Abstieg anisotroper Konjugations-klassen in Weylgruppen

Joachim Ballmann,
Dan Fulea,
Rainer Weissauer

August 1999

1 Bezeichnungen und Definitionen

Sei G eine halbeinfache Gruppe, definiert über einem Körper F der Charakteristik 0. Sei Φ das Wurzelsystem von G, $\Phi^\vee$ die Kowurzeln und $V = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}$ der von den Kowurzeln erzeugte Vektorraum. Die meisten Bezeichnungen zu den Wurzelsystemen sind wie in [Bou]: Δ ist ein System einfacher positiver Wurzeln α_1, ..., α_n. Die bzgl. Δ positiven Wurzeln werden mit Φ^+ bezeichnet, α^+ ist die positive Wurzel maximaler Höhe und $\alpha_0 = 1 - \alpha^+ \in \Phi_{\mathsf{aff}}$ sei die affine Wurzel, die in [Ti, 1.8] zu Δ hinzugenommen wird, um das **affine Dynkindiagramm** zu bilden: $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}}) := \Delta \cup \{\alpha_0\}$. Die Fundamentalgewichte $\beta_1^\vee$,... $\beta_n^\vee$ bezüglich Δ sind die Dualbasis zu Δ in V, d.h. $\langle \alpha_i, \beta_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$. Sie erzeugen $\mathbb{Z}[\Phi]^*$. Analog sind die dualen Fundamentalgewichte β_1,... β_n bezüglich $\Delta^\vee$ die Dualbasis von $\Delta^\vee$ in $V^* = \mathbb{Z}[\Phi] \otimes \mathbb{R}$. Die Fundamentalgruppe wird mit $\pi(\Phi) := \mathbb{Z}[\Phi]^*/\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \pi(G_{ad})$ bezeichnet.

Im Folgenden werden Wurzelsysteme mit Twists benutzt, d.h. Paare (Φ, θ), für die Φ ein Wurzelsystem ist und θ ein Automorphismus von V, der Δ und Φ jeweils in sich abbildet.
Die **maximalen Subsysteme** von (Φ, θ) sind die maximalen Elemente unter den θ–stabilen Unterwurzelsystemen von Φ. Man erhält die maximalen Subsysteme, indem man stets einen ganzen θ–Orbit (mit allen von im ausgehenden Kanten) aus dem affinen Dynkindiagramm wegstreicht. Wenn der gestrichene Orbit mehr als ein Element von $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$ enthält, d.h. der Rang des Subsystems echt kleiner als der von Φ wird, wird ein Z_a zu dem System dazugeschrieben, um anzudeuten, daß in der Gruppe ein anisotroper zentraler Torus auftritt.
Eine W–Konjugationsklasse in W bzw. $W \rtimes \theta$ **steigt ab** in ein Subsystem Φ_1 bzw. $(\Phi_1, \theta_1 = \theta|_{\Phi_1})$, wenn die Klasse aus der Weylgruppe $W_1 = W(\Phi_1)$ bzw. $W_1 \rtimes \theta_1$ kommt. M.a.W.: Es gibt in der W–Konjugationsklasse einen Vertreter aus $W_1 \subset W$ bzw. aus $W_1 \rtimes \theta_1 \subset W \rtimes \theta \subset W^{ext}$.

Es werden die Bezeichnungen von Tits [Ti] benutzt um (Φ, θ) durch Graphen (mit Zusatzinformation) zu beschreiben. Die Graphen sind das (absolute) lokale Dynkindiagramm und das relative lokale Dynkindiagramm. In [Ti, S. 60–66] findet man eine Liste aller einfachen Systeme. Als Zusatzinformation wird in [Ti, S. 60ff] angegeben, welche der Ecken **hyperspeziell** "hs" sind. Die Definition dieser Begriffe wird in [Ti, 1.10+1.11] gegeben.

Die **Grade** d_i der Weylgruppe W sind die Polynomgrade, die bei einem System von Erzeugern für die Invariantenalgebra $\mathbb{C}[V \otimes \mathbb{C}]^W$ auftreten. Sollte ein Twist $\theta \neq id$ vorliegen, so kann man nach [Sp1, 6.1.] die Erzeuger $f_i \in \mathbb{C}[V \otimes \mathbb{C}]^W$ (mit $\deg(f_i) = d_i$) so wählen, daß es gewisse Einheitswurzeln ε_i gibt mit $\theta f_i = \varepsilon_i \cdot f_i$. Diese ε_i sind (nach [Sp1, 6.1.]) unabhängig von der Wahl der f_i und werden **Faktoren** der mit θ getwisteten Weylgruppe W genannt.

Sei im Folgenden $\bar{w}$ die W–Konjugationsklasse eines Elements $w \in W$ bzw. $w \in W \rtimes \theta$. Dann sei $h^1(\bar{w}) := h^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi^\vee])$. Die Klasse $\bar{w}$ heißt **anisotrop**, wenn für ein Element w dieser Klasse der Invariantenraum $V^{\langle w \rangle} = 0$ ist. Eine anisotrope Klasse $\bar{w}$ heißt **primitiv**, wenn $|\pi(\Phi)^{\langle w \rangle}| = h^1(\bar{w})$ ist. Springer bezeichnet in [Sp1, 4.2+6.4] ein $w \in W$ bzw. $w \in W \rtimes \theta$ **regulär**, wenn es einen Eigenvektor in $V \otimes \mathbb{C}$ besitzt, der in keiner der Spiegelungshyperebenen zu W liegt, d.h. er liegt im Inneren einer Weylkammer.

2 Beschreibung der Tabellensammlung

Die folgende Tabellensammlung gibt für einfache, über F hyperspezielle Gruppen, d.h. Gruppen deren relatives lokales Dynkindiagramm in [Ti, S. 60ff] eine hyperspezielle Ecke besitzt, gewisse Fakten zu folgenden Punkten:

I Wurzelsystem
II Weylgruppe W
III W–Konjugationsklassen in W bzw. $W \rtimes \theta$
IV anisotrope und primitive Klassen
V Tabellen mit Information zu den primitiven Klassen

Im Einzelnen:
Unter **I** wird Φ^+, V und Δ in Bezeichnung und Normierung von [Bou] angegeben. Es folgen die Fundamentalgewichte, die Fundamentalgruppe und ihre Operation auf $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$. Dann kommt das (relative) lokale Dynkindiagramm, im getwisteten Fall unter dem absoluten lokalen Dynkindiagramm. Es werden alle maximalen Subsysteme aufgelistet. Um Fundamentalgruppen von maximalen Subsytemen zu bestimmen wurde die Linearkombination $(\alpha^+)^\vee = \sum_{i=1}^n b_i \cdot (\alpha_i)^\vee$ angegeben, denn man hat die

Behauptung 1 *Sei G s.c., und H die Untergruppe zu einem Subsystem Φ_H von Φ_G. Dann ist die nach Borovoi definierte Fundamentalgruppe $\pi(H) \simeq \mathbb{Z}[\Phi^\vee]/\mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$. Es gibt $b_i \in \mathbb{N}$, so daß $(\alpha^+)^\vee = \sum_{i=1}^n b_i \cdot (\alpha_i)^\vee$ in $\Phi_G^\vee$ gilt (wobei $\Delta(\Phi) = \{\alpha_i\} \subset \Phi_G$).*
Wenn Φ_H ein maximales Subsystem von Φ ist und durch Wegstreichen von α_i ensteht, so ist die Fundamentalgruppe $\pi(H) \simeq \mathbb{Z}/b_i$.
Für die maximalen Subsysteme von getwisteten irreduziblen Systemen (Φ, θ), für die man einen Orbit der Länge $c > 1$ streichen muß, erhält man (außer im Fall ${}^2(A_1^2) \times A_3 \subset {}^2E_6$) stets $\pi(H) \simeq \mathbb{Z}^{c-1}$. Im Fall $\Phi_H = {}^2(A_1^2) \times A_3 \subset {}^2E_6 = \Phi$ (wenn man $\{\alpha_3, \alpha_5\}$ streicht) gilt $\pi(H) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$.

Beweis: Es wird die Definition der Fundamentalgruppe nach Borovoi [Mi] benützt. Nach [Sp2, 2.15] ist dann für jede reduktive Gruppe $\pi(H) = X_*(T)/\mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$. Das Gitter $\mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$ entsteht, indem man aus der $\mathbb{Z}$–Basis $\Delta^\vee$ von $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = X_*(T_{sc})$ den Vektor $\alpha_i^\vee$ herausnimmt und durch $(\alpha^+)^\vee$ ersetzt. Da man in jedem Wurzelsystem $(\alpha^+)^\vee = \sum_{i=1}^n b_i \cdot (\alpha_i)^\vee$ mit $b_i \in \mathbb{Z}$ hat, folgt die Aussage über die maximalen ungewisteten Subsysteme sofort. In den Fällen, in denen mehrere Punkte gestrichen werden, steicht man – außer im Fall ${}^2(A_1^2) \times A_3 \subset {}^2E_6$ – den hyperspeziellen Orbit, d.h. $\mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$ hat ein Subsystem von $\Delta^\vee$ zur Basis. Daher ist $\pi(H)$ frei. Den verbleibenden Sonderfall kann man ausrechnen.

Schließlich wird in Punkt I noch der abgeschlossene Alkoven

$$\{v \in V = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R} \mid \alpha_1(v) \geq 0,\ \ldots,\ \alpha_n(v) \geq 0,\ 1 - \alpha^+(v) = \alpha_0(v) \geq 0\}$$

bzgl. der Basis $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$ angegeben.

In Punkt **II** wird die Weylgruppe W sowie $W^{ext} = \{g \in \mathsf{Aut}(V) \mid g(\Phi) = \Phi\}$ beschrieben. Ferner werden die Grade und gegebenenfalls die Faktoren von W bzw. (W, θ) angegeben. Außerdem wird die W-Konjugationsklasse des Coxeterelements und die Coxeterzahl angegeben.

Im getwisteten Fall wird dabei die Definition des getwisteten Coxeterelements von [Sp1, 7.1.–7.3] verwendet: Man nehme aus jedem θ–Orbit von Δ eine Wurzel und mulipliziere die zu diesen Wurzeln gehörende Spiegelungen (in irgendeiner Reihenfolge und ohne Wiederholung) zu einem Element $w \in W$. Dann ist die W-Konjugationsklasse von $w \rtimes \theta$ unahängig von allen Wahlen und wird **getwistete Coxeterklasse** genannt.

In **III** werden die W–Konjugationsklassen in W bzw. $W \rtimes \theta$ klassifiziert und angegeben, welche Klassen primitiv, welche anisotrop und welche regulär nach Springer [Sp1] sind. Außerdem werden das charakteristische Polynom und h^1 zu jeder Klasse angegeben.
Für B–, C– und D–Systeme empfiehlt sich die Verwendung von signierten Zykeln (wie bei Carter [Ca, S.25]). Ein **signierter Zykel** w der Länge r ist beschrieben durch die Abbildungsvorschrift

$$\varepsilon_{a_1} \mapsto \pm\varepsilon_{a_2} \mapsto \pm\varepsilon_{a_3} \mapsto ... \mapsto \pm\varepsilon_{a_r} \mapsto \pm\varepsilon_{a_1}$$

sowie die "Parität der Vorzeichen": er wird **positiv** bezeichnet, falls ord$(w) = r$ und **negativ**, falls ord$(w) = 2r$ (d.h. $w^r(\varepsilon_{a_1}) = -\varepsilon_{a_1}$). Einen negativen Zykel schreibt man $w = (a_1, a_2, ..., a_r)^-$, einen positiven $w = (a_1, a_2, ..., a_r)$.
Die Menge aller Produkte paarweise ziffernfremder signierter Zykeln mit positiven Zykeln der Längen a, b, c, ... und negativen Zykeln der Längen A, B, C, ... wird (wie bei Carter [Ca]) mit $[\mathbf{abc}...\ \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}...]$ bezeichnet.

