Voevodskys Beweis der Milnor/Bloch/Kato-Vermutung

Hauptseminar im Wintersemester 2011/12
Di 11-13 HS 3 <u>und</u> Do 11-13, HS 4

Programm (Stand 25. August 2011)

Alexander Schmidt

Ziel des Seminars ist es, den Beweis des folgenden Theorems zu verstehen:

Theorem 1 (Milnor/Bloch/Kato-Vermutung [=Satz von Voevodsky/Rost]). *Der Normresthomomorphismus*

$$K_n^M(k)/m \longrightarrow H_{et}^n(k, \mu_m^{\otimes n})$$

ist ein Isomorphismus.

Genaueres entnehme man [10]. Eine sehr schöne Einführung in das Thema ist auch [7], allerdings wird hier nur der Fall $m = 2$ geschildert. Ziel soll es sein, den Beweis der Milnor/Bloch/Kato-Vermutung und die benötigten Methoden kennen zu lernen. Hierbei soll der Schwerpunkt eher nicht auf der homologischen Algebra liegen, sprich: die vorkommenden Kategorien und ihre Eigenschaften sollen erklärt werden, aber es soll z.B. nicht eine halbe Sitzung darauf verwendet werden, zu zeigen, dass das Tensorprodukt in der Kategorie XY wohldefiniert ist, o.ä. Damit soll auf keinen Fall behauptet werden, dass das uninteressant oder auch nur einfach wäre: die Definition der motivischen Kategorien und der Nachweis ihrer Eigenschaften waren bahnbrechende Leistungen von Voevoedsky und anderen. Nur ist das nicht das Thema des Seminars und würde uns daran hindern (man zähle z.B. einfach die Seitenzahlen der verwendeten Arbeiten zusammen, q.e.d.), unser eigentliches Ziel zu erreichen, nämlich diesen Apparat bei der Arbeit zu sehen.

Benötigtes Vorwissen für das Seminar:

<u>Homologische Algebra</u>
- Derivierte Kategorien, Spektralsequenzen
- simpliziale Mengen, allgemeiner: simpliziale Objekte in Kategorien
- abgeschlossene Modellkategorien
- Etalkohomologie, Definition und grundlegende Eigenschaften, analog: Nisnevich-Topologie (siehe [9] oder auch [8, S. 95])

<u>Milnorsche K-Theorie</u> (siehe [1] Teil I. Eine sehr schöne Einführung liefert auch die Diplomarbeit von M. Kerz [5])
- Definition und elementare Eigenschaften
- Normabbildung unter endlichen Körpererweiterungen
- Milnor K-Gruppen von (vollständigen) diskreten Bewertungsringen

<u>Algebraische Geometrie</u> (siehe [2], Kapitel 1)
- Schnittzahl im (einfachen) Fall von sich eigentlich schneidenden Zykeln auf einer glatten Varietät.

Grobe Zeitvorgabe für jeden Vortrag (bis auf Vortrag 1, der nur eine Sitzung braucht) sind 2 Sitzungen, wenn jemand merkt, dass er weniger braucht, so sollte er/sie auch weniger Zeit in Anspruch nehmen. Spätere Vortragende sind eventuell dankbar für etwas mehr Zeit.

Wer mitmachen will, schicke mir bitte bis Ende September eine email mit der Angabe von mindestens zwei Wunschvorträgen. Ich werde dann die Vorträge verteilen (eventuell auch Vorträge auf zwei Personen aufteilen).

1 Einführungsvortrag (A.S.)

Einführung und Reduktion der MBKV auf den Fall ℓ-spezieller Körper der Charakteristik Null.

2 (Prä-)Garben mit Verlagerung und $DM_-^{eff}(k)$

Man führe endliche Korrespondenzen und die zugehörige Kategorie $SmCor(k)$ ein ([20, Chapter 5] oder [13, S.8]). Anschließend behandle man [20, Chapter 5, §3.1]; man stelle die Ergebnisse vor, Beweise aber nur von 3.1.8 und 3.1.9 geben. Proposition 3.1.11 kann ausgelassen werden und direkt Theorem 3.1.12 ohne Beweis dargestellt werden, da der Begriff der Prätheorie ohnehin nicht weiter behandelt wird. Man ergänze allerdings letzteren Satz um die Aussage von [20, Chapter 3, 4.1.8]. Dann definiere man $DM_-^{eff}(k)$. Als zusätzliche Quellen können [13, §1] und [6, Lectures 1, 2] dienen. [20], Chapter 5, §3.2 bis vor Theorem 3.2.6: Für eine Prägarbe mit Verlagerungen F definiere man den zugehörigen singulären simplizialen Komplex $\underline{C}_*(F)$. Mit dessen Hilfe lässt sich $DM_-^{eff}(k)$ als Lokalisierung von $D^-(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ nach schwachen Äquivalenzen auffassen und eine Tensorstruktur auf $DM_-^{eff}(k)$ definieren. Weitere Quellen sind [13], 1.12–2.8 sowie [6, Lecture 14]. Dann gebe man eine kurze Aufstellung der wichtigsten Eigenschaften ([13, §4], oder [20, S.194] (ohne gm)). Erklärt werden soll der Gysin-Homomorphismus und kohomologische Reinheit ([13], Theorem 4.10). Schließlich folgendes erklärt werden.

