*/\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ vorkommt.

(2.5) Die Projektion der Lösungen der homogenen Gleichung $(*)$, d.h. der Gleichung zu Sextupeln mit $\beta \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$, liegen in V^σ: Sei $\overline{v} := P_\Theta(v) \in \overline{C}$ eine homogene Lösung von $(**)$. Dann existiert ein $w \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$, so daß $w(\overline{v}) = \sigma(\overline{v}) \in \overline{C}$ (denn σ bildet C in sich ab). Nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.9 gilt daher $w(\overline{v}) = \overline{v}$. Also ist $\overline{v} \in V^\sigma$.

Behauptung 2.6. *Genau dann ist $(V, \Phi, \Theta, \sigma, \mathrm{Fr}, \beta^\vee)$ primitiv, wenn es kein Θ– und σ–stabiles Subsystem Φ' von Φ gibt, so daß die $W(\Phi)^\Theta$–Konjugationsklasse von* Fr *einen Vertreter in $W(\Phi')^\Theta \rtimes \sigma$ hat.*

Beweis: Zuerst beobachtet man, daß $(w-1)\Lambda \subset P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ für alle $w \in W^\Theta \rtimes \sigma$. Als zweiten Schritt errechnet man für anisotropes $\mathrm{Fr} = w\sigma \in W^\Theta \rtimes \sigma$:

$$\begin{aligned} H^1(\langle \mathrm{Fr}\rangle, P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])) &\overset{\mathrm{Def}}{=} P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) / \big(\mathrm{Fr}-1\big)\big(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])\big) \\ &= \big(\mathrm{Fr}-1\big)^{-1}\big(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])\big)/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \supset \Big(\Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])\Big)^{\mathrm{Fr}}. \end{aligned}$$

Nach Definition ist Fr primitiv genau dann, wenn ganz links Gleichheit gilt. Mit (2.5) hat man

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Fr}-1\big)^{-1}\big(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])\big) &= \big\{x \in V^\Theta \;\big|\; \mathrm{Fr}(x) \equiv x \bmod P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])\big\} \\ &= \Big\{x \in V^{\langle\Theta,\sigma\rangle} \;\Big|\; \mathrm{Fr}\cdot\sigma^{-1} \in \mathrm{Bild}\Big[\big(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta\big)_x \xrightarrow{\mathrm{Proj.}} W^\Theta\Big]\Big\} \end{aligned}$$

Diese Menge ist genau dann gleich dem Gitter $\Lambda \cap V^\sigma$ der σ–invarianten $(\Theta$–) speziellen Punkte, wenn es kein Θ– und σ–stabiles Subsystem Φ' von Φ gibt, so daß die W^Θ–Konjugationsklasse von Fr einen Vertreter in $W(\Phi')^\Theta \rtimes \sigma$ hat. □

3 Ergebnisse

(3.1) Eine Lösung v von $(*)$ wird in einem getwisteten affinen Dynkingraphen angegeben werden und zwar wie folgt: Fixiere einen Alkoven C zu $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$. Es gibt (genau) ein $\omega = \omega(\mathrm{Fr},\beta^\vee) \in \Omega_C^{\mathrm{ext}}$, so daß $-P_\Theta(\beta^\vee) \rtimes \mathrm{Fr} \in \omega \cdot (P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)$. Das affine Dynkindiagramm $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$ wird mit der Operation von ω versehen und im Diagramm der ω–Orbiten (Quotientendiagramm) wird ein Orbit von Ecken genau dann geschwärzt, wenn für eine (und damit für jede) Ecke des Orbits v nicht auf der zu dieser Ecke gehörenden (gegenüberliegenden) Wand liegt.

Satz 3.2. *Sei $(\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}, \Phi, \Theta, \sigma, \mathrm{Fr}, \beta^\vee)$ anisotrop und primitiv mit irreduziblem Φ.*

(a) *Für jeden Punkt v, der $(*)$ löst, wird genau ein ω–Orbit in $(\Delta_{aff}(\Phi,\Theta),\omega)$ geschwärzt.*

(b) *Alle Punkte, für die $(*)$ gilt, bilden einen Orbit unter $\mathrm{Cent}(\omega, \Omega_C^{spez})$.*

(c) *Falls $\beta^\vee = 0$, so ist die Menge der Punkte, die $(*)$ genügen (d.h. die homogenen Lösungen), gerade die Menge der speziellen Punkte im Quotientendiagramm zu $(\Delta_{aff}(\Phi,\Theta),\sigma)$, i.e. die Menge der σ—fixierten, in $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$ speziellen Ecken.*

Beweis: **Zu (a)**: Sei $\overline{v} = P_\Theta(v) \in \overline{C}$ eine Lösung von $(**)$. Mit dem ω aus (3.1) gilt dann $\omega(\overline{v}) \equiv \overline{v} \bmod P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$, woraus nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.9 folgt, daß $\omega(\overline{v}) = \overline{v}$. Daher wird immer ein ganzer ω–Orbit geschwärzt bzw. weiß gelassen. Um zu zeigen, daß nicht mehr als ein Orbit geschwärzt wird, benutzt man daß $\overline{C}$ ein Simplex ist, dessen Ecken $v_\alpha := \frac{1}{c_{I\alpha}\cdot c(\alpha)} P_\Theta(\beta_{I\alpha}^\vee)$ und $v_{\tilde{\alpha}} := 0$ in (1.12) angegeben wurden. Demnach gibt es $0 \leq x_\alpha$ mit

$$\overline{v} = \sum_{I\alpha \subset \Delta \cup I\alpha} x_\alpha v_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{I\alpha \subset \Delta \cup I\alpha} x_\alpha = 1.$$

