

**Darmstadt-Frankfurt Seminar**  
**Abelsche Varietäten und der  
Torelli-Lokus**

**Wintersemester 2016/17**

Ziel dieses Seminars ist es, die Existenz einer prinzipal polarisierten Abelschen Varietät über  $\mathbb{Q}$ , die zu keiner Jacobischen isogen ist, nach [CO12] und [Tsi12] zu erarbeiten. Allgemein kann die Frage nach der Existenz für jeden Körper  $k$  anstelle von  $\mathbb{Q}$  gestellt werden. Für  $k = \mathbb{C}$  werden wir diese Frage deutlich leichter mit 'ja' beantworten können. Dazu ist es zunächst nötig die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von Abelschen Varietäten, Jacobischen und Shimura-Varietäten zu verstehen. Insbesondere die Komplexe Multiplikation und die zugehörigen CM-Punkte im Modulraum  $\mathcal{A}_{g,1}$  sind von größerem Interesse. Abschließend werfen wir einen Blick auf die André-Oort Vermutung (AO) und wie diese aus der verallgemeinerten Riemannhypothese (GRH) nach [KY14] folgt.

In Frankfurt findet das Seminar um 15:00 Uhr in Raum 711 (groß) in der Robert-Mayer-Straße 10 statt. In Darmstadt um 15:15 Uhr in Raum ?? in der ??-Straße ??.

Frankfurt, 10.11.2016 15:00 Uhr

**Vortrag 1.** *Abelsche Varietäten und Jacobische I*

**Name 1**

Ziel: Zu Beginn des Seminars führen wir Abelsche Varietäten und Jacobische ein. Genauer sollen die Definition von Abelschen Varietäten und dualen Abelschen Varietäten [Mil08, I.8], Polarisierung Abelscher Varietäten [Mil08, I.11] und sowohl die algebraische als auch die analytische Konstruktion von Jacobischen [Mil08, III.1, III.4 und III.7] betrachtet werden. Im weiteren Verlauf des Vortrags soll die Konstruktion von Familien Abelscher Varietäten eingeführt [Mil08, I.16] und zum Abschluss der Übergang zwischen algebraischen und analytischen Modellen von komplexen Abelschen Varietäten (Theta-Funktionen) erklärt werden.

Quellen: [BL04], [Mil86], [Mil08]

**Vortrag 2. Abelsche Varietäten und Jacobische II****Name 2**

Ziel: Um den Torelli Morphismus einführen zu können, betrachten wir zunächst die Modulräume  $\mathcal{M}_g$  und  $\mathcal{A}_{g,1}$  [MO13, Kapitel 1]. Damit wir  $\mathcal{A}_{g,1}(\mathbb{C})$  in folgenden Vorträgen als Shimura-Varietät auffassen zu können soll auch die Darstellung von  $\mathcal{A}_{g,1}(\mathbb{C})$  als  $\mathbb{H}_g/\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  [BL04, Abschnitt 8.2] erklärt werden. Für  $g = 2, 3$  ist der Torelli Morphismus dominant (Dimensionsargument) und somit die eingangs gestellte Frage in diesem Fall mit 'nein' zu beantworten. Isogenie einführen [Mil08, Abschnitt I.7] und zeigen, dass für  $g \geq 4$  eine Abelsche Varietät über  $\mathbb{C}$  existiert, die zu keiner Jacobischen isogen ist [CO12, 3.11]. Zum Abschluss: Klassifizierung der Endomorphismenringe von einfachen Abelschen Varietäten [Mil08, I.10]. Dabei ist es hilfreich sich mit Vortrag 7 abzustimmen und dort benötigte Resultate zu erarbeiten.

Quellen: [BL04], [MO13], [Mil08], [CO12]

Darmstadt, 24.11.2016 15:15 Uhr

**Vortrag 3. Etwas Hodge-Theorie****Martin Lüdtkke**

Ziel: Definition einer Variation von Hodge-Strukturen und der Mumford-Tate-Gruppe nach [Del82, Kapitel 3]. Die Äquivalenz [Del82, Proposition 3.4] der zwei möglichen Definitionen der Mumford-Tate-Gruppe betrachten (sowohl als kleinste als auch als größte  $\mathbb{Q}$ -algebraische Gruppe mit gewissen Eigenschaften). Des weiteren ist die algebraische Monodromiegruppe einer Familie Abelscher Varietäten eine normale Untergruppe der abgeleiteten Mumford-Tate-Gruppe [Moo04, 6.7 – 6.8].

