MARGULIS' SUPERSTARRHEIT UND ARITHMETIZITÄT PROGRAMM ZUM FORSCHUNGSSEMINAR IM SOMMERSEMESTER 2013 DARMSTADT – FRANKFURT

ANDRÉ KAPPES

Unsere Hauptquelle ist Zimmers Buch [Zim]. Natürlich kann man bei Bedarf auch auf Margulis' eigenes Buch [Mar] zurückgreifen.

25.04.2013, Frankfurt

Vortrag 1. *Ziel des Seminars, Rekapitulation von Algebraische Gruppen* **(André Kappes)**
Ziel: Vorstellung der Sätze von Margulis, Definitionen und erste Aussagen über algebraische Gruppen
Stichpunkte: Gitter, Starrheit, Kommensurabilität von Gittern, Arithmetizität, Orbitäquivalenz und Starrheit von Zimmer, Zariskitopologie, reguläre und rationale Abbildungen, Orbits von Aktionen sind lokal abgeschlossen (3.1.1), halbeinfache Liegruppen sind (quasi) algebraische Gruppen (3.1.6), Isogenien zwischen algebraischen Gruppen, $G(\mathbb{Z}) \subset G(\mathbb{R})$ ist ein Gitter (3.1.7), Zariski-dicht-Aussagen (3.1.8, 3.1.9)
Quellen: [Zim, S. 1–5, S. 32–38, ohne 3.1.5]; zu Margulis' Endlichkeitssatz werden wir nicht kommen, dieser kann also gegebenenfalls weggelassen werden; [OV] als Ergänzung zur Zusammenfassung über algebraischen Gruppen und Liegruppen

Vortrag 2. *Ergodizität, Beispiele und Standard-Borelräume* **(Linda Raabe)**
Ziel: Beispiele für ergodische Aktionen, Grundlagen zu Standard-Borelräumen, glatte Aktionen und erste Folgerungen
Stichpunkte: Standard-Borelräume, (eigentlich) ergodische Aktionen, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ operiert ergodisch auf dem n-Torus, abzählbar separiert, abzählbar erzeugt, glatte Aktionen, lokal abgeschlossene Orbits impliziert glatt (2.1.12), Regularität von messbaren Gruppenhomomorphismen (B.1–B.4), Existenz von Schnitten $G/H \to G$ (A.8)
Quellen: [Zim, S. 8–12 bis Corollary 2.1.13], [Zim, 3.1.5, S. 35], [Zim, Appendix A, B.1–B.4], [Arv, Chap. 3]; je nach Zeit kann auf die im Appendix vorgestellten Grundlagen zu Standard-Borelräumen eingegangen werden, in Absprache mit dem Vortragenden von Vortrag 1 bietet sich evtl. auch an, von dort Material in diesen Vortrag auszulagern

16.05.2013, Darmstadt

Vortrag 3. *Glatte Aktionen, Moores Ergodensatz I* **(NN)**
Ziel: Charakterisierung von glatten Aktionen, Formulierungen des Ergodensatzes von Moore
Stichpunkte: abgeschlossene Orbits charakterisieren glatte Aktionen (2.1.14), Satz von Varadarajan und Folgerungen (2.1.19), zwei Formulierungen des Mooreschen Ergodensatzes und Folgerungen (2.2.6, 2.2.15)
Quellen: [Zim, S. 12–21 bis Theorem 2.2.15]

Vortrag 4. *Moores Ergodensatz II* **(NN)**
Ziel: Beweis des Ergodensatzes von Moore
Stichpunkte: Moores Satz ist äquivalent zum Verschwinden der Matrixkoeffizienten, Zerlegung von unitären Darstellungen in irreduzible, Verschwinden der Matrixkoeffizienten für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und allgemein
Quellen: [Zim, S. 21–31]

06.06.2013, Frankfurt

Vortrag 5. *Orbits von Maßen auf projektiven Varietäten und der Borelsche Dichtesatz* **(Quentin Gendron)**
Ziel: Aktionen von algebraischen Gruppen auf Räumen von Maßen verhalten sich wie Aktionen auf Varietäten
Stichpunkte: Stabilisatoren von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{P}^{n-1}$ unter PGL_n sind fast algebraisch, Borels Dichtesatz, Glattheit der Aktion auf $M(\mathbb{P}^{n-1})$ für PGL_n und allgemein, Stabilisatoren allgemein
Quellen: [Zim, S. 38–49]; die Diskussion ab Theorem 3.2.20 kann weggelassen werden