Sei $l := \mathrm{ord}\omega$. Weil $l\overline{v}$ Lösung der homogenen Gleichung ist, hat man nach Teil (c) $l\overline{v} \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \cap V^\sigma$. Daher teilt $c_{I\alpha}c(\alpha) \mid lx_\alpha \in \mathbb{Z}$. Aus dieser Bedingung folgt sofort die

Behauptung A: Sei α' aus einem ω–Orbit der Länge $l = \mathrm{ord}\omega$, so daß $\overline{v} = \sum x_\alpha v_\alpha$ eine Lösung von $(**)$ ist mit $x_{\alpha'} > 0$. Dann ist $\overline{v} = \frac{1}{l}\sum_{\gamma \in \langle\omega\rangle\alpha'} v_\gamma$ (und $v_{\alpha'} \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$).

Behauptung B: Für eine Lösung $\overline{v} = \sum x_\alpha v_\alpha$ von $(**)$, enthält

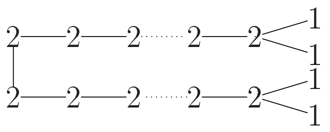
$$M(v) := \{\alpha \in \Delta_{aff}(\Phi,\Theta) \mid x_\alpha > 0 \text{ und } \omega \text{ fixiert } v_\alpha.\}$$

höchstens ein Element.

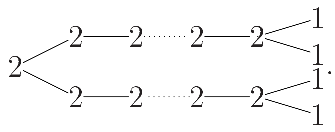
Beweis: Bewiesen wird, daß alle $\sum_{\alpha\in M(v)} y_\alpha v_\alpha$ mit $y_\alpha \geq 0$ und $\sum_{\alpha\in M(v)} y_\alpha = 1$ die Gleichung $(**)$ (für hiermit fixierten Fr und $\beta^\vee$) lösen. Hieraus folgt die Behauptung wegen der Bedingung $ly_\alpha \in \mathbb{Z}$.
Aus $(**)$ folgt, daß es eine Translation aus $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) - P_\Theta(\beta^\vee)$ gibt, so daß $(t.\mathrm{Fr})(v) = v$. Weil $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ markierungserhaltend und auf den Kammern von V^Θ transitiv operiert, gibt es ein $\rho \in (P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)_v$, so daß $\rho.t.\mathrm{Fr}$ die Kammer C stabilisiert. Man hat $\omega = \rho.t.\mathrm{Fr}$ (nach Konstruktion). Nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.9 fixiert ρ die Ecken v_α für $\alpha \in M(v)$. Also hat man (für $\alpha \in M(v)$) $\omega(v_\alpha) = v_\alpha = \rho(v)$, d.h. $v_\alpha = (\rho^{-1}\omega)(v_\alpha) = (t.\mathrm{Fr})(v_\alpha)$, woraus durch Summation über $\mathrm{Fr}(y_\alpha v_\alpha) = y_\alpha \mathrm{Fr}(v_\alpha) = y_\alpha v_\alpha + y_\alpha t$ die Behauptung folgt.

Indem man alle (irreduziblen) Fälle durchgeht, sieht man, daß es außer im nachfolgenden D_n–Fall für alle (Φ, Θ, ω) nur zwei ω-Orbitlängen von Ecken (von C) gibt, nämlich 1 und $l = \mathrm{ord}\omega$. In diesen Fällen folgt aus den Behauptungen A und B, daß höchstens ein ω–Orbit geschwärzt wird. Zu zeigen bleibt diese Aussage im

Fall $\Phi = D_n$ und $l = \mathrm{ord}\omega = 4$. Man hat dann folgende ω–Orbiten (und c_α)



oder



Der ω–Obit der Länge 4 tritt nach Behauptung A (höchstens) alleine auf. Sei $\{\alpha', \omega\alpha'\}$ ein ω–Orbit und $x_{\alpha'} > 0$. Weil $4x_{\alpha'} \in \mathbb{N}$ gerade sein muß, ist $x_{\alpha'} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Da $\sum x_\alpha = 1$ und $\omega x_\alpha = x_\alpha$, folgt $x_\alpha = 0$ für alle α außerhalb des ω–Orbits von α'. Weil C höchstens eine ω–fixierte Ecke besitzt, ist man fertig.