In **IV** werden die anisotropen und die (anisotropen) primitiven Konjugationsklassen aufgelistet.

Die Tabellen im Punkt **V** geben Informationen zu den primitiven, anisotropen Konjugationsklassen.
Die Eigenwerte **EW**, bzw. das charakteristische Polynom der Klasse liest man so ab: Der Eintrag $a_p b_p c_p$... bedeutet, daß das charakteristische Polynom das Produkt der Kreisteilungspolynome $\Phi_a \cdot \Phi_b \cdot \Phi_c \cdots$ ist, d.h. die Klasse hat die primitven a–ten, b–ten, c–ten... Einheitswurzeln als Eigenwerte.
Die Bilder in der Rubrik **Abstieg** geben durch geschwärzte Punkte im affinen Dynkindiagramm an, daß die Klasse zu dem maximalen Subsytem Φ_1 bzw. $(\Phi_1, \theta_1 = \theta|_{\Phi_1})$ absteigt, das man durch Weglassen dieser Ecke bzw. θ–Orbits von Ecken nach dem oben beschriebenen Verfahren erhält.
Die Zentralisatoren in derselben Tabellenspalte geben die Zentralisatorkardinalität in den entsprechenden Untergruppen an.
Carter ordnet in [Ca] den Konjugationsklassen in W (nicht kanonische) **Graphen** zu. Sie werden in einer Tabellenspalte angegeben. Konjugationsklassen in $W \rtimes \theta$ behandelt Carter nicht. Deshalb werden im getwisteten Fall keine Graphen angegeben.
In der Rubrik **"reg"** steht genau dann ein r, wenn die Klasse regulär nach Springer [Sp1, 4.2+6.4] ist.

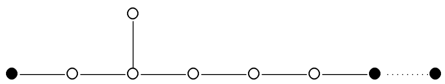
Beispiel zu V: Es gibt unten folgenden Tabelleneintrag zu einer Konjugationsklasse in $W(E_8)$:

(1)

Frame	EW	$\|W_w\|$	h^1	Graph	reg	Abstieg : Zentralisatoren
$\vdots$						
$\overline{1}^3 \cdot \overline{5}$ $(-a)$	$2_p^4 10_p$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$	2^4	$D_6 \times A_1^2$		$6 : 2^4 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$\vdots$						

Die hier beschriebene Konjugationsklasse $\bar{w}$ heißt bei [Fr] $\overline{1}^3 \cdot \overline{5}$ (und $-w$ ist dort vom Typ (a)). Sie hat das charkteristische Polynom $\Phi_2^4 \cdot \Phi_{10}$, d.h. $\bar{w}$ hat -1 als 4–fachen Eigenwert und die primitiven 10–ten Einheitswurzeln als einfache Eigenwerte. Der Zentralisator W_w von w in W hat $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ Elemente und $h^1 = h^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi^\vee]) = 2^4$. Carter ordnet in [Ca] dieser Klasse den Graphen $D_6 \times A_1^2$ zu (denn w hat einen Vertreter, der Coxeterelement in dem $D_6 \times A_1^2$–Subsystem von E_8 ist). Die Klasse ist nicht regulär nach Springer [Sp1], weshalb ein entsprechender Vermerk "r" fehlt. Die letzte Spalte bezieht sich auf die Tabelle direkt hinter der oben zitierten. Dort findet man als sechstes Bild Folgendes:

(2)

⋮ 6 ⋮		$D_8, D_8(a_2), D_4^2, D_6 \times A_1^2, D_4 \times A_1^4, A_1^8$

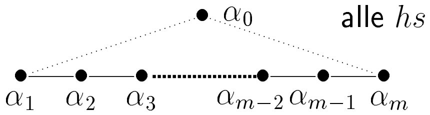
Das heißt, die Klasse $\bar{w}$ steigt ab in genau die folgenden maximalen Subsysteme: D_8, $E_7 \times A_1$ (es wird auch der triviale "Abstieg" nach E_8 angezeigt). In der letzten Spalte der Tabelle (1) werden die Zentralisatorordungen der Klasse in diesen maximalen Subsystemen angegeben. Das sind die Zahlen nach dem Doppelpunkt: $2^4 \cdot 3 \cdot 5$ und $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Die Reihenfolge bezieht sich auf die Reihenfolge der $\alpha_i \in \Delta$, die zu dem maximalen Subsystem gehören: Da das D_8–Subsystem der E_8 (beim Verfahren von Dynkin) durch Streichen von α_1 entsteht, $E_7 \times A_1$ dagegen durch Streichen von α_8, ist die Zuordnung der Zentralisatorordungen folgende:

$$|W(D_8)_w| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{und} \quad |W(E_7 \times A_1)_w| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

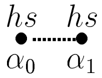
Die letzte Spalte in (2) gibt die Konjugationsklassen (in Carters Bezeichnung) an, die das abgebildete Abstiegsdiagramm 6 haben.

Weylgruppen vom Typ $\mathbf{A_m}$:

I : Sei $V = \{(x_1, ..., x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} x_i = 0\}$ und $(\varepsilon_i)_{1\le i\le m+1}$ sei die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{m+1}$.
$\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le m+1\}$, $|\Phi^+| = \frac{1}{2}m(m+1)$
Das Wurzelsystem $\Phi(A_m)$ ist vom Typ ADE und $\alpha^\vee = \alpha$ für alle $\alpha \in \Phi$.
$\Delta = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ ...,\ \alpha_m = \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}\}$
$\alpha^+ = (\varepsilon_1 - \varepsilon_{m+1}) = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m)$



bzw, falls $m = 1$:



Es gibt keine (nicht parabolische) maximale (echte) Subsysteme, d.h. alle Subsysteme werden erzeugt von echten Teilmengen von Δ.
Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1, ..., \alpha_m$) sind $\beta_i^\vee = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_i - \frac{i}{m+1}(\sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon_i)$ für $1 \le i \le m$. Man hat $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \{(x_1, ..., x_{m+1}) \in \mathbb{Z}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} x_i = 0\}$ und $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ wird erzeugt von $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und $\beta_1^\vee$. Die Fundamentalgruppe ist $\pi(\Phi) \simeq \mathbb{Z}/(m+1)$. Wenn man sich das affine Dynkindiagramm der A_m als regelmäßiges $(m+1)$–Eck vorstellt, operiert $\beta_i^\vee$ durch die Drehung, die α_0 auf α_i dreht.
Der abgeschlossene Alkoven (bzgl. der Bourbakibasis oben) ist

$$\{(x_1, ..., x_{m+1}) \in V \mid 1 + x_{m+1} \ge x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_m \ge x_{m+1}\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind 0, $\beta_1^\vee$,...,$\beta_m^\vee$.

II : $W = W(A_n) = S_{n+1}$. Die Aktion auf V ist die Einschränkung der Aktion auf $\mathbb{R}^{m+1}$, die bestimmt ist durch die (übliche) Permutation der Basis $(\varepsilon_i)_{1\le i\le m+1}$: $\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$ $(\sigma \in S_{m+1})$.
$W(A_m)^{ext} = S_{m+1} \rtimes \langle\theta\rangle = S_{m+1} \rtimes \langle -1\rangle$, wobei θ die Restriktion von $-J_{m+1} = (-\delta_{i,m+2-j})_{i,j} \in Gl_{m+1}(\mathbb{R})$ auf V ist.
Die Grade von $W(A_m)$ sind $2, 3, ..., m+1$.
Coxeterzahl: $h = m+1$. Die Coxeterklasse ist die von $(1, 2, 3, ..., m+1)$.

III : Die Konjugationsklassen der $W(A_m)$ werden durch ihre Zykelstruktur vollständig beschrieben: Jede Klasse korrespondiert (bijektiv) zu einer Partition $m+1 = m_1 + m_2 + ... + m_k$, so daß

$$\sigma = (1, ..., m_1)(m_1+1, ..., m_1+m_2)\cdots(m_1 + ... + m_{k-1} + 1, ..., m+1)$$

ein Vertreter der Klasse ist. Primitiv ist nur das Coxeterelement, denn für $k \ge 1$ kommt σ (als Coxeterelement) aus der Weylgruppe von $A_{m_1-1} \times A_{m_2-1} \times ... \times A_{m_k-1}$. Dies ist zugleich der "Carter–Graph" der Klasse. Das charakteristische Polynom der Klasse ist $(X-1)^{-1}\prod_{i=1}^k (X^{m_i} - 1)$. Es gilt $h^1 = \prod_{i=1}^k m_i$. Anisotrop ist ebenfalls nur die Coxeterklasse. Regulär nach Springer sind Klassen mit Zykelstruktur

$$[\underbrace{d\ d ...\ d}_{k-\text{mal}}] \text{ falls } kd = m+1 \qquad \text{bzw.} \qquad [1\,\underbrace{d\ d ...\ d}_{k-\text{mal}}] \text{ falls } kd = m.$$

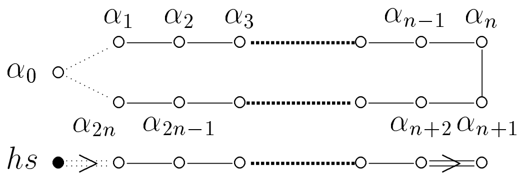
IV : Anisotrop ist nur die Coxeterklasse. Sie ist auch primitiv

V:

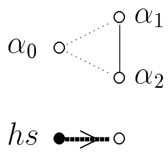
w	char. Poly.	$\lvert W_w\rvert$	h^1	Graph	reg
$(1, 2, ..., m+1)$	$\prod_{1\ne d\mid m+1} \Phi_d$	$m+1$	$m+1$	A_m	r

Die Typen $^2\mathbf{A}'_\mathbf{m} \to \mathbf{BC_n}$ $(\mathbf{m = 2n \geq 2})$:

I : V, Φ^+, Δ, usw. siehe A_m oben.



bzw, falls $n = 1$:



Die maximalen Subsysteme sind $A_1 \times {}^2A'_{2(n-1)} \times Z_a$, ${}^2A'_{2n-1} \times Z_a$, ${}^2A'_{2k+1} \times {}^2A'_{2(n-k-1)} \times Z_a$ für $1 \leq k \leq n-1$.

II : $W^{ext} = S_{2n+1} \rtimes \langle\theta\rangle = S_{2n+1} \rtimes \langle -1 \rangle$, wobei θ die Restriktion von $-J_{2n+1} = (-\delta_{i,2n+2-j})_{i,j} \in Gl_{2n+1}(\mathbb{R})$ auf V ist.
Grade: $d_j = j+1$, Faktoren: $\varepsilon_j = (-1)^{d_j}$ für $1 \leq j \leq 2n$.
getwistetes Coxeterelement: $-(1,2,3,...,2n{+}1)$. Coxeterzahl: $h_\theta = 4n{+}2$, $\;n_\theta := \dim V^\theta = n$.

III : Jede $W(A_{2n})$–Konjugationsklasse in $W(A_{2n}) \rtimes \theta$ korrespondiert bijektiv zu einer Partition $2n+1 = n_1 + n_2 + ... + n_k$ so, daß

$$\sigma = -(1,...,n_1)(n_1+1,...,n_1+n_2)\cdots(n_1+...+n_{k-1}+1,...,2n+1)$$

ein Vertreter der Klasse ist. Primitiv ist nur das Coxeterelement, denn für $k > 1$, enthält die Partition ein gerades n_i, o.E.d.A. n_1. Dann kommt die Klasse von ${}^2A'_{n_1-1} \times {}^2A'_{2n-n_1}$. Das char. Polynom ist $(X+1)^{-1}\prod_{n_i \text{ gerade}}(X^{n_i}-1)\prod_{n_i \text{ ungerade}}(X^{n_i}+1)$. Es gilt $h^1 = 2^{\#\{n_i \text{ ungerade}\}-1} \cdot \prod_{n_i \text{ gerade}} n_i$. Regulär nach Springer sind Klassen mit Zykelstruktur $-[\underbrace{d\ d ...\ d}_{k-\text{mal}}]$, wobei $kd = 2n+1$.
IV : Genau dann ist σ anisotrop, wenn alle Zykel ungerade Länge haben, d.h. alle n_i ungerade sind. (Notwendigerweise ist die Anzahl k der Zykel ungerade.) Primitiv ist nur das getwistete Coxeterelement.

