Свойство $K(\pi, 1)$ для неособых отмеченных кривых над конечными полями

Филипп Лебак и Александр Шмидт

13 января 2015 г.

Аннотация

В случае неособых отмеченных кривых (X, T) над конечными полями характеристики p мы изучаем свойство $K(\pi, 1)$ для простого p. Мы доказываем, что (X, T) обладает свойством $K(\pi, 1)$, если X — аффинная кривая. Если X — собственная кривая, мы приводим примеры, показывающие, что свойство может быть как выполнено, так и нет. Мы также рассматриваем случай неотмеченных собственных кривых над конечным полем характеристики отличной от p.

Ключевые слова: когомологии Галуа, этальные когомологии, ограниченное ветвление

1 Введение

В работах [1],[2],[3], второй автор изучал свойство $K(\pi, 1)$ для простого p для арифметических кривых, поле функций которых имеет характеристику отличную от p. Доказано, что группа Галуа максимального неразветвленного вне S и полностью разложимого в T про-p-расширения глобального поля характеристики, отличной от p, часто имеет когомологическую размерность не более двух. В этой статье мы рассмотрим случай гладкой кривой над конечным полем характеристики p. Мы доказываем, что (X, T) обладает свойством $K(\pi, 1)$, если X – аффинная кривая. Мы также приводим примеры, в которых X — собственная кривая и свойство выполнено или нет. Кроме того, рассматриваем случай неотмеченных собственных кривых над конечным полем характеристики отличной от p. Этот случай не был рассмотрен в предыдущей работе.

Мы благодарны Елене Пирютко и Алексею Зыкину за улучшение русского текста предварительной версии этой статьи и рецензенту за полезные советы.

1.1 Отмеченный этальный ситус и свойство $K(\pi, 1)$

Пусть X — одномерная нетерова регулярная схема, определенная над $\mathbb{F}_q$ ($q = p^f$) и T — конечное множество замкнутых точек X. В работе [3], второй автор определил отмеченный этальный ситус (X, T) кривой X в T, рассматривая конечные этальные морфизмы $Y \to X$, индуцирующие изоморфизмы на полях вычетов для всех замкнутых точек $y \in Y$ над $x \in T$.

Пусть M – пучок p-кручения. Полученные группы когомологий обозначаются $H^i(X, T, M)$ и они удовлетворяют обычным свойствам, которые мы ожидаем от групп этальных когомологий. Также доказано (см. [3] для более подробной информации), что эти конечные отмеченые этальные морфизмы обладают теорией Галуа, и (после выбора базовой геометрической точки $\bar{x} \notin T$) мы обозначаем через $\pi_1(X,T)$ проконечную группу, классифицирующую этальные накрытия X, в которых точки T полностью распадаются. Обозначим через $\widetilde{(X,T)}(p)$ универсальное про-p-накрытие отмеченной кривой (X,T). Проекция $\widetilde{(X,T)}(p) \to X$ является накрытием Галуа, группа Галуа которого — это максимальный про-p-фактор $\pi_1(X,T)(p)$ группы $\pi_1(X,T)$.

Пусть M – дискретный $\pi_1(X,T)(p)$-модуль p-кручения. Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра:

$$E_2^{ij} = H^i(\pi_1(X,T)(p), H^j((\widetilde{X,T})(p), T, M)) \Rightarrow H^{i+j}(X,T,M).$$

Граничные морфизмы дают гомоморфизмы

$$\phi_{i,M} : H^i(\pi_1(X,T)(p), M) \to H^i(X,T,M).$$

Мы говорим, что (X,T) имеет свойство $K(\pi,1)$ для p, если $\phi_{i,M}$ является изоморфизмом для всех M и $i \geqslant 0$. Из следующей леммы 1.1, что (X,T) имеет свойство $K(\pi,1)$ для p, если $\phi_{i,\mathbb{F}_p}$ является изоморфизмом для $i \geqslant 2$.

