Verdichtete Mathematik

Oberseminar AG Schmidt
Wintersemester 2020/21

In diesem Seminar werden wir uns mit verdichteter Mathematik (Condensed Mathematics) nach Clausen/Scholze beschäftigen. Diese neue Theorie stellt einen vielversprechenden Rahmen dar, algebraische Objekte mit einer Topologie zu studieren. Beispielsweise ist die Kategorie der topologischen abelschen Gruppen (mit stetigen Gruppenhomomorphismen) keine abelsche Kategorie. Solche Unannehmlichkeiten werden durch den Übergang zur Kategorie der verdichteten abelschen Gruppen gelöst.

Zeit und Ort: Mittwoch, 09:30–11:00 Uhr (?). Ort noch nicht festgelegt.

Kein Vortrag am 11.11. aufgrund der Meisterklasse über verdichtete Mathematik in Kopenhagen: `www.math.ku.dk/english/calendar/events/condensed-mathematics/`.

Vorbereitung: Als Apéritif empfiehlt sich ein Vortrag von Scholze zum Thema:
`www.youtube.com/watch?v=pzq1FvmEjaM`

Vorträge

Hauptquelle ist Scholzes Vorlesungsskript [Sch19], welches bereits in gut portionierte Kapitel eingeteilt ist, welchen wir weitgehend folgen werden. Vortrag 4 ist ein Abstecher in die Arbeit von Hoffmann-Spitzweck [HS07].

Vortrag 1: Verdichtete Objekte
Kurze Motivation zum Zweck verdichteter Mathematik. Definition von verdichteten Objekten in einer Kategorie $\mathcal{C}$ als $\mathcal{C}$-wertige Garben auf der Kategorie der κ-kleinen proendlichen Mengen (für eine überabzählbare starke Limeskardinalzahl κ). Die Kategorie der κ-kompakt erzeugten topologischen Räume bettet in die Kategorie der verdichteten Mengen ein und diese Inklusion hat einen linksadjungierten Funktor. Beschreibung zum Übergang größerer Kardinalszahlen. [Sch19, Lecture I, Appendix to Lecture II]

Vortrag 2: Verdichtete abelsche Gruppen
Alternative Beschreibung verdichteter Objekte als Garben auf kompakten Hausdorffräumen oder auf äußerst unzusammenhängenden Mengen. Einführung der freien verdichteten abelschen Gruppen $\mathbf{Z}[S]$ für proendliche Mengen S. Die Kategorie der verdichteten abelschen Gruppen ist eine Grothendieck-Kategorie (Theorem 2.2) und hat eine kanonische symmetrisch monoidale Struktur sowie interene Hom-Objekte. [Sch19, Lecture II]

Vortrag 3: Kohomologie
Die interne Kohomologie des Topos der verdichteten abelschen Gruppen stimmt für ganzzahlige Koeffizienten mit Garbenkohomologie überein und verschwindet für reelle Koeffizienten. [Sch19, Lecture III]

Vortrag 4: Homologische Algebra lokal kompakter abelscher Gruppen
Struktursätze über lokal-kompakte abelsche Gruppen. Quasi-abelsche Struktur der Kategorie lokal-kompakter abelscher Gruppen und Konstruktion deren derivierter Kategorie. [HS07]

Vortrag 5: Lokal kompakte abelsche Gruppen als verdichtete Gruppen
Beschreibung der verdichteten Hom-Gruppen für abelsche Hausdorffgruppen vermöge funktorieller Auflösungen abelscher Gruppen (letztere können unbewiesen verwendet werden). Die beschränkte derivierte Kategorie $D^b(\mathrm{LCA})$ à la Hoffmann-Spitzweck bettet volltreu in die derivierte Kategorie $D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ verdichteter abelscher Gruppen ein. [Sch19, Lecture IV]

Vortrag 6: Feste abelsche Gruppen I
Einführung des Begriffs der festen abelschen Gruppe. Die freien festen abelschen Gruppen $\mathbf{Z}[S]^{\blacksquare}$ sind Produkte der ganzen Zahlen. Abstraktes Kriterium für die Existenz von lokalisierenden Unterkategorien in abelschen Kategorien. [Sch19, Lecture V]

Vortrag 7: Feste abelsche Gruppen II
Feste abelsche Gruppen bilden eine lokalisierende Unterkategorie der verdichteten abelschen Gruppen und analoges gilt für die entsprechenden derivierten Kategorien. [Sch19, Lecture VI]

Vortrag 8: Analytische Ringe
Einführung von analytischen Ringen, das sind verdichtete Ringe zusammen mit einer zusätzlichen Struktur von „freien vollständigen verdichteten Moduln“. Jede endlich erzeugte $\mathbf{Z}$-Algebra liefert einen analytischen Ring. [Sch19, Lecture VII]

Vortrag 9: Feste A-Moduln
Konstruktion des direkten Bildes mit kompaktem Träger und des exzeptionellen inversen Bildes für feste Moduln über endlich erzeugten $\mathbf{Z}$-Algebren und für Morphismen zwischen solchen [Sch19, Lecture VIII, Appendix to Lecture VIII]

Vortrag 10: Diskrete adische Räume
Einführung in diskrete Huberringe, deren Bewertungsspektren und diskrete adische Räume. [Sch19, Lecture IX]

Vortrag 11: Globalisierung
Der Funktor, der einem diskreten Huberring seine derivierte Kategorie von festen Moduln zuordnet, verklebt zu einem Funktor auf der Kategorie der diskreten adischen Räume. Hierfür wird die Sprache der höheren Kategorientheorie verwendet. [Sch19, Lecture X]

Vortrag 12: Kohärente Dualität
Anwendung: Verallgemeinerung von Grothendieck-Dualität auf den nicht-eigentlichen Fall vermöge verdichteter Mathematik.

Literatur

[Sch19] Scholze, Peter: *Lectures on Condensed Mathematics*, Vorlesungsskript, online verfügbar unter `www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf`

[HS07] Hoffmann, Norbert und Spitzweck, Markus: *Homological algebra with locally compact abelian groups*, Adv. Math. 212 (2007), no. 2, 504–524 (Link).