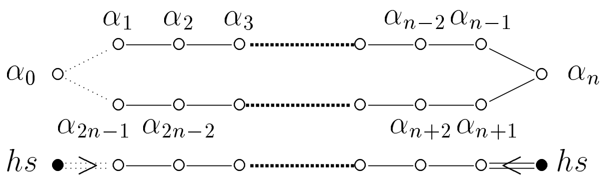
V :

$w \in W(A_{2n}) \rtimes \theta$	char. Poly.	$\lvert (W \rtimes \langle\theta\rangle)_w \rvert$	h^1	Graph	reg
$-[n_1 \cdots n_k]$ alle n_i ungerade	$(X+1)^{-1}\prod_{i=1}^k (X^{n_i}+1)$		2^{k-1}		r falls alle $n_i = n/k$
$-(1,2,...,2n+1)$	$(X+1)^{-1}(X^{2n+1}+1)$	$4n+2$	1	BC_n	r

Der Abstiegsgraph von $-[n_1 \cdots n_k]$ entsteht, indem man in dem Diagramm oben die Orbiten zu den α_l $(1 \leq l < n)$ schwärzt, für deren Index gilt: Es gibt Indizes $1 \leq i_1 < ... < i_s \leq k$, so daß $2l = \sum_{r=1}^s n_{i_r}$. (Der Orbit α_n kann nie schwarz sein.)

Die Typen $\mathbf{{}^2A'_m \to C_n}$ $(\mathbf{m = 2n-1 \geq 3})$:

I : V, Φ^+, Δ, usw. siehe A_m oben. $\alpha_0 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_{2n})$



Die maximalen Subsysteme sind von der Form $A_1 \times {}^2A_{2n-3} \times Z_a$, ${}^2A_{2k-1} \times {}^2A_{2(n-k)-1} \times Z_a$, für $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

II : $W^{ext} = S_{2n} \rtimes \langle\theta\rangle = S_{2n} \rtimes \langle -1 \rangle$, wobei θ die Restriktion von $-J_{2n} \in Gl_{2n}(\mathbb{R})$ auf V ist.
Grade: $d_j = j+1$, Faktoren: $\varepsilon_j = (-1)^{d_j}$ für $1 \leq j \leq 2n-1$.
getwistetes Coxeterelement: $-(1)(2,3,...,2n)$. Coxeterzahl: $h_\theta = 2(2n-1)$, $n_\theta := \dim V^\theta = n$.

III : Jede $W(A_{2n-1})$–Konjugationsklasse in $W(A_{2n-1}) \rtimes \theta$ korrespondiert bijektiv zu einer Partition $2n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ so, daß

$$\sigma = -(1,...,n_1)(n_1+1,...,n_1+n_2)\cdots(n_1+...+n_{k-1}+1,...,2n)$$

ein Vertreter der Klasse ist. Primitiv sind Klassen zu Partitionen $2n = n_1 + n_2$ mit ungeraden n_1, n_2 (d.h. k=2). Denn sollte für eine geeignete Umordnung der n_i gelten , daß $n_1 + ... + n_l = 2m$ für ein $m < n$ (d.h. für ein $l < k$), so kommt die Klasse von ${}^2A_{2m-1} \times {}^2A_{2(n-m)-1}$. (Falls $m = 1$, ist $A_1 \times {}^2A_{2n-3}$ zu lesen.) Die Klasse zur Partition $2n = n_1$ (d.h. $k = 1$) kommt vom parabolischen Subsystem ${}^2(A^2_{n-1})$, das von $\Delta\backslash\{\alpha_n\}$ erzeugt wird. Das char. Polynom ist $(X+1)^{-1}\prod_{n_i \text{ gerade}}(X^{n_i}-1)\prod_{n_i \text{ unger.}}(X^{n_i}+1)$. Es gilt $h^1 = 2^{\#\{n_i \text{ ungerade}\}-1} \cdot \prod_{n_i \text{ gerade}} n_i$. Regulär nach Springer sind Klassen mit Zykelstruktur $-[1\underbrace{d\, d...\, d}_{k-\text{mal}}]$, wobei $kd = 2n-1$.

IV : Genau dann ist σ anisotrop, wenn alle Zykel ungerade Länge haben, d.h. alle n_i ungerade sind. (Notwendigerweise ist die Anzahl k der Zykel gerade.) Primitiv sind alle σ, die genau zwei Zykel haben.

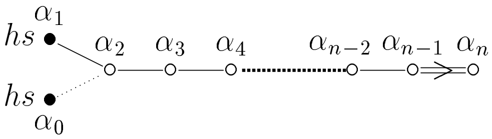
V :

$w \in W(A_{2n-1}) \rtimes \theta$	char. Poly.	$\lvert(W \rtimes \langle\theta\rangle)_w\rvert$	h^1	Graph	reg
$-[n_1 \cdots n_k]$ alle n_i ungerade und $k > 2$	$\frac{\prod_{i=1}^k (X^{n_i}+1)}{X+1}$		2^{k-1}		r falls $-[n_1 \cdots n_k]$ $= -[1\ d...d]$
$-(1,2,...,a)(a+1,...,2n)$ für $1 \leq a < n$ ungerade	$\frac{(X^a+1)(X^{2n-a}+1)}{X+1}$	$a \cdot (2n-a)$	2		r falls $a = 1$
$-(1,2,...,n)(n+1,...,2n)$, falls $n > 1$ ungerade	$\frac{(X^n+1)^2}{X+1}$	$2n^2$	2		

Der Abstiegsgraph von $-[n_1 \cdots n_k]$ entsteht, indem man in dem Diagramm oben die Orbiten zu den α_l $(1 \leq l \leq n)$ schwärzt, für deren Index gilt: Es gibt Indizes $1 \leq i_1 < ... < i_s \leq k$, so daß $2l = \sum_{r=1}^s n_{i_r}$.

Φ ist vom Typ $\mathbf{B_n}$ $(\mathbf{n \geq 3})$:

I : $V = \mathbb{R}^n$ und $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ sei die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.
$\Phi^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $|\Phi^+| = n^2$
$(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)^\vee = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ und $\varepsilon_i^\vee = 2\varepsilon_i$.
$\Delta = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ ...,\ \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,\ \alpha_n = \varepsilon_n\}$,
$\alpha^+ = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + ... + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n)$
$(\alpha^+)^\vee = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (\alpha_1^\vee + 2\alpha_2^\vee + 2\alpha_3^\vee + ... + 2\alpha_{n-1}^\vee + \alpha_n^\vee)$
Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1^\vee, ..., \alpha_n^\vee$) sind $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j$ für $1 \leq i < n$ und $\beta_n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$. Die dualen Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1, ..., \alpha_n$) sind $\beta_i^\vee = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j$ für $1 \leq i \leq n$.
Man hat $\mathbb{Z}[\Phi] = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varepsilon_i$ und $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]^*$ ist die von $\mathbb{Z}[\Phi]$ und β_n erzeugte Gruppe, $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ gerade}\}$ und $\mathbb{Z}[\Phi]^* = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varepsilon_i$.
Die Fundamentalgruppe ist $\pi(\Phi) \simeq \mathbb{Z}/2$ und der Erzeuger $\beta_1^\vee$ operiert auf $\Delta(\Phi_{\text{aff}})$ durch Vertauschen von α_0 und α_1.



Maximale Subsysteme sind $A_1 \times A_1 \times B_{n-2}$, D_n, $D_m \times B_{n-m}$ für $3 \leq m \leq n-1$.
Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 - x_2 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind 0, $\beta_1^\vee, \frac{1}{2}\beta_2^\vee, ..., \frac{1}{2}\beta_n^\vee$.

II : $W = W(B_n) = (\mathbb{Z}/2)^n \rtimes S_n$. Die Operation ist bestimmt durch $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = (ij) \in S_n$ und $s_{\varepsilon_i} = diag(1, ...1, -1, 1...) \in Gl_n$, wobei die -1 an der i–ten Stelle steht.
$W(B_n)^{ext} = W(B_n)$.
Die Grade von $W(B_n)$ sind $2, 4, 6, ..., 2n$.
Coxeterzahl: $h = 2n$. Die Coxeterklasse ist die von $(1, 2, 3, ..., n)^- \in [\bar{n}]$.

III : Die Konjugationsklassen sind eindeutig durch ihre signierte Zykelstruktur bestimmt. Jede Klasse korrespondiert bijektiv zu signierten Zykeln der Form $[n_1 \cdots n_k\ \bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$ mit $n = \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{l} m_i$. Primitiv ist nur das Coxeterelement ($k = 0, l = 1, m_l = n$), denn anderenfalls kommt die Klasse aus der Weylgruppe von $A_{n_1-1} \times ... \times A_{n_k-1} \times D_{m_1+m_2} \times D_{m_3+m_4} \times ... \times D_{m_{l-1}+m_l}$, falls l gerade ist, bzw. von $A_{n_1-1} \times ... \times A_{n_k-1} \times D_{m_1+m_2} \times ... \times D_{m_{l-2}+m_{l-1}} \times B_{m_l}$, falls l ungerade ist. Das charakteristische Polynom der Klasse ist $\prod_{i=1}^{k}(X^{n_i} - 1)\prod_{i=1}^{l}(X^{m_i} + 1)$. Es gilt $h^1 = 2^l \cdot \prod_{i=1}^{k} n_i$. Regulär nach Springer sind Klassen mit signierter Zykelstruktur

$$[\underbrace{d\ d...\ d}_{m-\text{mal}}] \text{ falls } d \text{ ungerade und } md = n \qquad \text{bzw.} \qquad [\underbrace{\bar{d}\ \bar{d}...\ \bar{d}}_{m-\text{mal}}] \text{ falls } md = n$$

IV : Genau dann ist die Klasse anisotrop, wenn alle Zykel negativ sind (d.h. $k = 0$). Primitiv ist nur das Coxeterelement.

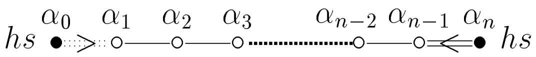
V:

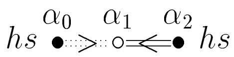
w	char. Poly.	$\|W_w\|$	h^1	Graph	reg
$[\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$	$\prod_{i=1}^{l}(X^{m_i}+1)$		2^l		r falls alle $m_i = n/l$
$(1,2,...,n)^-$	X^n+1	$2n$	2	B_n	r

Der Abstiegsgraph für die anisotrope (nicht primitiven) Klasse $[\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$ (mit $\sum_{i+1}^{l} m_i = n$ und $l > 1$) ist ein B_n–Graph (wie oben indiziert), in dem die k–te Ecke genau dann geschwärzt wird, wenn sich k aus einer geraden Anzahl der m_i kombinieren läßt, d.h. $k = \sum_{r=1}^{s} m_{i_r}$ für geeignete $1 \leq i_1 < ... < i_s \leq l$ und gerades s.