Zu (b): Seien $v_1, v_2 \in \overline{C}$ zwei verschiedene Lösungen von $(*)$ für eine gegebene Äquivalenzklasse eines Sextupels und $\overline{v}_i := P_\Theta(v_i)$, d.h. es exisitieren $w_i \in W^\Theta$, so daß

$$\begin{aligned} & (w_i^{-1}\,\mathrm{Fr}\,w_i)(\overline{v}_i) \equiv \overline{v}_i + P_\Theta(\beta^\vee) && \mod P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]). \\ \iff \quad & \mathrm{Fr}(w_i\overline{v}_i) \equiv w_i\overline{v}_i + w_i P_\Theta(\beta^\vee) \equiv w_i\overline{v}_i + P_\Theta(\beta^\vee) && \mod P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]). \end{aligned}$$

Also löst $x_0 := w_1\overline{v}_1 - w_2\overline{v}_2$ die homogene Gleichung. Nach Teil (c)ist daher $x_0 \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$. Also gibt es $\omega_1 = \rho_1 \cdot t_1 \in \Omega_C^{\mathrm{spez}}$ mit $\omega_1(\overline{v}_1) = \overline{v}_2$, $\rho_1 \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ und der Translation $t_1 : x \mapsto x + x_0$.
Bezeichne t die Translation um $-P_\Theta(\beta^\vee)$ auf V^Θ. Dann existiert ein $\rho \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ mit $\omega = \rho \cdot t \cdot \mathrm{Fr}$. Nun rechnet man

$$\omega(x_0) = (\rho \cdot t \cdot \mathrm{Fr})(w_1\overline{v}_1 - w_2\overline{v}_2) \equiv \rho(x_0) \equiv x_0 \qquad \mod P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]),$$

d.h. die Klasse von x_0 in $\Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ ist ω–invariant. Somit vertauschen ω und ω_1.

Zu (c): Sei $\overline{v} = P_\Theta(v) \in \overline{C} \cap V^\Theta$ eine homogene Lösung von $(**)$. Nach (2.5) liegt $\overline{v}$ in V^σ.
Weil Fr anisotrop auf V^Θ operiert, ist $(\mathrm{Fr}-1)|_{V^\Theta}$ invertierbar, d.h. $(\mathrm{Fr}-1)^{-1}P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ ist ein Gitter in V^Θ. Sei $\overline{v} \in (\mathrm{Fr}-1)^{-1}P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$, d.h. $\mathrm{Fr}\cdot\sigma^{-1} \in W^\Theta$ liegt in der Projektion auf W^Θ von $(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)_{\overline{v}} = (P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)_{Facette(\overline{v})}$ (nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.9). Also liegt die ganze Facette, in der $\overline{v}$ liegt, in $(\mathrm{Fr}-1)^{-1}P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$. Weil diese Gruppe diskret ist, muß die Facette ein Punkt ($\overline{v}$ selbst) sein.
Da $\mathrm{Fr} \in W^\Theta \rtimes \sigma$ primitiv ist, muß nach Lemma 2.6 die Projektion $\big(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes (W^\Theta \rtimes \langle\sigma\rangle)\big)_{\overline{v}} \to W^\Theta \rtimes \langle\sigma\rangle$ surjektiv sein. Daher ist auch die (Einschränkung der) Projektion auf W^Θ surjektiv. Weil $\overline{v} \in V^{\langle\Theta,\sigma\rangle}$, ist $\overline{v}$ speziell in $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$.
Wenn umgekehrt $P_\Theta(v) \in V^\sigma$ eine spezielle Ecke von C ist, so ist v Lösung einer zu $(*)$ äquivalenten homogenen Gleichung, da jedes Urbild von Fr unter $(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes (W^\Theta \rtimes \langle\sigma\rangle))_{P_\Theta(v)} \twoheadrightarrow W^\Theta \rtimes \langle\sigma\rangle$ eine Lösung angibt. $\square$

Nach diesem Satz (a) werden alle Lösungen zu gegebenem $(\Phi, \Theta, \mathrm{Fr}, \sigma, \beta^\vee)$ aus Platzgründen in ein Diagramm eingetragen.

Beispiel 3.3. $\Phi = A_{2n}$ und $\mathrm{ord}(\Theta) = 2$.
Nach Beispiel 1.13 ist der Alkoven $C \in V^\Theta$ zu $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$ mit $0 \in \overline{C}$ die um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestauchte Kammer $C_0 \cap V^\Theta$ für einen Alkoven C_0 des A_{2n}–Systems. Man hat in diesem Fall

$$\Omega_C = \Omega_C^{\mathrm{ext}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \Omega_C^{\mathrm{spez}} = \Omega_C^{\mathrm{spez,ext}} \simeq \mathbb{Z}/2.$$

Weil hier $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$ gilt, hat man nur die homogene Gleichung $(*)$ zu betrachten. Man errechnet zwei Lösungen im Alkoven, von denen genau eine in $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$ liegt.

(3.4) Falls $(\Phi,\Theta) \neq (A_{2n}, \mathrm{Flip})$, kann man die Punkte (b) und (c) des Satzes 3.2 auch so formulieren

- **(b')** *Alle Punkte, für die $(*)$ gilt, bilden einen Orbit unter den Diagrammautomorphismen des Quotientendiagramms zu $(\Delta_{aff}(\Phi,\Theta),\omega)$, die von Diagrammautomorphismen von $\Delta_{aff}(\Phi,\Theta)$ herkommen, die mit ω vertauschen.*
- **(c')** *Die Lösungen der homogenen Gleichungen $(*)$ sind $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \cap V^\sigma$.*