Quellen: [Moo04], [MO13, Kapitel 2], [Del82]

**Vortrag 4. Shimura-Varietäten I****Matteo Costantini**

Ziel: Definition von Shimura-Datum und Shimura-Varietäten [MO13, 3.1 – 3.3]. Verschiedene Terminologien von Shimura-Varietäten und speziellen Untervarietäten (primäre Sprechweise aus [MO13, Abschnitt 3]). Das Shimura-Datum für Modulkurven [Mil05, Beispiel 4.14] und  $\mathcal{A}_{g,1}(\mathbb{C})$  [MO13, 3.2] berechnen. Diese sind Beispiele von Shimura-Untervarietäten.

Quellen: [Del71, Kapitel 2], [Del79, Abschnitt 2.1], [MO13], [Mil05]

Frankfurt, 08.12.2016 15:00 Uhr

**Vortrag 5.** *Shimura-Varietäten II*

**Name 5**

Ziel: Verschiedene Modelle von Shimura-Varietäten beschreiben [Mil05, Kapitel 12] (In Absprache mit Vortrag 6 - dort wird die Existenz eines kanonischen Modells gezeigt). Dazu den Reflexkörper eines Shimura-Datums [Mil05, S. 101 ff] und die Bailey-Borel Kompaktifizierung einführen [Mil05, 3.12 und 3.14]. Als Beispiel Hilbert-Modulvarietäten als Shimura-Unter-Varietäten auffassen ('Modulare-Einbettung' [vdG88, Kapitel IX]). Zum Schluss beispielhaft die Mumford Tate-Gruppen von Shimura-Varietäten berechnen.

Quellen: [Del71, Kapitel 3 und 5], [Mil05], [MO13], [Del79], [vdG88]

**Vortrag 6.** *Shimura-Varietäten III*

**Name 6**

Ziel: Existenz und Eindeutigkeit des kanonischen Modells einer Shimura-Varietät über einem Zahlkörper zeigen (Den Fall von Shimura-Kurven behandelt [Mil03], allgemein [Mil05, Kapitel 13 und 14]). Zum Abschluss der Vorträge über Shimura-Varietäten betrachten wir deren ursprüngliches Auftreten [Shi63] als Modulraum Abelscher Varietäten mit festem Endomorphismenring [Mil11, Kapitel 11].

Quellen: [Mil03], [Mil05], [Mil11], [Del79], [Shi63]

Darmstadt, 12.01.2016 15:15 Uhr

**Vortrag 7.** *Komplexe Multiplikation*

**Max Bieri**

Ziel: Die komplexe Multiplikation abelscher Varietäten einführen und die möglichen CM-Körper beschreiben [Shi98, Kapitel 2]. Die korrespondierenden CM-Punkte in  $\mathcal{A}_{g,1}$  und auf Shimura-Kurven erkennen. Ein Punkt in  $\mathcal{A}_{g,1}$  ist genau dann ein CM-Punkt, wenn die zugehörige Mumford-Tate-Gruppe ein Torus ist [Moo04, Beispiel 5.3]. Abschließend betrachten wir Weyl-CM-Punkte und Resultate, die unmittelbar zur Beantwortung der eingangs gestellten Frage nötig sind. Nach der Definition und grundlegenden Eigenschaften von Weyl-CM-Punkten [CO12, 2.10 bis 2.15] ist es von besonderem Interesse zu zeigen, dass es nach [CO12, Korollar 2.15] genügend nicht-isogene Weyl-CM-Punkte in  $\mathcal{A}_{g,1}$  gibt.

Quellen: [BL04, Kapitel 5], [Shi98, Kapitel 2], [CO12], [Moo04]

**Vortrag 8.** *Hecke-Translation in  $\mathcal{A}_{g,1}$* **Nithi Rungtanapirom**

Ziel: Die Hecke-Translation in  $\mathcal{A}_{g,1}$  beschreiben [CO09, 1.1 – 1.8 ] und den Zusammenhang zu Hecke-Operatoren für Modulformen erklären [DDT, 1.3]. Den Begriff quasi-Isogenie näher betrachten und damit den Zusammenhang, dass der Hecke-Orbit den Isogenie-Orbit enthält, erklären [CO12, 2.2]. Hecke Translate von speziellen Untervarietäten sind erneut speziell [MO13, 3.4]. Wie sehen die Hecke-Translate von Hilbert-Modul-Varietäten aus?

Quellen: [MO13, 3], [CO09], [CO12], [DDT]

Frankfurt, 26.01.2017 15:00 Uhr

**Vortrag 9.** *André-Oort-Vermutung und Riemannhypothese***Name 9**

Ziel: Einen Überblick über die André-Oort-Vermutung und die verallgemeinerte Riemann'sche Vermutung verschaffen. In Abstimmung mit Vortrag 11 die Idee des Beweises von (GRH)  $\Rightarrow$  (AO) (Äquidistributionsargument, kleine gespaltene Primstellen) vermitteln.

