Über Pro-p-Fundamentalgruppen markierter arithmetischer Kurven

Alexander Schmidt

16. Januar 2009

Abstract

Let k be a global field, p an odd prime number different from char(k) and S, T disjoint, finite sets of primes of k. Let $G_S^T(k)(p) = G(k_S^T(p)|k)$ be the Galois group of the maximal p-extension of k which is unramified outside S and completely split at T. We prove the existence of a finite set of primes S_0, which can be chosen disjoint from any given set $\mathcal{M}$ of Dirichlet density zero, such that the cohomology of $G_{S\cup S_0}^T(k)(p)$ coincides with the étale cohomology of the associated marked arithmetic curve. In particular, $cd\ G_{S\cup S_0}^T(k)(p) = 2$. Furthermore, we can choose S_0 in such a way that $k_{S\cup S_0}^T(p)$ realizes the maximal p-extension $k_\mathfrak{p}(p)$ of the local field $k_\mathfrak{p}$ for all $\mathfrak{p} \in S \cup S_0$, the cup-product $H^1(G_{S\cup S_0}^T(k)(p), \mathbb{F}_p) \otimes H^1(G_{S\cup S_0}^T(k)(p), \mathbb{F}_p) \to H^2(G_{S\cup S_0}^T(k)(p), \mathbb{F}_p)$ is surjective and the decomposition groups of the primes in S establish a free product inside $G_{S\cup S_0}^T(k)(p)$. This generalizes previous work of the author where similar results were shown in the case $T = \varnothing$ under the restrictive assumption $p \nmid \#Cl(k)$ and $\zeta_p \notin k$.

1 Einführung

Es seien k ein Zahlkörper, S eine endliche Stellenmenge von k und p eine Primzahl. Mit $k_S(p)$ bezeichnen wir die maximale außerhalb S unverzweigte p-Erweiterung von k und setzen

$$G_S(k)(p) = G(k_S(p)|k).$$

Die Gruppe $G_S(k)(p)$ ist im Fall, dass S alle Primteiler von p enthält, gut (wenn auch lange nicht vollständig) verstanden; siehe Kapitel X von [NSW] für einen Überblick über die bekannten Ergebnisse. Im Fall, dass S nicht alle Stellen über p enthält, war, abgesehen davon, dass die Gruppe $G_S(k)(p)$ endlich präsentierbar ist, bis vor kurzem nur wenig bekannt.

Im Fall $k = \mathbb{Q}$ fand J. Labute [La1] im Jahr 2005 die ersten Beispiele von Paaren (S, p) mit der Eigenschaft, dass $G_S(\mathbb{Q})(p)$ die kohomologische Dimension 2 hat und p nicht in S liegt. Dieser Fortschritt war durch die neu entwickelte Theorie der milden Pro-p-Gruppen möglich. Der Autor konnte dann Labutes Ergebnisse auf beliebige Zahlkörper ausdehnen [S1, S2], wobei der Fokus auf der $K(\pi, 1)$-Eigenschaft lag. Diese besagt, dass die Kohomologie der Gruppe $G_S(k)(p)$ mit der étalen Kohomologie des Schemas $Spec(\mathcal{O}_k) \smallsetminus S$ übereinstimmt, was insbesondere kohomologische Dimension 2 impliziert. Allerdings mussten bei gegebenem Zahlkörper k endlich viele Primzahlen von der Betrachtung ausgeschlossen werden, nämlich die Teiler der Klassenzahl und solche p mit $\zeta_p \in k$. Es hat sich nun herausgestellt, dass diese Einschränkung eliminiert werden kann, wenn man von vornherein eine allgemeinere Fragestellung betrachtet, nämlich die nach der Gruppe $G_S^T(k)(p)$. Hier sind S und T endliche Stellenmengen, $k_S^T(p)$ die maximale p-Erweiterung von k, die unverzweigt außerhalb S und voll zerlegt bei T ist, und $G_S^T(k)(p) = G(k_S^T(p)|k)$. Diese Gruppe ist auch im Funktionenkörperfall interessant.

In dieser Arbeit zeigen wir ohne Annahmen an S und T, dass durch Hinzunahme endlich vieler Stellen zu S eine Situation geschaffen werden kann, in der $G_S^T(k)(p)$ die kohomologische Dimension 2 und weitere gute Eigenschaften hat. Bei der Wahl der hinzuzunehmenden Stellen kann man überdies eine gegebene Stellenmenge der Dirichletdichte 0 (also insbesondere die Stellen über p) vermeiden. Das genaue Resultat lautet folgendermaßen.

Theorem 1.1. *Es sei k ein globaler Körper und p eine ungerade von $\mathrm{char}(k)$ verschiedene Primzahl. Es seien S, T und $\mathcal{M}$ paarweise disjunkte Stellenmengen von k, wobei S und T endlich seien und $\mathcal{M}$ die Dirichletdichte $\delta(\mathcal{M}) = 0$ habe. Dann existiert eine endliche zu $S \cup T \cup \mathcal{M}$ disjunkte Stellenmenge S_0 von k, so dass die folgenden Aussagen gelten.*

(i) *Die Gruppe $G_{S\cup S_0}^T(k)(p)$ hat die kohomologische Dimension 2 und das Cup-Produkt*

$$H^1(G_{S\cup S_0}^T(k)(p), \mathbb{F}_p) \otimes H^1(G_{S\cup S_0}^T(k)(p), \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(G_{S\cup S_0}^T(k)(p), \mathbb{F}_p)$$

ist surjektiv.

(ii) *Es gilt*

$$k_{S\cup S_0}^T(p)_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(p)$$

für alle $\mathfrak{p} \in S \cup S_0$, d.h. die Erweiterung globaler Körper $k_{S\cup S_0}^T(p)|k$ realisiert für jede Stelle $\mathfrak{p} \in S \cup S_0$ die maximale p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}(p)$ des lokalen Körpers $k_\mathfrak{p}$.

(iii) *Die Zerlegungsgruppen der Stellen aus S bilden ein freies Produkt in der Gruppe $G_{S\cup S_0}^T(k)(p)$, d.h. der natürliche Homomorphismus*

$$\mathop{\ast}_{\mathfrak{p}\in S(k_{S_0}^{S\cup T}(p))} G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p}) \longrightarrow G(k_{S\cup S_0}^T(p)|k_{S_0}^{S\cup T}(p))$$

ist ein Isomorphismus von Pro-p-Gruppen.

(iv) *Für jeden diskreten $G_{S\cup S_0}^T(p)$-p-Torsionsmodul M sind die Kantenhomomorphismen der Hochschild-Serre-Spektralfolge für die universelle Pro-p-Überlagerung*

$$H^i(G_{S\cup S_0}^T(k)(p), M) \longrightarrow H^i_{et}(X \smallsetminus (S \cup S_0), T, M)$$

Isomorphismen für alle $i \geq 0$. Hier ist X das eindeutig bestimmte eindimensionale, reguläre, zusammenhängende und über $\mathit{Spec}(\mathbb{Z})$ eigentliche Schema mit Funktionenkörper k und $H^i_{et}(X \smallsetminus (S \cup S_0), T, M)$ bezeichnet die étale Kohomologie der in T markierten arithmetischen Kurve $X \smallsetminus (S \cup S_0)$ mit Werten in der durch M definierten Garbe (siehe Abschnitt 2).

Bemerkungen 1.2. 1. Der Grund für den Ausschluss der Primzahl $p = 2$ in Theorem 1.1 ist nicht das übliche Problem mit den reellen Stellen, sondern, dass derzeit noch keine gute Theorie milder Pro-2-Gruppen existiert.
2. Es stellt sich die Frage, ob die Eigenschaften (i)–(iv) dann auch für die Gruppe $G_{S\cup S_0'}^T(k)(p)$ gelten, wobei S_0' eine beliebige, S_0 umfassende und zu T disjunkte endliche Stellenmenge ist. Wir werden dies in Abschnitt 8 zeigen, falls keine der Stellen aus $S_0' \smallsetminus S_0$ in der Erweiterung $k_{S\cup S_0}^T(p)|k$ voll zerlegt ist (siehe Satz 8.1).
3. Entsprechende Ergebnisse für die volle Gruppe $G_S^T(k)$, d.h. ohne den Übergang zur maximalen Pro-p-Faktorgruppe, scheinen derzeit außer Reichweite zu sein.

Im Zahlkörperfall spielen die Stellen über p keine Sonderrolle in Theorem 1.1, insbesondere wird nicht angenommen, dass S die Menge S_p der Teiler von p enthält. Aber selbst im Zahlkörperfall mit $S \supset S_p$ und $T = \varnothing$ liefert Theorem 1.1 neue Information: Aussage (ii) war bislang nur bekannt, wenn k eine primitive p-te Einheitswurzel enthält (Satz von Kuz'min, siehe [Ku] oder [NSW], 10.8.4), sowie für gewisse CM-Körper (siehe [Mu] oder [NSW], X §8 Exercise). Nach (iii) erreicht man durch Hinzunahme endlich vieler Stellen zu $S \supset S_p$, dass die Zerlegungsgruppen der Stellen über p ein freies Produkt innerhalb der Gruppe $G_S(k)(p)$ bilden. Dies war bislang nur für Stellenmengen S der Dirichletdichte 1 (siehe [NSW], 9.4.4), jedoch nicht für endliche Stellenmengen bekannt.

Im „zahmen" Fall $S \cap S_p = \varnothing$ mit $T = \varnothing$ wurden in [S2] die Aussagen (i), (ii) und (iv) bewiesen, allerdings nur unter der Voraussetzung $p \nmid \#Cl(k)$ und $\zeta_p \notin k$. Teilergebnisse im „gemischten" Fall $\varnothing \subsetneq S \cap S_p \subsetneq S_p$ wurden von K. Wingberg [Wi1], Ch. Maire [Mai] und D. Vogel [Vo] erzielt.

In Abschnitt 9 werden wir sehen, dass Theorem 1.1 eine große Klasse von Beispielen liefert, in denen $G_S^T(k)(p)$ eine Pro-p-Dualitätsgruppe ist (siehe Satz 9.6). Im Zahlkörperfall mit $S \supset S_p$ und $T = \varnothing$ war dies nach Resultaten von Wingberg bekannt, sobald k eine primitive p-te Einheitswurzel enthält (siehe [Wi2] oder [NSW], 10.9.8). Im Fall $\zeta_p \notin k$ gab es lediglich Ergebnisse für reell-abelsche Zahlkörper und gewisse CM-Körper (siehe [NSW], 10.9.15 und den nachfolgenden Remark).

Wesentlich für den Beweis von Theorem 1.1 sind arithmetische Dualitätssätze, Hasseprinzipien für die Kohomologie, die Theorie der milden Pro-p-Gruppen nach Labute und die Technik der freien Produkte von Bündeln von Pro-p-Gruppen über einer topologischen Basis, wie sie in Kapitel IV von [NSW] entwickelt wurde.

Der Autor dankt Ph. Lebacque für seine Kommentare zu einer vorläufigen Version dieser Arbeit.

2 Der étale Situs einer markierten Kurve

Es sei Y ein eindimensionales, noethersches, reguläres Schema und T eine endliche Menge abgeschlossener Punkte auf Y. Mit $\mathrm{Et}(Y)$ bezeichnen wir wie üblich die Kategorie der étalen Morphismen von endlichem Typ $Y' \to Y$.

Definition 2.1. Die Kategorie $\mathrm{Et}(Y, T)$ ist die volle Unterkategorie von $\mathrm{Et}(Y)$, bestehend aus allen Objekten $f : Y' \to Y$ mit der Eigenschaft, dass für jeden abgeschlossenen Punkt $y' \in Y'$ mit $y = f(y') \in T$ die Restklassenkörpererweiterung $k(y')|k(y)$ trivial ist. Der étale Situs $(Y, T)_{et}$ der in T markierten Kurve Y besteht aus der Kategorie $\mathrm{Et}(Y, T)$ mit surjektiven Familien als Überdeckungen.

Offenbar gilt $(Y, \varnothing)_{et} = Y_{et}$. Für $T_1 \subset T_2$ haben wir einen natürlichen Morphismus $\iota : (Y, T_1)_{et} \to (Y, T_2)_{et}$ und somit für jede Garbe F abelscher Gruppen auf $(Y, T_2)_{et}$ und jedes $i \geq 0$ Homomorphismen

$$H^i_{et}(Y, T_2, F) \longrightarrow H^i_{et}(Y, T_1, \iota^* F).$$

Für eine echte abgeschlossene (und damit endliche) Teilmenge $M \subset Y$ definiert man die lokalen Kohomologiegruppen $H^*_M(Y, T, -)$ auf die übliche Art und Weise als die Rechtsableitungen des Funktors

$$F \longmapsto \ker\big(\Gamma(Y, T, F) \to \Gamma(Y \smallsetminus M, T \smallsetminus M, F)\big).$$

In gleicher Weise wie für gewöhnliche étale Kohomologie zeigt man Ausschneidung, d.h. es gilt

$$H^i_M(Y, T, F) \cong \bigoplus_{x \in M} H^i_x(Y^h_x, T^h_x, F),$$

wobei Y_x^h die Henselisierung von Y in x ist, und T_x^h das Urbild von T in Y_x^h (also $T_x^h = \{x\}$, falls $x \in T$ und ansonsten $T_x^h = \varnothing$). Auch die Konstruktion des Cup-Produkts ist vollständig analog zum gewöhnlichen étalen Situs: für Garben F_1, F_2 auf $(Y,T)_{et}$ und $i,j \geq 0$ haben wir eine Cup-Produkt-Paarung

$$H^i_{et}(Y,T,F_1) \times H^j_{et}(Y,T,F_2) \xrightarrow{\cup} H^{i+j}_{et}(Y,T,F_1 \otimes F_2),$$

mit den üblichen Eigenschaften.

Ganz analog konstruiert man auch die Fundamentalgruppe. Wir betrachten die volle Unterkategorie $\mathrm{FEt}(Y,T)$ der endlichen Morphismen $Y' \to Y$ in $\mathrm{Et}(Y,T)$. Diese Kategorie erfüllt die Axiome einer Galoiskategorie ([SGA1], V, 4). Nach Wahl eines geometrischen Punktes $\bar{x}$ in $Y \smallsetminus T$ haben wir den Faserfunktor

$$\mathrm{FEt}(Y,T) \longrightarrow (\mathit{Mengen}),\ (Y' \to Y) \mapsto \mathrm{Mor}_Y(\bar{x}, Y'),$$

dessen Automorphismengruppe per definitionem die étale Fundamentalgruppe von (Y,T) ist. Wir bezeichnen sie mit $\pi_1^{et}(Y,T,\bar{x})$. Von nun an sei Y zusammenhängend. Dann sind die Fundamentalgruppen zu verschiedenen Basispunkten isomorph, wobei der Isomorphismus bis auf innere Automorphismen kanonisch ist. Wir werden dann den Basispunkt meist von der Notation ausschließen. Die Fundamentalgruppe ist proendlich und klassifiziert étale Überlagerungen von Y, in denen jeder Punkt von T voll zerlegt ist. Die Gruppe $H^1_{et}(Y,T,\mathbb{F}_p)$ klassifiziert zyklische Überlagerungen vom Grad p von (Y,T). Daher haben wir Isomorphismen

$$H^1(\pi_1^{et}(Y,T)(p),\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H^1(\pi_1^{et}(Y,T),\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H^1_{et}(Y,T,\mathbb{F}_p),$$

wobei $\pi_1^{et}(Y,T)(p)$ die maximale Pro-p-Faktorgruppe von $\pi_1^{et}(Y,T)$ bezeichnet. Diesen Isomorphismus kann man gut an der Hochschild-Serre-Spektralfolge sehen. Wir betrachten die universelle Pro-p-Überlagerung $\widetilde{(Y,T)}(p)$ von (Y,T). Diese ist ein Pro-Objekt in $\mathrm{FEt}(Y,T)$ und die Projektion

$$\widetilde{(Y,T)}(p) \longrightarrow (Y,T)$$

ist Galoissch mit Gruppe $\pi_1^{et}(Y,T)(p)$. Ist nun M ein diskreter $\pi_1^{et}(Y,T)(p)$-p-Torsionsmodul, so erhalten wir die Spektralfolge

$$E_2^{ij} = H^i\Big(\pi_1^{et}(Y,T)(p), H^j_{et}\big(\widetilde{(Y,T)}(p), M\big)\Big) \Rightarrow H^{i+j}_{et}(Y,T,M),$$

und insbesondere Kantenhomomorphismen

$$\phi_{i,M} : H^i(\pi_1^{et}(Y,T)(p), M) \longrightarrow H^i_{et}(Y,T,M), \quad i \geq 0.$$