4 Bezeichnungen

(4.1) Die Bezeichnungen der folgenden Tabellen sind alle aus [BFW], insbesondere die Namen der primitiven Konjugationsklassen. Sie stammen ursprünglich aus [Car]. Für die Serien wird folgende Notation von signierten Zykeln verwendet: Ein signierter Zykel w der Länge r ist beschrieben durch die Abbildungsvorschrift

$$\varepsilon_{a_1} \mapsto \pm\varepsilon_{a_2} \mapsto \pm\varepsilon_{a_3} \mapsto \ldots \mapsto \pm\varepsilon_{a_r} \mapsto \pm\varepsilon_{a_1}$$

sowie die "Parität der Vorzeichen": er wird **positiv** bezeichnet, falls $\mathrm{ord}(w) = r$ und **negativ**, falls $\mathrm{ord}(w) = 2r$ (d.h. $w^r(\varepsilon_{a_1}) = -\varepsilon_{a_1}$). Einen negativen Zykel schreibt man $w = (a_1, a_2, ..., a_r)^-$, einen positiven $w = (a_1, a_2, ..., a_r)$.
Die Menge aller Produkte paarweise ziffernfremder signierter Zykeln mit positiven Zykeln der Längen a, b, c, ... und negativen Zykeln der Längen A, B, C, ... wird (wie bei Carter [Car]) mit $[abc...\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}...]$ bezeichnet.

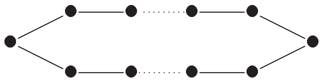
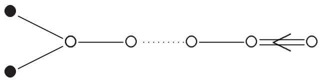
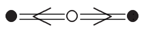
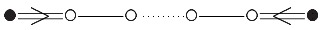
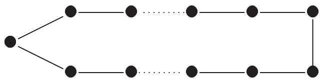
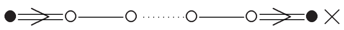
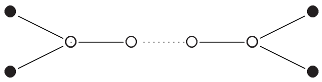
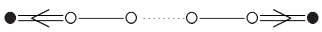
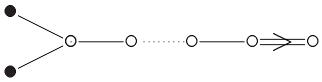
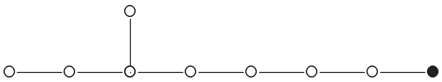
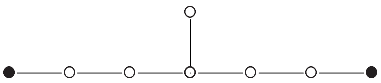
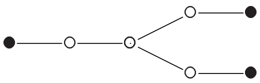
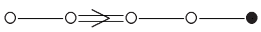
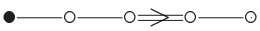
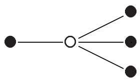
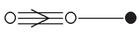
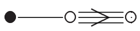
(4.2) Die Numerierung der Wurzeln, Kowurzeln und Gewichte folgt in [BFW] Bourabaki. In der Tabelle auf Seite 14 hat man dabei folgende Nummern:

Φ	$\Theta^* = id$	$\mathrm{Ord}\Theta^* = 2$
A_{2n-1}	$0 \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) \\ (2n-1) & (2n-2) & \dots & (n+1) \end{matrix}\ n$	$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\ 2\ 3 \dots (n-2)\ (n-1)\ n$
C_n	$0\ 1\ 2 \dots (n-2)\ (n-1)\ n$	
A_{2n}	$0 \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) & n \\ 2n & (2n-1) & \dots & (n+2) & (n+1) \end{matrix}$	$0\ 1\ 2 \dots (n-2)\ (n-1)\ n$
D_{n+1}	$\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\ 2\ 3 \dots (n-2)\ (n-1) \begin{matrix} n \\ (n+1) \end{matrix}$	$0\ 1\ 2 \dots (n-2)\ (n-1)\ n$
B_n	$\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\ 2\ 3 \dots (n-2)\ (n-1)\ n$	
E_8	$\begin{matrix} & & 2 & & & & & \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{matrix}$	
E_7	$\begin{matrix} & & & 2 & & & \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$	
E_6	$0\ 2\ 4 \begin{matrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{matrix}$	$4\ 3\ 2\ 1\ 0$
F_4	$0\ 1\ 2\ 3\ 4$	
		$\mathrm{Ord}\Theta^* = 3$
D_4	$\begin{matrix} & & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ & & 4 \end{matrix}$	$2\ 1\ 0$
G_2	$0\ 2\ 1$	

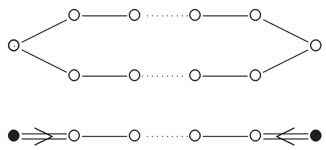
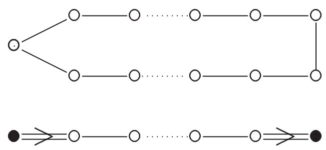
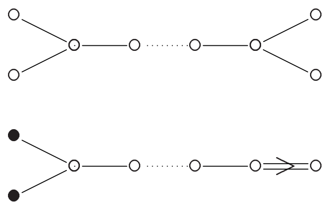
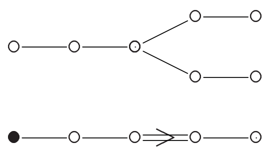
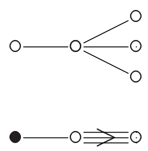
(4.3) Die Diagramme werden mit den jeweiligen Namen aus [Tits, 4.3] versehen. Insbesondere werden die Entartungen der Serien–Diagramme für kleine n nur mit Verweis auf die Tabellen in [Tits] angegeben.
Die Zahl links neben dem Quotientendiagramm gibt an, wieviele Punkte das untere Diagramm hat.

Bemerkung: Alle Diagramme in [Tits, 4.3] kommen in den folgenden Liste vor.