Лемма 1.1. *(см. [3] Lemma 2.2) $\phi_{i,M}$ является изоморфизмом для $i = 0,1$ и является мономорфизмом для $i = 2$. Кроме того, $\phi_{i,M}$ является изоморфизмом для всех $i \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\varinjlim_{(Y,T')} H^i(Y,T',M) = 0 \text{ для всех } i \geqslant 1,$$

где прямой предел берется по всем конечным промежуточным накрытиям (Y,T') из $\widetilde{(X,T)}(p) \to (X,T)$.

1.2 Обозначения

Если не указано иное, мы используем следующие обозначения:
- p обозначает простое число.
- $\mathbb{F}$ – конечное поле, $\bar{\mathbb{F}}$ алгебраическое замыкание $\mathbb{F}$, $\widetilde{\mathbb{F}}$ его максимальное про-p-расширение, вложенное в $\bar{\mathbb{F}}$, и $G_{\mathbb{F}}$ группа Галуа расширения $\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$.
- X является гладкой проективной абсолютно неприводимой кривой, определенной над $\mathbb{F}$.
- $k = \mathbb{F}(X)$ поле функций кривой X.
- g_X род кривой X.
- $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}} \bar{\mathbb{F}}$, $\widetilde{X} = X \times_{\mathbb{F}} \widetilde{\mathbb{F}}$.
- S, T два непересекающиеся множества (возможно пустые), состоящие из замкнутых точек X.
- Если x является замкнутой точкой X, X_x обозначает гензелизацию кривой X в точке x и $T_x = \{x\}$, если $x \in T$ и $\varnothing$ в противном случае.
- k_S^T обозначает максимальное про-p-расширение поля k, неразветвленное вне S, в котором все точки из T полностью распадаются. Если множество пусто, мы опускаем S (или T) в обозначениях.
- $G_S^T(k) = \mathrm{Gal}(k_S^T/k) = \pi_1(X - S, T)(p)$.
- $H^i(X - S, T)$ обозначает группу этальных когомологий $H_{et}^i(X - S, T, \mathbb{F}_p)$ отмеченной кривой $(X - S, T)$.
- Для про-р- группы G положим $H^i(G) = H^i(G, \mathbb{F}_p)$.
- Для абелевой группы A и целого m будем обозначать $A[m] = \ker(A \xrightarrow{\cdot m} A)$.

1.3 Новые результаты

Пусть X — гладкая проективная абсолютно неприводимая кривая, определенная над конечным полем $\mathbb{F}$ и $k = \mathbb{F}(X)$ — поле функций X. Пусть S и T — конечные непересекающиеся множества замкнутых точек X. В этой статье мы докажем следующий результат:

Теорема 1.2. *Предположим, что* $p = \mathrm{char}(\mathbb{F})$.

(i) *Если* $S \neq \varnothing$, *то* $(X - S, T)$ *обладает* $K(\pi, 1)$-*свойством для* p *и* $cd\, G_S^T(k) = 1$.

(ii) *Если* $T = \varnothing$, *то* $(X - S)$ *обладает* $K(\pi, 1)$-*свойством для* p *и* $cd\, G_S(k) \leqslant 2$.

В остальных случаях, мы имеем следующие результаты.

Теорема 1.3. *Предположим, что* $p = \mathrm{char}(\mathbb{F})$, $S = \varnothing$ *и* $T \neq \varnothing$.

(i) *Если* $\mathrm{Pic}(X)[p] = 0$, *то* (X, T) *имеет* $K(\pi, 1)$-*свойство для* p *тогда и только тогда, когда* $T = \{x\}$ *состоит из одной точки и* $p \nmid \deg x$. *В этом случае* $\pi_1(X, T)(p) = 1$.

(ii) *Если* $\mathrm{Pic}(X)[p] \neq 0$ *и*

$$\sum_{x \in T} \frac{\deg(x)}{(\#\mathbb{F})^{\deg(x)/2} - 1} > g_X - 1,$$

то группа $\pi_1(X, T)(p)$ *конечна и* (X, T) *не имеет* $K(\pi, 1)$-*свойства для* p.