Lemma 2.2. *Es sei Y ein eindimensionales, noethersches, reguläres Schema und T eine endliche Menge abgeschlossener Punkte auf Y. Dann sind für jeden diskreten $\pi_1^{et}(Y,T)(p)$-p-Torsionsmodul M die Homomorphismen $\phi_{0,M}$ und $\phi_{1,M}$ Isomorphismen, und $\phi_{2,M}$ ist injektiv. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *$\phi_{i,M}$ ist ein Isomorphismus für alle i und jedes M.*

(ii) *$\phi_{i,\mathbb{F}_p}$ ist ein Isomorphismus für alle i.*

(iii) *$H^i_{et}(\widetilde{(Y,T)}(p), \mathbb{F}_p) = 0$ für alle $i \geq 1$.*

Beweis. Nach Konstruktion gilt $H^1_{et}(\widetilde{(Y,T)}(p), \mathbb{F}_p) = 0$, was die erste Aussage zeigt. Gilt (ii), so folgt (i) zunächst für jeden endlichen Modul M, weil $\pi_1^{et}(Y,T)(p)$ eine Pro-p-Gruppe und also $\mathbb{F}_p$ der einzige einfache diskrete $\pi_1^{et}(Y,T)(p)$-p-Torsionsmodul ist. Das Ergebnis überträgt sich auf beliebiges M, weil sowohl die Kohomologie proendlicher Gruppen, als auch étale Kohomologie mit gefilterten direkten Limiten kommutiert. Die Implikation (iii)⇒(ii) kann direkt an der Spektralfolge abgelesen werden. Schließlich gelte (i). Jede Klasse in $H^i_{et}(\widetilde{(Y,T)}(p), \mathbb{F}_p)$ liegt bereits in $H^i_{et}(Y', T', \mathbb{F}_p)$ für eine endliche Zwischenüberlagerung (Y', T') von $\widetilde{(Y,T)}(p) \to (Y,T)$. Diese entspricht einer offenen Untergruppe $U \subset \pi_1^{et}(Y,T)(p)$. Wendet man (i) auf den $\pi_1^{et}(Y,T)(p)$-Modul $\mathrm{Ind}^U_{\pi_1^{et}(Y,T)(p)} \mathbb{F}_p$ an, so sieht man, dass jedes $\alpha \in H^i_{et}(Y', T', \mathbb{F}_p)$ bereits in $H^i_{et}(Y'', T'', \mathbb{F}_p)$ verschwindet, wobei (Y'', T'') eine geeignete endliche Zwischenüberlagerung von $\widetilde{(Y,T)}(p) \to (Y', T')$ ist. Dies zeigt (iii) und beendet den Beweis. $\square$

Definition 2.3. Wenn die äquivalenten Aussagen von Lemma 2.2 erfüllt sind, so sagen wir, dass (Y,T) die ***$K(\pi,1)$*-Eigenschaft für *p*** hat.

Bemerkung 2.4. Lemma 2.2 und Definition 2.3 dehnen sich in natürlicher Weise auf Pro-Objekte aus. Eine markierte Kurve (Y,T) hat genau dann die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p, wenn dies für ihre universelle Pro-p-Überlagerung $\widetilde{(Y,T)}(p)$ der Fall ist.

3 Berechnung von Kohomologiegruppen

Im Folgenden wollen wir die étale Kohomologie markierter arithmetischer Kurven berechnen. Es sei k ein lokaler oder globaler Körper und $p \neq \mathrm{char}(k)$ eine fixierte Primzahl. Mit μ_p bezeichnen wir die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln und setzen $\delta = 1$, falls $\mu_p \subset k$ ist, und ansonsten $\delta = 0$. Alle Kohomologiegruppen nehmen Werte in der konstanten Garbe $\mathbb{F}_p$ an, die wir von der Bezeichnung ausschließen. Desweiteren benutzen wir die Bezeichnung

$$h^i(-) = \dim_{\mathbb{F}_p} H^i_{et}(-) \quad (= \dim_{\mathbb{F}_p} H^i_{et}(-, \mathbb{F}_p)\ ).$$

Wir beginnen mit einer lokalen Berechnung. Für einen lokalen Körper k, der keine Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ ist, benutzen wir die Konvention $[k : \mathbb{Q}_p] = 0$. Desweiteren bezeichnen wir mit $H^i_{nr}(k)$ die unverzweigte Kohomologie und setzen

$$H^i_{/nr}(k) = H^i(k)/H^i_{nr}(k).$$

Mit $A^\vee$ bezeichnen wir das Pontrjagin-Dual von A.

Satz 3.1. *Es sei k ein nichtarchimedischer lokaler Körper mit von p verschiedener Charakteristik. Es sei $X = Spec(\mathcal{O}_k)$, x der abgeschlossene Punkt von X und $T = \varnothing$ oder $T = \{x\}$. Dann verschwinden die lokalen étalen Kohomologiegruppen $H^i_x(X,T)$ für $i \leq 1$ und $i \geq 4$, und es gilt*

$$H^2_x(X,T) \cong \begin{cases} H^1_{/nr}(k) & \text{falls } T = \varnothing, \\ H^1(k) & \text{falls } T = \{x\}, \end{cases}$$

also

$$h^2_x(X,T) = \delta + [k : \mathbb{Q}_p] + \#T\,.$$

Desweiteren gilt $H^3_x(X,T) \cong H^2(k) \cong \mu_p(k)^\vee$, also $h^3_x(X,T) = \delta$, und wir haben die Euler-Poincaré-Charakteristik-Formel

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i h^i_x(X,T) = [k : \mathbb{Q}_p] + \#T\,.$$

Beweis. Da X henselsch ist, haben wir Isomorphismen $H^i_{et}(X) \cong H^i_{et}(x)$ für alle i. Da es im Fall $T = \{x\}$ keine nichttrivialen étalen Überdeckungen von (X,T) gibt, erhalten wir

$$h^i(X,T) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ 1 - \#T & \text{für } i = 1, \\ 0 & \text{für } i \geq 2. \end{cases}$$

Außerdem gilt $X \smallsetminus \{x\} = \mathit{Spec}(k)$, also $H^i_{et}(X \smallsetminus \{x\}) \cong H^i(k)$. Der lokale Dualitätssatz (siehe [NSW], Theorem 7.2.6) zeigt $H^2_{et}(X \smallsetminus \{x\}) \cong \mu_p(k)^\vee$, und nach [NSW], Corollary 7.3.9, erhalten wir

$$h^1(X \smallsetminus \{x\}) = 1 + \delta + [k : \mathbb{Q}_p].$$

Schließlich ist der natürliche Homomorphismus $H^1_{et}(X) \to H^1_{et}(X \smallsetminus \{x\})$ injektiv. Daher erhalten wir die Aussage des Satzes aus der exakten Ausschneidungsfolge

$$\cdots \to H^i_x(X,T) \to H^i_{et}(X,T) \to H^i_{et}(X \smallsetminus \{x\}) \to H^{i+1}_x(X,T) \to \cdots .$$

□

Nun sei k ein globaler Körper und X das eindeutig bestimmte eindimensionale, reguläre, zusammenhängende und über $\mathit{Spec}(\mathbb{Z})$ eigentliche Schema mit Funktionenkörper k (also $X = \mathit{Spec}(\mathcal{O}_k)$, wenn k ein Zahlkörper ist, und im Funktionenkörperfall ist X eine glatte, projektive Kurve über einem endlichen Körper). Es seien S und T disjunkte endliche Mengen nichtarchimedischer Stellen von k, also disjunkte endliche Mengen abgeschlossener Punkte von X.

Wir bezeichnen mit S_∞ die Menge der archimedischen Stellen von k ($S_\infty = \varnothing$ im Funktionenkörperfall). In Galois-Terminologie (und ohne Erwähnung des Basispunktes) gilt

$$\pi_1^{et}(X \smallsetminus S, T) = G^T_{S \cup S_\infty}(k) := G(k^T_{S\cup S_\infty}|k),$$

wobei $k^T_{S\cup S_\infty}$ die maximale Erweiterung von k bezeichnet, die unverzweigt außerhalb $S \cup S_\infty$ und voll zerlegt bei T ist. Für eine Zwischenerweiterung $K|k$ von $k^T_{S\cup S_\infty}|k$ bezeichnen wir mit

$$(X \smallsetminus S, T)_K$$

die Normalisierung $(X \smallsetminus S)_K$ der Kurve $X \smallsetminus S$ in K, die in der Stellenmenge $T(K)$ der Fortsetzungen von Stellen von T auf K markiert ist. Ist $K|k$ endlich, so ist $(X \smallsetminus S, T)_K$ ein Objekt in $\mathrm{FEt}(X \smallsetminus S, T)$, ansonsten ein Pro-Objekt.

Sei nun $p \neq \mathrm{char}(k)$ eine fixierte Primzahl. Mit

$$k^{T,el}_{S\cup S_\infty}$$

bezeichnen wir die maximale elementar-abelsche p-Erweiterung von k in $k^T_{S\cup S_\infty}$ und bemerken, dass

$$G(k^{T,el}_{S\cup S_\infty}|k) \cong H^1_{et}(X \smallsetminus S, T)^\vee$$

gilt. Mit S_p bezeichnen wir die Menge der Teiler von p (also $S_p = \varnothing$ im Funktionenkörperfall). Nimmt man im Zahlkörperfall $p \neq 2$ oder k total imaginär an, so können wir die archimedischen Stellen ignorieren, d.h. es gilt

$$G^T_S(k)(p) = G^T_{S\cup S_\infty}(k)(p) \quad \big(= \pi_1^{et}(X \smallsetminus S, T)(p)\big).$$

Teil (iv) unseres Hauptresultats Theorem 1.1 besagt, dass wir für $p \neq 2$, $p \neq \mathrm{char}(k)$, durch Hinzunahme endlich vieler Stellen zu S erreichen, dass $(X \smallsetminus S, T)$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p hat. Dies ist im Spezialfall $S \supset S_p$ und $T = \varnothing$ schon ohne die Hinzunahme von Stellen wohlbekannt:

Satz 3.2. *Es sei k ein globaler Körper, $p \neq \mathrm{char}(k)$ eine Primzahl und $S \supset S_p$ eine endliche, nichtleere Stellenmenge von k. Dann sind für jeden diskreten $G_{S\cup S_\infty}(k)$-p-Torsionsmodul M die natürlichen Abbildungen*

$$H^i(G_{S\cup S_\infty}(k), M) \longrightarrow H^i_{et}(X \smallsetminus S, M)$$

Isomorphismen für alle $i \geq 0$. Ist M überdies ein diskreter $G_{S\cup S_\infty}(k)(p)$-p-Torsionsmodul, so sind auch die natürlichen Abbildungen

$$H^i(G_{S\cup S_\infty}(k)(p), M) \longrightarrow H^i(G_{S\cup S_\infty}(k), M)$$

Isomorphismen für alle $i \geq 0$.

Beweis. Für einen Beweis der ersten Aussage siehe [Mi2], II, Proposition 2.9. Die zweite Aussage ist ein Resultat von O. Neumann, siehe [NSW], Corollary 10.4.8. □

Wir benutzen nachfolgend die folgenden Bezeichnungen, wobei p stets eine Primzahl ungleich $\mathrm{char}(k)$ sei.

r_1	die Anzahl der reellen Stellen von k
r_2	die Anzahl der komplexen Stellen von k
r	$= r_1 + r_2$, die Anzahl der archimedischen Stellen von k
δ	gleich 1, wenn $\mu_p \subset k$, und ansonsten gleich 0
$\delta_\mathfrak{p}$	gleich 1, wenn $\mu_p \subset k_\mathfrak{p}$, und ansonsten gleich 0
$Cl_S(k)$	$= \mathrm{Pic}(X \smallsetminus S)$, die S-Idealklassengruppe von k
$E_{k,S}$	$= H^0(X \smallsetminus S, \mathbb{G}_m)$, die S-Einheitengruppe von k
${}_nA$	$= \ker(A \xrightarrow{\cdot n} A)$, wobei A eine abelsche Gruppe ist, und $n \in \mathbb{N}$
A/n	$= \mathrm{coker}(A \xrightarrow{\cdot n} A)$, wobei A eine abelsche Gruppe ist, und $n \in \mathbb{N}$.

Falls k positive Charakteristik hat, so gilt $r_1 = r_2 = r = 0$ und $E_{k,\varnothing}$ ist die multiplikative Gruppe des endlichen Konstantenkörpers. Wie zuvor schließen wir in Kohomologiegruppen die konstanten Koeffizienten $\mathbb{F}_p$ von der Notation aus. Die Voraussetzung $p \neq 2$ oder k total imaginär im Zahlkörperfall wird in der ganzen Arbeit gemacht. Daher vereinbaren wir die folgende Konvention:

Der Begriff Stellenmenge meint stets eine Menge nichtarchimedischer Stellen.

Satz 3.3. *Es seien S und T disjunkte, endliche Stellenmengen des globalen Körpers k. Im Zahlkörperfall sei überdies $p \neq 2$ oder k total imaginär. Dann verschwinden die Gruppen $H^i_{et}(X \smallsetminus S, T) = 0$ für $i \geq 4$ und es gilt*

$$\chi(X \smallsetminus S, T) := \sum_{i=0}^{3} (-1)^i h^i(X \smallsetminus S, T) = r + \#T - \sum_{\mathfrak{p} \in S \cap S_p} [k_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p]\ .$$

Beweis. Im Fall $T = \varnothing$ und $S \supset S_p$ ist die Aussage wohlbekannt: nach [Mi2], II, Theorem 2.13 (a), hat man $\chi(X \smallsetminus S) = -r_2$ und außerdem gilt

$$r - \sum_{\mathfrak{p} \in S_p} [k_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p] = r_1 + r_2 - [k : \mathbb{Q}] = -r_2,$$

wobei im Funktionenkörperfall $[k : \mathbb{Q}] = 0$ gesetzt sei. Wir betrachten die exakte Ausschneidungsfolge

$$\cdots \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S \cup T} H^i_\mathfrak{p}(X_\mathfrak{p}, T_\mathfrak{p}) \to H^i_{et}(X, T) \to H^i_{et}(X \smallsetminus (S \cup T)) \to \cdots\ ,$$

wobei $X_\mathfrak{p}$ die Komplettierung von X bei $\mathfrak{p}$ ist (die Kohomologiegruppen der Komplettierung und der Henselisierung stimmen überein). Man erhält das Ergebnis für $S = \varnothing$ und beliebiges T durch Benutzung dieser Ausschneidungsfolge für $S = S_p$ und durch Anwendung von Satz 3.1. Das Resultat für beliebiges S erhält man aus dem Fall $S = \varnothing$ mit Hilfe der Ausschneidungsfolge

$$\cdots \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} H^i_\mathfrak{p}(X_\mathfrak{p}) \to H^i_{et}(X,T) \to H^i_{et}(X \smallsetminus S, T) \to \cdots ,$$

und einer erneuten Anwendung von Satz 3.1. □

Korollar 3.4. *Es seien S und T disjunkte, endliche Stellenmengen des globalen Körpers k. Dann erhalten wir eine exakte Folge*

$$H^1_{et}(X \smallsetminus S,T) \hookrightarrow H^1_{et}(X \smallsetminus S) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in T} H^1_{nr}(k_\mathfrak{p}) \to H^2_{et}(X \smallsetminus S,T) \twoheadrightarrow H^2_{et}(X \smallsetminus S)$$

und Isomorphismen $H^i(X \smallsetminus S,T) \xrightarrow{\sim} H^i(X \smallsetminus S)$ für $i \geq 3$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.1 durch den Vergleich der Ausschneidungsfolgen für $X \smallsetminus S$ und $X \smallsetminus (S \cup T)$ sowie für $(X \smallsetminus S, T)$ und $X \smallsetminus (S \cup T)$. □

Um Formeln für die individuellen Kohomologiegruppen angeben zu können, führen wir die Kummergruppe $V_S^T(k)$ ein. Es seien S und T endliche disjunkte Stellenmengen von k und $p \neq \mathrm{char}(k)$ eine fixierte Primzahl, die wir von der Notation ausschließen. Wir setzen

$$V_S^T(k) := \{a \in k^\times \mid a \in k_v^{\times p} \text{ für } v \in S \text{ und } a \in U_v k_v^{\times p} \text{ für } v \notin T\}/k^{\times p},$$

wobei U_v die Einheitengruppe des lokalen Körpers k_v bezeichnet (Konvention: $U_v = k_v^\times$, wenn v archimedisch ist). In Termen von flacher Kohomologie gilt

$$V_S^T(k) = \ker\big(H^1_{fl}(X \smallsetminus (S \cup T), \mu_p) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^1(k_\mathfrak{p}, \mu_p)\big).$$

Lemma 3.5. *Für $S = \varnothing$ gibt es eine natürliche exakte Folge*

$$0 \longrightarrow E_{k,T}/p \longrightarrow V_\varnothing^T(k) \longrightarrow {}_p Cl_T(k) \longrightarrow 0\,.$$

Insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{F}_p} V_\varnothing^T(k) = \dim_{\mathbb{F}_p} {}_p Cl_T(k) + r - 1 + \#T + \delta$, es sei denn k ist ein Funktionenkörper und $T = \varnothing$, in welchem Fall $\dim_{\mathbb{F}_p} V_\varnothing^\varnothing(k) = \dim_{\mathbb{F}_p} {}_p Cl(k) + \delta$ gilt. Für beliebiges S und jede weitere Stelle $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ haben wir die exakte Folge

$$0 \longrightarrow V_{S\cup\{\mathfrak{p}\}}^T(k) \xrightarrow{\phi} V_S^T(k) \longrightarrow U_\mathfrak{p} k_\mathfrak{p}^{\times p}/k_\mathfrak{p}^{\times p}.$$

Insbesondere ist $V_S^T(k)$ stets endlich. Für $\mathfrak{p} \notin S_p$ gilt $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{coker}(\phi) \leq \delta_\mathfrak{p}$.

