Seminar Affine algebraische Gruppen

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Julian Quast

Wintersemester 2019/20, Dienstag 14.00 Uhr–16.00 Uhr, SR 7

Vorträge ab Dienstag, 29.10.2019.

Motivation und Ziele des Seminars

Die Kreisgruppe S^1 kann als die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 zusammen mit der Multiplikation komplexer Zahlen definiert werden. Wir können S^1 auch als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auffassen und die Multiplikation zweier Elemente in $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ wie folgt beschreiben:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Inversion ist durch $(a_1, a_2)^{-1} := (a_1, -a_2)$ gegeben. Wir sehen, dass Multiplikation und Inversion polynomielle Abbildungen sind, insbesondere besitzt also S^1 auch die Struktur einer *reellen algebraischen Gruppe*. Allgemein ist eine *affine algebraische Gruppe G über K* ein affines K-Schema von endlichem Typ, zusammen mit Multiplikation $G \times_K G \to G$, Inversion $G \to G$ und neutralem Element $\mathrm{Spec}(K) \to G$, sodass gewisse Gruppenaxiome erfüllt sind.

Ziel des Seminars ist, solide Grundlagen der modernen Theorie algebraischer Gruppen in der Sprache der Schemata zu erarbeiten. Wir werden sehen, dass affine algebraische Gruppen äquivalent durch *Hopf-Algebren* beschrieben werden können. Danach betrachten wir *lineare algebraische Gruppen*; das sind algebraische Gruppen, die sich als Matrizengruppen in GL_n wiederfinden. Weiterhin beschäftigen wir uns mit auflösbaren Gruppen, Tori und unipotenten Gruppen. Je nach Teilnehmerzahl beenden wir das Seminar mit einer Analyse der Struktur *halbeinfacher Gruppen*.

Die Anwendungsbereiche algebraischer Gruppen sind vielfältig:

- Lie-Gruppen treten als Symmetriegruppen in der Geometrie und der Physik auf. Viele Lie-Gruppen lassen sich als algebraische Gruppen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auffassen.
- In der Klassifikation endlicher einfacher Gruppen werden lineare algebraische Gruppen über endlichen Körpern betrachtet.
- Im Langlands-Programm werden Darstellungen gewisser algebraischer Gruppen mit Zahlentheorie in Verbindung gebracht.
- ...

Organisatorisches

- *Vorbesprechung:* **Dienstag, den 01.10.2019 um 10.00 Uhr c.t. in Seminarraum 10**
- *Voraussetzungen:* Algebraische Geometrie 1.
- *Homepage:* `https://typo.iwr.uni-heidelberg.de/groups/arith-geom/home/members/julian-quast/affinealgebraischegruppen/`

Modalitäten

- Für die Teilnahme an diesem Seminar gibt es keine besondere Voraussetzung.
- Jeder Teilnehmer hält im Rahmen der Seminarsitzungen einen auf 80 min ausgelegten Vortrag.
- Zusätzlich wird am Tag des Vortrages ein ein- bis maximal zweiseitiges Handout (ein Blatt) an die Zuhörer ausgeteilt, das vom Vortragenden selbstständig angefertigt wurde. Es wird empfohlen, die ausgegebene LaTeX-Vorlage zu verwenden.
- Eine Vorbesprechung spätestens zwei Wochen vor Vortrag mit dem Seminarleiter ist verpflichtend. Dabei soll bereits das Handout vorgelegt werden. Es wird empfohlen bei Bedarf mehrere Vorbesprechungen abzuhalten.
- Es besteht Anwesenheitspflicht. Bei Abwesenheit wegen Krankheit ist die Vorlage eines ärztlichen Attests nötig. Wir tolerieren einen unentschuldigten Fehltag.

Bitte achten Sie darauf, genügend strukturierende Elemente (aka Definition, Satz, Beweis) zu verwenden, um Ihre Vorträge übersichtlicher zu machen.
Wir setzen folgende Begrifflichkeiten aus der algebraischen Geometrie voraus: Kategorie, Funktor, natürliche Transformation, Schema, Morphismus von endlichem Typ, (geometrisch) reduziertes Schema, Höhe eines Primideals, Krull-Dimension.