Наконец, рассмотрим случай неотмеченной собственной кривой над конечным полем характеристики, отличной от p, который не был рассмотрен в более ранних работах.

Теорема 1.4. *Предположим, что* $p \neq \mathrm{char}(\mathbb{F})$. *Тогда* X *имеет* $K(\pi, 1)$-*свойство для* p *тогда и только тогда, когда* $\mu_p(\mathbb{F}) = 1$ *или* $\mathrm{Pic}(X)[p] \neq 0$.

В оставшемся случае $\mu_p \subset \mathbb{F}$ *и* $\mathrm{Pic}(X)[p] = 0$ *имеем*

$$\pi_1^{et}(X)(p) \cong \pi_1^{et}(\mathbb{F})(p) \cong \mathbb{Z}_p.$$

В частности, группа $H^i(\pi_1^{et}(X)(p))$ *всегда конечна и тривиальна для* $i > 3$.

2 Вычисление групп этальных когомологий

Предложение 2.1 (Локальное вычисление)**.** *Пусть* K — *неархимедово локальное (или гензелево) поле характеристики* p. *Пусть* $Y = Spec\, \mathcal{O}_K$, $y \in Y$ *замкнутая точка, и пусть* $T = \varnothing$ *или* $\{y\}$. *Тогда локальные группы когомологий* $H_y^i(Y, T)$ *обращаются в нуль при* $i \neq 2$ *и*

$$H_y^2(Y, T) = \begin{cases} H_{/nr}^1(K), \text{ если } T = \varnothing; \\ H^1(K)\ , \text{ если } T = \{y\}, \end{cases}$$

где $H_{/nr}^1 = H^1(K)/H_{nr}^1(K)$.

Доказательство. Мы используем последовательность вырезания:

$$\cdots \to H_y^i(Y, T) \to H^i(Y, T) \to H^i(Y - \{y\}) \to H_y^{i+1}(Y, T) \to \cdots .$$

Поскольку Y — спектр гензелевого кольца, $H^i(Y) \cong H^i(y) = H_{nr}^i(K)$, следовательно, $H^i(Y) = 0$ для $i \geqslant 2$. Поскольку схема Y нормальна, отображение $H^1(Y, T) \to$

$H^1(Y-\{y\})$ инъективно, следовательно, $H^1_y(Y,T)=0$. Кроме того, $H^i(Y-\{y\})=H^i(K)$ и эта группа обращается в нуль при $i\geqslant 2$, потому что $cd_pK=1$ (см. [4], Cor. 6.1.3). Отсюда следует, что $H^i_y(Y,T)\cong H^i(Y,T)$ для $i\geqslant 3$.

При $T=\varnothing$ получаем $H^i_y(Y)=0$ для $i\geqslant 3$, и короткая точная последовательность

$$0\to H^1(Y)\to H^1(Y-\{y\})\to H^2_y(Y)\to 0$$

дает результат для $H^2_y(Y)$.

Если $T=\{y\}$, тождественное отображение на (Y,T) кофинально среди накрывающих семейств (Y,T), следовательно, $H^i(Y,\{y\})=0$ для $i\geqslant 1$. Мы получаем $H^2_y(Y,\{y\})\cong H^1(K)$ и $H^i_y(Y,\{y\})=0$ для $i\geqslant 3$. □

Предложение 2.2. *(Глобальное вычисление) Пусть X — гладкая проективная абсолютно неприводимая кривая, определенная над $\mathbb{F}$, и $k=\mathbb{F}(X)$ — поле функций X. Пусть S и T — конечные непересекающиеся множества замкнутых точек X.*

Тогда $H^i(X-S,T)=0$ для $i\geqslant 3$ и $H^2(X-S,T)=0$, если $S\neq\varnothing$. Более того, имеется точная последовательность

$$0\to H^1(X-S,T)\to H^1(X-S)\to\bigoplus_{x\in T}H^1_{nr}(k_x)\to H^2(X-S,T)\to H^2(X-S)\to 0.$$

Доказательство. В случае $T=\varnothing$ имеем $H^i(X-S)=0$ для $i\geqslant 3$ и $H^2(X-S)=0$, если $S\neq\varnothing$ по [5] exp. 10, Thm. 5.1 и Cor. 5.2. Кроме того, очевидно, что последовательность точна.