Vortrag 6. *Orbits auf Funktionenräumen und die Rationalität von Abbildungen* **(Jonathan Zachhuber)**
Ziel: Aktionen auf messbaren Funktionen und rationalen Abbildungen, erste Beweisstücke für den Starrheitssatz
Stichpunkte: Glattheit und Stabilisatoren von Aktionen auf messbaren Funktionen und auf rationalen Abbildungen, Rationalität messbarer Abbildungen für unipotente Gruppen und wesentlich rationale Abbildungen, Homomorphismussatz von Margulis
Quellen: [Zim, S. 49–58]

20.06.2013, Darmstadt

Vortrag 7. *Dynamische Kozykeln* **(NN)**
Ziel: Orbit-Äquivalenz von Kozykeln und Fortsetzen von Homomorphismen sind äquivalente Probleme, induzierte Darstellungen und Aktionen
Stichpunkte: Beispiele von Kozykeln, strikte Kozykel, (strikte) Äquivalenz und Orbitäquivalenz, strikte Kozykel entsprechen Gruppenhomomorphismen, induzierte Darstellungen und Aktionen
Quellen: [Zim, S. 65–77 ohne Proposition 4.2.20]; die Beschreibung der Mackey-Range (S. 76–77) kann weggelassen werden

Vortrag 8. *Mittelbare Gruppen und Aktionen* **(NN)**
Ziel: Gitter in halbeinfachen Gruppen sind nicht mittelbar, haben aber mittelbare Aktionen
Stichpunkte: kompakte und auflösbare Gruppen sind mittelbar, halbeinfache Gruppe und Gitter darin sind nicht mittelbar, dichte Bilder transportieren Mittelbarkeit, mittelbare Aktionen, für Gitter in einer halbeinfachen Gruppe G und mittelbares H ist die Aktion auf G/H mittelbar
Quellen: [Zim, S. 59–65, S.77–84], [Zim, Proposition 4.2.20]; die Sätze von Krieger-Dye (S. 82–84) können bei Bedarf entfallen

04.07.2013, Frankfurt

Vortrag 9. *Superstarrheit* **(Amir Džambić)**
Ziel: Beweis des Superstarrheitssatzes von Margulis
Stichpunkte: Formulierung des Superstarrheitssatzes, Superstarrheit impliziert Mostow-Starrheit, Beweise
Quellen: [Zim, S. 85–95]; der Beweis für $k \neq \mathbb{R}$ (S.93–94) kann evtl. weggelassen werden

Vortrag 10. *Superstarrheit für Kozykel* **(Martin Möller)**
Ziel: ergodische Aktionen charakterisieren die Gruppe im halbeinfachen Fall, Verallgemeinerung der Superstarrheit
Stichpunkte: Formulierung und Beispiele der Starrheit von Aktionen (5.2.1), Superstarrheit für Kozykel, Ableitung der Superstarrheit aus der von Kozykeln, Beweis von 5.2.5, Beispiele für ergodische Aktionen von halbeinfachen Gruppen (5.2.12)
Quellen: [Zim, S. 95–113]; nach Belieben kann evtl. bei der Implikation (Superstarrheit für Kozykel $\Rightarrow$ Superstarrheit) oder beim Beweis der Superstarrheit für Kozykel gekürzt werden

18.07.2013, Darmstadt

Vortrag 11. *Arithmetizität* **(NN)**
Ziel: Gitter in halbeinfachen Liegruppen von höherem Rang sind arithmetisch
Stichpunkte: Wiederholung von "arithmetisch", Restriction of scalars, Gitter sind über Zahlkörpern definiert, Beweis des Arithmetizitätssatzes 6.1.2
Quellen: [Zim, S. 114–122]

Vortrag 12. *Margulis' Kommensuratorsatz* **(NN)**
Ziel: ein Gitter ist genau dann arithmetisch, wenn sein Kommensurator dicht liegt
Stichpunkte: Kommensuratoren sind dicht oder Übergruppen von endlichem Index, Kommensuratoren von arithmetischen Gruppen sind dicht, Margulis' Kommensuratorsatz 6.2.6 und Beweis
Quellen: [Zim, S. 122–129]

Die Vorträge finden statt

- in Frankfurt: Robert-Mayer-Str. 10, Raum 711 (groß), ab 15:00 Uhr s.t.
- in Darmstadt: Schlossgartenstr. 7, Raum S2 15 / 401, ab 15:20 Uhr s.t.

und sollten jeweils eine Stunde dauern.

Literatur

[Arv] Arveson, William: *An Invitation to C^*-Algebras*, Graduate Texts in Mathematics 39, Springer, 1976

[Mar] Margulis, G. A.: *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 17, Springer, 1991

[OV] Onishchik, A. L.; Vinberg, E. B. : *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer, 1990

[Zim] Zimmer, Robert J.: *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Monographs in Mathematics, Birkhäuser Boston, 1984