Seminar: p-adische L-Funktionen

Wintersemenster 2022/23

Prof. Dr. Alexander Schmidt
Dr. Katharina Hübner
Donnerstags, 14-16

Vortrag 1

Die Riemannsche Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Darstellung als Euler-Produkt. Analytische Fortsetzbarkeit auf $\mathbb{C}$ mit einem einfachen Pol bei s=1 mit dem Residuum 1. Ohne Beweise zitieren aus [N] VII§1 oder aus einer beliebigen anderen Quelle.
Verallgemeinerung: ([I] §1 und Anhang) Dirichlet-Charaktere, Dirichletsche L-funktionen und ihre Eigenschaften, die Γ-Funktion und ihre Eigenschaften aus [N] VII §1 entnehmen (Satz 1.2). Die im Anhang zu [I] gegebene Beweisskizze soll vorgetragen werden.
Spezielle Werte Dirichletscher L-Funktionen an nichtnegativen ganzen Zahlen:
Bernoulli-Zahlen und verallgemeinerte Bernoulli-Zahlen so wie in [W] S.30-31 einführen. Theorem 1 aus [I] S.11 vorführen:

$$L(1-n,\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n} \text{ für jedes ganze } n \geq 1.$$

Vortrag 2

Den Regulator eines Zahlkörpers nach [N]I§7 und [W] S.40 einführen. Satz 7.5 aus [N]I§7 mit Beweis.
Die Dedekindsche Zeta-Funktion eines Zahlkörpers nach [N]VII §5 einführen und Satz 5.2 und Kor 5.11. (i),(ii) mit Beweisidee. Die Zerlegung

$$\zeta_K(s) = \prod_{\chi \in X} L(s,\chi)$$

aus [W] Thm 3.7 und Thm 4.3 beweisen.
Corollary 4.4. und die Anwendung auf Dirichlets Satz über Primzahlen in arithmetischer Progression (Thm. 4.5.).
Die Klassenzahlformel aus [W] S.37 unten.

Vortrag 3

CM-Körper, Thm 4.10 [W] mit Beweis, Thm 4.12 mit Beweis, Cor. 4.13 ohne Beweis. Prop.4.16 mit Beweis. Die Klassenzahlformel ([W]Thm 4.17)

$$h^-(K) = Qw \prod_{\chi\, ungerade} (-\frac{1}{2}B_{1,\chi})$$

mit Beweis. Theorem 4.20 mit Beweisskizze präsentieren.

Vortrag 4

Der Satz von Staudt-Clausen [W] Theorem 5.10 mit Beweis:
Es sei n gerade und positiv. Dann gilt:

$$B_n + \sum_{(p-1)|n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}.$$

-Potenzreihen über lokalen Körpern:
[I] §3 S.17-25 unten.

Vortrag 5 Die Konstruktion der p-adischen L-Funktion:

Sei χ ein Dirichlet-Charakter. Es existiert eine p-adisch meromorphe Funktion $L_p(s,\chi)$ (holomorph wenn $\chi \neq 1$) so dass gilt

$$L_p(1-n,\chi) = -(1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\frac{B_{n,\chi\omega^{-n}}}{n} \text{ für } n \geq 1.$$

Insbesondere gilt

$$L_p(1-n,\chi) = (1-\chi(p)p^{n-1})L(1-n,\chi) \text{ wenn } (p-1)|n.$$

Das heißt, dass $L_p(s,\chi)$ die Werte von $L(s,\chi)$ p-adisch approximiert, genauer: dies geschieht nach Korrektur um den Euler-Faktor bei p. [I] S.25 3.3. -S.31 unten.

Votrag 6

Kummer-Kongruenzen [W] §5.3. Theorem 5.12 Cor.5.13,5.14:
Seien $m \equiv n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ positive gerade Zahlen. Dann gilt:

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_n}{n} \pmod{p}.$$

Es soll auch die Verallgemeinerung bzgl. höherer p-Potenzen gebracht werden. Kongruenzen für verallgemeinerte Bernoulli-Zahlen (Cor. 5.15).
Zusammenhang zwischen der p-Teilbarkeit von $h^-(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ und der Teilbarkeit von Bernoulli-Zahlen (Thm. 5.16). Anwendung darauf, dass unendlich viele irreguläre Primzahlen existieren (Thm. 5.17).

Vortrag 7

Der Wert bei $s = 1$. Die Formel [W] §5.4 Thm 5.18 angeben und die Analogie zum Komplexen erklären.
Thm 5.24 mit Beweis:
Ist p eine reguläre Primzahl und k eine gerade ganze Zahl mit $k \not\equiv 0 \pmod{p-1}$, dann ist $L_p(1,\omega^k) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Insbesondere $L_p(1,\omega^k) \neq 0$.
Den p-adischen Regulator $R_p(K)$ nach [W] §5.5 einführen. Leopoldts Vermutung über das Nichtverschwinden des p-adischen Regulators angeben. Den Beweis der Leopoldt-Vermutung für abelsche Zahlkörper (Thm. 5.25) skizzieren. Corollar 5.30.

Vortrag 8

Anwendungen auf die Klassenzahlformel. Abschätzung des Regulators durch die Diskriminante in speziellen Fällen ([W] §5.6 Prop.5.33 mit Beweis.) Theorem 5.34 mit Beweis:
Wenn $p|h^+(\mathbb{Q}(\zeta_p))$, so $p|h^-(\mathbb{Q}(\zeta_p))$. D.h. eine Primzahl p ist genau dann irregulär, wenn $p|B_j$ für ein $j = 2,4,\ldots,p-3$.

Vortrag 9

Lemma 5.35 in [W] mit Beweis. Theorem 5.36 mit dem ersten der beiden Beweise. Theorem 9.3 mit Beweis, ggf. Teile davon nur skizzieren.

Literatur

[I] K.Iwasawa *Lectures on p-adic L-functions*
Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press

[W] L.C.Washington *Introduction to cyclotomic fields*
Graduate texts in mathematics 83, Springer

[N] J.Neukirch *Zahlentheorie*

[L] S.Lang *Cyclotomic fields*
Graduate texts in mathematics 59, Springer