Теперь предположим, что $T\neq\varnothing$. Рассмотрим последовательность вырезания для $(X-S,T)$ и $(X-(S\cup T))$:

$$\cdots\to\bigoplus_{x\in T}H^i_x((X-S)_x,T_x)\to H^i(X-S,T)\to H^i(X-(S\cup T))\to\cdots.$$

Предложение 2.1 показывает, что $H^i(X-S,T)\cong H^i(X-(S\cup T))=0$ для $i\geqslant 3$ и что последовательность

$$0\to H^1(X-S,T)\to H^1(X-(S\cup T))\to\bigoplus_{x\in T}H^1(k_x)\to H^2(X-S,T)\to 0\qquad(*)$$

точна. Сравнивая это с последовательностью вырезания для $(X-S)$ и $(X-(S\cup T))$

$$0\to H^1(X-S)\to H^1(X-(S\cup T))\to\bigoplus_{x\in T}H^1_{/nr}(k_x)\to H^2(X-S)\to 0,$$

получаем точную последовательность из предложения.

Если $S\neq\varnothing$, из теоремы о сильной аппроксимации следует, что отображение

$$H^1(X-(S\cup T))\longrightarrow\bigoplus_{x\in T}H^1(k_x)$$

сюръективно (см. [4] Thm. 9.2.5). Используя $(*)$, получаем, что $H^2(X-S,T)=0$ в этом случае. □

Следствие 2.3. *Если группа $G^T_S(k)$ конечна и нетривиальна, то $(X-S,T)$ не имеет $K(\pi,1)$-свойства для p.*

Доказательство. В этом случае мы имеем $cd\,G^T_S(k)=\infty$, но $H^i(X-S,T)=0$ для $i\geqslant 3$. □

Следствие 2.4 (Характеристика Эйлер-Пуанкаре)**.**

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X,T) = \#T.$$

Доказательство. Если $S = \varnothing$, то все группы в точной последовательности 2.2 конечны и мы имеем

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X,T) = \#T + \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X).$$

Напомним, что $H^1(\bar{X}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)$ (каждое связное этальное накрытие $\bar{X}$ приходит заменой базы из изогении якобиана $\bar{X}$). Следовательно

$$H^2(X) = H^1(\mathbb{F}, H^1(\bar{X})) = H^1(\mathbb{F}, \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)_{G_{\mathbb{F}}}.$$

Кроме того, имеет место точная последовательность

$$0 \to H^1(\mathbb{F}) \to H^1(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)^{G_{\mathbb{F}}} \to 0.$$

Таким образом, лемма 2.5, приведенная ниже, показывает что

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X) = 1 - \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(\mathbb{F}) = 0.$$

□

Лемма 2.5. *Имеет место равенство* $\mathrm{Pic}(\bar{X})[p]^{G_{\mathbb{F}}} = \mathrm{Pic}(X)[p]$ *и*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Pic}(\bar{X})[p]_{G_{\mathbb{F}}} = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Pic}(X)[p].$$

Доказательство. Первое равенство следует из спектральной последовательности Лере

$$E_2^{ij} = H^i(\mathbb{F}, H^j(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{G}_m)$$

и из обращения в нуль группы Брауэра конечного поля:

$$H^2(\mathbb{F}, H^0(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) = H^2(\mathbb{F}, \bar{\mathbb{F}}^\times) = 0.$$