Für einen Funktor F von Schemata nach abelschen Gruppen definiert man den Funktor F_{-1} als den Funktor $X \mapsto coker(F(X) \to F(X \times \mathbb{G}_m))$. Ist K ein Komplex von Garben mit Verlagerungen, so sei $(K_{-1})_?$ der Komplex von Garben, der durch Garbifizierung des Funktors K_{-1} bzgl. der ?-Topologie (? = Zar, Nis oder ét) entsteht. Dann gilt

Lemma 2 ([20], Ch.3, 4.34)**.** *Hat K homotopiinvariante Kohomologiegarben $\mathcal{H}^i(K)$, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus von Funktoren*

$$H^i_?(-,K)_{-1} \cong H^i_?(-,(K_{-1})_?).$$

Nun ist $\mathcal{H}^i(K)$ die Garbe zur Prägarbe $X \to H^i_?(X,K)$, so dass wir insbesondere Isomorphismen

$$(\mathcal{H}^i(K)_{-1})_? \cong \mathcal{H}^i((K_{-1})_?)$$

erhalten.

3 Motivische Kohomologie, Milnorsche K-Gruppen

[13] §3: Die motivische Kohomologie glatter Varietäten wird eingeführt: motivische Komplexe $\mathbb{Z}(n)$ und motivische Kohomologie, Eigenschaften. Besonders wichtig ist die Verbindung zur Milnor-K-Theorie in Theorem 3.4, und die Identifizierung der étalen Version motivischer Kohomologie mir gewöhnlicher Etalkohomologie im Fall der Koeffizienten $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(n)$.

Man erkläre den Kürzungssatz in der Form wie in [18], Cor. 4.10 formuliert. Eventuell kann man die Aussage auf 4.9 zurückführen, wobei man obiges Lemma 2 benutzt.

[13] §5: Einführung der cdh-Topologie. Unter „Singularitätenauflösung“ (die wir annehmen, da wir schlußendlich in Charakteristik Null arbeiten) ist jede Varietät lokal glatt in der cdh-Topologie. Jede homotopieinvariante Nisnevich-Garbe mit Verlagerungen ist eine cdh-Garbe. Motivische Kohomologie beliebiger Varietäten über DM und über cdh.

4 Beilinson-Lichtenbaum

In diesem Vortrag soll gezeigt werden, dass die schwache Form der MBKV bereits die Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung (und damit insbesondere die starke Form der MBKV) impliziert. Man beweise diese Aussage in der Form von [10], Theorem 2, also mit $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$-Koeffizienten. Für den Beweis ist das aber eigentlich egal, im folgenden seien die Koeffizienten stets $A = \mathbb{Z}/\ell^r$, $1 \leq r \leq \infty$, wobei wir die Konvention $\mathbb{Z}/\ell^\infty = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$ benutzen. Der Beweis hat die folgenden Schritte:

1. Von Körpern zu affinen semilokalen Schemata [13], Proposition 7.6

2. BL mit Trägern: Man bringe den Beweis von [13], Corollary 8.4 und erkläre in groben Zügen, wie sich das Ergebnis auf den nicht notwendig glatten Fall (also Theorem 8.5) ausdehnt.

3. Man zeige, dass es natürliche Inklusionen

$$\delta : H^i_B(X, C^\bullet) \hookrightarrow H^n_B(X \times \partial\Delta^{n-i+1}, C^\bullet)$$

gibt ([13], Lemma 9.2). Überdies, mit $(\mathcal{S}, pt) = \mathbb{A}^1/(0 \sim 1)$, haben wir Injektionen

$$\tilde{\delta} : H^n_B(X, C^\bullet) \hookrightarrow H^{n+1}_B(X \times \mathcal{S}, C^\bullet)$$

([13], Cor. 10.2). Für $X = \mathrm{Spec}(K)$, K/k endlich erzeugt, $C^\bullet = \mathbb{Z}/\ell^r(n)$ und jedes $z \in H^i_B(K, \mathbb{Z}/\ell^r(n))$ verschwindet die Einschränkung von $\tilde{\delta}\delta(z)$ auf eine offene Teilmenge von $\partial\Delta^{n-i+1}_K \times \mathcal{S}$, welche die (endliche) Menge $\{\text{Ecken von } \Delta^{n-i+1}_K\} \times pt$ enthält ([13], Prop. 10.3).