Beweis. Zu $a \in V_\varnothing^T(k)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes gebrochenen T-Ideal mit $(a) = \mathfrak{a}^p$. Die Zuordnung $a \mapsto [\mathfrak{a}]$ induziert einen surjektiven Homomorphismus $V_\varnothing^T(k) \to {}_p Cl_T(k)$ mit Kern $E_{k,T}/p$. Zusammen mit dem Dirichletschen Einheitensatz zeigt dies die erste Aussage. Die zweite exakte Folge ergibt sich direkt aus den Definitionen der vorkommenden Objekte. Für $\mathfrak{p} \notin S_p$ gilt $\dim_{\mathbb{F}_p} U_\mathfrak{p} k_\mathfrak{p}^{\times p}/k_\mathfrak{p}^{\times p} = \delta_\mathfrak{p}$, was die letzte Aussage zeigt. □

Theorem 3.6. *Es seien S und T disjunkte, endliche Stellenmengen des globalen Körpers k und p eine Primzahl ungleich* $\mathrm{char}(k)$. *Im Zahlkörperfall sei überdies $p \neq 2$ oder k total imaginär. Dann gilt $H^i_{et}(X \smallsetminus S, T) = 0$ für $i \geq 4$ und*

$$\begin{aligned}
h^0(X \smallsetminus S, T) &= 1\,, \\
h^1(X \smallsetminus S, T) &= 1 + \sum_{\mathfrak{p} \in S} \delta_{\mathfrak{p}} - \delta + \dim_{\mathbb{F}_p} V_S^T(k) + \sum_{\mathfrak{p} \in S \cap S_p} [k_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p] - r - \#T, \\
h^2(X \smallsetminus S, T) &= \sum_{\mathfrak{p} \in S} \delta_{\mathfrak{p}} - \delta + \dim_{\mathbb{F}_p} V_S^T(k) + \theta\,, \\
h^3(X \smallsetminus S, T) &= \theta\,.
\end{aligned}$$

Hierbei ist θ gleich 1 *falls $\delta = 1$ und $S = \varnothing$ und ansonsten gleich* 0.

Beweis. Die Aussage über h^0 ist trivial und das Verschwinden der Kohomologie in Dimension größer gleich 4 ist bereits in Satz 3.3 enthalten. Artin-Verdier-Dualität (siehe [Maz], 2.4 oder [Mi2], Theorem 3.1) bzw. étale Poincaré-Dualität ([Mi1], V, Corollary 2.3) zeigen

$$H^3_{et}(X)^\vee \cong \mathrm{Hom}_X(\mathbb{F}_p, \mathbb{G}_m) = \mu_p(k).$$

Desweiteren impliziert das Verschwinden von $H^i_{et}(X_{\mathfrak{p}}, T_{\mathfrak{p}})$ für $i \geq 2$ zusammen mit dem lokalen Dualitätssatz ([NSW], Theorem 7.2.6) Isomorphismen $H^3_{\mathfrak{p}}(X_{\mathfrak{p}}, T_{\mathfrak{p}})^\vee \cong H^2(k_{\mathfrak{p}}, \mathbb{F}_p)^\vee \cong \mu_p(k_{\mathfrak{p}})$ für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ von X. Nach Korollar 3.4 ist $H^3_{et}(X, T) \to H^3_{et}(X) \cong \mu_p(k)^\vee$ ein Isomorphismus. Nun betrachten wir die Ausschneidungsfolge

$$\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^3_{\mathfrak{p}}(X) \xrightarrow{\alpha} H^3_{et}(X, T) \xrightarrow{\beta} H^3_{et}(X \smallsetminus S, T) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^4_{\mathfrak{p}}(X_{\mathfrak{p}}).$$

Der rechts stehende Term verschwindet nach Satz 3.1, also ist β surjektiv. Die zu α duale Abbildung ist die natürliche Abbildung

$$\mu_p(k) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mu_p(k_{\mathfrak{p}}).$$

Diese ist injektiv, es sei denn $\delta = 1$ und $S = \varnothing$. Wir erhalten $h^3(X \smallsetminus S, T) = 1$ falls $\delta = 1$ und $S = \varnothing$, und ansonsten gleich 0. Mit Hilfe des Isomorphismus $H^1(G_S^T(k)) \xrightarrow{\sim} H^1_{et}(X \smallsetminus S, T)$ erhalten wir die Aussage über h^1 aus der Berechnung der ersten Kohomologie von $G_S^T(k)$, die in [NSW], Theorem 10.7.10, durchgeführt ist. Schließlich folgt das Ergebnis für h^2 mit Hilfe der Euler-Poincaré-Charakteristik-Formel aus Satz 3.3. □

Das Verschwinden der Kohomologie in Dimension größer 2 zusammen mit Lemma 2.2 impliziert das

Korollar 3.7. *Für $S \neq \varnothing$ und jede Zwischenerweiterung $K|k$ von $k_S^T(p)|k$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(i) $(X \smallsetminus S, T)_K$ *hat die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p.*

(ii) *Der Homomorphismus $\phi_{2,\mathbb{F}_p} : H^2(G_S^T(K)(p)) \to H^2_{et}((X \smallsetminus S, T)_K)$ ist surjektiv und es gilt cd $G_S^T(K)(p) \leq 2$.*

4 Dualität für markierte arithmetische Kurven

Nun leiten wir einen Dualitätssatz für markierte arithmetische Kurven ab. Hierzu betrachten wir für eine Garbe F auf $(X \smallsetminus S, T)_{et}$ die Schafarewitsch-Tate-Gruppen

$$\text{Ш}^i(k, S, T, F) = \ker \big(H^i_{et}(X \smallsetminus S, T, F) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^i(k_{\mathfrak{p}}, F) \big).$$

Die konstanten Koeffizienten $F = \mathbb{F}_p$ schließen wir von der Notation aus, und genauso verfahren wir mit leerem T. Desweiteren setzen wir

$$\text{Б}_S^T(k) = V_S^T(k)^\vee.$$

Theorem 4.1. *Es sei k ein globaler Körper und p eine Primzahl ungleich* $\mathrm{char}(k)$. *Im Zahlkörperfall sei $p \neq 2$ oder k total imaginär. Es seien S und T disjunkte endliche Stellenmengen von k. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\text{Ш}^2(k, S, T) \xrightarrow{\sim} \text{Б}_S^T(k).$$

Insbesondere ist $\text{Ш}^2(k, S, T)$ endlich.

Bemerkung 4.2. Durch Übergang zum Limes über alle endlichen Teilmengen verallgemeinert sich Theorem 4.1 direkt auf den Fall einer beliebigen, also nicht notwendig endlichen Stellenmenge S.

Beweis von Theorem 4.1. Wir wählen eine endliche Stellenmenge Σ so groß, dass $S \cup T \cup S_p \subset \Sigma$ gilt und $\mathrm{Pic}\big((X \smallsetminus \Sigma)_{k(\mu_p)}\big)$ p-torsionsfrei ist. Dann verschwinden die Gruppen $\text{Ш}^1(k, \Sigma)$ und $\text{Ш}^1(k, \Sigma, \mu_p)$. Hieraus folgt das Verschwinden von $\text{Ш}^2(k, \Sigma) \cong \text{Ш}^1(k, \Sigma, \mu_p)^\vee$ (nach Satz 3.2 und Poitou-Tate-Dualität, [NSW], Theorem 8.6.7) und die Exaktheit der Folge

$$0 \longrightarrow V_S^T(k) \longrightarrow H^1_{et}(X \smallsetminus \Sigma, \mu_p) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in S} H^1(k_{\mathfrak{p}}, \mu_p) \times \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma \setminus (S \cup T)} H^1_{/nr}(k_{\mathfrak{p}}, \mu_p)\,.$$

Wir dualisieren diese exakte Folge und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \prod\limits_{\mathfrak{p} \in S} H^1(k_{\mathfrak{p}}) \times \prod\limits_{\mathfrak{p} \in \Sigma \setminus (S \cup T)} H^1_{nr}(k_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^1_{et}(X \smallsetminus \Sigma, \mu_p)^\vee \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \text{Б}_S^T(k) \\
H^1_{et}(X \smallsetminus \Sigma) \arrow[r, hook] & \prod\limits_{\mathfrak{p} \in \Sigma} H^1(k_{\mathfrak{p}}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & H^1_{et}(X \smallsetminus \Sigma, \mu_p)^\vee & \\
 & \prod\limits_{\mathfrak{p} \in T} H^1(k_{\mathfrak{p}}) \times \prod\limits_{\mathfrak{p} \in \Sigma \setminus (S \cup T)} H^1_{/nr}(k_{\mathfrak{p}})\,. & &
\end{tikzcd}$$

Die mittlere Zeile ist ein Teil der langen exakten Folge von Poitou-Tate (siehe [NSW], Theorem 8.6.10) und daher exakt. Das Schlangenlemma liefert uns die Exaktheit von

$$\text{(I)} \qquad H^1_{et}(X \smallsetminus \Sigma) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in S} H^1(k_{\mathfrak{p}}) \times \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma \setminus (S \cup T)} H^1_{/nr}(k_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \text{Б}_S^T(k) \longrightarrow 0\,.$$

Unter Beachtung des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
H^2_{et}(X \smallsetminus S,T) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{et}(X \smallsetminus \Sigma) \arrow[d, hook] \\
\prod\limits_{\mathfrak{p}\in S} H^2(k_\mathfrak{p}) \arrow[r, hook] & \prod\limits_{\mathfrak{p}\in \Sigma} H^2(k_\mathfrak{p}),
\end{tikzcd}$$

erhalten wir

$$Ш^2(k,S,T) = \ker\big(H^2_{et}(X \smallsetminus S,T) \longrightarrow H^2_{et}(X \smallsetminus \Sigma)\big).$$

Ausschneidung liefert uns somit die exakte Folge

$$\text{(II)}\qquad H^1_{et}(X \smallsetminus \Sigma) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^1(k_\mathfrak{p}) \times \prod_{\mathfrak{p}\in \Sigma\setminus(S\cup T)} H^1_{/nr}(k_\mathfrak{p}) \longrightarrow Ш^2(k,S,T) \longrightarrow 0\,,$$

und ein Vergleich von (I) und (II) zeigt die Behauptung des Theorems. □

Korollar 4.3. *Es sei k ein globaler Körper und p eine Primzahl ungleich* $\mathrm{char}(k)$*. Im Zahlkörperfall sei $p \neq 2$ oder k total imaginär. Es seien S und T disjunkte endliche Stellenmengen von k mit $V_S^T(k) = 0$. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$H^2_{et}(X \smallsetminus S,T) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^2(k_\mathfrak{p})$$

injektiv und ein Isomorphismus, falls $\delta = 0$. Im Fall $\delta = 1$ ist für jedes $\mathfrak{p}_0 \in S$ die Abbildung

$$H^2_{et}(X \smallsetminus S,T) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S\setminus\{\mathfrak{p}_0\}} H^2(k_\mathfrak{p})$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Für $\mathfrak{p} \in S$ gilt

$$H^3_\mathfrak{p}(X,T) \cong H^2(k_\mathfrak{p}) \cong \mu_p(k_\mathfrak{p})^\vee.$$

Nach Theorem 4.1 gilt $Ш^2(k,S,T) = 0$. Daher liefert Ausschneidung die exakte Folge

$$0 \to H^2_{et}(X \smallsetminus S,T) \to \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^2(k_\mathfrak{p}) \xrightarrow{\alpha} H^3_{et}(X,T).$$

Die zu α duale Abbildung ist $\mu_p(k) \to \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mu_p(k_\mathfrak{p})$, woraus die Behauptung des Korollars folgt. □

Schließlich kann man $V_S^T(k)$ in folgendem Sinne zum Verschwinden bringen.

Satz 4.4. *Es seien T und $\mathcal{M}$ disjunkte Stellenmengen, wobei T endlich sei und $\mathcal{M}$ die Dirichletdichte $\delta(\mathcal{M}) = 0$ habe. Dann gibt es eine endliche und zu $T \cup \mathcal{M}$ disjunkte Stellenmenge S, bestehend aus Stellen $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$, so dass*

$$V_S^T(k) = 0.$$

Beweis. Es sei Ω die Menge aller Stellen $\mathfrak{p}$ von k mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$. Dann hat die Menge $\Omega(k(\mu_p))$ der Fortsetzungen von Stellen aus Ω nach $k(\mu_p)$ die Dirichletdichte 1. Wegen $k^\times/k^{\times p} \cong H^1(k,\mu_p)$ und nach dem Hasseprinzip [NSW], Theorem 9.1.9 (ii), ist der Homomorphismus

$$k^\times/k^{\times p} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega\setminus(T\cup\mathcal{M})} k_\mathfrak{p}^\times/k_\mathfrak{p}^{\times p}$$

injektiv. Da der $\mathbb{F}_p$-Untervektorraum $V_\varnothing^T(k) \subset k^\times/k^{\times p}$ endlichdimensional ist, finden wir eine endliche Teilmenge $S \subset \Omega \smallsetminus (T \cup \mathcal{M})$, so dass

$$V_S^T(k) = \ker\big(V_\varnothing^T(k) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S} k_\mathfrak{p}^\times/k_\mathfrak{p}^{\times p}\big) = 0.$$

□

5 Lokale Komponenten

Wie zuvor sei k ein globaler Körper und p eine von $\mathrm{char}(k)$ verschiedene Primzahl. Im Zahlkörperfall nehmen wir an, dass $p \neq 2$ oder k total imaginär ist. Es sei T eine endliche, im Funktionenkörperfall nichtleere, Stellenmenge mit ${}_p Cl_T(k) = 0$. Da $Cl_T(k)$ endlich ist, gilt dann auch $Cl_T(k)(p) = 0$ und die exakte Folge

$$0 \longrightarrow E_{k,T} \longrightarrow k^\times \xrightarrow{(v_\mathfrak{q})_\mathfrak{q}} \bigoplus_{\mathfrak{q}\notin T} \mathbb{Z} \longrightarrow Cl_T(k) \longrightarrow 0$$

impliziert die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow E_{k,T}/p \longrightarrow k^\times/k^{\times p} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{q}\notin T} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Definition 5.1. Für eine Stelle $\mathfrak{p} \notin T$ bezeichne $s_\mathfrak{p} \in k^\times/k^{\times p}$ ein Element mit $v_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$ und $v_\mathfrak{q}(s_\mathfrak{p}) \equiv 0 \bmod p$ für alle $\mathfrak{q} \notin T \cup \{\mathfrak{p}\}$. Das Element $s_\mathfrak{p}$ ist wohldefiniert bis auf Multiplikation mit Elementen aus $E_{k,T}/p$.