Равенство размерностей следует из точной последовательности конечномерных $\mathbb{F}_p$-векторных пространств

$$0 \to \mathrm{Pic}(\bar{X})[p]^{G_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{Pic}(\bar{X})[p] \xrightarrow{1-\mathrm{Frob}} \mathrm{Pic}(\bar{X})[p] \to \mathrm{Pic}(\bar{X})[p]_{G_{\mathbb{F}}} \to 0.$$

□

3 Доказательство теоремы 1.2

Предположим что $S \neq \varnothing$. Из вычислений в последнем разделе, мы знаем, что $H^i(X - S, T) = 0$ при $i \geqslant 2$. По лемме 1.1, $(X - S, T)$ обладает $K(\pi,1)$-свойством для p и $cd\, G_S^T(k) \leqslant 1$. Но, $G_S^T(k)$ нетривиальна, что следует из точной последовательности

$$0 \to H^1(X - S, T) \to H^1(X - S) \to \bigoplus_{x \in T} H^1_{nr}(k_x) \to 0,$$

а также из того, что $\bigoplus_{x\in T} H^1_{nr}(k_x)$ имеет конечную $\mathbb{F}_p$-размерность, в то время как группа $H^1(X-S)$ бесконечномерна.

Теперь предположим, что $S=\varnothing$ и $T=\varnothing$. Пусть $\widetilde{\mathbb{F}}$ — максимальное p-расширение $\mathbb{F}$ в $\bar{\mathbb{F}}$. Имеем $H^2(X_{\widetilde{\mathbb{F}}}) = H^2(X_{\bar{\mathbb{F}}})^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})} = 0$. Поэтому $X_{\widetilde{\mathbb{F}}}$ является $K(\pi,1)$ для p и спектральная последовательность Хохшильда–Серра для $X_{\widetilde{\mathbb{F}}}/X$ показывает, что то же самое верно для X. Это завершает доказательство теоремы 1.2.

4 Доказательство теоремы 1.3

Предложение 4.1. *Предположим, что* $\mathrm{Pic}(X)[p]=0$ *и* $T\neq\varnothing$ *и пусть* p^r *— максимальная степень* p*, делящая* $gcd(\deg x,\ x\in T)$*. Тогда*

$$G^T(k)=\pi_1(X,T)(p)\cong \mathrm{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F}),$$

где $\mathbb{F}'$ *— единственное расширение* $\mathbb{F}$ *степени* p^r*.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathbb{F}}$ — максимальное p-расширении $\mathbb{F}$ в $\bar{\mathbb{F}}$. Используя лемму 2.5, имеем

$$H^2(X)=H^1(\mathbb{F},H^1(\bar{X}))\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(X)[p],\mathbb{F}_p)=0.$$

Следствие 2.4 показывает, что $H^1(X)$ является одномерной. Поэтому $\pi_1(X)(p)$ является свободной группой ранга 1 и, следовательно, сюръекция

$$\pi_1(X)(p)\twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$$

является изоморфизмом (см. [4], Prop. 1.6.15). Максимальное подрасширение $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ в $\widetilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$, для которого все точки из T полностью распадаются при замене базы $X\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}'\to X$, и есть то самое расширение степени p^r поля $\mathbb{F}$. □

Следствие 4.2. *Предположим, что* $\mathrm{Pic}(X)[p]=0$ *и* $T\neq\varnothing$*. Тогда* (X,T) *является* $K(\pi,1)$ *для* p *тогда и только тогда, когда* $T=\{x\}$ *состоит из одной точки с* $p\nmid \deg x$*. В этом случае фундаментальная группа* $\pi_1(X,T)(p)$ *тривиальна.*

Доказательство. По предложению 4.1 группа $\pi_1(X,T)(p)$ является конечной циклической. Если $p\mid gcd(\deg x,\ x\in T)$, то группа $\pi_1(X,T)(p)$ нетривиальна и (X,T) не является $K(\pi,1)$ для p по следствию 2.3.