Mit Hilfe dieser Informationen kann man dann zeigen ([13], Beweis von Theorem 7.4), dass (unter der schwachen MBKV) die BLV für Körper richtig ist. Hieraus folgt sie für beliebige glatte Varietäten aus allgemeinen Prinzipien.

5 Motivische Homotopietheorie, Reinheitssatz und Gradabbildung

Man definiere ([8]) die motivischen Homotopiekategorien $\mathcal{H}(k)$ und $\mathcal{H}_\bullet(k)$ Das Smash-Produkt zweier punktierter simplizialer Garben entnehme man [8, S.82]. Der Zusammenhang zur motivischen Kohomologie ([16, Theoreme 2.1 & 2.4]) Reinheitssatz [8, 2.23, S.115], den wir ohne Beweis zitieren. Danach zeige man [16], 2.1–2.4 und konstruiere die Gradabbildung, also bringe [16], 2.5.–2.11.

6 Hilbert 90 und die Folgen

[16], §6: Die Bedingung $H^{n+1,n}_L(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$ für jeden Körper k bezeichnet man mit $H90(n, \ell)$. Dieser Vortrag zeigt, wie diese Bedingung die MBK-Vermutung für n und ℓ impliziert. Das ist nicht schwierig (siehe [10], Lemma 3). Wir brauchen aber mehr. Man rechne das Ergebnis zunächst in die Azyklizität des Komplexes $K(n)$ um (siehe [16], Theorem 6.6). Man bringe dann [16], 6.11, 6.12, 6.13.

[16], §5: Man bringe einen Beweis von [10], Theorem 4, der im wesentlichen gleich [16], Thm. 5.9 ist. Dazu bringe man den gesamten Inhalt von §5 (und beachte die hier veränderte Terminologie $BK(n)$). Schließlich bringe man das Reduktionsargument (am besten ausgeführt in [7]), welches alles auf [10], Theorem 5 zurückführt.

7 Motive über simplizialen Schemata

Man erkläre den gesamten Inhalt von [17]. Insbesondere definiere man die Kategorie $DM^{eff}_i(\mathcal{X})$ für simpliziale Schemata $\mathcal{X}$ ([17], Def. 4.2). Aus §5 ist insbesondere 5.18 wichtig. Für §6 brauchen wir zunächst einiges aus §8 (interne Hom-Objekte). Aus §6 brauchen wir alles, insbesondere 6.8 und 6.21 (wo die Formulierung geeignet korrigiert werden muss). Schließlich sollte noch der Kommentar zu Koeffizienten (§7) gebracht werden.

8 v_n-Varietäten

Das Projektive-Bündel-Theorem liefert Chernklassen. Siehe [4], Appendix A 3, [15], Theorem 4.1, 14.1. Definition von Milnorklasse und v_n-Varietät.

Dann bringe man Kapitel 1 von [12] in dem gezeigt wird, dass ein Theorem von Rost (Thm 1.21) das für den Beweis der MBKV wichtige Theorem 6.3 aus [19] (= Theorem 15 in [10]) für ℓ-spezielle Körper impliziert (was ausreicht).

9 Motivische Kohomologieoperationen und Margolis-Homologie

[16], §3 + §9: Analog zu entsprechenden Konstruktionen in der algebraischen Topologie gibt es in der mod ℓ motivischen Kohomologie Operationen Q_i mit der Eigenschaft $Q_i^2 = 0$. Aufgrund dieser Eigenschaft lässt sich die so genannte Margolis-Homologie definieren. Wichtig für uns ist ihr Verschwinden unter geeigneten Voraussetzungen.

Die Existenz der Q_i und die in [15, 13.4–13.6] gezeigten Eigenschaften setze man dabei ohne Beweis voraus. Man präsentiere den Eindeutigkeitssatz [19] Theorem 2.1 ohne Beweis.

Dann zeige man [19] 4.3 über das Verschwinden der Margolishomologie gewisser eingebetteter simplizialer Schemata, sowie Theorem [19] Theorem 4.4.

10 Symmetrische Potenzen und das verallgemeinerte Rost-Motiv

Man präsentiere [19], §3 um Theorem 3.8 zu verstehen. Dann präsentiere man den Inhalt von [19], §5 (Konstruktion der verallgemeinerten Rost-Motive).

11 Beweis der MBKV unter der Annahme des Existenz geeigneter Zerfällungsvarietäten

[19], §6 inklusive allem, was hier aus [16] benutzt wird.