5 Homogene Lösungen: $\beta^\vee = \mathbf{0}$ mit $\sigma = id$

Φ	$\theta = id$	$\mathrm{Ord}(\theta) = 2$
A_{2n-1} $n \geq 2$		 bzw. 
C_n $n \geq 2$		
A_{2n}		 bzw. 
D_{n+1} $n \geq 4$		
B_n $n \geq 3$		
	Nur $\theta = id$ möglich:	
E_8		
E_7		
	$\theta = id$	$\mathrm{Ord}(\theta) = 2$
E_6		
F_4		
	$\theta = id$	$\mathrm{Ord}(\theta) = 3$
D_4		
G_2		

Homogene Lösungen mit $\sigma \neq id$

Φ	
A_{2n-1} $n \geq 2$	
A_{2n}	
D_{n+1} $n \geq 4$	
E_6	
D_4	

Die Diagramme für $\Theta \neq id$ sind langweilig: Für sie gilt $\Theta = \sigma$ oder $\Theta = \sigma^{-1}$ (im Falle D_4!), so daß σ auf dem Alkoven bzgl. $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ trivial operiert. Daher genügen die Diagramme der ersten Tabelle auf der Vorseite.

Der Alkoven zum Quotientendiagramm des A_{2n}–System hier ist nicht derselbe wie der zu $\Delta_{aff}(\Phi(A_{2n}), \Theta \neq id)$ sondern nur proportional zu ihm. Der Alkoven von A_{2n} ist gleich

$$\mathrm{Alk}(A_{2n}) := \{(x_1, ..., x_{m+1}) \in V \mid 1 + x_{m+1} > x_1 > x_2 > ... > x_m > x_{m+1}\}.$$

Daher ist der Alkoven des Quotientendiagramms gleich

$$\mathrm{Alk}(A_{2n}) \cap V^\sigma = \left\{(x_1, ..., x_n, 0, -x_n, ... - x_1) \in V^\sigma \mid \frac{1}{2} > x_1 > x_2 > ... > x_n > 0\right\}$$

wogegen

$$\mathrm{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi(A_{2n}), \Theta)) = \left\{(x_1, ..., x_n, 0, -x_n, ... - x_1) \in V^{\Theta} \mid \frac{1}{4} > x_1 > x_2 > ... > x_n > 0\right\}.$$

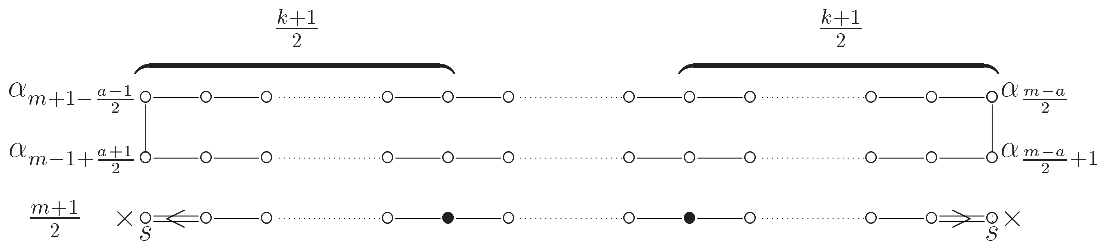
6 Inhomogene Lösungen

Φ ist vom Typ $\mathbf{A_m}$ und $\beta^\vee = \beta^\vee_{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{a}\beta^\vee_{\mathbf{1}}$ **(mod** $\mathbb{Z}[\mathbf{\Phi}^\vee]$**):**

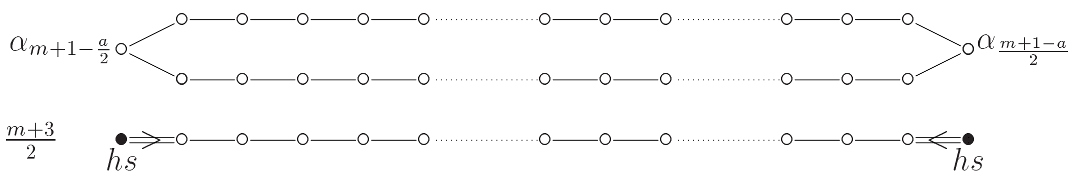
Fall 1: $\Theta = \mathbf{id}$.

Fall 1.1: Sei $\mathrm{Fr} \in W$ die Coxeterklasse und $c := \frac{m+1}{\mathrm{ggT}(a,m+1)}$. Die Gleichung $(*)$ hat $\mathrm{ggT}(a, m+1)$ verschiedene Lösungen, deren Diagramm in [Tits] mit ${}^cA_m$ bezeichnet wird. Dabei ist jeder der $\mathrm{ggT}(a, m+1)$ Punkt im relativ lokalen Dynkindiagramm geschwärzt.

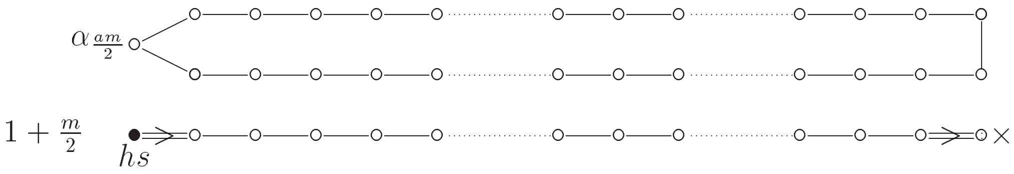
Fall 1.2: Sei m ungerade und $\mathrm{Fr} \in -[k, m+1-k] \subset W \rtimes \sigma$ mit ungeradem k. Falls a ungerade ist, gibt es zwei Lösungen in einem ${}^2A''_m$–Diagramm: [1]