Предположим что $p\nmid gcd(\deg x\mid x\in T)$. Тогда $\pi_1(X,T)(p)$ — тривиальная группа, $H^1(X,T)=0$ и (X,T) является $K(\pi,1)$ для p тогда и только тогда, когда $H^2(X,T)=0$. По следствию 2.4 это эквивалентно условию $\#T=1$. □

Лемма 4.3. *Предположим, что* $\pi_1(X,T)(p)$ *конечна и* $\mathrm{Pic}(X)[p]\neq 0$*. Тогда* (X,T) *не является* $K(\pi,1)$ *для* p*.*

Доказательство. В силу следствия 2.3, (X,T) не является $K(\pi,1)$ для p, если группа $\pi_1(X,T)(p)$ нетривиальна. Предположим, что $\pi_1(X,T)(p)=1$. Тогда (X,T) является $K(\pi,1)$ для p тогда и только тогда, когда $H^2(X,T)=0$. Но по предложению 2.2, $H^2(X)\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(X)[p],\mathbb{F}_p)\neq 0$ является фактором $H^2(X,T)$. □

Следующая теорема была доказана Ихарой см. [6], Thm. 1 (FF).

Теорема 4.4. *Предположим, что $T \neq \varnothing$ и положим $q = \#\mathbb{F}$. Если*

$$\sum_{x \in T} \frac{\deg(x)}{q^{\deg(x)/2} - 1} > \max(g_X - 1, 0),$$

то $\pi_1(X, T)$ конечна. В частности, $\pi_1(X, T)(p)$ конечна.

Это завершает доказательство теоремы 1.3.

5 Доказательство теоремы 1.4

Пусть $\widetilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$ — максимальное p-подрасширении $\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$ и $\widetilde{X} = X \times_{\mathbb{F}} \widetilde{\mathbb{F}}$. Известно, что

$$X \text{ обладает } K(\pi,1)\text{-свойством для } p \Longleftrightarrow \widetilde{X} \text{ обладает } K(\pi,1)\text{-свойством для } p$$

и, кроме того,

$$H^i_{et}(\widetilde{X}) \cong H^i_{et}(\bar{X})^{G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})}$$

для всех i.

Поэтому $H^i_{et}(\widetilde{X})$ обращается в нуль при $i \geqslant 3$ и $H^2_{et}(\widetilde{X}) = \mu_p(\widetilde{\mathbb{F}})^* = \mu_p(\mathbb{F})^*$. Мы заключаем, что X обладает свойством $K(\pi, 1)$ для p, если $\mu_p(\mathbb{F}) = 1$.

В дальнейшем мы предполагаем что $\mathbb{F}$ содержит все корни степени p из единицы. Для любой башни конечных связных этальных p-накрытий $Z \to Y \to X$ естественное отображение

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = H^2_{et}(\widetilde{Y}, \mu_p) \longrightarrow H^2_{et}(\widetilde{Z}, \mu_p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

есть умножение на степени $[\widetilde{Z} : \widetilde{Y}]$. Следовательно, по лемме 1.1,

$$\widetilde{X} \text{ обладает } K(\pi,1)\text{-свойством для } p \Longleftrightarrow \#\big(\pi_1^{et}(\widetilde{X})(p)\big) = \infty.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \pi_1^{ab}(\widetilde{X})/p &\cong H^1_{et}(\widetilde{X})^* \\ &\cong \big(H^1_{et}(\bar{X})^{G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})}\big)^* \\ &\cong \operatorname{Pic}(\bar{X})[p]_{G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})} \end{aligned}$$

и по лемме 2.5,

$$\operatorname{Pic}(\bar{X})[p]_{G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Pic}(\widetilde{X})[p] = 0.$$

Кроме того, поскольку $G(\widetilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ является про-p-группой:

$$\operatorname{Pic}(\widetilde{X})[p] = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Pic}(X)[p] = \operatorname{Pic}(\widetilde{X})[p]^{G(\widetilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F})} = 0,$$