Vortrag 1 (Gruppenobjekte, Gruppenschemata und Gruppenfunktoren)**.**
Ziel: Definition von Gruppenobjekten, Gruppenschemata und Gruppenfunktoren
Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der endliche Produkte existieren, so können wir *Gruppenobjekte* in $\mathcal{C}$ definieren [ML, III.6]. Es gibt einen allgemeinen Begriff von Morphismus von Gruppenobjekten und wir erhalten eine Kategorie von Gruppenobjekten $\mathbf{Grp}(\mathcal{C})$. Sie sind eine natürliche Verallgemeinerung von Gruppen: Gruppenobjekte in **Set** sind herkömmliche Gruppen. Analog können wir auch *Kogruppenobjekte* in Kategorien mit endlichen Koprodukten definieren. Wir schreiben Kogruppenobjekte von $\mathcal{C}$ mit $\mathbf{CoGrp}(\mathcal{C})$. Erklären Sie Schemata über einem gegebenen Basisschema und definieren Sie die Kategorie $\mathbf{Sch}_K$ der K-Schemata. Definieren Sie *algebraische K-Schemata* als Schemata von endlichem Typ über K. Ein algebraisches K-Schema heißt *Varietät*, wenn es *geometrisch reduziert* [Mil, A.43] und von endlichem Typ ist. Definieren Sie *K-Gruppenschemata*, Morphismen von K-Gruppenschemata und die Kategorie der K-Gruppenschemata $\mathbf{GrpSch}_K$. Definieren Sie das triviale K-Gruppenschema [Mil, nach Def. 1.2]. Definieren Sie die Kategorie der K-Funktoren als Funktorkategorie $\mathbf{Fun}_K := \mathbf{Func}(\mathbf{Alg}_K, \mathbf{Set})$ von kommutativen K-Algebren $\mathbf{Alg}_K$ in die Kategorie der Mengen **Set**. Erklären Sie kurz Skalarerweiterungen für Gruppenschemata [Mil, nach Def. 1.3]. Definieren Sie K-Gruppenfunktoren und algebraische Gruppen über K [Mil, Def. 1.1]. Erklären Sie, dass Gruppenschemata als Gruppenfunktoren aufgefasst werden können.
Stellen Sie einige grundlegende Begrifflichkeiten klar: Ein Morphismus von K-Gruppenschemata heißt *injektiv (surjektiv, offen, abgeschlossen)*, falls er auf den unterliegenden topologischen Räumen injektiv (surjektiv, offen, abgeschlossen) ist. Ein Morphismus von K-Gruppenschemata ist genau dann Monomorphismus, wenn er aufgefasst als K-Gruppenfunktor *objektweise injektiv* ist. Eine analoge Aussage gilt für Epimorphismen nicht, das ist bereits aus der algebraischen Geometrie bekannt. Definieren Sie Kerne [Mil, 1.E] und normale algebraische Untergruppen.
Literatur: [ML, III.6], [Mil, 1].
Datum: 29. Oktober 2019 **Vortragender: Julian Quast**

Vortrag 2 (Affine algebraische Gruppen und Hopf-Algebren)**.**
Ziel: Affine algebraische Gruppen, Hopf-Algebren
Definieren Sie Hopf-Algebren [Mil, Def. 3.3], Homomorphismen von Hopf-Algebren und die Kategorie der Hopf-Algebren $\mathbf{Hopf}_K$ über K. Erklären Sie, dass die Kategorie der K-Hopf-Algebren kanonisch antiäquivalent zur Kategorie der affinen K-Gruppenschemata ist ([Mil, Prop. 3.6] und [Mil, Cor. 3.7]). Das liegt daran, dass $\mathbf{Hopf}_K$ die Kogruppenobjekte in $\mathbf{Alg}_K$ sind! Definieren Sie *Hopf-Unteralgebren* [Mil, Def. 3.8] und *Hopf-Ideale* [Mil, Def. 3.10]. Erwähnen Sie [Mil, Prop. 3.9], [Mil, Prop. 3.11], [Mil, Prop. 3.12], [Mil, Prop. 3.13] ohne Beweis, denn dieser ist eine leichte Übung. Erwähnen Sie auch die wichtige Korrespondenz [Mil, Prop. 3.15] zwischen Hopf-Idealen und abgeschlossenen Untergruppenschemata.
Erklären Sie Beispiele [Mil, 2.1-2.4]: $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$, F_K, μ_n. Definieren Sie GL_n als Gruppenschema.
Literatur: [Mil, 2, 3].
Datum: 5. November 2019 **Vortragender: Jakob Schuhmacher**