Falls a gerade ist, gibt es zwei Lösungen in einem ${}^2A'_m$–Diagramm:



Fall 1.3: Sei $m =$ gerade und $\mathrm{Fr} \in -[m+1] \subset W \rtimes \sigma$ das getwistete Coxeterelement. Die Lösungsmenge ist nur ein Punkt in einem ${}^2A'_m$–Diagramm: [2]



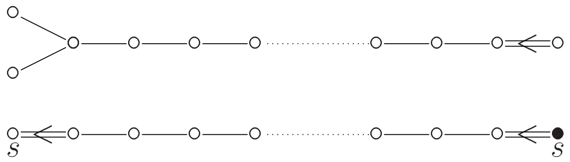
(Beachte, daß $m+1$ und $\frac{m}{2}$ teilerfremd sind, so daß $\beta^\vee_{\frac{m}{2}}$ die Fundamentalgruppe $\pi(\Phi)$ erzeugt.)

[1]Dieses Diagramme hat man für $m \geq 5$. Für $m = 3$ entarten sie zu ${}^2A''_3$ in [Tits].
[2]Dieses Diagramme hat man für $m \geq 4$. Für $m = 2$ entarten sie zu ${}^2A'_2$ in [Tits].

Fall 2: $\Theta \neq$ id.

Fall 2.1: Sei $m = 2n-1$ ungerade und $\mathrm{Fr} \in W^{\Theta} \rtimes \langle \Theta \rangle$ so, daß Fr auf dem C_n–System $P_{\Theta}(\mathbb{Z}[\Phi^{\vee}])$ als Coxeterelement operiert.

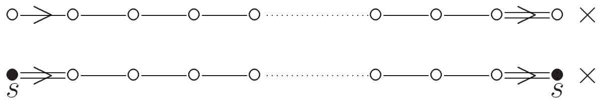
$n = \frac{m+1}{2}$



${}^{2}B - C_n$

Fall 2.2: Wenn m gerade ist, hat man nur die homogene Gleichung zu lösen, da dann $P_{\Theta}(\mathbb{Z}[\Phi]^{*}) = P_{\Theta}(\mathbb{Z}[\Phi^{\vee}])$.

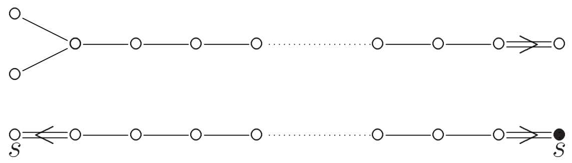
$1 + \frac{m}{2}$



Φ ist vom Typ $\mathbf{B_n}$ $(\mathbf{n \geq 3})$:

Sei $\beta^\vee = \beta_1^\vee$ und $\mathrm{Fr} \in [\bar{n}]$ das Coxeterelement. Dann ist die einzige Lösung

n



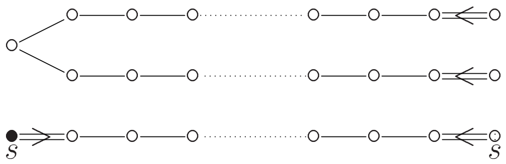
^2B_n

Φ ist vom Typ $\mathbf{C_n}$ $(\mathbf{n \geq 2})$:

Sei $\beta^\vee = \beta_n^\vee$ und $\mathrm{Fr} = [\bar{n}]$ das Coxeterelement.

Falls n gerade ist, ist die einzige Lösung: [3]

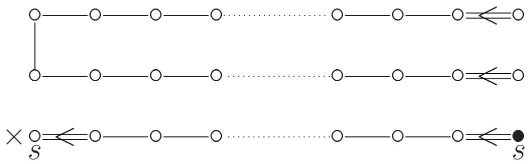
$1 + \frac{n}{2}$



^2C_n

Falls n ungerade ist, ist die einzige Lösung: [4]

$\frac{n+1}{2}$



^2C_n

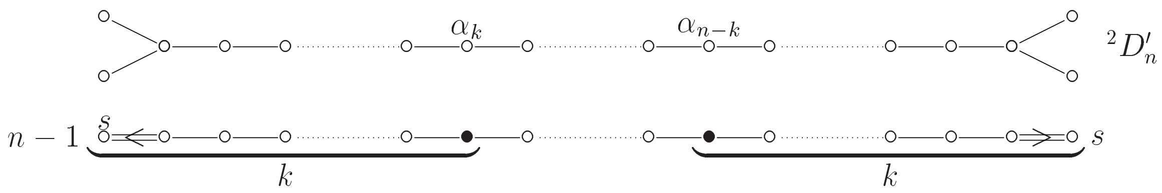
[3]Dieses Diagramm hat man für $n \geq 4$. Für $n = 2$ entartet es zu $^2C_2$ in [Tits].
[4]Dieses Diagramm hat man für $n \geq 5$. Für $n = 3$ entartet es zu $^2C_3$ in [Tits].