а значит $\operatorname{Pic}(X)[p] \neq 0 \Longleftrightarrow \pi_1^{ab}(\widetilde{X})/p \neq 0$. Поэтому достаточно показать эквивалентности

$$\#\big(\pi_1^{et}(\widetilde{X})(p)\big) = \infty \Leftrightarrow \#\big(\pi_1^{ab}(\widetilde{X})(p)\big) = \infty \Leftrightarrow \#\pi_1^{ab}(\widetilde{X})/p \neq 0.$$

Элементарная теория про-p-групп показывает, что достаточно доказать импликацию

$$\pi_1^{ab}(\widetilde{X})/p \neq 0 \Longrightarrow \#\big(\pi_1^{ab}(\widetilde{X})(p)\big) = \infty.$$

Обозначив $T := T_p(\bar{X}) = \pi_1^{ab}(\bar{X})(p)$, мы можем записать импликацию в виде

$$(T_{G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})})/p \neq 0 \Longrightarrow \#(T_{G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})}) = \infty.$$

Группа $G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})$ является про-циклической группой супернатурального порядка, взаимно простого с p. Кроме того, $T \cong \mathbb{Z}_p^{2g}$ и ядро отображения ограничения $\mathrm{Gl}_{2g}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{Gl}_{2g}(\mathbb{F}_p)$ является про-p-группой. Поэтому действие $G(\bar{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})$ на T факторизуется через конечную циклическую группу порядка, взаимно простого с p. Мы заключаем, что теорема 1.4 следует из леммы 5.1 ниже. □

Следующая лемма 5.1 и ее применение в доказательстве теоремы 1.4 были предложены нам Дж. Стиксом. Мы благодарны рецензенту, который предложил короткое доказательство, приведенное ниже.

Лемма 5.1. *Пусть G — конечная группа порядка n, p — простое число, которое не делит n, и T — конечно порожденный свободный $\mathbb{Z}_p$-модуль с действием G. Тогда*

$$\#T_G = \infty \iff (T/p)_G \neq 0.$$

Доказательство. Так как группы когомологий Тейта $\mathbb{Z}_p[G]$-модулей тривиальны, получаем расщепленную точную последовательность $\mathbb{Z}_p[G]$-модулей

$$0 \longrightarrow \ker(N) \longrightarrow T \xrightarrow{N} T^G \longrightarrow 0,$$

где $N = \sum_{g \in G} g$. Пусть $B = \ker(N)$. Так как $\hat{H}^{-1}(G, B) = 0$, то $B_G = 0$. Получаем $T_G \cong T^G$ и $(T/p)_G \cong (T^G)/p$. Поэтому оба утверждения леммы эквивалентны $T^G \neq 0$. □

Список литературы

[1] A. Schmidt, “Rings of integers of type $K(\pi,1)$”, *Doc. Math.* **12** (2007), 441–471.

[2] A. Schmidt, “On the $K(\pi,1)$-property for rings of integers in the mixed case”, *Algebraic number theory and related topics*, 2007, 91–100, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B12, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009.

[3] A. Schmidt, Über Pro-p-Fundamentalgruppen markierter arithmetischer Kurven, *J. Reine Angew. Math.* **640** (2010), 203–235.

[4] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, 2nd ed., 2nd corr. print., Grundlehren der math. Wiss. **323**, Springer 2013.

[5] M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier, “Théorie des topos et cohomologie étale des schémas”, Tome 3”, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **305**, Springer-Verlag 1973.

[6] Y. Ihara, “How many primes decompose completely in an infinite unramified Galois extension of a global field?”, *J. Math. Soc. Japan* **35** (1983), no. 4, 693–709.

Laboratoire de Mathématiques de Besançon, 16 route de Gray, 25030 Besançon, France
email: philippe.lebacque@univ-fcomte.fr

Universität Heidelberg, Mathematisches Institut, Im Neuenheimer Feld 288, D-69120 Heidelberg, Deutschland
email: schmidt@mathi.uni-heidelberg.de