Wir bezeichnen mit $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})$ die endliche Galoiserweiterung von k, die durch Adjunktion der p-ten Wurzeln aus allen T-Einheiten von k entsteht. Falls $\delta = 0$ (d.h. $\mu_p \not\subset k$), so bedeutet dies, dass auch die p-ten Einheitswurzeln adjungiert werden. Für eine Stelle $\mathfrak{p} \notin T$ ist die Erweiterung $k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_\mathfrak{p}})$ unabhängig von der Auswahl von $s_\mathfrak{p}$.

Lemma 5.2. *Es sei T eine endliche, im Funktionenkörperfall nichtleere, Menge von Stellen mit ${}_p Cl_T(k) = 0$. Desweiteren sei $\mathfrak{q} \notin T \cup S_p$ ein in der Erweiterung $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})|k$ voll zerlegtes Primideal. Dann ist $k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el}|k$ zyklisch von der Ordnung p und $\mathfrak{q}$ verzweigt in dieser Erweiterung. Im Fall $\delta = 1$ gilt überdies*

$$k(\sqrt[p]{E_{k,T}})k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el} = k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_\mathfrak{q}}).$$

Eine Stelle $\mathfrak{p} \notin T \cup \{\mathfrak{q}\}$ der Norm $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$ zerfällt genau dann in $k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el}|k$, wenn $\mathfrak{q}$ in der Erweiterung $k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_\mathfrak{p}})|k(\sqrt[p]{E_{k,T}})$ zerfällt.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $N(\mathfrak{q}) \equiv 1 \bmod p$. Wegen ${}_p Cl_T(k) = 0$ liefert Lemma 3.5 einen Isomorphismus $E_{k,T}/p \xrightarrow{\sim} V_\varnothing^T(k)$. Da $\mathfrak{q}$ vollständig in $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})|k$ zerfällt, ist der Homomorphismus $E_{k,T}/p \to k_\mathfrak{q}^\times/k_\mathfrak{q}^{\times p}$ die Nullabbildung und wir erhalten $V_{\{\mathfrak{q}\}}^T(k) \xrightarrow{\sim} V_\varnothing^T(k)$. Insbesondere gilt

$$\dim_{\mathbb{F}_p} V_{\{\mathfrak{q}\}}^T(k) = \dim_{\mathbb{F}_p} E_{k,T}/p = \#T + r - 1 + \delta,$$

was, nach Satz 3.6, $h^1(X \smallsetminus \{\mathfrak{q}\}, T) = 1$ impliziert. Wegen $Cl_T(k)(p) = 0$ muss $\mathfrak{q}$ in $k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el}$ verzweigen. Es sei nun $\delta = 1$ und $k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el} = k(\sqrt[p]{\alpha})$ mit $\alpha \in k^\times/k^{\times p}$. Nach Übergang zu α^e für ein geeignetes $e \in \mathbb{F}_p^\times$ gilt

$$v_\mathfrak{q}(\alpha) \equiv 1 \bmod p,\ v_\mathfrak{p}(\alpha) \equiv 0 \bmod p \text{ für } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}.$$

Daher liegt $\alpha/s_{\mathfrak{q}}$ in $E_{k,T}/p$, was nach Kummertheorie die Gleichheit $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el} = k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_{\mathfrak{q}}})$ zeigt.

Nun sei $\mathfrak{p} \notin T \cup \{\mathfrak{q}\}$ ein Primideal der Norm $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$. Nach Klassenkörpertheorie zerfällt $\mathfrak{p}$ genau dann in der Erweiterung $k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el}|k$, wenn ein $s \in k^\times/k^{\times p}$ existiert, so dass gilt:

- $v_{\mathfrak{l}}(s) \equiv 0 \bmod p$ für $\mathfrak{l} \notin T \cup \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$,
- $v_{\mathfrak{p}}(s) \equiv 1 \bmod p$,
- $s \in k_{\mathfrak{q}}^{\times p}$.

Existiert ein solches s, so gilt $s/s_{\mathfrak{p}} \in E_{k,T}/p$, also $s_{\mathfrak{p}} \in k_{\mathfrak{q}}^{\times p}$, d.h. $\mathfrak{q}$ zerfällt in $k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_{\mathfrak{p}}})|k(\sqrt[p]{E_{k,T}})$. Zerfällt umgekehrt $\mathfrak{q}$ in dieser Erweiterung, so erfüllt $s = s_{\mathfrak{p}}$ die gewünschte Eigenschaft und $\mathfrak{p}$ zerfällt in $k_{\{\mathfrak{q}\}}^{T,el}|k$. □

Für ein Element $x \in H^2_{et}(X \smallsetminus S, T)$ und $\mathfrak{p} \in S$ bezeichnen wir das Bild von x unter der natürlichen Abbildung $H^2_{et}(X \smallsetminus S, T) \to H^2(k_{\mathfrak{p}})$ mit $x_{\mathfrak{p}}$ und sprechen von der $\mathfrak{p}$-Komponente von x. Ist $S' \subset S$ eine Teilmenge, so fassen wir vermittels der natürlichen Inklusion Elemente aus $H^1_{et}(X \smallsetminus S', T)$ auch als Elemente in $H^1_{et}(X \smallsetminus S, T)$ auf. Für $\mathfrak{p} \in S$ bezeichne $\mathcal{T}_{\mathfrak{p}} \subset G(k_S^{T,el}|k)$ die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$. Wir nennen ein Element $\chi \in H^1_{et}(X \smallsetminus S, T)$ unverzweigt bei $\mathfrak{p}$, wenn $\chi(\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}) = 0$ gilt, und ansonsten verzweigt.

Satz 5.3. *Es sei T eine endliche, im Funktionenkörperfall nichtleere, Menge von Stellen mit ${}_p Cl_T(k) = 0$. Es sei $\mathfrak{q} \notin T \cup S_p$ ein in der Erweiterung $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})|k$ voll zerlegtes Primideal und $\chi_{\mathfrak{q}}$ ein Erzeuger der nach Lemma 5.2 zyklischen Gruppe $H^1_{et}(X \smallsetminus \{\mathfrak{q}\}, T)$. Desweiteren sei S eine zu $T \cup \{\mathfrak{q}\}$ disjunkte, endliche Menge von Stellen $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$. Ist $\chi \in H^1_{et}(X \smallsetminus S, T)$ ein beliebiges Element, so gelten für die lokalen Komponenten von $\chi \cup \chi_{\mathfrak{q}} \in H^2_{et}(X \smallsetminus (S \cup \{\mathfrak{q}\}), T)$ die folgenden Aussagen:*

$$(\chi \cup \chi_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \chi(\mathit{Frob}_{\mathfrak{q}}) = 0, \\ \neq 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für $\mathfrak{p} \in S$ gilt

$$(\chi \cup \chi_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \chi \textit{ unverzweigt bei } \mathfrak{p} \textit{ oder } \mathfrak{q} \textit{ voll zerlegt} \\ & \textit{in } k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_{\mathfrak{p}}})|k(\sqrt[p]{E_{k,T}}) \textit{ ist,} \\ \neq 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für eine Stelle $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$ ist $H^1(k_{\mathfrak{p}})$ zweidimensional, $H^2(k_{\mathfrak{p}})$ eindimensional und die Paarung $H^1(k_{\mathfrak{p}}) \times H^1(k_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\cup} H^2(k_{\mathfrak{p}})$ vollkommen. Desweiteren gilt $\chi_1 \cup \chi_2 = 0$ für $\chi_1, \chi_2 \in H^1_{nr}(k_{\mathfrak{p}})$.

Nun ist $\chi_{\mathfrak{q}}$ verzweigt bei $\mathfrak{q}$ und χ unverzweigt bei $\mathfrak{q}$. Daher ist $(\chi \cup \chi_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}}$ genau dann von Null verschieden, wenn das Bild von χ in $H^1_{nr}(k_{\mathfrak{q}})$ nichttrivial ist, also wenn $\chi(\mathit{Frob}_{\mathfrak{q}}) \neq 0$.

Nun sei $\mathfrak{p} \in S$. Es ist $\chi_{\mathfrak{q}}$ unverzweigt bei $\mathfrak{p}$ und daher $(\chi \cup \chi_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}}$ genau dann von Null verschieden, wenn das Bild von $\chi_{\mathfrak{q}}$ in $H^1_{nr}(k_{\mathfrak{p}})$ ungleich Null und χ bei $\mathfrak{p}$ verzweigt ist. Die erstere Bedingung ist äquivalent zu $\chi_{\mathfrak{q}}(\mathit{Frob}_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, und nach Lemma 5.2 dazu, dass $\mathfrak{q}$ träge in der Erweiterung $k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_{\mathfrak{p}}})|k(\sqrt[p]{E_{k,T}})$ ist. □

6 Eine Hilfserweiterung

Theorem 6.1. *Es seien T und $\mathcal{M}$ disjunkte Stellenmengen des globalen Körpers k, wobei T endlich sei und $\mathcal{M}$ die Dirichletdichte $\delta(\mathcal{M}) = 0$ habe. Es gelte $p \neq 2$ und $p \neq \mathit{char}(k)$. Dann gibt es eine endliche Stellenmenge T_0, sowie eine endliche, nichtleere Stellenmenge S, bestehend aus Stellen $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$, so dass die folgenden Aussagen gelten.*

(i) $S \cap (T \cup T_0 \cup \mathcal{M}) = \varnothing$.
(ii) $(X \smallsetminus S, T \cup T_0)$ *hat die* $K(\pi,1)$*-Eigenschaft für* p.
(iii) *Jedes* $\mathfrak{p} \in S$ *verzweigt in* $k_S^{T\cup T_0}(p)$.
(iv) $V_S^{T\cup T_0}(k) = 0$.
(v) *Das Cup-Produkt* $H^1(G_S^{T\cup T_0}(k)(p)) \otimes H^1(G_S^{T\cup T_0}(k)(p)) \to H^2(G_S^{T\cup T_0}(k)(p))$ *ist surjektiv.*

Im Beweis von Theorem 6.1 werden wir das folgende hinreichende Kriterium für kohomologische Dimension 2 benutzen.

Theorem 6.2 ([S2], Theorem 5.5)**.** *Es sei p eine ungerade Primzahl und G eine endlich präsentierbare Pro-p-Gruppe. Angenommen es gilt $H^2(G) \neq 0$ und es gibt eine direkte Summenzerlegung $H^1(G) \cong U \oplus V$, so dass gilt:*

(i) *das Cup-Produkt* $V \otimes V \xrightarrow{\cup} H^2(G)$ *ist trivial, d.h.* $v_1 \cup v_2 = 0$ *für alle* $v_1, v_2 \in V$,
(ii) *das Cup-Produkt* $U \otimes V \xrightarrow{\cup} H^2(G)$ *ist surjektiv.*

Dann gilt $cd\, G = 2$.

Bemerkung 6.3. 1. Für Pro-p-Gruppen mit einer definierenden Relation war dieses Resultat bereits lange bekannt, siehe [La2].
2. Das Kriterium in Theorem 6.2 liefert mehr, als nur kohomologische Dimension 2: die gegebene Bedingung ist hinreichend für die *Milde* von G. Dies wurde in [S2], §5, aus Labutes Resultaten [La1] abgeleitet. Nach [La1], Theorem 1.2(c), haben milde Pro-p-Gruppen die kohomologische Dimension 2.

Im Verlaufe dieses Abschnitts werden wir Theorem 6.1 beweisen. Wir beginnen mit dem (einfacheren) Fall $\delta = 0$, also k enthält keine primitive p-te Einheitswurzel.

Lemma 6.4. *Es sei $\delta = 0$ und $S = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ eine endliche Menge von Stellen $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$. Wir setzen $s_i = s_{\mathfrak{p}_i}$. Dann sind die Erweiterungen*

$$k(\mu_p, \sqrt[p]{s_1}, \ldots, \sqrt[p]{s_n}),\ k(\sqrt[p]{E_{k,T}}) \text{ und } k_S^{T,el}(\mu_p)$$

linear disjunkt über $k(\mu_p)$.

Beweis. Nach Konstruktion ist der durch $s_1, \ldots, s_n$ in $k^\times / k^{\times p} E_{k,T}$ aufgespannte $\mathbb{F}_p$-Vektorraum n-dimensional. Nach Kummertheorie sind somit die Erweiterungen $k(\mu_p, \sqrt[p]{s_1}, \ldots, \sqrt[p]{s_n})|k(\mu_p)$ und $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})|k(\mu_p)$ linear disjunkt. Da beide im 1-Eigenraum bezüglich des zyklotomischen Charakters $\chi_{\mathrm{cycl}} : G(k(\mu_p)|k) \to \mathbb{F}_p^\times$ liegen, $k_S^{T,el}(\mu_p)|k(\mu_p)$ jedoch im 0-Eigenraum, folgt das Ergebnis. $\square$

Beweis von Theorem 6.1 im Fall $\delta = 0$. Wir wählen T_0 so, dass ${}_p Cl_{T\cup T_0}(k) = 0$ gilt und $T \cup T_0$ nichtleer ist, falls k ein Funktionenkörper ist. Zwecks Vereinfachung der Notation ersetzen wir im folgenden T durch $T \cup T_0$. Nun wählen wir eine endliche und zu $T \cup \mathcal{M}$ disjunkte Stellenmenge S_0, bestehend aus Stellen $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod p$, so dass

$$V^T_{S_0 \setminus \{\mathfrak{p}\}}(k) = 0 \text{ für jedes } \mathfrak{p} \in S_0.$$

Dies erreicht man durch zweimalige Anwendung von Satz 4.4. Wir numerieren die Elemente in S_0, also $S_0 = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$, und setzen $s_i = s_{\mathfrak{p}_i}$. Aus Satz 3.6 folgt, dass die Trägheitsgruppen $\mathcal{T}_i$ der Stellen $\mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, m$, nichttrivial und von der Ordnung p sind. Wir erweitern nun S_0 um weitere m Primideale in der folgenden Weise:

Wir wählen Fortsetzungen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$ von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ nach $k(\mu_p)$ und betrachten für ein Primideal $\mathfrak{Q}$ in $k(\mu_p)$ und $a \in \{1, \ldots, m\}$ die folgende Bedingung (B_a):

- $\mathfrak{Q} \notin T(k(\mu_p)) \cup \mathcal{M}(k(\mu_p))$.
- $Frob_{\mathfrak{Q}} \notin \mathcal{T}_{\mathfrak{P}_a} \subset G(k_{S_0}^{T,el}(\mu_p)|k(\mu_p))$.
- Für alle $b \neq a$ zerfällt $\mathfrak{Q}$ in $k(\mu_p, \sqrt[p]{s_b})|k(\mu_p)$.
- $\mathfrak{Q}$ ist träge in $k(\mu_p, \sqrt[p]{s_a})|k(\mu_p)$.
- $\mathfrak{Q}$ zerfällt vollständig in $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})|k(\mu_p)$.

Da das vollständige Zerfallen von $\mathfrak{Q}$ in $k(\sqrt[p]{E_{k,T}})$ zu den Bedingungen gehört, ist (B_a) unabhängig von der Auswahl der s_i. Nach Lemma 6.4 finden wir mit Hilfe des Tschebotarjowschen Dichtigkeitssatzes ein Primideal $\mathfrak{Q}_1$ in $k(\mu_p)$, das die Bedingung (B_1) erfüllt. Dann setzen wir $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{Q}_1 \cap k$. Nach Lemma 5.2 ist die Erweiterung $k_{\{\mathfrak{q}_1\}}^{T,el}$ zyklisch von der Ordnung p und bei $\mathfrak{q}_1$ verzweigt. Nun wählen wir nacheinander Stellen $\mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_m$ in $k(\mu_p)$ und setzen jeweils $\mathfrak{q}_a = \mathfrak{Q}_a \cap k$, so dass gilt

- $\mathfrak{Q}_a$ erfüllt Bedingung (B_a), und
- $\mathfrak{Q}_a$ ist für $b < a$ zerlegt in $k_{\{\mathfrak{q}_b\}}^{T,el}(\mu_p)|k(\mu_p)$ und in $k(\mu_p, \sqrt[p]{s_{\mathfrak{q}_b}})|k(\mu_p)$.