12 Normvarietäten

Hier soll die Konstruktion geeigneter Zerfällungsvarietäten zu Symbolen beschrieben und der Beweis von Rost's Theorem 1.21 aus [12] gebracht werden. Dies ist der letzte Stein im Gebäude und schließt den Beweis der MBKV ab. Die Konstruktion ist induktiv. Startpunkt ist der Fall $n = 2$, wo man Brauer-Severi-Varietäten benutzt, siehe [11]. Der Induktion schritt ist in [12] §2 beschrieben. Zum Nachweis der Eigenschaften in §§3–5 braucht man die Gradformel 4.8. Diese folgt aus Rosts Gradformel (4.7). Der Beweis der Implikation 4.7 $\Rightarrow$ 4.8 benutzt jedoch Bordismustheorie und außerdem haben wir in Vortrag 5 eine adhoc-Definition der Gradabbildung benutzt, die hier nicht weit genug reicht. Daher ist es warscheinlich sinnvoll, 4.8 ohne Beweis zu verwenden. Im weiteren brauchen wir Rosts Kettenlemma (5.1). Je nachdem wie viel Zeit bleibt, kann etwas zum Beweis gesagt werden, oder falls zu wenig Zeit ist, gleich 5.6 ohne Beweis zitiert werden. Gleiches gilt für das Norm-Prinzip (5.8) dessen Beweis sich in [3] findet.

Literatur

[1] Bass, H. and Tate, J. *The Milnor ring of a global field*, Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Seattle, Wash., Battelle Memorial Inst., 1972), 349–446. Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer Berlin,1973

[2] Fulton, William *Intersection theory.* Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin, 1998

[3] Christian Haesemeyer und Chuck Weibel *Norm Varieties and the Chain Lemma (After Markus Rost).* Algebraic Topology, Abel Symposia, Springer 2009, Volume 4, 95-130

[4] Hartshorne, Robin *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52. Springer-Verlag, Berlin, 1977

[5] Kerz, M. *Der Gerstenkomplex der Milnor K-Theorie.* Inventiones mathematicae, Volume 175, Number 1 (2009) 1–33. Ausführliche Version (Diplomarbeit Mainz 2005): http://www.uni-due.de/ hm0096/dipl.pdf.

[6] Mazza, Carlo; Voevodsky, Vladimir; Weibel, Charles *Lecture notes on motivic cohomology.* Clay Mathematics Monographs, 2. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006

[7] Morel, F. *Voevodsky's proof of Milnor's conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **35**, 123–143 (1998)

[8] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky. $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory of schemes.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (90): 45–143 , 1999.

[9] Nisnevich, Ye. A. *The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory.* Algebraic K-theory: connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987), 241–342, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

[10] Schmidt, A. *Voevodskys Beweis der Milnor/Bloch/Kato-Vermutung. Ein Leitfaden für das Hauptseminar im Wintersemester 2011/12.* Manuskript 2011

[11] A. Suslin *Algebraic K-theory and the norm-residue homomorphism.* Journal of Mathematical Sciences Volume 30, Number 6, 2556-2611, Springer Verlag. Translated from Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennye Problemy Matematiki Noveishie Dostizheniya, Vol. 25, pp. 115Ũ208, 1984

[12] A. Suslin and S. Joukhovitski, *Norm varieties.* J. Pure Appl. Algebra 206 (2006), 245–276.

[13] Suslin, Andrei; Voevodsky, Vladimir *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients.* The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000

[14] Voevodsky, Vladimir *Open problems in the motivic stable homotopy theory. I.* Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), 3–34, Int. Press Lect. Ser., 3, I, Int. Press, Somerville, MA, 2002

[15] Voevodsky, Vladimir *Reduced power operations in motivic cohomology.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 98 (2003), 1–57.

[16] Voevodsky, Vladimir *Motivic cohomology with* $\mathbb{Z}/2$*-coefficients.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 98 (2003), 59–104

[17] Voevodsky, Vladimir *Motives over simplicial schemes.* J. K-Theory 5 (2010), no. 1, 1–38

[18] Voevodsky, Vladimir *Cancellation Theorem.* Doc. Math. Extra Volume Suslin (2010) 671–685

[19] Vladimir Voevodsky. *On motivic cohomology with* $\mathbb{Z}/\ell$*-coeffcients.* Annals of Mathematics 174 (2011), 401–438

[20] Voevodsky, Vladimir; Suslin, Andrei; Friedlander, Eric M. *Cycles, transfers, and motivic homology theories.* Annals of Mathematics Studies, 143. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. Enthält: Ch. 1: Eric M. Friedlander, A. Suslin and V. Voevodsky, Introduction (3–9); Ch. 2: Andrei Suslin and Vladimir Voevodsky, Relative cycles and Chow sheaves (10–86); Ch. 3: Vladimir Voevodsky, Cohomological theory of presheaves with transfers (87–137); Ch. 4: Eric M. Friedlander and Vladimir Voevodsky, Bivariant cycle cohomology (138–187); Ch. 5: Vladimir Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field (188–238); Ch. 6: Andrei A. Suslin, Higher Chow groups and étale cohomology (239–254).