$\mathbf{D_n}$ $(\mathbf{n \geq 4})$:

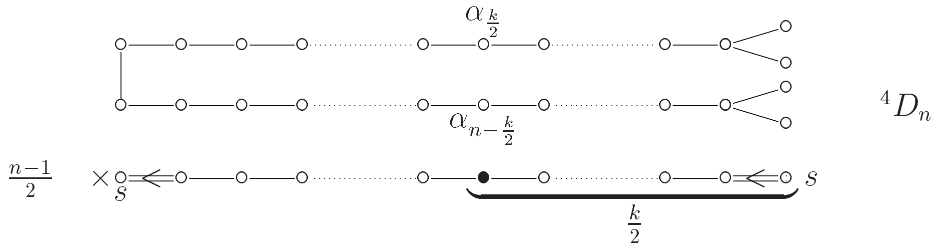
Fall 1: $\mathbf{\Theta = id}$.

In den Fällen 1.1 bis 1.3 ist $\mathrm{Fr} \in W$, in den Fällen 1.4 bis 1.6 ist $\mathrm{Fr} \in W \rtimes \sigma_2$ und in 1.7 ist $\mathrm{Fr} \in W(D_4) \rtimes \sigma_3$.

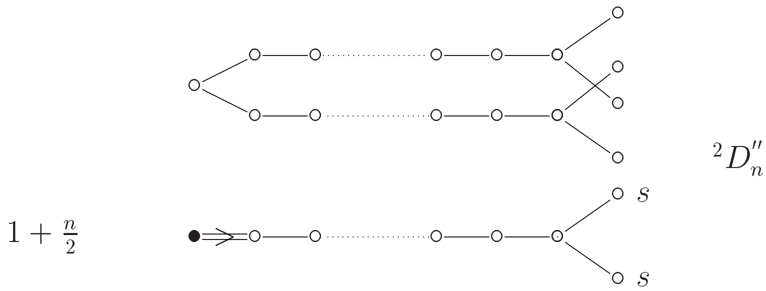
Fall 1.1: Sei $\beta^\vee = \beta_1^\vee$ und $\mathrm{Fr} \in [\bar{k}, \overline{n-k}] \in W$ mit $1 \leq k \leq n-1$. Es gibt zwei Lösungen:



Fall 1.2: Sei n ungerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\mathrm{Fr} \in [\bar{k}, \overline{n-k}] \in W$, wobei o.E. k gerade und $n-k$ ungerade seien. Dann ist die einzige Lösung: [5]

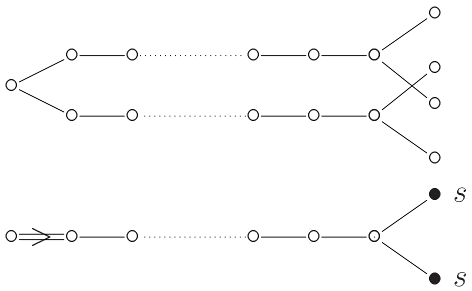


Fall 1.3: Sei n gerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\mathrm{Fr} \in [\bar{k}, \overline{n-k}] \in W$. Es gibt nur eine Lösung.
Falls k und $n-k$ gerade sind, erhält man: [6]



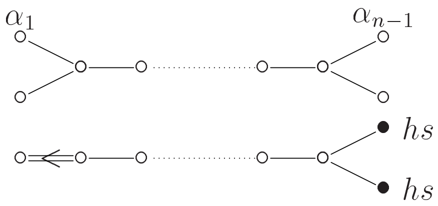
[5]Dieses Diagramm hat man für $n \geq 7$. Für $n = 5$ entartet es zu ${}^4D_5$ in [Tits].
[6]Dieses Diagramm hat man für $n \geq 4$. Für $n = 4$ entartet es zu ${}^2D_4^{'}$ bei [Tits].

Falls k und $n-k$ ungerade sind, erhält man:



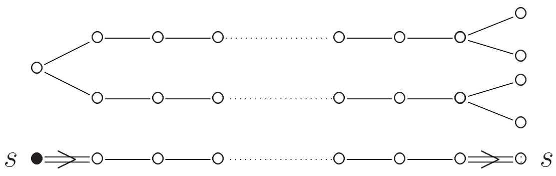
$1+\frac{n}{2}$ $\qquad$ $^2D''_n$

Fall 1.4: Sei $\beta^\vee = \beta_1^\vee$ und $\mathrm{Fr} \in [\bar{n}] \subset W(D_n) \rtimes \sigma_2$. Dann hat man zwei Lösungen



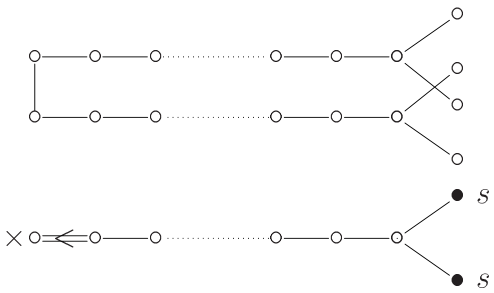
n $\qquad$ ^2D_n

Fall 1.5: Sei n gerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\mathrm{Fr} \in [\bar{n}] \subset W(D_n) \rtimes \sigma_2$. Dann ist die einzige Lösung: [7]



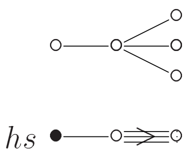
$\frac{n}{2}$ $\qquad$ ^4D_n

Fall 1.6: Sei n ungerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\mathrm{Fr} \in [\bar{n}] \subset W(D_n) \rtimes \sigma_2$. Dann hat man zwei Lösungen: [8]



$\frac{n+1}{2}$ $\qquad$ ^2D_n

Fall 1.7: Hier darf $\mathrm{Fr} \in W(D_4) \rtimes \sigma_3$ beliebig sein. Man hat für jede Wahl von $\beta^\vee$ genau eine Lösung:



[7] Dieses Diagramm hat man für $n \geq 6$. Für $n = 4$ entartet es zu $^4D_4$ in [Tits].