Dies ist möglich, weil nach der Wahl von $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_{a-1}$ und nach Lemma 6.4 die Erweiterungen

$$k(\mu_p, \sqrt[p]{s_1}, \ldots, \sqrt[p]{s_m}, \sqrt[p]{s_{\mathfrak{q}_1}}, \ldots, \sqrt[p]{s_{\mathfrak{q}_{a-1}}}),\ k(\sqrt[p]{E_{k,T}}) \text{ und } k_{S_0 \cup \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{a-1}\}}^{T,el}(\mu_p)$$

linear disjunkt über $k(\mu_p)$ sind. Wir setzen

$$S = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m\}.$$

Es gilt $h^2(X \smallsetminus S, T) = 2m$ und nach Korollar 4.3 ist die natürliche Abbildung

$$H_{et}^2(X \smallsetminus S, T) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} H^2(k_{\mathfrak{p}_i}) \oplus \prod_{i=1}^{m} H^2(k_{\mathfrak{q}_i})$$

ein Isomorphismus. Es sei η_a ein Erzeuger von $H_{et}^1(X \smallsetminus \{\mathfrak{q}_a\}, T)$. Wir betrachten den durch $\eta_1, \ldots, \eta_m$ in $H_{et}^1(X \smallsetminus S, T)$ aufgespannten m-dimensionalen Vektorraum V. Dann gilt

$$H_{et}^1(X \smallsetminus S, T) \cong H_{et}^1(X \smallsetminus S_0, T) \oplus V.$$

Nach Satz 5.3 gilt für $a, b, i \in \{1, \ldots, m\}$

$$(\eta_a \cup \eta_b)_{\mathfrak{q}_i} = 0 = (\eta_a \cup \eta_b)_{\mathfrak{p}_i},$$

also ist das Cup-Produkt $V \otimes V \to H_{et}^2(X \smallsetminus S, T)$ trivial. Wir behaupten, dass das Cup-Produkt

$$H_{et}^1(X \smallsetminus S_0, T) \otimes V \longrightarrow H_{et}^2(X \smallsetminus S, T)$$

surjektiv ist. Dazu wählen wir Elemente $\chi_a, \psi_a \in H_{et}^1(X \smallsetminus S_0, T)$, $a = 1, \ldots, m$, so dass

$$\chi_a(\mathcal{T}_{\mathfrak{p}_a}) \neq 0,\ \chi_a(Frob_{\mathfrak{q}_a}) = 0,\ \psi_a(Frob_{\mathfrak{p}_a}) \neq 0.$$

Wir behaupten, dass die Elemente $\chi_1 \cup \eta_1, \ldots, \chi_m \cup \eta_m, \psi_1 \cup \eta_1, \ldots, \psi_m \cup \eta_m$ den $2m$-dimensionalen Vektorraum $H_{et}^2(X \smallsetminus S, T)$ erzeugen. Dazu betrachten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix}
(\chi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{p}_1} & \cdots & (\chi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{p}_m} & (\chi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{q}_1} & \cdots & (\chi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{q}_m} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\chi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{p}_1} & \cdots & (\chi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{p}_m} & (\chi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{q}_1} & \cdots & (\chi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{q}_m} \\
(\psi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{p}_1} & \cdots & (\psi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{p}_m} & (\psi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{q}_1} & \cdots & (\psi_1 \cup \eta_1)_{\mathfrak{q}_m} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\psi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{p}_1} & \cdots & (\psi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{p}_m} & (\psi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{q}_1} & \cdots & (\psi_m \cup \eta_m)_{\mathfrak{q}_m}
\end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir ein von Null verschiedenes Element mit $*$ und ein beliebiges mit ?, so hat nach Satz 5.3 und unseren Wahlen diese Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ ? & ? & \cdots & ? & * & 0 & \cdots & 0 \\ ? & ? & \cdots & ? & 0 & * & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ ? & ? & \cdots & ? & 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix},$$

was die Behauptung zeigt. Insbesondere ist das Cup-Produkt

$$H^1_{et}(X \smallsetminus S, T) \otimes H^1_{et}(X \smallsetminus S, T) \to H^2_{et}(X \smallsetminus S, T)$$

surjektiv. Da es über die Inklusion

$$H^2(G_S^T(k)(p)) \hookrightarrow H^2_{et}(X \smallsetminus S, T)$$

faktorisiert, ist diese ein Isomorphismus. Damit erfüllt die Gruppe $G_S^T(k)(p)$ die Voraussetzungen von Theorem 6.2 und wir erhalten $cd\ G_S^T(k)(p) = 2$. Korollar 3.7 impliziert nun, dass $(X \smallsetminus S, T)$ die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft für p hat. Nach der Wahl von S_0 gilt schließlich $V^T_{S \smallsetminus \{\mathfrak{p}\}}(k) = 0$ für jedes $\mathfrak{p} \in S$, woraus folgt, dass jedes $\mathfrak{p} \in S$ in $k_S^{T,el}$ verzweigt, also erst recht in $k_S^T(p)$. $\square$

Im Fall $\delta = 1$ brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 6.5. *Es gelte $\delta = 1$ und T sei eine endliche, nichtleere Stellenmenge mit $V_T^{\varnothing}(k) = 0$ und $S_p \subset T$. Ist k ein Zahlkörper, so nehmen wir zudem k als total imaginär an (automatisch falls $p \neq 2$). Dann gilt ${}_p Cl_T(k) = 0$ und*

$$k_T^{el} = k(\sqrt[p]{E_{k,T}}).$$

Zusätzlich sei $S = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ eine endliche, zu T disjunkte Stellenmenge. Dann haben wir eine Inklusion

$$k_S^{T,el} \subset k_T^{el}(\sqrt[p]{s_1}, \ldots, \sqrt[p]{s_n}),$$

wobei $s_i = s_{\mathfrak{p}_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) *Die Elemente $Frob_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, Frob_{\mathfrak{p}_n}$ erzeugen $G(k_T^{el}|k)$.*

(ii) $V_S^T(k) = 0$.

Für eine Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, n\}$ sind äquivalent:

(a) *Die Elemente $\{Frob_{\mathfrak{p}_i}, i \in I\}$ sind linear unabhängig in $G(k_T^{el}|k)$.*

(b) *Die Erweiterungen k_T^{el}, $k_S^{T,el}$ und $k(\sqrt[p]{s_i}, i \in I)$ sind linear disjunkt über k.*

Bemerkung 6.6. Sind $Frob_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, Frob_{\mathfrak{p}_n}$ linear unabhängig in $G(k_T^{el}|k)$, so scheint die Inklusion $k_S^{T,el} \subset k_T^{el}(\sqrt[p]{s_1}, \ldots, \sqrt[p]{s_n})$ im Widerspruch zu Aussage (b) für $I = \{1, \ldots, n\}$ zu stehen. Aber in diesem Fall gilt $k_S^{T,el} = k$.

Beweis von Lemma 6.5. Nach Theorem 4.1 gilt $Ш^2(k, T) = 0$, woraus mit Poitou-Tate-Dualität ([NSW], Theorem 8.6.7) $Ш^1(k, T, \mu_p) = 0$ folgt. Wegen $\delta = 1$ und nach [NSW], Lemma 8.6.3 erhalten wir $\mathrm{Hom}(Cl_T(k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = Ш^1(k, T) = 0$. Da

$Cl_T(k)$ endlich ist, folgt hieraus ${}_pCl_T(k) = 0$. Nach dem Dirichletschen Einheitensatz gilt $\dim_{\mathbb{F}_p} E_{k,T}/p = \#T + r$. Nach Theorem 3.6 erhalten wir

$$h^1(X \smallsetminus T) = \#T + \sum_{\mathfrak{p} \in S_p} [k_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p] - r = \#T + r,$$

was $k(\sqrt[p]{E_{k,T}}) = k_T^{el}$ impliziert. Nach Lemma 3.5 haben wir einen Isomorphismus

$$E_{k,T}/p \xrightarrow{\sim} V_\varnothing^T(k).$$

Sei nun S eine endliche, zu T disjunkte Stellenmenge und $k(\sqrt[p]{\alpha})$, $\alpha \in k^\times/k^{\times p}$, eine zyklische Teilerweiterung von $k_S^{T,el}|k$. Dann gilt $\alpha \in V_T^S(k)$ und wir finden Exponenten $a_1, \ldots, a_n$, so dass $\alpha \cdot \bar{s}_1^{a_1} \cdots \bar{s}_n^{a_n} \in V_\varnothing^T(k) = E_{k,T}/p$. Daher gilt $k(\sqrt[p]{\alpha}) \subset k(\sqrt[p]{E_{k,T}}, \sqrt[p]{s_1}, \ldots, \sqrt[p]{s_n})$, und folglich

$$k_S^{T,el} \subset k_T^{el}(\sqrt[p]{s_1}, \ldots, \sqrt[p]{s_n}).$$

Als nächstes beweisen wir die Äquivalenz der Bedingungen (i) und (ii). Es gilt $V_S^T(k) = 0$ genau dann, wenn die natürliche Abbildung $E_{k,T}/p \to \prod_{i=1}^n k_{\mathfrak{p}_i}^\times / k_{\mathfrak{p}_i}^{\times p}$ injektiv ist. Dies ist äquivalent dazu, dass für kein von Eins verschiedenes Element $e \in E_{k,T}/p$ die zyklische Erweiterung $k(\sqrt[p]{e})|k$ voll zerlegt bei S ist. Daher ist (ii) äquivalent dazu, dass die Elemente $Frob_{\mathfrak{p}_1}, \ldots, Frob_{\mathfrak{p}_n}$ die Galoisgruppe $G(k(\sqrt[p]{E_{k,T}})|k) = G(k_T^{el}|k)$ erzeugen. Dies zeigt die Äquivalenz zwischen (i) und (ii).

Wir bezeichnen mit $I_{k,T}$ die Gruppe der T-Idele und mit $C_T(k)$ die Gruppe T-Idelklassen von k. Wegen $Cl_T(k)(p) = 0$ haben wir nach [NSW], Proposition 8.3.5, die exakte Folge

$$0 \longrightarrow E_{k,T} \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow I_{k,T} \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow C_T(k) \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0\,.$$

Nun betrachten wir eine Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, n\}$ und es sei $H_I \subset k^\times/k^{\times p}$ die von den s_i, $i \in I$, erzeugte Untergruppe. Wegen $S_p \subset T$ gilt

$$k_S^{T,el} = k\left(\sqrt[p]{V_T^S(k)}\right).$$

Nach Kummertheorie sind die Erweiterungen k_T^{el}, $k_S^{T,el}$ und $k(\sqrt[p]{s_i}, i \in I)$ genau dann linear disjunkt über k, wenn der Homomorphismus

$$E_{k,T}/p \times V_T^S(k) \times H_I \longrightarrow k^\times/k^{\times p}$$

injektiv ist. Wegen $H_I \cap E_{k,T}/p = 1$ ist dies äquivalent zu

$$(H_I \cdot E_{k,T}/p) \cap V_T^S(k) = 1,$$

und damit zur Injektivität des Homomorphismus

$$H_I \cdot E_{k,T}/p \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in T} k_\mathfrak{p}^\times / k_\mathfrak{p}^{\times p} = I_{k,T}/p,$$

also zur Injektivität der Komposition

$$H_I \longrightarrow (I_{k,T}/p)/\mathrm{im}(E_{k,T}/p) \xrightarrow{\sim} C_T(k)/p \xrightarrow[rec]{\sim} G(k_T^{el}|k).$$

Nach Klassenkörpertheorie bildet sich s_i auf $Frob_{\mathfrak{p}_i}^{-1} \in G(k_T^{el}|k)$ ab, weshalb die Injektivität dieser Abbildung äquivalent zu Aussage (a) ist. $\square$

Beweis von Theorem 6.1 im Fall $\delta = 1$. Wir wählen eine endliche Stellenmenge T_0 so groß, dass $V^{\varnothing}_{T\cup T_0}(k) = 0$ und $S_p \subset T \cup T_0$ gilt. Zwecks Vereinfachung der Notation ersetzen wir T durch $T \cup T_0$. Nun wählen wir zu jedem von Null verschiedenen Element $g \in G(k^{el}_T|k)$ ein nicht in $T \cup \mathcal{M}$ liegendes Primideal $\mathfrak{p}_g$ mit $g = Frob_{\mathfrak{p}_g}$. Die Gesamtheit dieser Primideale nennen wir S_0 und wir wählen eine Numerierung

$$S_0 = \{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_m\}.$$

Wie vorher setzen wir $s_i = s_{\mathfrak{p}_i}$. Nach Lemma 6.5 gilt $V^T_{S_0}(k) = 0$, $k^{el}_T = k(\sqrt[p]{E_{k,T}})$ und $k^{T,el}_{S_0} \subset k^{el}_T(\sqrt[p]{s_0}, \ldots, \sqrt[p]{s_m})$. Nach Satz 3.6 erhalten wir $h^2(X \smallsetminus S_0, T) = m$ und $h^1(X \smallsetminus T) = \#T + r := n$.

Nun sei a, $1 \le a \le m$, ein Index. Wir wählen eine Teilmenge $I_a \subset \{1, \ldots, m\}$ mit $a \notin I_a$ der Kardinalität $n-1$, so dass sowohl $(Frob_{\mathfrak{p}_0}, \{Frob_{\mathfrak{p}_i}\}_{i\in I_a})$ als auch $(Frob_{\mathfrak{p}_a}, \{Frob_{\mathfrak{p}_i}\}_{i\in I_a})$ eine Basis von $G(k^{el}_T|k)$ ist. Dies ist möglich: sind $Frob_{\mathfrak{p}_0}$ und $Frob_{\mathfrak{p}_a}$ linear abhängig in $G(k^{el}_T|k)$, so ergänzen wir $Frob_{\mathfrak{p}_0}$ zu einer Basis. Sind die beiden Elemente linear unabhängig, so wählen wir a' mit $Frob_{\mathfrak{p}_{a'}} = Frob_{\mathfrak{p}_0} + Frob_{\mathfrak{p}_a}$ und ergänzen $(Frob_{\mathfrak{p}_0}, Frob_{\mathfrak{p}_{a'}})$ zu einer Basis.

Nach Lemma 6.5 sind die Erweiterungen $k^{el}_T|k$ (Grad p^n), $k^{T,el}_{S_0}$ (Grad p^{m+1-n}) und $k(\sqrt[p]{s_a}, \sqrt[p]{s_i}, i \in I_a)$ (Grad p^n) linear disjunkt über k. Aus Gradgründen ist ihr Kompositum gleich $k^{el}_T(\sqrt[p]{s_0}, \ldots, \sqrt[p]{s_m})$ (Grad p^{m+1+n}).

Nach Wahl von I_a gilt die gleiche Aussage auch, wenn wir $k(\sqrt[p]{s_a}, \sqrt[p]{s_i}, i \in I_a)$ durch $k(\sqrt[p]{s_0}, \sqrt[p]{s_i}, i \in I_a)$ ersetzen.