Vortrag 3 (Morphismen von Gruppenschemata).
Ziel: Quotientenabbildungen, universelle Eigenschaft, Existenz von Quotienten, Monomorphismen, Kriterium für Isomorphismen, Homomorphiesatz, Isomorphiesatz.
Definieren Sie eine *Quotientenabbildung* [Mil, Def. 5.5] zwischen algebraischen K-Gruppen als einen *treuflachen* [Mil, A. 68] Morphismus von K-Gruppenschemata. Insbesondere sind Quotientenabbildungen surjektiv. Geben Sie Beispiele für surjektive Morphismen von algebraischen K-Gruppen an, die nicht flach sind. Skizzieren Sie [Mil, Auss. 5.7-5.12] wie man mithilfe von *fetten Unterfunktoren* [Mil, Def. 5.6] zeigt, dass Quotientenabbildungen eine universelle Eigenschaft erfüllen [Mil, Thm. 5.13]. Erwähnen Sie ohne Beweis, dass normale algebraische K-Untergruppen als Kerne von Quotientenabbildungen realisiert werden können [Mil, Def. 5.5].
Beweisen Sie [Mil, Prop. 5.31] und [Mil, Prop. 5.33]. Erwähnen Sie ohne Beweis Homomorphiesatz [Mil, Prop. 5.39] und Isomorphiesatz [Mil, Prop. 5.52].
Literatur: [Mil, 5]
Datum: 12. November 2019 **Vortragender: Maximilian Stier**

Vortrag 4 (Algebraische Darstellungen).
Ziel:
Sei G eine affine algebraische Gruppe über K. Ziel dieses Vortrages ist es, algebraische Darstellungen von Gruppenschemata zu definieren. Diese sind abzugrenzen von linearen Darstellungen abstrakter Gruppen.
Definieren Sie *K-lineare Darstellungen* von G [Mil, 4.A] und zeigen Sie, wie diese mit Komoduln beschrieben werden können. Definieren Sie Charaktere von algebraischen Gruppen [Mil, 4.G]
Der *Kern* oder *Stabilisator* einer G-Darstellung ist eine algebraische Untergruppe von G [Mil, Prop. 4.3].
Die Struktur von G-Darstellungen ist besonders einfach: Jede (potentiell unendlichdimensionale) Darstellung von G kann als direkte Summe von endlichdimensionalen G-Darstellungen geschrieben werden [Mil, Prop. 4.7].
Der affine Koordinatenring $K[G]$ von G besitzt auf natürliche Weise die Struktur einer G-Darstellung. Wir nennen sie die *reguläre Darstellung* [Mil, 4.d]. Die reguläre Darstellung ist treu [Mil, Thm. 4.9] und jede affine algebraische Gruppe ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von GL_n/K [Mil, Cor. 4.10]. Wir nennen solche Gruppen *linear* [Mil, Rem. 4.11].
Jede endlichdimsionale G-Darstellung ist eine Unterdarstellung einer endlichen direkten Summe der regulären Darstellung von G [Mil, Prop. 4.12], [Mil, Cor. 4.13].
Erwähnen Sie ohne Beweis [Mil, Thm. 4.14]: Jede treue G-Darstellung genügt bereits, um (in einem präzisierbaren Sinne) die Kategorie der endlichdimensionalen G-Darstellungen zu "erzeugen".
Literatur: [Mil, 4.A, 4.D, 4.G]
Datum: 19. November 2019 **Vortragender: Lukas Heger**

Vortrag 5 (Auflösbare Gruppen).
Ziel: Subnormalreihen, Isogenie, Kompositionsreihen, Auflösbare Gruppen, Rezept zur Definition größter glatter zsmh. Ugr. mit vorgegebener Eigenschaft
Definieren Sie *Subnormalreihen* und *Normalreihen* [Mil, Def. 6.1]. Erwähnen Sie ohne Beweis [Mil, Prop. 6.2]. Definieren Sie *Äquivalenz von Subnormalreihen* [Mil, nach Prop. 6.2]. Erklären Sie, wie man mit dem Butterfly-Lemma [Mil, Lem. 6.4] (ohne dieses zu beweisen) zeigt, dass zwei Subnormalreihen einer