Φ ist vom Typ $\mathbf{C_n}$ $(\mathbf{n \geq 2})$:

I : $V = \mathbb{R}^n$ und $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ sei die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.
$\Phi^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $|\Phi^+| = n^2$
$(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)^\vee = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ und $2\varepsilon_i^\vee = \varepsilon_i$.
$\Delta = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ ...,\ \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,\ \alpha_n = 2\varepsilon_n\}$
$\alpha^+ = 2\varepsilon_1 = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n)$
$(\alpha^+)^\vee = \varepsilon_1 = (\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + ... + \alpha_{n-1}^\vee + \alpha_n^\vee)$
Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1^\vee, ..., \alpha_n^\vee$) sind $\beta_i = \sum_{j=1}^i \varepsilon_j$ für $1 \leq i \leq n$. Die dualen Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1, ..., \alpha_n$) sind $\beta_i^\vee = \sum_{j=1}^i \varepsilon_j$ für $1 \leq i < n$ und $\beta_n^\vee = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \varepsilon_j$.
Man hat $\mathbb{Z}[\Phi] = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \text{ gerade}\}$, $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ sowie $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ und $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ ist die von $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und $\beta_n^\vee$ (s.u.) erzeugte Gruppe.
Die Fundamentalgruppe ist $\pi(\Phi) \simeq \mathbb{Z}/2$ und der Erzeuger $\beta_n^\vee$ operiert auf $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$ durch die Permutation $(0, n)(1, n-1)(2, n-2)...$ der Indizes.



bzw. falls $n = 2$:


Die maximalen Subsysteme sind $C_m \times C_{n-m}$ für $1 \leq m \leq n-2$.
Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind 0, $\frac{1}{2}\beta_1^\vee, ..., \frac{1}{2}\beta_{n-1}^\vee$, $\beta_n^\vee$.

II : $W(C_n) = W(B_n)$, weil $s_{\varepsilon_i} = s_{2\varepsilon_i}$ als Elemente von $Gl(V)$.

III : Auch hier ist alles wie im B_n–Fall, außer der Bemerkungen zu den nicht primitiven Elementen: Primitiv ist (auch hier) nur das Coxeterelement aber ein signierter Zykel des Typs $[n_1 n_2 \cdots n_k\ \bar{m}_1 \bar{m}_2 \cdots \bar{m}_l]$ mit $n = \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{i=1}^l m_i$ kommt hier (als Coxeterelement) von einem Unterwurzelsystem des Typs $A_{n_1 - 1} \times ... \times A_{n_k - 1} \times C_{m_1} \times ... \times C_{m_l}$. Dies ist deswegen auch der Graph, den Carter dieser Konjugationsklasse zuordnet.

IV : Genau dann ist die Klasse anisotrop, wenn alle Zykel negativ sind. Primitiv ist nur das Coxeterelement.

V :

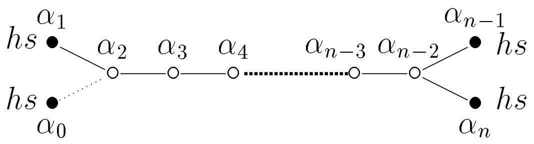
w	char. Poly.	$\lvert W_w \rvert$	h^1	Graph	reg
$[\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$	$\prod_{i=1}^l (X^{m_i} + 1)$		2^l		r falls alle $m_i = n/l$
$(1, 2, ..., n)^-$	$X^n + 1$	$2n$	2	C_n	r

Der Abstiegsgraph der anisotropen Klasse $[\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$ (mit $\sum_{i+1}^l m_i = n$) ist ein C_n–Graph (wie oben indiziert), in dem die k–te Ecke genau dann geschwärzt wird, wenn es Indizes $1 \leq i_1 < ... < i_s \leq l$ gibt, so daß $k = \sum_{r=1}^s m_{i_r}$.

Weylgruppen vom Typ $\mathbf{D_n (n \geq 4)}$:

I : $V = \mathbb{R}^n$ und $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ sei die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.
$\Phi^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, $|\Phi^+| = n(n-1)$
Das Wurzelsystem ist vom Typ ADE und $\alpha^\vee = \alpha$ für alle $\alpha \in \Phi$.
$\Delta = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ ...,\ \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,\ \alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$
$\alpha^+ = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n)$
Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1, ..., \alpha_n$) sind $\beta_i^\vee = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_i$ für $1 \leq i \leq n-2$ und $\beta_{n-1}^\vee = \frac{1}{2}(-\varepsilon_n + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i)$, $\beta_n^\vee = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Daher ist $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \text{ gerade}\} = \mathbb{Z}[\Phi]$ und $\mathbb{Z}[\Phi]^* = (\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i) + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i)$.
Für gerades n ist $\pi(\Phi) \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Für ungerades n ist $\pi(\Phi) \simeq \mathbb{Z}/4$. In jedem Fall ist $\{0, \beta_1^\vee, \beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ ein Vertretersystem für $\pi(\Phi) = \mathbb{Z}[\Phi]^*/\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$. Falls n ungerade ist, gilt $\beta_1^\vee \equiv 2\beta_n^\vee$ mod $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$. Die Operation der Fundamentalgruppe auf $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$ (als Permutationen auf den Indizes von $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$) ist

	n gerade	n ungerade
$\beta_1^\vee$	$(0,1)(n-1,n)$	$(0,1)(n-1,n)$
$\beta_{n-1}^\vee$	$(0,n-1)(1,n)(2,n-2)(3,n-3)...$	$(0,n-1,1,n)(2,n-2)(3,n-3)...$
$\beta_n^\vee$	$(0,n)(1,n-1)(2,n-2)(3,n-3)...$	$(0,n,1,n-1)(2,n-2)(3,n-3)...$



Falls $n = 4$, so gibt es nur A_1^4 als maximales Subsystem.
Falls $n \geq 5$, sind die maximale Subsysteme $A_1 \times A_1 \times D_{n-2},\ \ D_m \times D_{n-m}$ für $3 \leq m \leq \frac{n}{2}$.
Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 - x_2 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{n-1} \geq x_n \geq -x_{n-1}\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind 0, $\beta_1^\vee$, $\frac{1}{2}\beta_2^\vee$, ..., $\frac{1}{2}\beta_{n-2}^\vee$, $\beta_{n-1}^\vee$, $\beta_n^\vee$.

II : Weil $s_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = s_{\varepsilon_i} s_{\varepsilon_j}$, ist

$$W(D_n) = \{w \in W(B_n) \mid w \text{ hat nur eine gerade Anzahl negativer Zykeln}\} \cong (\mathbb{Z}/2)^{n-1} \rtimes S_n.$$

Falls $n \geq 5$, ist $W(D_n)^{ext} = W(D_n) \rtimes \langle\theta_2\rangle = W(B_n)$ mit $\theta_2 = s_{\varepsilon_n} \in Gl(V)$.
Falls $n = 4$, ist $W(D_4)^{ext} = W(D_4) \rtimes S_4 = W(F_4)$ (siehe ${}^3D_4$).
Die Grade von $W(D_n)$ sind $2, 4, 6, ..., 2n-2, n$.
Coxeterzahl: $h = 2(n-1)$. Die Coxeterklasse ist die von $(1,2,3,...,n-1)^-(n)^- \in [\overline{n-1}\ \bar{1}]$.

III : Wenn nicht alle Zykeln positiv und gerade sind, ist die Konjugationsklasse eines Elements aus $W(D_n)$ vollständig durch seine signierte Zykelstruktur bestimmt. Wenn aber alle Zykeln von $w \in W(D_4)$ positiv und gerade sind, so gibt es genau zwei Konjugationsklassen mit der Zykelstruktur von w. Denn die Vertreter dieses Zykeltyps aus den parabolischen Subsystemen zu $\Delta\backslash\{\alpha_{n-1}\}$ und zu $\Delta\backslash\{\alpha_n\}$ sind nicht konjugiert in $W(D_n)$.
Primitiv ist eine Klasse mit Zykelstruktur $[n_1 n_2 ... n_k\ \bar{m}_1 \bar{m}_2 \cdots \bar{m}_l]$ genau dann, wenn $k = 0$

und $l=2$. Falls nämlich nicht $k=0$ und $l=2$, kommt die Klasse $[n_1\cdots n_k\ \bar{m}_1\cdots\bar{m}_l]$ von $A_{n_1-1}\times\ldots\times A_{n_k-1}\times D_{m_1+m_2}\times D_{m_3+m_4}\times\ldots\times D_{m_{l-1}+m_l}$.
Das char. Polynom der Klasse $[n_1\cdots n_k\ \bar{m}_1\cdots\bar{m}_l]$ ist $\prod_{i=1}^k(X^{n_i}-1)\prod_{i=1}^l(X^{m_i}+1)$.
Das char. Polynom der Klasse $-[n_1\cdots n_k]$ mit geraden n_i ist $\prod_{i=1}^k(X^{n_i}-1)$.
Es gilt $h^1=2^l\cdot\prod_{i=1}^k n_i$, wobei für $-[n_1\cdots n_k]$ mit geraden n_i $l=0$ zu setzen ist.
Regulär nach Springer sind Klassen mit folgender signierter Zykelstruktur:

$[\underbrace{d\ d\ldots\ d}_{m-\text{mal}}]$ falls $md=n$ und d unger.	$[1\ \underbrace{d\ d\ldots\ d}_{m-\text{mal}}]$ falls $md=n-1$ und d unger.	$[\bar{1}\ \underbrace{\bar{d}\ \bar{d}\ldots\ \bar{d}}_{m-\text{mal}}]$ falls $md=n-1$ und m unger.	$[1\ \underbrace{\bar{d}\ \bar{d}\ldots\ \bar{d}}_{m-\text{mal}}]$ falls $md=n-1$ und m gerade	$[\underbrace{\bar{d}\ \bar{d}\ldots\ \bar{d}}_{m-\text{mal}}]$ falls $md=n$ und m ger.

IV : Genau dann ist die Klasse anisotrop, wenn alle Zykel negativ sind ($k=0$). Primitiv sind anisotrope Klassen mit zwei negativen Zykeln.

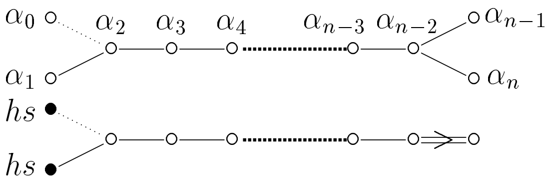
V :

signierter Zykel	char. Poly.	$\lvert W_w\rvert$	h^1	Graph	reg
$[\bar{m}_1\cdots\bar{m}_l]$ (l gerade)	$\prod_{i=1}^l(X^{m_i}+1)$		2^l		r falls $[\bar{m}_1\cdots\bar{m}_l]$ $=[\bar{d}\ \bar{d}\ldots\bar{d}]$ oder $=[\bar{1}\ \bar{d}\ldots\bar{d}]$
$[\bar{k}\bar{l}]$ $(n=k+l, 1\le k\le l)$	$(X^k+1)(X^l+1)$	$2kl$	2^2	$D_n(a_{k-1})$	r

Der Abstiegsgraph der anisotropen (nicht primitiven) Klasse $[\bar{m}_1\cdots\bar{m}_l]$ (mit $\sum_{i+1}^l m_i=n$ und geradem $l>2$) ist ein D_n–Graph (wie oben indiziert), in dem die k–te Ecke genau dann geschwärzt wird, wenn sich k aus einer geraden Anzahl der m_i kombinieren läßt, d.h. $k=\sum_{r=1}^s m_{i_r}$ für geeignete $1\le i_1<\ldots<i_s\le l$ mit geradem s.

Die Typen $^2D_n \to B_{n-1}$:

I : V, Φ^+, Δ wie in D_n beschrieben. $\theta = \theta_2$



Die maximale Subsysteme sind $A_1^2 \times {}^2D_{n-2}$, ${}^2(A_1^2) \times D_{n-2}$, $A_3 \times {}^2D_{n-3}$, ${}^2A_3 \times D_{n-3}$, $D_{n-1} \times Z_a$ und $D_m \times {}^2D_{n-m}$ für $4 \leq m \leq n-4$.

II : Ein Element aus $W(B_n)$ liegt in $W(D_n) \rtimes \theta$ genau dann, wenn die Anzahl der negativen Zykel ungerade ist:

$$W(D_n) \rtimes \theta_2 = \{w \in W(B_n) \mid w \text{ hat eine ungerade Anzahl negativer Zykeln}\}.$$

Grade and Faktoren: $d_i = 2,\ \varepsilon_i = 1\ \ (1 \leq i < n)$, $d_n = n,\ \ \varepsilon_n = -1$.
getwistetes Coxeterelement: $(1,2,3,...,n)^-$. Coxeterzahl: $h_\theta = 2n,\ \ n_\theta = \dim V^\theta = n-1$.