Für $i \in \{0, \ldots, m\}$ sei $\mathcal{T}_i \subset G(k^{T,el}_{S_0}|k)$ die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}_i$. Da die Elemente $Frob_{\mathfrak{p}_j}$, $j \ne i$, immer noch $G(k^{el}_T|k)$ erzeugen, gilt $V^T_{S_0\setminus\{\mathfrak{p}_i\}}(k) = 0$ nach Lemma 6.5. Daher verzweigt $\mathfrak{p}_i$ in $k^{T,el}_{S_0}|k$ und $\mathcal{T}_i$ ist zyklisch von der Ordnung p. Nach Konstruktion erzeugen die $m - n + 1$ vielen zyklischen Untergruppen der Ordnung p

$$\mathcal{T}_i,\ i \notin \{a\} \cup I_a\,,$$

den $(m-n+1)$-dimensionalen Vektorraum $G(k^{T,el}_{S_0}|k)$ und die gleiche Aussage ist auch für die Untergruppen

$$\mathcal{T}_i,\ i \notin \{0\} \cup I_a\,,$$

richtig. Daher erzeugen die Untergruppen $\mathcal{T}_i$, $i \notin \{0, a\} \cup I_a$ einen $(m-n)$-dimensionalen Unterraum, die Erweiterung $k^{T,el}_{\{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_a\}}$ ist zyklisch von der Ordnung p und bei $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_a$ verzweigt. Wir betrachten nun für $a = 1, \ldots, m$ und ein Primideal $\mathfrak{q}$ die folgende Bedingung (C_a):

- $\mathfrak{q} \notin T \cup \mathcal{M}$.
- $\mathfrak{q}$ zerfällt vollständig in $k^{el}_T|k$.
- Für jedes $i \in I_a$ zerfällt $\mathfrak{q}$ in $k(\sqrt[p]{s_i})|k$.
- $\mathfrak{q}$ ist träge in der Erweiterung $k(\sqrt[p]{s_a})|k$.
- Das Bild von $Frob_{\mathfrak{q}}$ in $G(k^{T,el}_{S_0}|k)$ liegt in $G(k^{T,el}_{S_0}|k^{T,el}_{\{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_a\}}) \smallsetminus \{0\}$.

Mit Hilfe des Tschebotarjowschen Dichtigkeitssatzes für die elementar-abelsche Erweiterung $k^{el}_T(\sqrt[p]{s_0}, \ldots, \sqrt[p]{s_m})|k$ finden wir ein Primideal $\mathfrak{q}_1$ in k, das Bedingung (C_1) erfüllt. Nach Lemma 5.2 ist die Erweiterung $k^{T,el}_{\{\mathfrak{q}_1\}}$ zyklisch von der Ordnung p und bei $\mathfrak{q}_1$ verzweigt. Nun wählen wir nacheinander Stellen $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_m$ in k, so dass gilt:

- $\mathfrak{q}_a$ erfüllt Bedingung (C_a), und
- $\mathfrak{q}_a$ ist für $b < a$ zerlegt in $k^{T,el}_{\{\mathfrak{q}_b\}}|k$.

Insbesondere sind die $\mathfrak{q}_i$ paarweise verschieden und es gilt $N(\mathfrak{q}_i) \equiv 1 \bmod p$. Wir behaupten, dass

$$S = \{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m\}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. Es gilt $h^2(X \smallsetminus S, T) = 2m$ und nach Korollar 4.3 ist die natürliche Abbildung

$$H^2_{et}(X \smallsetminus S, T) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} H^2(k_{\mathfrak{p}_i}) \oplus \prod_{i=1}^{m} H^2(k_{\mathfrak{q}_i})$$

ein Isomorphismus.
Es sei η_a ein Erzeuger von $H^1_{et}(X \smallsetminus \{\mathfrak{q}_a\}, T)$. Wir betrachten den durch $\eta_1, \ldots, \eta_m$ in $H^1_{et}(X \smallsetminus S, T)$ aufgespannten m-dimensionalen Vektorraum V. Dann gilt

$$H^1_{et}(X \smallsetminus S, T) \cong H^1_{et}(X \smallsetminus S_0, T) \oplus V.$$

Nach Lemma 5.2 gilt

$$k_T^{el} k_{\{\mathfrak{q}_a\}}^{T,el} = k_T^{el}(\sqrt[p]{s_{\mathfrak{q}_a}}).$$

Satz 5.3 impliziert daher für $a, b, i \in \{1, \ldots, m\}$ das Verschwinden

$$(\eta_a \cup \eta_b)_{\mathfrak{q}_i} = 0 = (\eta_a \cup \eta_b)_{\mathfrak{p}_i}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass das Cup-Produkt

$$H^1_{et}(X \smallsetminus S_0, T) \otimes V \longrightarrow H^2_{et}(X \smallsetminus S, T)$$

surjektiv ist. Dazu wählen wir für jedes $a \in \{1, \ldots, m\}$ einen Erzeuger χ_a von $H^1_{et}(X \smallsetminus \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_a\}, T)$. Nach Konstruktion gilt $\chi_a(\mathcal{T}_a) \neq 0$, $\chi_a(\mathcal{T}_i) = 0$ für $i \notin \{0, a\} \cup I_a$ und $\chi_a(Frob_{\mathfrak{q}_a}) = 0$. Desweiteren wählen wir $\psi_a \in H^1_{et}(X \smallsetminus S, T)$ mit $\psi_a(Frob_{\mathfrak{q}_a}) \neq 0$.

Wir behaupten, dass die Elemente $\chi_1 \cup \eta_1, \ldots, \chi_m \cup \eta_m, \psi_1 \cup \eta_1, \ldots, \psi_m \cup \eta_m$ den $2m$-dimensionalen Vektorraum $H^2_{et}(X \smallsetminus S, T)$ erzeugen. Dies sieht man in genau der gleichen Weise wie im Fall $\delta = 0$ und auch der Rest des Beweises ist von diesem Punkt an wörtlich der gleiche. $\square$

7 Beweis von Theorem 1.1

In diesem Abschnitt beweisen wir Theorem 1.1. Wir führen die folgende Bezeichnung ein: es sei $K|k$ eine (typischerweise unendliche) separable algebraische Erweiterung und S eine endliche Stellenmenge von k. Dann schreiben wir (die Koeffizienten $\mathbb{F}_p$ werden wie vorher ausgelassen)

$$\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S(K)}{}' H^i(K_{\mathfrak{p}}) \stackrel{df}{=} \varinjlim_{k' \subset K} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S(k')} H^i(k'_{\mathfrak{p}}),$$

wobei sich der Limes auf der rechten Seite über alle endlichen Teilerweiterungen $k'|k$ von $K|k$ erstreckt. Ist $K|k$ Galoissch mit Gruppe $G(K|k)$, so ist die verallgemeinerte Summe $\bigoplus'_{\mathfrak{p} \in S(K)} H^i(K_{\mathfrak{p}})$ gleich dem maximalen diskreten $G(K|k)$-Untermodul des Produkts $\prod_{\mathfrak{p} \in S(K)} H^i(K_{\mathfrak{p}})$.

Der nächste Satz führt Theorem 1.1 auf Theorem 6.1 zurück.

Satz 7.1. *Es seien S, T, S_0 und T_0 paarweise disjunkte endliche Stellenmengen des globalen Körpers k. Angenommen $(X \smallsetminus S_0, S \cup T \cup T_0)$ hat die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft für p. Dann haben auch $(X \smallsetminus S_0, S \cup T)$, $(X \smallsetminus S_0, T)$ und $(X \smallsetminus (S \cup S_0), T)$ die*

$K(\pi,1)$-Eigenschaft für p. Es realisiert $k_{S\cup S_0}^T(p)$ die maximale p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}(p)$ für alle $\mathfrak{p}\in S$ und der natürliche Homomorphismus

$$\mathop{\ast}_{\mathfrak{p}\in S(k_{S_0}^{S\cup T}(p))} G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p}) \longrightarrow G\big(k_{S\cup S_0}^T(p)|k_{S_0}^{S\cup T}(p)\big).$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Zwecks Vereinfachung der Bezeichnungen schreiben wir k_S^T für $k_S^T(p)$. Wir berechnen zunächst die Kohomologie von $(X\smallsetminus S_0, S\cup T)_{k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}}$. Da die Kurve $(X\smallsetminus S_0, S\cup T\cup T_0)$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p hat, folgt aus Lemma 2.2

$$H_{et}^i\big((X\smallsetminus S_0, S\cup T\cup T_0)_{k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}}\big)=0,\quad i\geq 1.$$

Korollar 3.4 zeigt daher $H_{et}^i((X\smallsetminus S_0, S\cup T)_{k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}})=0$ für $i\geq 2$ und einen Isomorphismus

$$H_{et}^1\big((X\smallsetminus S_0, S\cup T)_{k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}}\big)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\mathfrak{p}\in T_0(k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0})}{}' H_{nr}^1(k_\mathfrak{p}).$$

Insbesondere realisiert $k_{S_0}^{S\cup T}$ die maximale elementar-abelsche unverzweigte p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}^{nr,el}$ von $k_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}\in T_0$. Die Hochschild-Serre-Spektralfolge zeigt die Inklusion

$$H^2\big(G(k_{S_0}^{S\cup T}|k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0})\big)\hookrightarrow H_{et}^2\big((X\smallsetminus S_0, S\cup T)_{k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}}\big)=0,$$

weshalb die Pro-p-Gruppe $G(k_{S_0}^{S\cup T}|k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0})$ frei ist. Nach Lemma 3.7 folgt, dass $(X\smallsetminus S_0, S\cup T)_{k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}}$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p hat. Daher erhalten wir

$$H_{et}^i\big((X\smallsetminus S_0, S\cup T)_{k_{S_0}^{S\cup T}}\big)=0,\quad i\geq 1,$$

was nach Lemma 2.2 die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für $(X\smallsetminus S_0, S\cup T)$ zeigt. Die Zerlegungsgruppen $Z_\mathfrak{p}(k_{S_0}^{S\cup T}|k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0})$ der (unverzweigten) Stellen $\mathfrak{p}\in T_0$ sind nichttrivial und torsionsfrei, weshalb der Körper $k_{S_0}^{S\cup T}$ die maximale unverzweigte p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}^{nr}(p)$ von $k_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}\in T_0$ realisiert.

Die gleichen Argumente zeigen nun auch, dass $(X\smallsetminus S_0, T)$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p hat und dass $k_{S_0}^T$ die maximale unverzweigte p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}^{nr}(p)$ von $k_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}\in S$ realisiert. Mit Hilfe der Ausschneidungsfolge erhalten wir Isomorphismen

$$H_{et}^i\big((X\smallsetminus(S\cup S_0), T)_{k_{S_0}^T}\big)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(k_{S_0}^T)}{}' H_{/nr}^i(k_\mathfrak{p}),\quad i\geq 1.$$

Nun realisiert $k_{S_0}^T$ die maximalen unverzweigten p-Erweiterungen $k_\mathfrak{p}^{nr}(p)$ der Stellen $\mathfrak{p}\in S$, weshalb diese Kohomomologiegruppen für $i\geq 2$ verschwinden, und $k_{S\cup S_0}^T$ realisiert die maximale elementar-abelsche p-Erweiterung von $k_\mathfrak{p}^{nr}(p)$ für alle Stellen $\mathfrak{p}\in S$. Analog wie oben erhalten wir, dass $(X\smallsetminus(S\cup S_0), T)$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p hat und dass die Pro-p-Gruppe $G(k_{S\cup S_0}^T|k_{S_0}^T)$ frei ist. Die natürlichen Homomorphismen

$$G\big(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p}^{nr}(p)\big)\longrightarrow Z_\mathfrak{p}(k_{S\cup S_0}^T|k_{S_0}^T),\quad \mathfrak{p}\in S(k_{S_0}^T),$$

von den vollen lokalen Gruppen auf die Zerlegungsgruppen sind daher Homomorphismen zwischen freien Pro-p-Gruppen, die Isomorphismen auf $H^1(-,\mathbb{F}_p)$ induzieren. Folglich sind sie Isomorphismen (siehe [NSW], 1.6.15). Wir schließen, dass

$k_{S\cup S_0}^T$ für jedes $\mathfrak{p}\in S$ die maximale p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}(p)$ realisiert. Nun betrachten wir eine weitere Ausschneidungsfolge, um Isomorphismen

$$H^i_{et}\big((X\smallsetminus(S\cup S_0),T)_{k_{S_0}^{S\cup T}}\big)\xrightarrow{\ \sim\ }\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(k_{S_0}^{S\cup T})}{}' H^i(k_\mathfrak{p})$$

zu erhalten. Da $(X\smallsetminus(S\cup S_0),T)$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p hat, stimmt die Kohomologie der Gruppe $G(k_{S\cup S_0}^T|k_{S_0}^{S\cup T})$ mit der étalen Kohomologie der Pro-Kurve $(X\smallsetminus(S\cup S_0),T)_{k_{S_0}^{S\cup T}}$ überein. Unter Ausnutzung der Berechnung der Kohomologie eines freien Produktes ([NSW], Theorem 4.3.14) schließen wir, dass

$$\phi:\mathop{\ast}_{\mathfrak{p}\in S(k_{S_0}^{S\cup T})} G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p})\longrightarrow G(k_{S\cup S_0}^T|k_{S_0}^{S\cup T})$$

ein Homomorphismus zwischen Pro-p-Gruppen ist, der Isomorphismen auf $H^i(-,\mathbb{F}_p)$ für alle i induziert. Nach [NSW], Proposition 1.6.15, ist ϕ ein Isomorphismus. $\square$

Nun folgern wir Theorem 1.1. Es seien S, T und $\mathcal{M}$ paarweise disjunkte Stellenmengen, wobei S und T endlich seien und $\mathcal{M}$ die Dirichletdichte $\delta(\mathcal{M})=0$ habe.
Wir wählen uns zunächst Stellenmengen S_0, T_0 zu $S\cup T$ und $\mathcal{M}$ wie in Theorem 6.1, d.h.

- S_0 ist eine nichtleere Menge von Stellen $\mathfrak{p}$ der Norm $N(\mathfrak{p})\equiv 1 \bmod p$,
- $S_0\cap(S\cup T\cup T_0\cup\mathcal{M})=\varnothing$,
- $(X\smallsetminus S_0, S\cup T\cup T_0)$ hat die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p,
- jedes $\mathfrak{p}\in S_0$ verzweigt in $k_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}(p)$,
- $V_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}(k)=0$,
- das Cup-Produkt

  $$H^1\big(G_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}(k)(p)\big)\otimes H^1\big(G_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}(k)(p)\big)\longrightarrow H^2\big(G_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}(k)(p)\big)$$

  ist surjektiv.

Dann liefert uns Satz 7.1 die folgenden Aussagen aus Theorem 1.1: wir erhalten $cd\,G_{S\cup S_0}^T(p)\le 2$, Aussage (ii) aber zunächst nur für Stellen aus S, sowie die Aussagen (iii) und (iv).