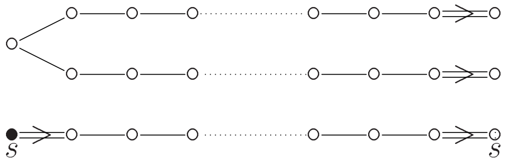
[8] Dieses Diagramm hat man für $n \geq 7$. Für $n = 5$ entartet es zum entsprechenden $^2D_5''$ in [Tits].

Fall 2: $\mathbf{ord}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{2}$.

Sei $\beta^\vee = \beta_n$ und $\mathrm{Fr} \in W^\Theta \rtimes \langle\Theta\rangle$ so, daß Fr auf dem C_{n-1}–System $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ als Coxeterelement operiert.

Fall 2.1: n ist ungerade (d.h. $n-1$ gerade). Die einzige Lösung ist: [9]

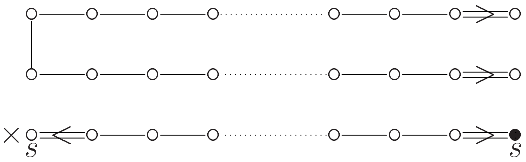
$\frac{n+1}{2}$



$^2C - B_{n-1}$

Fall 2.2: n ist gerade ($n-1$ ungerade). Die einzige Lösung ist: [10]

$\frac{n}{2}$ $\times$



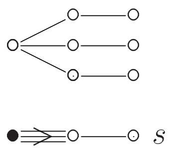
$^2C - B_{n-1}$

[9] Dieses Diagramm hat man für $n \geq 4$. Für $n = 2$ entartet es zu $^2C - B_2$ in [Tits].
[10] Dieses Diagramm hat man für $n \geq 5$. Für $n = 3$ entartet es zu $^2C - B_3$ in [Tits].

Φ ist vom Typ $\mathbf{E_6}$ und $\beta^\vee \in \{\beta_{\mathbf{1}}^\vee, \beta_{\mathbf{6}}^\vee\}$.

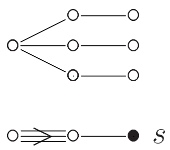
Es bleibt nur $\Theta = id$ zu betrachten, da $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$.

Fall 1: Sei $\mathrm{Fr} = 9\mathrm{A} = E_6(a_1) \subset W$. Dann hat man als einzige Lösung:



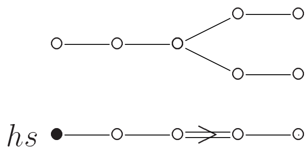
${}^3E_6$

Fall 2: Sei $\mathrm{Fr} \in \{12\mathrm{A}, 6\mathrm{A}\} = \{\mathrm{cox}, \mathrm{cox}^2\} \subset W$. Dann hat man als einzige Lösung:



${}^3E_6$

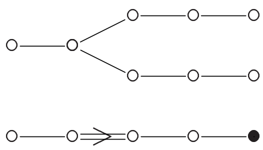
Fall 3: Sei $\mathrm{Fr} \in \{-12\mathrm{A}, -9\mathrm{A}, -3\mathrm{A}\} \subset -W = W \rtimes \sigma$, d.h. Fr ist beliebig aber primitiv in $W \rtimes \sigma$. Es gibt nur eine Lösung:



${}^2E_6$

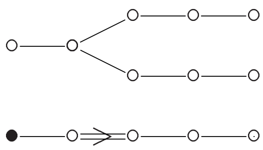
Φ ist vom Typ $\mathbf{E_7}$ und $\beta^\vee = \beta_{\mathbf{7}}^\vee$.

Falls $\mathrm{Fr} \in \{E_7, E_7(a_2), E_7(a_4)\}$ hat man als einzige Lösung:



${}^2E_7$

Falls $\mathrm{Fr} \in \{E_7(a_1), E_7(a_3)\}$ hat man als einzige Lösung:



${}^2E_7$

Literaturverzeichnis

[Ball] J. Ballmann, *Berechnung der Kottwitz–Shelstad–Transferfaktoren für unverzweigte Tori in nicht zusammenhängenden reduktiven Gruppen*, Dissertation, Mannheim (2001).

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chs. 4, 5, 6, Hermann (1968).

[Car] R.W. Carter *Conjugacy classes in the Weyl groups*, Comp. Math. **25** (1972), 1–59.

[Hal] Th. Hales, *A simple definition of transfer factors for unrammified groups*, Contemporary Mathematics, Vol. **145** (1993), 109–134.

[KS] R. Kottwitz und D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque **255** (1999).

[Stein] R. Steinberg, *Endomorphisms of algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **80** (1968).

[Tits] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Automorphic Forms, Representations and L–functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 1 (1979), 29–69.

[BFW] J. Ballmann, D. Fulea, R. Weissauer, *Abstieg anisotroper Konjugationsklassen in Weylgruppen*, Manuskripte der Forschergruppe Arithmetik Mannheim–Heidelberg, **17(1999)** (1999).