algebraischen Gruppe G äquivalente Verfeinerungen haben [Mil, Thm. 6.3]. Definieren Sie algebraische Untergruppen von endlichem Index [Mil, Def. 6.5] und Isogenien [Mil, Def. 6.6, 6.7]. Erwähnen Sie ohne Beweis, dass Isogenie eine Äquivalenzrelation ist. Führen Sie Kompositionsreihen algebraischer Gruppen ein [Mil, 6.C] und erklären Sie, dass diese keine natürliche Verallgemeinerung von Kompositionsreihen abstrakter Gruppen sind: Die Kompositionsreihe der konstanten Gruppe einer endlichen abstrakten Gruppe ist stimmt nicht mit der Kompositionsreihe der abstrakten Gruppe - aufgefasst als konstante Gruppen - überein. Erklären Sie, dass algebraische Gruppen stets eine Kompositionsreihe besitzen [Mil, Thm. 6.13].
Definieren Sie *auflösbare algebraische Gruppen* [Mil, Def. 6.26] und beweisen Sie [Mil, Prop. 6.27]. Führen Sie Beispiele [Mil, Ex. 6.28,6.29] vor. Charakterisieren Sie auflösbare Gruppen mithilfe ihrer abgeleiteten Reihe [Mil, Prop. 6.30]. Definieren Sie *spaltende auflösbare Gruppen* [Mil, Def. 6.33].
Zeigen Sie, wie man eine *größte glatte zusammenhängende normale Untergruppe* mit einer gegebenen Eigenschaft P definiert [Mil, Lem. 6.41, Prop. 6.42].
Literatur: [Mil, 6.A-C+E]
Datum: 26. November 2019 **Vortragender: Maximilian Stier**

Vortrag 6 (Die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe)**.**
Ziel: Ring der dualen Zahlen, Lie-Algebra, adjungierte Darstellung, Beispiele.
Definieren Sie Lie-Algebren, Lie-Algebren-Homomorphismen, Lie-Unteralgebren [Mil, Def. 10.1] und die Kategorie der Lie-Algebren über K. Führen Sie die Beispiele $\mathfrak{gl}_n$ und $\mathfrak{sl}_n$ und konkreter $\mathfrak{sl}_2$ ein [Mil, Ex. 10.2]. Erklären Sie, wie jeder assoiziativen (unitären) K-Algebra eine Lie-Algebra zugeordnet werden kann [Mil, Ex. 10.3]. Führen Sie den *Ring der dualen Zahlen* $K[\varepsilon]$ ein. Definieren Sie die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe G [Mil, 10.6]. Zeigen Sie exemplarisch, dass $\mathfrak{gl}_n \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n)$ ist [Mil, 10.7] und erklären Sie, wie man die Lie-Algebra einer linearen algebraischen Gruppe als Lie-Algebra von Matrizen auffassen kann. Führen Sie die adjungierte Darstellung einer algebraischen Gruppe auf ihrer Lie-Algebra ein [Mil, 10.18-20].
Literatur: [Mil, 10.A-D]
Datum: 3. Dezember 2019 **Vortragender: Julian Quast**

Vortrag 7 (Tori)**.**
Ziel: Spaltende Tori, nach Bedarf ein wenig Galois-Theorie, Tori, Gitter mit G_K-Wirkung, je nach Zeit noch weiteres zu Tori, Beispiele.
Definieren Sie *Tori* und *spaltende Tori* [Mil, Def. 12.14]. Diese Terminologie ist konsistent: Ein spaltender Torus ist eine spaltende auflösbare Gruppe. Zeigen Sie, dass jeder Torus bereits über einer endlichen Erweiterung von K spaltet und daher jeder Torus affin algebraisch ist. Erklären Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Kategorien: Freie $\mathbb{Z}$-Moduln mit stetiger Wirkung der absoluten Galoisgruppe G_K-**Lat** und Tori über K ($\mathbf{Tori}_K$). (**Lat** steht für "lattice"und deutet an, dass wir nur stetige G_K-Darstellungen betrachten, die endlich erzeugte freie $\mathbb{Z}$-Moduln, also Gitter sind.)
Literatur:
Datum: 10. Dezember 2019 **Vortragender: Lukas Heger**

Literatur

[Mil] J.S. Milne: Algebraic Groups - The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field

[ML] S. Mac Lane: Categories for the working mathematician

[S] The stacks project.