Wir überzeugen uns nun, dass $k_{S\cup S_0}^T(p)$ für alle Stellen $\mathfrak{p}\in S_0$ die maximale p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}(p)$ von $k_\mathfrak{p}$ realisiert. Es sei $\mathfrak{p}\in S_0$. Dann liegt $\mathfrak{p}$ nicht über p und der lokale Körper $k_\mathfrak{p}$ enthält eine primitive p-te Einheitswurzel. Die Zerlegungsgruppe $Z_\mathfrak{p}(k_{S\cup S_0}^T(p)|k)$ hat als Untergruppe von $G(k_{S\cup S_0}^T(p)|k)$ kohomologische Dimension kleiner gleich 2. Geht man in [NSW], Theorem 7.5.2, zur maximalen Pro-p-Faktorgruppe über, so sieht man, dass die volle lokale Gruppe $G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p})$ als Pro-p-Gruppe durch zwei Erzeuger σ,τ mit der einen Relation $\sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^q$ dargestellt werden kann. Das Element τ ist ein Erzeuger der Trägheitsgruppe, σ ist eine Hebung des Frobeniusautomorphismus und $q=N(\mathfrak{p})$. Daher hat $G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p})$ genau drei Faktorgruppen von kohomologischer Dimension kleiner gleich 2: sich selbst, die triviale Gruppe und die Galoisgruppe der maximal unverzweigten p-Erweiterung von $k_\mathfrak{p}$. Da nun $\mathfrak{p}$ in der Erweiterung $k_{S\cup S_0}^T(p)$ verzweigt, ist die Zerlegungsgruppe voll, d.h. $k_{S\cup S_0}^T(p)$ realisiert die maximale p-Erweiterung $k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p}$. Schließlich ist S_0 nicht leer und für $\mathfrak{p}\in S_0$ hat die Zerlegungsgruppe $Z_\mathfrak{p}(k_{S\cup S_0}^T(p)|k)$ kohomologische Dimension 2, weshalb dies auch für $G(k_{S\cup S_0}^T(p)|k)$ gilt. Mit $V_{S_0}^{S\cup T\cup T_0}(k)$ verschwinden auch die Gruppen $V_{S_0}^{S\cup T}(k)$ und $V_{S\cup S_0}^T(k)$. Daher sind die Folgen

$$0\to H^2_{et}(X\smallsetminus S_0, S\cup T)\to H^2_{et}(X\smallsetminus(S\cup S_0),T)\to\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S}H^2_{et}(k_\mathfrak{p})\to 0,$$

$$0 \to H^1_{et}(X \setminus S_0, S \cup T) \to H^1_{et}(X \setminus (S \cup S_0), T) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^1_{et}(k_\mathfrak{p}) \to 0$$

exakt. Desweiteren ist das Cup-Produkt

$$H^1_{et}(X \setminus S_0, S \cup T) \otimes H^1_{et}(X \setminus S_0, S \cup T) \longrightarrow H^2_{et}(X \setminus S_0, S \cup T)$$

surjektiv. Dies folgt aus der Wahl von S_0 und da der Homomorphismus

$$H^2_{et}(X \setminus S_0, S \cup T \cup T_0) \longrightarrow H^2_{et}(X \setminus S_0, S \cup T).$$

surjektiv ist. Schließlich sind die lokalen Cup-Produkte $H^1_{et}(k_\mathfrak{p}) \otimes H^1_{et}(k_\mathfrak{p}) \to H^2_{et}(k_\mathfrak{p})$ stets surjektiv und die Inflationshomomorphismen $H^i(G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p})) \to H^i(k_\mathfrak{p})$ Isomorphismen für alle i (siehe [NSW], 7.5.8). Da $k^T_{S \cup S_0}(p)$ bei den Stellen in S die maximale lokale p-Erweiterung realisiert, erhält man hieraus die Surjektivität des Cup-Produkts

$$H^1_{et}(X \setminus (S \cup S_0), T) \otimes H^1_{et}(X \setminus (S \cup S_0), T) \longrightarrow H^2_{et}(X \setminus (S \cup S_0), T)$$

Dies beendet den Beweis von Theorem 1.1.

8 Erweiterung der Stellenmenge

Satz 8.1. *Es seien T und S' disjunkte endliche Stellenmengen des globalen Körpers k, $S \subset S'$ eine Teilmenge und $p \neq char(k)$ eine Primzahl. Im Zahlkörperfall sei $p \neq 2$ oder k total imaginär. Die markierte arithmetische Kurve $(X \setminus S, T)$ habe die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft für p. Zerfällt keine Stelle $\mathfrak{p} \in S' \setminus S$ vollständig in der Erweiterung $k^T_S(p)|k$, so gilt folgendes:*

(i) *Auch $(X \setminus S', T)$ hat die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft für p.*

(ii) *$k^T_{S'}(p)_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(p)$ für alle $\mathfrak{p} \in S' \setminus S$.*

Desweiteren gilt die arithmetische Form des Riemannschen Existenzsatzes, d.h. für $K = k^T_S(p)$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\mathop{\ast}_{\mathfrak{p} \in S' \setminus S(K)} G(K_\mathfrak{p}(p)|K_\mathfrak{p}) \longrightarrow G(k^T_{S'}(p)|K)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist $G(k^T_{S'}(p)|k^T_S(p))$ eine freie Pro-p-Gruppe.

Bemerkung 8.2. Ist $k^T_S(p)|k$ unendlich, so hat die Menge der voll zerfallenden Stellen die Dirichletdichte Null. Diese Aussage kann noch im Stil von [Ih] verschärft werden, siehe [TV], Proposition 3.1. Es stellt sich die Frage, ob diese Menge endlich oder sogar gleich T ist. Dies ist unmittelbar klar im Fall $S \supset S_p$, $T = \varnothing$, weil dann die zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung von k in $k^T_S(p)$ enthalten ist.

Beweis von Satz 8.1. Die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft impliziert

$$H^i(G^T_S(k)(p), \mathbb{F}_p) \cong H^i_{et}(X \setminus S, T, \mathbb{F}_p) = 0 \text{ für } i \geq 4,$$

insbesondere gilt $cd\ G^T_S(k)(p) \leq 3$. Sei $\mathfrak{p} \in S' \setminus S$ und $K = k^T_S(p)$. Nach Annahme zerlegt sich $\mathfrak{p}$ nicht vollständig in $K|k$. Wegen $cd\ G^T_S(k)(p) < \infty$ ist die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}$ in $K|k$ eine nichttriviale und torsionsfreie Faktorgruppe von $\mathbb{Z}_p \cong G(k^{nr}_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p})$. Daher gilt

$$K_\mathfrak{p} = k^{nr}_\mathfrak{p}(p)$$

für jedes $\mathfrak{p} \in S' \setminus S$. Wir betrachten die Ausschneidungsfolge für $(X \setminus S, T)_K$ und $(X \setminus S', T)_K$. Da $(X \setminus S, T)$ die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft für p hat, erhalten wir

$H^i_{et}((X \smallsetminus S,T)_K,\mathbb{F}_p)=0$ für $i\geq 1$. Unter Auslassung der Koeffizienten $\mathbb{F}_p$ erhalten wir Isomorphismen

$$H^i_{et}\big((X\smallsetminus S',T)_K\big)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S'\smallsetminus S(K)}{}' H^{i+1}_{\mathfrak{p}}\big((X\smallsetminus S,T)_K\big)$$

für $i\geq 1$. Hieraus folgt

$$H^i_{et}\big((X\smallsetminus S',T)_K\big)=0$$

für $i\geq 2$. Nun ist $(X\smallsetminus S',T)_{k^T_{S'}(p)}$ die universelle Pro-p-Überlagerung der markierten Kurve $(X\smallsetminus S',T)_K$. Daher liefert die Hochschild-Serre-Spektralfolge

$$E_2^{ij}=H^i\big(G(k^T_{S'}(p)|K),H^j_{et}((X\smallsetminus S',T)_{k^T_{S'}(p)})\big)\Rightarrow H^{i+j}_{et}((X\smallsetminus S',T)_K)$$

eine Inklusion

$$H^2\big(G(k^T_{S'}(p)|K)\big)\hookrightarrow H^2_{et}\big((X\smallsetminus S',T)_K\big)=0.$$

Folglich ist $G(k^T_{S'}(p)|K)$ eine freie Pro-p-Gruppe und wir haben einen Isomorphismus

$$H^1(G(k^T_{S'}(p)|K))\xrightarrow{\sim}H^1_{et}\big((X\smallsetminus S',T)_K\big)\cong\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S'\smallsetminus S(K)}{}' H^1(K_{\mathfrak{p}}).$$

Wir betrachten nun den natürlichen Homomorphismus

$$\phi:\mathop{\ast}_{\mathfrak{p}\in S'\smallsetminus S(K)} G(K_{\mathfrak{p}}(p)|K_{\mathfrak{p}})\longrightarrow G(k^T_{S'}(p)|K).$$

Wegen $K_{\mathfrak{p}}=k^{nr}_{\mathfrak{p}}(p)$ für $\mathfrak{p}\in S'\smallsetminus S$ sind die Faktoren im freien Produkt auf der linken Seite freie Pro-p-Gruppen. Nach der Berechnung der Kohomologie eines freien Produktes ([NSW], 4.3.10 und 4.1.4) ist ϕ ein Homomorphismus zwischen freien Pro-p-Gruppen, der einen Isomorphismus auf $H^1(-,\mathbb{F}_p)$ induziert. Daher ist ϕ ein Isomorphismus (siehe [NSW], 1.6.15). Insbesondere gilt $k^T_{S'}(p)_{\mathfrak{p}}=k_{\mathfrak{p}}(p)$ für jedes $\mathfrak{p}\in S'\smallsetminus S$. Benutzt man nun die Freiheit von $G(k^T_{S'}(p)|K)$, so liefert die Hochschild-Serre-Spektralfolge einen Isomorphismus

$$0=H^2_{et}((X\smallsetminus S',T)_K)\xrightarrow{\sim}H^2_{et}\big((X\smallsetminus S',T)_{k_{S'}(p)}\big)^{G(k^T_{S'}(p)|K)}.$$

Da $G(k_{S'}(p)|k_S(p))$ eine Pro-p-Gruppe ist, folgt $H^2_{et}\big((X\smallsetminus S',T)_{k_{S'}(p)}\big)=0$. Nach Lemma 2.2 hat somit $(X\smallsetminus S',T)$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p. □

9 Dualität für die Fundamentalgruppe

Zunächst untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der $K(\pi,1)$-Eigenschaft und den universellen Normen globaler Einheiten.

Wir beginnen damit, redundante Stellen aus S zu entfernen: Ist $\mathfrak{p}\nmid p$ eine Stelle mit $\zeta_p\notin k_{\mathfrak{p}}$, dann ist jede p-Erweiterung des lokalen Körpers $k_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt (siehe [NSW], 7.5.9). Daher können Stellen $\mathfrak{p}\notin S_p$ mit $N(\mathfrak{p})\not\equiv 1 \bmod p$ in einer p-Erweiterung nicht verzweigen. Durch Entfernung aller dieser redundanten Stellen aus S erhalten wir eine Teilmenge $S_{\min}\subset S$ mit $G^T_S(p)=G^T_{S_{\min}}(p)$. Im Fall $\delta=1$ gilt $S_{\min}=S$, d.h. es gibt keine redundanten Stellen.

Lemma 9.1. *Es hat $(X\smallsetminus S,T)$ genau dann die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p, wenn dies für $(X\smallsetminus S_{\min},T)$ der Fall ist.*

Beweis. Es gilt $k^T_S(p)=k^T_{S_{\min}}(p)$. Bezeichnen wir diesen Körper mit K, so gilt nach Satz 3.1

$$H^i_{\mathfrak{p}}\big((X,T)_K,\mathbb{F}_p\big)=0$$

für $i\geq 1$ und jedes $\mathfrak{p}\in S\smallsetminus S_{\min}(K)$. Die Ausschneidungsfolge zeigt nun, dass für $i\geq 1$ die Gruppe $H^i_{et}((X\smallsetminus S,T)_K,\mathbb{F}_p)$ genau dann verschwindet, wenn dies für $H^i_{et}((X\smallsetminus S_{\min},T)_K,\mathbb{F}_p)$ der Fall ist. Die Aussage folgt daher aus Lemma 2.2. □

Satz 9.2. *Es seien S und T disjunkte endliche Stellenmengen des globalen Körpers k und $p \neq \mathrm{char}(k)$ eine Primzahl. Im Zahlkörperfall sei $p \neq 2$ oder k total imaginär. Dann implizieren je zwei der folgenden Bedingungen* (a)–(c) *die jeweils dritte.*

(a) *$(X \smallsetminus S, T)$ hat die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p.*

(b) $\varprojlim_{K \subset k_S^T(p)} E_{K,T} \otimes \mathbb{Z}_p = 0$.

(c) *$k_S^T(p)_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(p)$ für alle $\mathfrak{p} \in S_{\min}$.*

In (b) *erstreckt sich der Limes über alle endlichen Teilerweiterungen $K|k$ von $k_S^T(p)|k$. Gelten* (a)–(c)*, so gilt auch*

$$\varprojlim_{K \subset k_S^T(p)} E_{K,S_{\min}\cup T} \otimes \mathbb{Z}_p = 0.$$

Bemerkungen 9.3. 1. Theorem 1.1 besagt, dass Bedingungen (a)–(c) nach Hinzunahme endlich vieler Stellen zu S gelten.
2. Es gelte $\zeta_p \in k$, $S_p \subset S$ und $T = \varnothing$. Dann gilt (a) und Bedingung (c) gilt für $p > 2$, falls $\#S > r_2 + 2$ (siehe [NSW] 10.9.1 und Remark 2 nach 10.9.3). Im Fall $k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $S = S_p$, $T = \varnothing$, gilt Bedingung (c) genau dann, wenn p eine irreguläre Primzahl ist.

Beweis von Satz 9.2. Wir können ohne Einschränkung $S = S_{\min}$ annehmen. Wendet man das topologische Nakayama-Lemma ([NSW], 5.2.18) auf den kompakten $\mathbb{Z}_p$-Modul $\varprojlim E_{K,T} \otimes \mathbb{Z}_p$ an, so sieht man, dass Bedingung (b) zur nachfolgenden Bedingung (b') äquivalent ist:

(b)' $\varprojlim_{K \subset k_S^T(p)} E_{K,T}/p = 0$.

Desweiteren ist nach Lemma 2.2 Bedingung (a) äquivalent zu

(a)' $\varinjlim_{K \subset k_S^T(p)} H^i_{et}((X \smallsetminus S, T)_K, \mathbb{F}_p) = 0$ für $i \geq 1$.

Nach Satz 3.6 gilt (a)' für $i = 1$, $i \geq 4$, und auch für $i = 3$, falls S nichtleer oder $\delta = 0$ ist. Im Fall $S = \varnothing$, $\delta = 1$, gilt $H^3_{et}((X \smallsetminus S, T)_K, \mathbb{F}_p) \cong \mu_p^\vee$. Daher ist in diesem Fall Bedingung (a)' für $i = 3$ genau dann erfüllt, wenn die Gruppe $G_S^T(k)(p)$ von unendlicher Ordnung ist.

Nach Lemma 3.5 haben wir für jedes $K \subset k_S^T(p)$ die exakte Folge

$$0 \longrightarrow E_{K,T}/p \longrightarrow V_\varnothing^T(K) \longrightarrow {}_p Cl_T(K) \longrightarrow 0\,.$$

Der Körper $k_S^T(p)$ hat keine unverzweigten p-Erweiterungen in denen alle Stellen aus T vollständig zerfallen. Daher erhalten wir nach Klassenkörpertheorie

$$\varprojlim_{K \subset k_S^T(p)} {}_p Cl_T(K) \subset \varprojlim_{K \subset k_S^T(p)} Cl_T(K) \otimes \mathbb{Z}_p = 0.$$

Der Dualitätssatz 4.1 liefert uns daher einen Isomorphismus

$$(*) \qquad \varinjlim_{K \subset k_S^T(p)} H^2_{et}\big((X,T)_K, \mathbb{F}_p\big) = \varinjlim_{K \subset k_S^T(p)} Ш^2(K, \varnothing, T) \cong \Big(\varprojlim_{K \subset k_S^T(p)} E_{K,T}/p \Big)^\vee.$$

Wir zeigen zunächst, dass im Fall $S = \varnothing$ (in dem (c) trivialerweise gilt) die Bedingungen (a) und (b) äquivalent sind. Gilt (a)', so folgt mit $(*)$ die Gültigkeit von (b)'. Gilt (b), so folgt insbesondere, dass $\delta = 0$ gilt oder $G_S^T(k)(p)$ unendliche Ordnung hat. Somit erhalten wir (a)' für $i = 3$. Außerdem folgt (a)' für $i = 2$ mit Hilfe von $(*)$ aus (b)'. Dies beendet den Beweis im Fall $S = \varnothing$.

Von nun an nehmen wir $S \neq \varnothing$ an. Für $\mathfrak{p} \in S = S_{\min}$ besitzt jede echte Galoissche Teilerweiterung von $k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p}$ verzweigte p-Erweiterungen. Nach der Berechnung der lokalen Kohomologie in Satz 3.1 ist daher (c) äquivalent zu (c)' $\varinjlim_{K\subset k_S^T(p)} \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} H^i_{\mathfrak{p}}((X,T)_K,\mathbb{F}_p)=0$ für alle i,

und auch zu

(c)" $\varinjlim_{K\subset k_S^T(p)} \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} H^2_{\mathfrak{p}}((X,T)_K,\mathbb{F}_p)=0$.

Nun betrachten wir den direkten Limes über $K\subset k_S^T(p)$ der Ausschneidungsfolgen (Koeffizienten $\mathbb{F}_p$)

$$(**)\qquad \cdots\to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} H^i_{\mathfrak{p}}\big((X,T)_K\big)\to H^i_{et}\big((X,T)_K\big)\to H^i_{et}\big((X\smallsetminus S,T)_K\big)\to\cdots$$

Gilt (a)', so verschwinden die rechten Terme in $(**)$ für $i\geq 1$ im Limes und $(*)$ zeigt dann die Äquivalenz zwischen (b)' und (c)".