III : Die Konjugationsklassen sind eindeutig durch ihre signierte Zykelstruktur bestimmt. Jede Klassen korrespondiert bijektiv zu signierten Zykeln der Form $[n_1 \cdots n_k\ \bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$ mit ungeradem l und $n = \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{i=1}^l m_i$. Primitiv ist nur das getwistete Coxeterelement, denn falls nicht $m_l = n$, kommt die Klasse von $A_{n_1-1} \times ... \times A_{n_k-1} \times D_{m_1+m_2} \times ... \times D_{m_{l-2}+m_{l-1}} \times {}^2D_{m_l}$ Das charakteristische Polynom der Klasse ist $\prod_{i=1}^k (X^{n_i}-1) \prod_{i=1}^l (X^{m_i}+1)$. Es gilt $h^1 = 2^l \cdot \prod_{i=1}^k n_i$. Regulär nach Springer sind in $W(D_n) \rtimes \theta_2$ die Klassen mit folgender signierter Zykelstruktur:

$[\bar{1}\ \underbrace{d\ d ...\ d}_{m-\text{mal}}]$ falls $md = n-1$	$[\underbrace{\bar{d}\ \bar{d} ...\ \bar{d}}_{m-\text{mal}}]$ falls $md = n$, $d > 1$ und m ungerade

IV : Genau dann ist die Klasse anisotrop, wenn alle Zykel negativ sind (also $k = 0$). Primitiv ist nur das getwistete Coxeterelement.

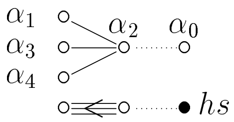
V :

signierter Zykel	char. Poly.	$\lvert(W \rtimes \langle\theta\rangle)_w\rvert$	h^1	Graph	reg
$[\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$ (l ungerade)	$\prod_{i=1}^l (X^{m_i}+1)$		2^l		r falls alle $m_i = n/l > 1$
$[\overline{n}]$	$X^n + 1$	n	2	B_{n-1}	r

Der Abstiegsgraph von $[\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_l]$ ensteht aus dem Diagramm oben, indem man – zusätzlich zu den stets geschwärzten θ–Orbiten von α_0 und α_1– alle die Orbiten von α_k $(1 < k \leq n-1)$ schwärzt, für die $k = \sum_{r=1}^s m_{i_r}$ aus einer geraden Anzahl s der m_i kombinieren werden kann (d.h. $1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n$ und s gerade).

Der Typ $^3\mathbf{D_4} \to \mathbf{G_2}$:

I : V, Φ^+ und Δ sind wie in D_n oben. Der Twist ist $\theta = \theta_3$ in II unten.



Die maximalen Subsysteme sind $A_2 \times Z_a$, $^3(A_1^3) \times A_1$.

II : $W(D_4)^{ext} = W(D_4) \rtimes S_4 = W(F_4)$, wobei die äußeren Automorphismen erzeugt werden von $\theta_2 = s_{\varepsilon_4}$ und θ_3, der bezgl. der Basis $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ gegeben ist durch die Matrix

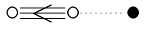
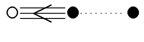
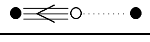
$$\theta = \theta_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$W(D_4)^\theta = W(G_2)$.
Grade: $2, 4, 4, 6$. Faktoren: $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}, 1$.
getwistetes Coxeterzahl: $h_{\theta_3} = 12$. $n_\theta = \dim V^\theta = 2$.

III bis **V** : Es gibt 7 $W(D_4)$–Konjugationsklassen in $W(D_4) \rtimes \theta$, davon 4 anisotrope und (davon) 2 primitive. Die Klassen sind (vollständige) Unterklassen in $W(F_4)$. Daher wird hier mit den Namen auf die F_4–Tabelle Bezug genommen. Bei den Repräsentanten sei

$$s_0 = s_{\alpha^+},\ s_1 = s_{\alpha_1},\ \ldots,\ s_4 = s_{\alpha_4},\ s_5 = s_{e_1 - e_4}$$

Name	EW	Repr	$\lvert(W \rtimes \langle\theta\rangle)_w\rvert$	h^1	Graph	reg	Abstieg : Zentr.
II	$1_p 2_p 3_p$	$s_2\theta$	2^2	$2 \cdot 3$			
III	$1_p 2_p 6_p$	$s_1\theta$	2^2	2			
IX	$1_p^2 3_p$	θ	$2^2 \cdot 3$	3			
XI	$2_p^2 6_p$	$s_2 s_5 \theta$	$2^2 \cdot 3$	2^2			$2 : 2^2$
XXIV	3_p^2	$s_0 s_2 \theta$	$2^3 \cdot 3$	3^2		r	$3 : 3$
VI	12_p	$s_2 s_3 \theta$	2^2	1	G_2 (cox)	r	1
VII	6_p^2	$s_5 s_3 \theta$	$2^3 \cdot 3$	1	$G_2(a_1)$	r	1

1		VI, VII
2		XI
3		XXIV

Die Weylgruppe von $\mathbf{E_6}$:

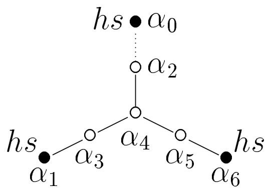
I : $V = \{(x_1, ..., x_8) \in \mathbb{R}^8 \mid x_6 = x_7 = -x_8\}$.
$\Phi^+ = \{\pm\varepsilon_i + \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 5\} \cup \{\frac{1}{2}(-\varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \sum\limits_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i) \mid \sum\limits_{i=1}^{5}\nu(i)$ gerade$\}$,
$|\Phi^+| = 36$
Das Wurzelsystem ist vom Typ ADE und $\alpha^\vee = \alpha$ für alle $\alpha \in \Phi$.

$$\Delta = \{\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8),\ \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$
$$\alpha_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ \alpha_4 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3,\ \alpha_5 = -\varepsilon_3 + \varepsilon_4,\ \alpha_6 = -\varepsilon_4 + \varepsilon_5\},$$

$\alpha^+ = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$
Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1, ..., \alpha_6$) sind

$$\begin{array}{ll}
\beta_1^\vee = (0,0,0,0,0,-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}) & \beta_2^\vee = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\
\beta_3^\vee = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{6}) & \beta_4^\vee = (0,0,1,1,1,-1,-1,1) \\
\beta_5^\vee = (0,0,0,1,1,-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}) & \beta_6^\vee = (0,0,0,0,1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})
\end{array}$$

Es ist $\mathbb{Z}[\Phi] = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \{(x_1, ..., x_8) \in \mathbb{Z}^8 \mid x_6 = x_7 = x_8 = 0$ und $\sum_{i=1}^5 x_i$ gerade$\} + \mathbb{Z}\alpha_1$ und $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ wird erzeugt von $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und $\beta_1^\vee$. Die Fundamentalgruppe $\pi(\Phi) \simeq \mathbb{Z}/3$ wird erzeugt von $\beta_1^\vee \equiv \beta_5^\vee \equiv -\beta_3^\vee \equiv -\beta_6^\vee$ mod $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und $\beta_1^\vee$ operiert durch $(016)(235)$ auf (den Indizes von) $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$.



Die maximalen Subsysteme sind $A_5 \times A_1$, A_3^2.
Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\left\{ (x_1, ..., x_8) \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_2 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5 \text{ und} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2 \le 3x_6 \le x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \end{array} \right\}.$$

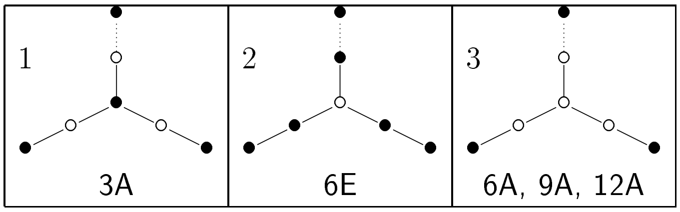
Die Ecken des Alkovens sind 0, $\beta_1^\vee$, $\frac{1}{2}\beta_2^\vee$, $\frac{1}{2}\beta_3^\vee$, $\frac{1}{3}\beta_4^\vee$, $\frac{1}{2}\beta_5^\vee$, $\beta_6^\vee$.

II : Im Atlas [Atlas, S. 26f] ist $W(E_6) = G.2$ für $G = U_4(2) \cong S_4(3)$. $|W(E_6)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$.
$W(E_6)^{ext} = W(E_6) \rtimes \langle\theta\rangle = W(E_6) \rtimes \langle -1 \rangle$, wobei θ der Automorphismus der Ordnung 2 ist, der α_1 mit α_6 sowie α_3 mit α_5 vertauscht und die restlichen Basiswurzeln (α_2 und α_4) festläßt.
Die Grade sind $2, 5, 8, 9, 12$.
Coxeterzahl : $h = 12$.

III bis **V** : Die 25 Konjugationsklassen kann man dem Atlas [Atlas] entnehmen. Die 5

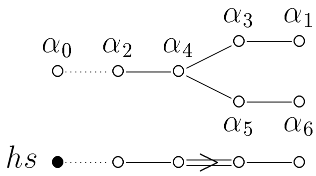
anisotropen Klassen sind in der folgenden Tabelle. Unter dem Doppelstrich sind die 3 primitiven Klassen.

Atlas	EW	$\lvert W_w \rvert$	h^1	Graph	reg	Abstieg : Zentr
$3A$	3_p^3	$2^3 \cdot 3^4$	3^3	A_2^3	r	$1 : 3^3$
$6E$	$2_p^2 3_p 6_p$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3$	$A_5 \times A_1$		$2 : 2^2 \cdot 3$
$12A$	$3_p 12_p$	$2^2 \cdot 3$	3	E_6	r	3
$9A$	9_p	3^2	3	$E_6(a_1)$	r	3
$6A$	$3_p 6_p^2$	$2^3 \cdot 3^2$	3	$E_6(a_2)$	r	3



Der Typ $^2\mathbf{E_6} \to \mathbf{F_4}$:

I : V, Φ^+ und Δ siehe E_6.

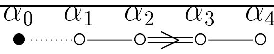
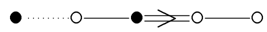
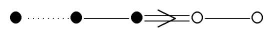
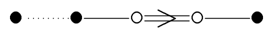
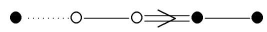


Die maximalen Subsysteme sind $^2D_5 \times Z_a$, $^2(A_1^2) \times A_3 \times Z_a$, $^2(A_2^2) \times A_2$, $^2A_5 \times A_1$.

II : $W(E_6)^{ext} = W(E_6) \rtimes \langle\theta\rangle = W(E_6) \rtimes \langle -1 \rangle$, wobei θ der äußere Automorphismus der Ordnung 2 ist.
$W(E_6)^\theta = W(F_4)$.
Grade: $2, 5, 6, 8, 9, 12$. Faktoren: $1, -1, 1, 1, -1, 1$.
getwistete Coxeterzahl: $h_\theta = 18$. $n_\theta = \dim V^\theta = 4$.

III bis **V** : In der folgenden Tabelle sind alle 9 anisotropen $W = W(E_6)$–Konjugationsklassen in $W(E_6) \rtimes \theta$ aufgeführt. (Unter dem Doppelstrich sind die 3 primitiven Klassen.)