Quellen: [KY14]

**Vortrag 10.** *Existenz der Abelschen Varietät über  $\bar{\mathbb{Q}}$* **Name 10**

Ziel: Das Hauptresultat [CO12, Theorem 3.1] unter der Voraussetzung von (AO) bzw. (GRH) zeigen. Daraus folgt direkt, dass es (unter Annahme der Hypothesen) eine abelsche Varietät über  $\bar{\mathbb{Q}}$  gibt, die zu keiner Jacobischen isogen ist. Im Hinblick auf den unbedingten Beweis in Vortrag 11 ist besonderes Augenmerk auf [CO12, Lemma 3.5] und die Einschränkung auf Hilbert-Modul-Varietäten mittels [CO12, Lemma 3.4] zu legen. Optional ist [CO12, Proposition 3.7] der abschließende Teil des Vortrags.

Quellen: [CO12]

Darmstadt, 09.02.2017 15:15 Uhr

**Vortrag 11.** *Existenz der Abelschen Varietät über  $\bar{\mathbb{Q}}$  II* **Alejandro Soto**

Ziel: Modifikation des Beweises von [CO12, Theorem 3.1] nach Tsimerman [Tsi12], sodass weder (GRH) noch (AO) vorausgesetzt werden müssen. In Abstimmung mit Vortrag 10 müssen Elemente (Äquidistributionsargument, kleine gespaltene Primstellen) aus dem Beweis von [KY14] benutzt werden.

Quellen: [Tsi12]

**Vortrag 12.** *Familien von Shimura-Kurven* **Jonathan Zachhuber**

Ziel: Übersichtsvortrag über Familien von Shimura-Kurven in  $\mathcal{M}_g$  und die Klassifikation der zyklischen 4-Punkt-Überlagerungen nach [MO13, 5].

Quellen: [MO13]

## Literatur

- [BL04] Christina Birkenhake and Herbert Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [CO09] Ching-Li Chai and Frans Oort. Moduli of abelian varieties and p-divisible groups. *Arithmetic Geometry. Clay Math. Proc.*, 8:441–536, 2009.
- [CO12] Ching-Li Chai and Frans Oort. Abelian varieties isogenous to a Jacobian. *Ann. of Math.*, 176:589–635, 2012.
- [DDT] Henri Darmon, Fred Diamond, and Richard Taylor. Fermat’s Last Theorem.
- [Del71] Pierre Deligne. Travaux de Shimura. In *Séminaire Bourbaki, 13ème Année (1970/71), Exp. No. 389*, volume 244 of *Lecture Notes in Math.*, pages 123–165. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [Del79] Pierre Deligne. Variétés de shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modeles canoniques. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math.*,

- Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part*, volume 2, pages 247–289, 1979.
- [Del82] Pierre Deligne. Hodge cycles on abelian varieties. In *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, pages 9–100. Springer, 1982.
- [KY14] Bruno Klingler and Andrei Yafaev. The André-Oort conjecture. *Ann. Math.*, 180(3):867–925, 2014.
- [Mil86] James S. Milne. Jacobian varieties. In *Arithmetic geometry*, pages 167–212. Springer, 1986.
- [Mil03] James S. Milne. Canonical models of shimura curves, 2003.
- [Mil05] James S. Milne. Introduction to Shimura varieties. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, volume 4 of *Clay Math. Proc.*, pages 265–378. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [Mil08] James S. Milne. Abelian varieties (v2.00), 2008. Available at [www.jmilne.org/math/](http://www.jmilne.org/math/).
- [Mil11] James S. Milne. Shimura varieties and moduli. *Handbook of moduli*, 2:467–548, 2011.
- [MO13] Ben Moonen and Frans Oort. The Torelli locus and special subvarieties, Handbook of moduli. Vol. II. *Adv. Lect. Math*, 25:549–594, 2013.
- [Moo04] Ben Moonen. An introduction to Mumford-Tate groups. *unpublished lecture notes, Amsterdam*, 2004.
- [Shi63] Goro Shimura. On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions. *Annals of Mathematics*, pages 149–192, 1963.
- [Shi98] Shimura, Goro. *Abelian varieties with complex multiplication and modular functions*, volume 46 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.
- [Tsi12] Jacob Tsimerman. The existence of an abelian variety over  $\overline{\mathbb{Q}}$  isogenous to no jacobian. *Ann. of Math.*, 176:637–650, 2012.
- [vdG88] Gerard van der Geer. *Hilbert modular surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.