Nun mögen (b) und (c) gelten. Wie oben impliziert (b) das Verschwinden des mittleren Terms für $i=2$ im Limes der Folge $(**)$. Bedingung (c)' zeigt dann (a)'. Damit haben wir gezeigt, dass je zwei der Bedingungen (a)–(c) die jeweils dritte implizieren.

Schließlich mögen (a)–(c) gelten. Tensorieren wir für $K\subset k_S^T(p)$ die exakte Folge (siehe [NSW], 10.3.12)

$$0\to E_{K,T}\to E_{K,S\cup T}\to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)}(K_{\mathfrak{p}}^\times/U_{\mathfrak{p}})\to Cl_T(K)\to Cl_{S\cup T}(K)\to 0$$

mit (der flachen $\mathbb{Z}$-Algebra) $\mathbb{Z}_p$, so erhalten wir eine exakte Folge endlich erzeugter, und daher kompakter, $\mathbb{Z}_p$-Moduln. Geht man nun zum projektiven Limes über alle endlichen Teilerweiterungen K von $k_S^T(p)|k$ über und benutzt $\varprojlim Cl_T(K)\otimes\mathbb{Z}_p=0$, so erhält man die exakte Folge

$$0\to \varprojlim_{K\subset k_S^T(p)} E_{K,T}\otimes\mathbb{Z}_p\to \varprojlim_{K\subset k_S^T(p)} E_{K,S\cup T}\otimes\mathbb{Z}_p\to \varprojlim_{K\subset k_S^T(p)}\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)}(K_{\mathfrak{p}}^\times/U_{\mathfrak{p}})\otimes\mathbb{Z}_p\to 0.$$

Bedingung (c) und lokale Klassenkörpertheorie implizieren das Verschwinden des rechten Limes. Daher impliziert (b) das Verschwinden des projektiven Limes in der Mitte. □

Gilt $G_S^T(k)(p)\neq 1$ und ist Bedingung (a) aus Satz 9.2 erfüllt, dann kann Bedingung (c) nur an Primteilern von p scheitern. Dies folgt aus dem nächsten

Satz 9.4. *Es seien S und T disjunkte endliche Stellenmengen des globalen Körpers k und $p\neq char(k)$ eine Primzahl. Im Zahlkörperfall sei $p\neq 2$ oder k total imaginär. Im Funktionenkörperfall gelte*

$$_p Cl(k)\neq 0 \quad\text{oder}\quad \delta=0\quad\text{oder}\quad T\neq\varnothing\quad\text{oder}\quad \#S\geq 2.$$

Hat $(X\smallsetminus S,T)$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p und gilt $G_S^T(k)(p)\neq 1$, dann hat jede Stelle $\mathfrak{p}\in S$ mit $\zeta_p\in k_{\mathfrak{p}}$ eine unendliche Trägheitsgruppe in $G_S^T(k)(p)$. Desweiteren gilt

$$k_S^T(p)_{\mathfrak{p}}=k_{\mathfrak{p}}(p)$$

für jedes $\mathfrak{p}\in S_{\min}\smallsetminus S_p$.

Beispiel 9.5. Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit $\#\mathbb{F}\equiv 1 \bmod p$. Wir setzen $k=\mathbb{F}(t)$, $T=\varnothing$ und S bestehe aus der unendlichen Stelle, d.h. der Stelle von k, die zur Gradbewertung assoziiert ist. Dann hat $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}=\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}\smallsetminus\{\infty\}$ die $K(\pi,1)$-Eigenschaft für p und $k_{\{\infty\}}(p)|k$ ist die (unverzweigte) zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung. Daher ist die in Satz 9.4 im Funktionenkörperfall gemachte Voraussetzung nötig.

Beweis von Satz 9.4. Ohne Einschränkung können wir $S = S_{\min} \neq \varnothing$ annehmen. Angenommen ein $\mathfrak{p} \in S$ mit $\zeta_p \in k_\mathfrak{p}$ würde in der Erweiterung $k_S^T(p)|k$ nicht verzweigen. Dann gilt mit $S' = S \smallsetminus \{\mathfrak{p}\}$ die Gleichheit $k_{S'}^T(p) = k_S^T(p)$, insbesondere erhalten wir einen Isomorphismus

$$H^1_{et}(X \smallsetminus S', T, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H^1_{et}(X \smallsetminus S, T, \mathbb{F}_p).$$

Im Folgenden schließen wir die Koeffizienten $\mathbb{F}_p$ von der Notation aus. Unter Verwendung von $H^3_{et}(X \smallsetminus S, T) = 0$ liefert die Ausschneidungsfolge das kommutative und exakte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H^2(G_{S'}^T(k)(p)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & H^2(G_S^T(k)(p)) \arrow[d, "\wr"] & & \\
H^2_\mathfrak{p}(X,T) \arrow[r, hook] & H^2_{et}(X \smallsetminus S', T) \arrow[r, "\alpha"] & H^2_{et}(X \smallsetminus S, T) \arrow[r] & H^3_\mathfrak{p}(X,T) \arrow[r, two heads] & H^3_{et}(X \smallsetminus S', T).
\end{tikzcd}$$

Daher ist α eine spaltende Surjektion und $\mathbb{F}_p \cong H^3_\mathfrak{p}(X,T) \xrightarrow{\sim} H^3_{et}(X \smallsetminus S', T)$. Nach Satz 3.6 folgt $S' = \varnothing$, also $S = \{\mathfrak{p}\}$, und $\delta = 1$. Dieselbe Überlegung wendet sich auf jede endliche Teilerweiterung K von $k_S^T(p)|k$ an, weshalb $\mathfrak{p}$ unzerlegt in der Erweiterung $k_S^T(p) = k_\varnothing^T(p)$ ist. Daher ist der natürliche Homomorphismus

$$G(k_\mathfrak{p}^{nr}(p)|k_\mathfrak{p}) \longrightarrow G_\varnothing^T(k)(p)$$

surjektiv, weshalb die Gruppe $G_S^T(k)(p) = G_\varnothing^T(k)(p)$ prozyklisch ist. Im Funktionenkörperfall kann daher nicht gleichzeitig ${}_pCl(k) \neq 0$ und $T = \varnothing$ gelten. Wegen $\#S = 1$ und $\delta = 1$ erhalten wir aus unseren Voraussetzungen, dass $T \neq \varnothing$ im Funktionenkörperfall gilt. Daher ist nach Klassenkörpertheorie die Gruppe $G_\varnothing^T(k)(p)$ endlich. Da sie nach Voraussetzung nichttrivial ist, hat sie unendliche kohomologische Dimension, was der $K(\pi,1)$-Eigenschaft widerspricht. Also verzweigt jedes $\mathfrak{p} \in S$ mit $\zeta_p \in k_\mathfrak{p}$ in $k_S^T(p)$. Da sich diese Überlegung auf jede endliche Teilerweiterung von k in $k_S^T(p)$ anwendet, müssen die Trägheitsgruppen unendlich sein. Für $\mathfrak{p} \notin S_p$ impliziert dies $k_S(p)_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(p)$, wie man leicht an der explizit bekannten Struktur der Gruppe $G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p})$ sieht (vgl. [NSW], 7.5.2). □

Satz 9.6. *Es seien $S \neq \varnothing$ und T disjunkte endliche Stellenmengen des globalen Körpers k und $p \neq char(k)$ eine Primzahl. Im Zahlkörperfall sei $p \neq 2$ oder k total imaginär. Angenommen es gelten die Bedingungen* (a)–(c) *aus Satz 9.2 und es gilt $\zeta_p \in k_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in S$.*

Dann ist $G_S^T(k)(p)$ eine Pro-p-Dualitätsgruppe der Dimension 2.

Beweis. Aus Bedingung (a) folgt $H^3(G_S^T(k)(p), \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H^3_{et}(X \smallsetminus S, T, \mathbb{F}_p) = 0$, also $cd\, G_S^T(k)(p) \le 2$. Andererseits enthält nach (c) die Gruppe $G_S^T(k)(p)$ für jedes $\mathfrak{p} \in S$ die volle lokale Gruppe $G(k_\mathfrak{p}(p)|k_\mathfrak{p})$ als Untergruppe. Wegen $\zeta_p \in k_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in S$ haben diese lokalen Gruppen die kohomologische Dimension 2, also gilt auch $cd\, G_S^T(k)(p)$.

Um zu zeigen, dass $G_S^T(k)(p)$ eine Dualitätsgruppe ist, müssen wir nach [NSW], Theorem 3.4.6, das Verschwinden der Terme

$$D_i\big(G_S^T(k)(p)\big) := \varinjlim_{\substack{U \subset G_S^T(k)(p) \\ cor^\vee}} H^i(U, \mathbb{F}_p)^\vee, \quad i = 0, 1,$$

nachweisen. Hierbei durchläuft U die offenen Normalteiler von $G_S^T(k)(p)$ und die Übergangsabbildungen sind die Duale der Korestriktionshomomorphismen. Das Verschwinden von D_0 folgt trivial aus der Unendlichkeit der Gruppe $G_S^T(k)(p)$. Wir haben daher nachzuweisen, dass

$$\varinjlim_{K \subset k_S^T(p)} H^1\big((X \smallsetminus S, T)_K, \mathbb{F}_p\big)^\vee = 0$$

gilt. Wir nehmen zunächst an, dass k ein Zahlkörper oder $T \neq \varnothing$ ist. In diesem Fall ist für jede endliche Teilerweiterung K von $k_S^T(p)|k$ die Gruppe $Cl_T(K)$ endlich und nach dem Hauptidealsatz gilt

$$\varinjlim_{K \subset k_S^T(p)} H^1_{et}\big((X,T)_K, \mathbb{F}_p\big)^\vee = \varinjlim_{K \subset k_S^T(p)} Cl_T(K)/p = 0.$$

Die Ausschneidungsfolge und der lokale Dualitätssatz zeigen die Exaktheit der Folge

$$\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S(K)} H^1_{nr}(K_\mathfrak{p}, \mu_p) \to H^1\big((X \smallsetminus S, T)_K, \mathbb{F}_p\big)^\vee \to H^1\big((X,T)_K, \mathbb{F}_p\big)^\vee.$$

Nun gilt $\zeta_p \in k_\mathfrak{p}$ und $k_S^T(p)_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(p)$ für alle $\mathfrak{p} \in S$, weshalb der linke Term im Limes über alle $K \subset k_S^T(p)$ verschwindet. Das Verschwinden des rechten Terms im Limes haben wir oben eingesehen, was die gewünschte Aussage zeigt.

Es verbleibt der Fall $T = \varnothing$, wenn k ein Funktionenkörper ist. Nach Poincaré-Dualität gilt

$$H^1_{et}((X \smallsetminus S)_K, \mathbb{F}_p)^\vee \cong H^2_c((X \smallsetminus S)_K, \mu_p) = H^2_{et}(X_K, j_!\mu_p),$$

wobei $j : (X \smallsetminus S)_K \to X_K$ die Einbettung bezeichnet. Die Ausschneidungsfolge zusammen mit $H^2_\mathfrak{p}(X_K, j_!\mu_p) \cong H^1(K_\mathfrak{p}, \mu_p)$ für $\mathfrak{p} \in S(K)$ zeigt die Exaktheit der Folge

$$(*) \qquad \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S(K)} H^1(K_\mathfrak{p}, \mu_p) \to H^2_{et}(X_K, j_!\mu_p) \to H^2_{et}\big((X \smallsetminus S)_K, \mu_p\big).$$

Wieder wegen $\zeta_p \in k_\mathfrak{p}$ und $k_S(p)_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}(p)$ für $\mathfrak{p} \in S$ verschwindet der linke Term von $(*)$ beim Übergang zum Limes über alle $K \subset k_S(p)$. Die Kummerfolge induziert die Exaktheit von

$$(**) \qquad Cl_S(K)/p \longrightarrow H^2_{et}\big((X \smallsetminus S)_K, \mu_p\big) \longrightarrow {}_p\mathrm{Br}\big((X \smallsetminus S)_K\big).$$

Der Hauptidealsatz zeigt $\varinjlim_{K \subset k_S(p)} Cl_S(K)/p = 0$ und das Hasseprinzip für die Brauergruppe gibt uns eine Injektion

$${}_p\mathrm{Br}\big((X \smallsetminus S)_K\big) \hookrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S(K)} {}_p\mathrm{Br}(K_\mathfrak{p}).$$

Da nun $k_S(p)$ für $\mathfrak{p} \in S$ die maximale unverzweigte p-Erweiterung von $k_\mathfrak{p}$ realisiert, verschwindet der rechte, also auch der mittlere Term von $(**)$ im Limes über K, und folglich auch der mittlere Term von $(*)$. Dies beendet den Beweis. □

Bemerkung 9.7. Für $S \neq \varnothing$ ist die S-T-Idelklassengruppe von k_S^T definiert durch

$$C_S^T := \varinjlim_{K \subset k_S^T} \operatorname{coker}\Big(E_{K, S\cup T} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in S(K)} K_\mathfrak{p}^\times\Big).$$

Das Paar $(G_S^T(k), C_S^T)$ ist eine Klassenformation. Für einen Teilkörper $K \subset k_S^T$ setzt man $C_S^T(K) := (C_S^T)^{G(k_S^T|K)}$. Unter den Voraussetzungen von Satz 9.6 ist der dualisierende Modul der Dualitätsgruppe $G_S^T(k)(p)$ isomorph zu $\mathrm{tor}_p\big(C_S^T(k_S^T(p))\big)$.

Literatur

[Ih] Y. Ihara *How many primes decompose completely in an infinite unramified Galois extension of a global field?* J. Math. Soc. Japan **35** (1983), no. 4, 693–709

[Ku] L. V. Kuz'min *Local extensions associated with ℓ-extensions with given ramification* (in Russian). Izv. Akad. Nauk SSSR **39** (1975) no. 4, 739–772. English transl. in Math. USSR Izv. **9** (1975), no. 4, 693–726

[La1] J. P. Labute *Mild pro-p-groups and Galois groups of p-extensions of* $\mathbb{Q}$. J. reine und angew. Math. **596** (2006), 155–182

[La2] J. P. Labute *Algèbres de Lie et pro-p-groupes définis par une seule relation.* Invent. Math. **4** (1967), 142–158

[Maz] B. Mazur *Notes on étale cohomology of number fields.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 521–552

[Mai] Ch. Maire *Sur la dimension cohomologique des pro-p-extensions des corps de nombres.* J. Théor. Nombres Bordeaux **17** (2005), no. 2, 575–606

[Mi1] J. S. Milne *Étale cohomology.* Princeton University Press 1980

[Mi2] J. S. Milne *Arithmetic duality theorems.* Academic Press 1986

[Mu] V. G. Mukhamedov, *Local extensions associated with the ℓ-extensions of number fields with restricted ramification* (in Russian). Mat. Zametki **35** (1984), no. 4, 481–490, English transl. in Math. Notes **35**, no. 3–4, 253–258

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields, 2nd ed.*, Grundlehren der math. Wiss. Bd. 323, Springer-Verlag 2008

[S1] A. Schmidt *Circular sets of prime numbers and p-extensions of the rationals.* J. reine und angew. Math. **596** (2006), 115–130

[S2] A. Schmidt *Rings of integers of type* $K(\pi,1)$. Doc. Math. **12** (2007), 441–471

[TV] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduţ *Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem.* Mosc. Math. J. **2** (2002), no. 2, 329–402

[Vo] D. Vogel *p-extensions with restricted ramification - the mixed case.* Preprints der Forschergruppe *Algebraische Zykel und L-Funktionen* Regensburg/Freiburg Nr. 11, 2007: `www.mathematik.uni-r.de/FGAlgZyk`

[Wi1] K. Wingberg *Galois groups of number fields generated by torsion points of elliptic curves.* Nagoya Math. J. **104** (1986), 43–53

[Wi2] K. Wingberg *On Galois groups of p-closed algebraic number fields with restricted ramification.* J. reine und angew. Math. **440** (1993), 129–156

[SGA1] A. Grothendieck *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. Lecture Notes in Math., 224, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971

NWF I - Mathematik, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Deutschland.
Email-Adresse: alexander.schmidt@mathematik.uni-regensburg.de