Atlas	EW	$\lvert(W \rtimes \langle\theta\rangle)_w\rvert$	h^1	Graph	reg	Abstieg : Zentr.
$-1A$	2_p^6	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5$	2^6		r	$4 : 2^4 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^7 \cdot 3 \cdot 5$
$-3C$	$2_p^4 6_p$	$2^4 \cdot 3^3$	2^4			$4 : 2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 3$
$-3D$	$2_p^2 6_p^2$	$2^3 \cdot 3^3$	2^2			$3 : 2 \cdot 3^2,\ 2 \cdot 3^2$
$-4A$	$2_p^2 4_p^2$	$2^6 \cdot 3$	2^4		r	$5 : 2^3, 2^5$
$-5A$	$2_p^2 10_p$	$2^2 \cdot 5$	2^2			$4 : 2 \cdot 5,\ 5$
$-6A$	$3_p^2 6_p$	$2^4 \cdot 3^2$	3^2		r	$2 : 3^2$
$-9A$	18_p	$2 \cdot 3^2$	1	cox	r	1
$-12A$	$6_p 12_p$	$2^3 \cdot 3$	1		r	1
$-3A$	6_p^3	$2^4 \cdot 3^4$	1		r	1

	α_0 α_1 α_2 α_3 α_4	
1		$-3A,\ -9A,\ -12A$
2		$-6A$
3		$-3D$
4		$-1A,\ -3C,\ -5A$
5		$-4A$

Die Weylgruppe von $\mathbf{E_7}$:

$\mathbf{I}$: V ist die Hyperebene des $\mathbb{R}^8$ orthogonal zu $\varepsilon_7+\varepsilon_8$.

$\Phi^+ = \{\pm\varepsilon_i+\varepsilon_j \mid 1\le i<j\le 6\}\cup\{\varepsilon_7-\varepsilon_8\}\cup\{\frac{1}{2}(\varepsilon_7-\varepsilon_8+\sum\limits_{i=1}^{6}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i) \mid \sum\limits_{i=1}^{6}\nu(i)$ ungerade$\}$,

$|\Phi^+| = 63$

Das Wurzelsystem ist vom Typ ADE und $\alpha^\vee=\alpha$ für alle $\alpha\in\Phi$.

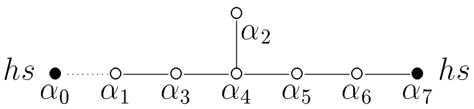
$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varepsilon_5-\varepsilon_6-\varepsilon_7+\varepsilon_8),\quad \alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\quad \alpha_3=-\varepsilon_1+\varepsilon_2,\\ \alpha_4=-\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad \alpha_5=-\varepsilon_3+\varepsilon_4,\quad \alpha_6=-\varepsilon_4+\varepsilon_5,\quad \alpha_7=-\varepsilon_5+\varepsilon_6 \end{array} \right\}$$

$\alpha^+ = (-\varepsilon_7+\varepsilon_8) = (2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7)$

Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1,...,\alpha_7$) sind

$$\begin{array}{ll} \beta_1^\vee=(0,0,0,0,0,0,-1,1) & \beta_2^\vee=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,1) \\ \beta_3^\vee=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2}) & \beta_4^\vee=(0,0,1,1,1,1,-2,2) \\ \beta_5^\vee=(0,0,0,1,1,1,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}) & \beta_6^\vee=(0,0,0,0,1,1,-1,1) \\ \beta_7^\vee=(0,0,0,0,0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \end{array}$$

Hier ist $\mathbb{Z}[\Phi]=\mathbb{Z}[\Phi^\vee]=\{(x_1,...,x_8)\in\mathbb{Z}^8 \mid x_7=x_8=0$ und $\sum_{i=1}^6 x_i$ gerade$\}+\mathbb{Z}\alpha_1$ und $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ wird erzeugt von $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und $\beta_7^\vee$. Die Fundamentalgruppe $\pi(\Phi)\simeq\mathbb{Z}/2$ wird erzeugt von $\beta_7^\vee\equiv\beta_2^\vee\equiv\beta_5^\vee \mod \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und $\beta_7^\vee$ operiert durch $(07)(16)(35)$ auf (den Indizes von) $\Delta(\Phi_{\mathsf{aff}})$.



Die maximalen Subsysteme sind $D_6\times A_1,\ A_7,\ \ A_5\times A_2,\ \ A_3^2\times A_1$.

Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\left\{(x_1,...,x_8)\in V \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_2\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5\le x_6 \text{ und} \\ -x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\le 2x_8\le 1 \end{array}\right\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind $0,\ \frac{1}{2}\beta_1^\vee,\ \frac{1}{2}\beta_2^\vee,\ \frac{1}{3}\beta_3^\vee,\ \frac{1}{4}\beta_4^\vee,\ \frac{1}{3}\beta_5^\vee,\ \frac{1}{2}\beta_6^\vee,\ \beta_7^\vee$.

$\mathbf{II}$: Im Atlas [Atlas, S. 46f] ist $W(E_7)=2\times G$ für $G=S_6(2)\cong O_7(2)$. $|W(E_7)|=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$.

$W(E_7)=W(E_7)^{ext}$.

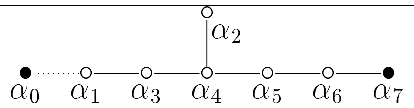
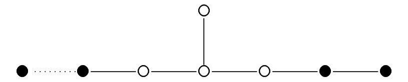
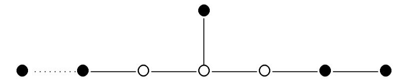
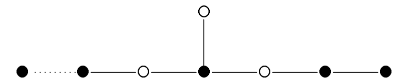
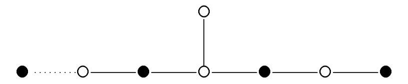
Die Grade sind $2,6,8,10,12,14,18$.

Coxeterzahl : $h=18$.

$\mathbf{III}$ bis $\mathbf{V}$: Die 60 Konjugationsklassen kann man Carter [Ca], Frame [Fr] oder dem Atlas [Atlas] entnehmen. Die anisotropen Klassen sind in der folgenden Tabelle.

Die erste Spalte gibt die Konjugationsklassen in $W(E_8)$ in der Bezeichnung von Frame [Fr] an, die eingeschränkt auf $\Phi(E_7)\subset\Phi(E_8)$ die betreffende Konjugationsklasse ist $W(E_7)$ ergeben. Dabei gibt es immer eine (komplette) $W(E_8)$–Konjugationsklasse, die anisotrop ist (die erste) und eine, die in E_8 nicht anisotrop ist (die zweite).

Frames E_8 Namen	EW	$\lvert W_w\rvert$	h^1	Graph	reg	Abstieg : Zentralisatoren
$-1^8,\ -1^6\cdot 2$	2_p^7	$2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$	2^7	A_1^7	r	$2 : 2^{10}\cdot 3^2\cdot 5$
$-1^4\cdot\bar{2}^2,\ -1^2\cdot 2\cdot\bar{2}^2$	$2_p^3 4_p^2$	$2^8\cdot 3$	2^5	$A_3^2\times A_1$		$4 : 2^8,\ 2^7$
$-1^5\cdot 3,\ -1^3\cdot 2\cdot 3$	$2_p^5 6_p$	$2^5\cdot 3^3\cdot 5$	2^5	$D_4\times A_1^3$		$2 : 2^5\cdot 3^2$
$-1\cdot 3\cdot\bar{3}^2/\bar{1}^2,\ -6\cdot\bar{3}/\bar{1}$	$2_p 3_p^2 6_p$	$2^4\cdot 3^2$	$2\cdot 3^2$	$A_5\times A_2$		$5 : 2\cdot 3^2$
$-1^2\cdot 3^2,\ -2\cdot 3^2$	$2_p^3 6_p^2$	$2^3\cdot 3^3$	2^3	$D_6(a_2)\times A_1$		$2 : 2^3\cdot 3^2$
$-1^2\cdot\bar{2}\cdot\bar{4},\ 8v$	$2_p 4_p 8_p$	2^5	2^3	A_7		$3 : 2^5,\ 2^3$
$1^3\cdot 5,\ -1\cdot 2\cdot 5$	$2_p^3 10_p$	$2^2\cdot 3\cdot 5$	2^3	$D_6\times A_1$		$2 : 2^2\cdot 5$
$-1^2\cdot 9/3,\ -2\cdot 9/3$	$2_p 18_p$	$2\cdot 3^2$	2	E_7	r	1
$-1\cdot 7,\ 2\cdot\bar{7}/\bar{1}$	$2_p 14_p$	$2\cdot 7$	2	$E_7(a_1)$	r	1
$-1\cdot 3\cdot\bar{6}/\bar{2},\ 2\cdot\bar{3}\cdot\bar{6}/\bar{1}\cdot\bar{2}$	$2_p 6_p 12_p$	$2^3\cdot 3$	2	$E_7(a_2)$		1
$-3\cdot 5,\ 2\cdot\bar{3}\cdot\bar{5}/\bar{1}^2$	$2_p 6_p 10_p$	$2\cdot 3\cdot 5$	2	$E_7(a_3)$		1
$\bar{3}^3/\bar{1},\ 2\cdot\bar{3}^3/\bar{1}^3$	$2_p 6_p^3$	$2^4\cdot 3^4$	2	$E_7(a_4)$	r	1

1		$E_7, E_7(a_1), ..., E_7(a_4)$
2		$D_6\times A_1, D_6(a_2)\times A_1, D_4\times A_1^3, A_1^7$
3		A_7
4		$A_3^2\times A_1$
5		$A_5\times A_2$

Die Weylgruppe von $\mathbf{E_8}$:

I: $V = \mathbb{R}^8$ und $(\varepsilon_i)_{1\le i\le 8}$ sei die kanonische Basis des $\mathbb{R}^8$.

$\Phi^+ = \{\pm\varepsilon_i + \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 8\} \cup \{\frac{1}{2}(\varepsilon_8 + \sum\limits_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i) \mid \sum\limits_{i=1}^{7}\nu(i) \text{ gerade}\}, \quad |\Phi^+| = 120$

Das Wurzelsystem ist vom Typ ADE und $\alpha = \alpha^\vee$ für alle $\alpha \in \Phi$.

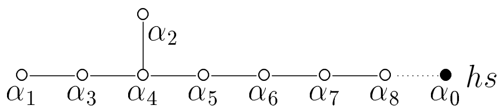
$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \alpha_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \alpha_4 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \alpha_5 = -\varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad \alpha_6 = -\varepsilon_4 + \varepsilon_5, \quad \alpha_7 = -\varepsilon_5 + \varepsilon_6, \quad \alpha_8 = -\varepsilon_6 + \varepsilon_7 \end{array} \right\}$

$\alpha^+ = (\varepsilon_7 + \varepsilon_8) = (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8)$

Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1, ..., \alpha_8$) sind

$$\begin{array}{ll} \beta_1^\vee = (0,0,0,0,0,0,0,2) & \beta_2^\vee = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2}) \\ \beta_3^\vee = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2}) & \beta_4^\vee = (0,0,1,1,1,1,1,5) \\ \beta_5^\vee = (0,0,0,1,1,1,1,4) & \beta_6^\vee = (0,0,0,0,1,1,1,3) \\ \beta_7^\vee = (0,0,0,0,0,1,1,2) & \beta_8^\vee = (0,0,0,0,0,0,1,1) \end{array}$$

Hier ist $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \mathbb{Z}[\Phi]^* = \mathbb{Z}[\Phi] = \{(x_1, ..., x_8) \in \mathbb{Z}^8 \mid \sum_{i=1}^{8} x_i \text{ gerade}\} + \mathbb{Z}\alpha_1$, d.h. die Fundamentalgruppe $\pi(\Phi)$ ist Eins.



Maximale Subsysteme sind D_8, A_8, $A_7 \times A_1$, $A_5 \times A_2 \times A_1$, A_4^2, $D_5 \times A_3$, $E_6 \times A_2$, $E_7 \times A_1$.
Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\left\{ (x_1, ..., x_8) \in \mathbb{R}^8 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_2 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5 \le x_6 \le x_7 \text{ und} \\ -1 - x_7 \le x_8 \le -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \end{array} \right\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind 0, $\frac{1}{2}\beta_1^\vee$, $\frac{1}{3}\beta_2^\vee$, $\frac{1}{4}\beta_3^\vee$, $\frac{1}{6}\beta_4^\vee$, $\frac{1}{5}\beta_5^\vee$, $\frac{1}{4}\beta_6^\vee$, $\frac{1}{3}\beta_7^\vee$, $\frac{1}{2}\beta_8^\vee$.

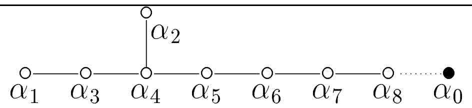
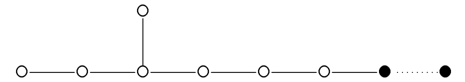
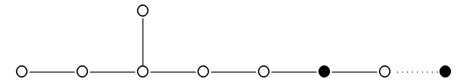
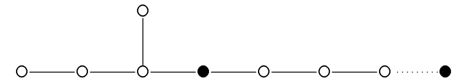
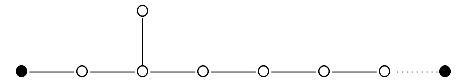
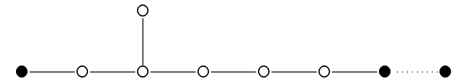
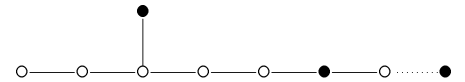
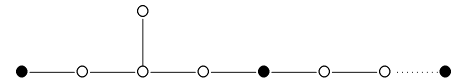
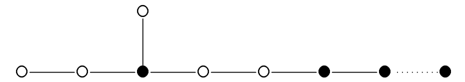
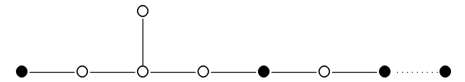
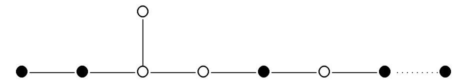
II : Im Atlas [Atlas, S. 85ff] ist $W(E_8) = 2.G.2$ für $G = O_8^+(2)$. $|W(E_8)| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.
$W(E_8) = W(E_8)^{ext}$.
Die Grade sind $2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$.
Coxeterzahl : $h = 30$.

III : Alle 112 Konjugationsklassen findet man in Frame [Fr], Carter [Ca] oder im Atlas [Atlas]. Die 30 anisotropen Klassen sind in der folgenden Tabelle. Unter dem Doppelstrich sind die 9 primitiven Klassen.

IV und **V**: Die anisotropen Klassen der E_8:

Frame	EW	$\lvert W_w \rvert$	h^1	Graph	reg	Abstieg : Zentralisatoren
$\overline{2}^8$ $(-a)$	2_p^8	$2^{14}3^5 5^2 7$	2^8	A_1^8	r	$6 : 2^{14}3^2 5\cdot 7,\ 2^{11}3^4 5\cdot 7$
$3^4/1^4$ $(-a)$	3_p^4	$2^7\cdot 3^5\cdot 5$	3^4	A_2^4	r	$3 : 2^3\cdot 3^5$
$\overline{1}^4\cdot\overline{2}^2$ $(-a)$	$2_p^4 4_p^2$	$2^{11}\cdot 3^2$	2^6	$A_3^2 \times A_1^2$		$10 : 2^{11}\cdot 3,\ 2^7\cdot 3,\ 2^9\cdot 3$
$\overline{2}^4$ (b)	4_p^4	$2^{10}\cdot 3^2\cdot 5$	2^4	$D_4(a_1)^2$	r	$5 : 2^{10}\cdot 3$
$5^2/1^2$ $(-a)$	5_p^2	$2^3\cdot 3\cdot 5^2$	5^2	A_4^2	r	$4 : 5^2$
$\overline{1}^5\cdot\overline{3}$ $(-a)$	$2_p^6 6_p$	$2^8\cdot 3^5\cdot 5$	2^6	$D_4 \times A_1^4$		$6 : 2^8\cdot 3^2\cdot 5,\ 2^6\cdot 3^3\cdot 5$
$\overline{1}^2\cdot\overline{3}^2$ $(-a)$	$2_p^4 6_p^2$	$2^5\cdot 3^4$	2^4	D_4^2		$6 : 2^5\cdot 3^2,\ 2^4\cdot 3^3$
$\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot 3^2/1^2$ $(-a)$	$2_p^2 3_p^2 6_p$	$2^5\cdot 3^3$	$2^2\cdot 3^2$	$A_5 \times A_1 \times A_2$		$9 : 2^2\cdot 3^2,\ 2^2\cdot 3^3,\ 2^5\cdot 3^2$
$\overline{1}\cdot\overline{2}^2\cdot\overline{3}v$ $(-a)$	$2_p^2 4_p^2 6_p$	$2^6\cdot 3^2$	2^4	$D_5(a_1) \times A_3$		$8 : 2^6\cdot 3,\ 2^4\cdot 3$
$6^2/2^2 v$ (b)	$3_p^2 6_p^2$	$2^6\cdot 3^3$	3^2	$E_6(a_2) \times A_2$		$3 : 2^3\cdot 3^3$
$\overline{3}^3/\overline{1}$ (a)	$2_p^2 6_p^3$	$2^5\cdot 3^5$	2^2	$E_7(a_4) \times A_1$		$2 : 2^5\cdot 3^4$
$\overline{1}^2\cdot\overline{2}\cdot\overline{4}$ $(-a)$	$2_p^2 4_p 8_p$	2^7	2^4	$A_7 \times A_1$		$11 : 2^7,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6$
$\overline{4}^2$ (b)	8_p^2	$2^6\cdot 3$	2^2	$D_8(a_3)$	r	$5 : 2^6$
$9/1$ $(-a)$	$3_p 9_p$	$2\cdot 3^3$	3^2	A_8		$7 : 3^2,\ 3^3$
$\overline{1}^3\cdot\overline{5}$ $(-a)$	$2_p^4 10_p$	$2^4\cdot 3\cdot 5^2$	2^4	$D_6 \times A_1^2$		$6 : 2^4\cdot 3\cdot 5,\ 2^3\cdot 3\cdot 5$
$\overline{3}\cdot\overline{5}$ $(-a)$	$2_p^2 6_p 10_p$	$2^2\cdot 3\cdot 5$	2^2	$D_8(a_2)$		$6 : 2\cdot 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5$
$3^2\cdot\overline{6}/1^2\cdot\overline{2}$ $(-a)$	$3_p^2 12_p$	$2^5\cdot 3^2$	3^2	$E_6 \times A_2$		$3 : 2^2\cdot 3^2$
$\overline{2}\cdot\overline{6}$ (b)	$4_p^2 12_p$	$2^3\cdot 3^2$	2^2	$D_8(a_1)$		$5 : 2^3\cdot 3$
$\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot\overline{6}/\overline{2}$ $(-a)$	$2_p^2 6_p 12_p$	$2^4\cdot 3^2$	2^2	$E_7(a_2) \times A_1$		$2 : 2^4\cdot 3$
$\overline{1}\cdot\overline{7}$ $(-a)$	$2_p^2 14_p$	$2^2\cdot 7$	2^2	D_8		$6 : 2\cdot 7,\ 2^2\cdot 7$
$\overline{1}^2\cdot\overline{9}/\overline{3}$ $(-a)$	$2_p^2 18_p$	$2^2\cdot 3^3$	2^2	$E_7 \times A_1$		$2 : 2^2\cdot 3^2$
$(\overline{1}\cdot\overline{15})/(\overline{3}\cdot\overline{5})$ $(-a)$	30_p	$2\cdot 3\cdot 5$	1	E_8	r	1
$(\overline{12})/\overline{4}$ (b)	24_p	$2^3\cdot 3$	1	$E_8(a_1)$	r	1
$(\overline{10})/\overline{2}$ (b)	20_p	$2^2\cdot 5$	1	$E_8(a_2)$	r	1
$\overline{6}^2/\overline{2}^2$ (b)	12_p^2	$2^5\cdot 3^2$	1	$E_8(a_3)$	r	1
$\overline{9}/\overline{1}$ (a)	$6_p 18_p$	$2\cdot 3^3$	1	$E_8(a_4)$		1
$1\cdot(15)/3\cdot 5$ (a)	$15p$	$2\cdot 3\cdot 5$	1	$E_8(a_5)$	r	1
$\overline{5}^2/\overline{1}^2$ (a)	10_p^2	$2^3\cdot 3\cdot 5^2$	1	$E_8(a_6)$	r	1
$\overline{3}^2\cdot\overline{6}/\overline{1}^2\cdot\overline{2}$ (a)	$6_p^2 12_p$	$2^5\cdot 3^2$	1	$E_8(a_7)$		1
$\overline{3}^4/\overline{1}^4$ (a)	6_p^4	$2^7\cdot 3^5\cdot 5$	1	$E_8(a_8)$	r	1

weiter E_8:

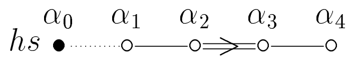
1		$E_8, E_8(a_1), ..., E_8(a_8)$
2		$E_7 \times A_1, E_7(a_2) \times A_1, E_7(a_4) \times A_1$
3		$E_6 \times A_2, E_6(a_2) \times A_2, A_2^4$
4		A_4^2
5		$D_8(a_1), D_8(a_3), D_4(a_1)^2$
6		$D_8, D_8(a_2), D_4^2, D_6 \times A_1^2, D_4 \times A_1^4, A_1^8$
7		A_8
8		$D_5(a_1) \times A_3$
9		$A_5 \times A_1 \times A_2$
10		$A_3^2 \times A_1^2$
11		$A_7 \times A_1$

Die Weylgruppe von $\mathbf{F_4}$:

$\mathbf{I}$: $V = \mathbb{R}^4$ mit Standardbasis ε_i.
$\Phi^+ = \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4\} \cup \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\}, \quad |\Phi^+| = 24.$
Das duale Wurzelsystem $\Phi^\vee$ ist ebenfalls vom Typ F_4. Allerdings ist in dieser (Bourbaki–) Normierung $\Phi \neq \Phi^\vee$. Stattdessen hat man $(\varepsilon_i)^\vee = 2\varepsilon_i$, $(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)^\vee = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)^\vee = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$.
$\Delta = \{\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\ \alpha_3 = \varepsilon_4,\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}$
$\alpha^+ = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4)$.
$(\alpha^+)^\vee = \alpha^+ = (2\alpha_1^\vee + 3\alpha_2^\vee + 2\alpha_3^\vee + \alpha_4^\vee)$.
Die Fundamentalgewichte (bzgl. $\alpha_1, ..., \alpha_4$) sind

$$\beta_1^\vee = (1,1,0,0),\ \beta_2^\vee = (2,1,1,0),\ \beta_3^\vee = (3,1,1,1),\ \beta_4^\vee = (2,0,0,0).$$

Man hat $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \mathbb{Z}[\Phi]^* = \{x \in \mathbb{Z}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i \text{ gerade}\}$ und $\mathbb{Z}[\Phi] = \mathbb{Z}[\Phi^\vee]^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}\alpha_4$.
Die Fundamentalgruppe $\pi(\Phi)$ ist daher Eins.



Die maximale Subsysteme sind $A_1 \times C_3,\ \ A_2 \times A_2,\ \ A_3 \times A_1,\ \ B_4$.
Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\left\{(x_1, ..., x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0 \text{ und } 1 - x_2 \leq x_1 \leq x_2 + x_3 + x_4\right\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind $0,\ \frac{1}{2}\beta_1^\vee,\ \frac{1}{3}\beta_2^\vee,\ \frac{1}{4}\beta_3^\vee,\ \frac{1}{2}\beta_4^\vee$.

$\mathbf{II}$: Man hat $W(F_4) = W(D_4)^{ext}$, wobei das D_4–Subsystem $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \subset \Phi$ ist. Damit kann man sich verbatim auf die D_4 oben beziehen.
Grade: $2, 6, 8, 12$.
Coxeterzahl: $h = 12$.

$\mathbf{III}$: In der folgenden Tabelle sind alle 25 Konjugationsklassen verzeichnet. Eine Klasse ist nicht in allen Fällen durch ihr charakteristisches Polynom (d.h. durch ihre Eigenwerte) bestimmt. Daher wurde in der dritten Spalte das char. Poly. der Operation auf $\pi(\Phi) = \mathbb{Z}[\Phi]^*/\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \simeq \mathbb{F}_2^2$ mitaufgenommen.
Bei den Graphen deutet (wie bei Carter [Ca]) die Tilde über einem A–System an, daß es aus kurzen Vektoren besteht.

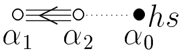
IV und **V**: Unterhalb des ersten Doppelstrichs stehen die 9 anisotropen Klassen der F_4 und unterhalb des zweiten Doppelstrichs stehen die beiden primitiven Klassen.

Name	EW	Operation auf $\pi(\Phi)$	$\lvert W_w \rvert$	h^1	Graph	reg	Abstieg
X	1_p^4	$X+1$	$2^7 \cdot 3^2$	1	$\emptyset$		
IV	$1_p^3 2_p$	$X+1$	$2^5 \cdot 3$	2	A_1		
XVII	$1_p^3 2_p$	X^2+1	$2^5 \cdot 3$	2	$\tilde{A}_1$		
XIX	$1_p 2_p^3$	X^2+1	$2^5 \cdot 3$	2^3	$A_1^2 \times \tilde{A}_1$		
XXIII	"	$X+1$	$2^5 \cdot 3$	2^3	A_1^3		
VIII	$1_p^2 2_p^2$	$X+1$	2^6	2^2	A_1^2		
XIII	"	X^2+1	2^4	2^2	$A_1 \times \tilde{A}_1$		
XIV	$1_p^2 4_p$	X^2+1	2^5	2	B_2		
XVI	$1_p 2_p 4_p$	X^2+1	2^4	2^2	$B_2 \times A_1$		
I	"	$X+1$	2^4	2^2	A_3		
II	$1_p 2_p 3_p$	X^2+X+1	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$\tilde{A}_2 \times A_1$		
XVIII	"	X^2+1	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$A_2 \times \tilde{A}_1$		
III	$1_p 2_p 6_p$	X^2+X+1	$2^2 \cdot 3$	2	C_3		
XV	"	X^2+1	$2^2 \cdot 3$	2	B_3		
V	$1_p^2 3_p$	$X+1$	$2^2 \cdot 3^2$	3	A_2		
IX	"	X^2+X+1	$2^2 \cdot 3^2$	3	$\tilde{A}_2$		
XXV	2_p^4	X^2+1	$2^7 \cdot 3^2$	2^4	A_1^4	r	5
XX	$2_p^2 4_p$	X^2+1	2^5	2^3	$A_3 \times \tilde{A}_1$		6
XXII	4_p^2	$X+1$	$2^5 \cdot 3$	2^2	$D_4(a_1)$	r	4
XII	8_p	X^2+1	2^3	2	B_4	r	4
XI	$2_p^2 6_p$	X^2+X+1	$2^2 \cdot 3^2$	2^2	$C_3 \times A_1$		2
XXI	"	$X+1$	$2^2 \cdot 3^2$	2^2	D_4		4
XXIV	3_p^2	X^2+X+1	$2^3 \cdot 3^2$	3^2	$A_2 \times \tilde{A}_2$	r	3
VI	12_p	X^2+X+1	$2^2 \cdot 3$	1	F_4	r	1
VII	6_p^2	X^2+X+1	$2^3 \cdot 3^2$	1	$F_4(a_1)$	r	1

	$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$	
1	$\bullet \cdots \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$	VI, VII
2	$\bullet \cdots \bullet - \circ \Rightarrow \circ - \circ$	XI
3	$\bullet \cdots \circ - \bullet \Rightarrow \circ - \circ$	XXIV
4	$\bullet \cdots \circ - \circ \Rightarrow \circ - \bullet$	XII, XXI, XXII
5	$\bullet \cdots \bullet - \circ \Rightarrow \circ - \bullet$	XXV
6	$\bullet \cdots \bullet - \circ \Rightarrow \bullet - \bullet$	XX

Die Weylgruppe von $\mathbf{G_2}$:

I : V ist die Hyperebene des $\mathbb{R}^3$ orthogonal zu $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
$\Phi^+ = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ 2\alpha_1 + \alpha_2,\ 3\alpha_1 + \alpha_2,\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$, $|\Phi^+| = 6$.
Das duale Wurzelsystem $\Phi^\vee$ ist ebenfalls vom Typ G_2. Allerdings ist in dieser (Bourbaki–) Normierung $\Phi \neq \Phi^\vee$. Man hat stattdessen $\alpha^\vee = \alpha$ für $\alpha \in \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 3\}$ und sonst $\alpha^\vee = \frac{1}{3}\alpha$.
$\Delta = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$
$\alpha^+ = (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) = (3\alpha_1 + 2\alpha_2)$.
$(\alpha^+)^\vee = \frac{1}{3}\alpha^+ = (\alpha_1^\vee + 2\alpha_2^\vee)$.
Die Fundamentalgewichte (bzgl. α_1, α_2) sind $\beta_1^\vee = (0, -1, 1)$, $\beta_2^\vee = \frac{1}{3}(-1, -1, 2)$. Man hat $\mathbb{Z}[\Phi] = \mathbb{Z}[\Phi^\vee]^*$ bzw. $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \mathbb{Z}[\Phi]^*$. Daher ist die Fundamentalgruppe $\pi(\Phi) = 1$.



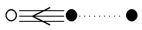
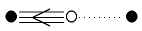
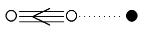
Die maximalen Subsysteme sind $A_2,\ \ A_1 \times \tilde{A}_1$.
Der abgeschlossene Alkoven ist

$$\{(x_1, ..., x_3) \in V \mid 1 + x_2 - 2x_3 \geq x_1 \geq x_2 \geq 2x_1 - x_3\}.$$

Die Ecken des Alkovens sind 0, $\frac{1}{3}\beta_1^\vee$, $\frac{1}{2}\beta_2^\vee$.

II : $W(G_2) = \langle \mathsf{cox} \rangle \rtimes \langle s_{\alpha_2} \rangle = D_{6 \cdot 2}$.
$W(G_2) = W(G_2)^{ext}$.
Grade : $2, 6$.
Coxeterzahl: $h = 6$. Coxeterelement: $\mathsf{cox} = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}$.

III bis **V** : Es gibt 6 Konjugationsklassen, davon 3 anisotrope. Primitiv ist nur das Coxeterelement.

w	char. Poly.	$\lvert W_w \rvert$	h^1	Graph	reg	Abstieg
1	1_p^2	12	1	$\emptyset$		
s_{α_2}	$1_p 2_p$	4	2	A_1		
s_{α_1}	$1_p 2_p$	4	2	$\tilde{A}_1$		
cox^3	2_p^2	12	2^2	$A_1 \times \tilde{A}_1$	r	
cox^2	3_p	6	3	A_2	r	
cox	6_p	6	1	G_2	r	

In folgender Tabelle werden Stuktur und Erzeuger von $\mathrm{Aut}_W(\Phi_1)$ angegeben. Dabei ist Φ_1 ein maximales (nicht parabolisches) Subsystem von Φ und $\mathrm{Aut}_W(\Phi_1) := \mathrm{Aut}(\Phi_1) \cap W$ die Gruppe der Diagrammautomorphismen von Φ_1, die von Elementen der Weylgruppe bewirkt werden. Die Erzeuger werden in Zykelschreibweise notiert. Dabei wird $\mathrm{Aut}(\Phi_1)$ aufgefaßt als Permutationsgruppe auf den Indizes der Wurzeln in $\Delta(\Phi_{\mathrm{aff}}) = \Delta \cup \{\alpha_0\}$. Die Nummerierung der Wurzeln ist die der affinen Dynkindiagramme auf den vorangegangenen Seiten.

Typ von Φ	max. Subsyst. Φ_1	$\mathrm{Aut}_W(\Phi_1)$	Erzeuger
A_n	$\emptyset$		
B_r $(r \geq 2)$	$A_1^2 \times B_{r-2}$	1	
	$D_m \times B_{r-m}$ $(3 \leq m \leq r-2)$	$\mathbb{Z}/2$	(01)
	$D_{r-1} \times A_1$	$\mathbb{Z}/2$	(01)
C_r $(r \geq 2)$	$A_1 \times C_{r-1}$	1	
	$C_m \times C_{r-m}$ $(2 \leq m \leq r-2)$	1	
D_4	A_1^4	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$(01)(34),\ (04)(13)$
D_r $(r \geq 5)$	$A_1^2 \times D_{r-2}$	$\mathbb{Z}/2$	$(01)(r-1,r)$
	$D_m \times D_{r-m}$ $(3 \leq m \leq r-2)$	$\mathbb{Z}/2$	$(01)(r-1,r)$
E_6	$A_5 \times A_1$	1	
	A_2^3	S_3	$(061)(253),\ (06)(25)$
E_7	$D_6 \times A_1$	1	
	A_7	$\mathbb{Z}/2$	$(07)(16)(35)$
	$A_5 \times A_2$	$\mathbb{Z}/2$	$(01)(27)(46)$
	$A_3^2 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$(03)(57),\ (05)(16)(37)$
E_8	D_8	1	
	A_8	$\mathbb{Z}/2$	$(10)(28)(37)(45)$
	$A_7 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2$	$(20)(48)(57)$
	$A_5 \times A_2 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2$	$(50)(68)(13)$
	A_4^2	$\mathbb{Z}/4$	$(0162)(3748)$
	$D_5 \times A_3$	$\mathbb{Z}/2$	$(25)(70)$
	$E_6 \times A_2$	$\mathbb{Z}/2$	$(16)(35)(80)$
	$E_7 \times A_1$	1	
F_4	$C_3 \times A_1$	1	
	A_2^2	$\mathbb{Z}/2$	$(01)(34)$
	$A_3 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2$	(02)
	B_4	1	
G_2	A_1^2	1	
	A_2	$\mathbb{Z}/2$	(02)

Typ von Φ	max. Subsyst. Φ_1	$\mathrm{Aut}_{W^{\mathrm{ext}}}(\Phi_1)$	Erzeuger
D_4	A_1^4	S_4	$(01),\ (13),\ (34)$
D_r $(r \geq 5)$	$A_1^2 \times D_{r-2}$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$(01),\ (r-1,r)$
	$D_n \times C_m$ $(n+m=r)$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$(01),\ (r-1,r)$
E_6	$A_5 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2$	$(16)(35)$
	A_2^3	$D_{6\cdot 2}$	$(036215),\ (06)(25)$

References

[Atlas] J.H. Conway, T.R. Curtis, S.P.Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford (1985).

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chs. 4, 5, 6, Hermann (1968).

[Ca] R.W. Carter *Conjugacy classes in the Weyl groups*, Comp. Math. **25** , 1–59 (1972).

[Dy] E.B. Dynkin *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl., Series 2, Vol. **6**, 111-244 (1957).

[Fr] J.S. Frame *The characters of the Weyl group E_8*, Comput. Probl. abstact Algebra, Proc. Conf. Oxford 1967, 111-130 (1970).

[Mi] J.S. Milne *The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction*, in *The zeta functions of Picard modular surfaces*, 151-253 (1992).

[Sp1] T.A. Springer *Regular Elements of Finite Reflection Groups*, Inventiones math. **25** , 159–198 (1974).

[Sp2] T.A. Springer *Reductive Groups*, Automorphic Forms, Representations and L–functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 1, 3–27 (1979).

[St] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Am. Math. soc. **80** (1968).

[Ti] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Automorphic Forms, Representations and L–functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 1, 29–69 (1979).

[Wa] J.–L. Waldspurger, *Quelques questions sur les intégrales orbitales unipotentes et les algèbres de Hecke*, Bull. Soc. math. France **124**, 1–34 (1996).