ÉTALE HOMOTOPIE IN POSITIVER CHARAKTERISTIK
OBERSEMINAR DER AG SCHMIDT IM SOMMERSEMESTER 2017

Zeit und Ort: Di 11-13, SR3, Mathematikon

Wir wollen uns mit zwei aktuellen Ergebnissen beschäftigen, die belegen, dass étale Homotopie in positiver Charakteristik merkwürdig ungeometrische Eigenschaften hat. Das erste lautet:

Theorem 1 (P. Achinger)**.** *Sei $X/\mathbb{F}_p$ ein noethersches, zusammenhängendes, affines Schema. Dann sind für jede lokal konstante, konstruierbare Garbe F auf X_{et} (und für beliebige Wahl eines geometrischen Punktes $\bar{x}$ von X) die natürlichen Abbildungen*

$$H^n(\pi_1^{\mathrm{et}}(X,\bar{x}),F) \longrightarrow H^n_{\mathrm{et}}(X,F)$$

Isomorphismen für alle $n \geq 0$. Ist X geometrisch einzweigig, so verschwinden die étalen Homotopiegruppen $\pi_n^{\mathrm{et}}(X,\bar{x})$ für $n \geq 2$.

Im ersten Schritt werden wir verstehen, warum das erstaunliche Theorem 1 zum folgenden Satz 2 äquivalent ist, den wiederum (fast) jeder sofort zu glauben bereit ist:

Satz 2. *Für jeden Körper k und jedes $r \geq 0$ gilt $\pi_n^{\mathrm{et}}(\mathbb{A}_k^r) = 0$ für $n \geq 2$.*

Kern des Argument Satz 2 $\Rightarrow$ Theorem 1 sind die folgenden beiden Schritte:

1. Schritt (Étale Verschärfung des noetherschen Normalisierungslemmas): Ist $f : U \to \mathbb{A}_k^n$ étale, so existiert ein *endlicher* étaler Morphismus $g : U \to \mathbb{A}_k^n$ (das gilt nur in positiver Charakteristik.)

Damit erhält man mit Satz 2 die Aussage von Theorem 1 zunächst für solche U, die sich étale in einen affinen Raum abbilden (weil deren höhere Homotopiegruppen mit denen des affinen Raums übereinstimmen).

2. Schritt: Gilt die Aussage für solche U wie in Schritt 1, so gilt sie für beliebiges affines U.

Dies ist eine Anwendung von Gabbers „affinem Analogon des eigentlichen Basiswechsels“. Man reduziert zunächst auf abgeschlossene Unterschemata affiner Räume. Dann stimmen die étalen Kohomologiegruppen und die étale Fundamentalgruppe von X mit denen der Henselisierung des $\mathbb{A}_k^n$ in X überein. Die Henselisierung ist aber Limes von Schemata, wie in Schritt 1.

Nun muss man „nur noch“ Satz 2 zeigen. Ohne Einschränkung sei k algebraisch abgeschlossen. In Charakteristik 0 ist die Aussage einfach (sie gilt für den $\mathbb{A}^1$ und étale Homotopiegruppen kommutieren mit Produkten), aber für uns unwichtig. Der uns interessierende Fall positiver Charakteristik ist subtil und wird uns über mehrere Vorträge beschäftigen. Hier kommt in wesentlicher Weise das Theorem von Deligne-Laumon zum Tragen, welches ein Kriterium für die universelle lokale Azyklizität in Termen des Swan-Führers gibt.

Das zweite Ergebnis, das uns beschäftigen wird besagt, dass es in positiver Charakteristik außer dem Punkt keine glatten étale-kontrahierbaren Varietäten gibt.

Theorem 3 (A. Holschbach/J. Schmidt/J. Stix)**.** *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und X/k eine glatte Varietät. Gilt (für einen geometrischen Punktes $\bar{x}$ von X) dass*

$$\pi_n^{\mathrm{et}}(X,\bar{x}) = 0$$

für alle $n \geq 0$, so gilt $X = \operatorname{Spec} k$.

Die Beweisstrategie ist grob die folgende: Zunächst zeigt man $H^0(X,\mathcal{O}_X) = k$ (das hängt wesentlich davon ab, dass $\operatorname{char} k = p > 0$ gilt). Dann wird ein Cartier-Divisor D konstruiert, so dass die zu den linearen Systemen $|mD|$ assoziierten Morphismen quasi-endlich sind und in den $\mathbb{P}_k^0$ abbilden.

Voraussetzungen: Wegen des Hurewich-Satzes [AM69, Cor. 4.5] braucht man zum Verständnis des Seminars in Wirklichkeit keine Kenntnis der étalen Homotopietheorie: Bei Theorem 1 kann man das „insbesondere“ glauben, die Aussage von Satz 2 kann wie in Theorem 1 formuliert werden (aber eben nur für die affinen Räume) und in Theorem 3 kann man die Voraussetzung durch „$H^n_{\text{et}}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$ für alle $n, m \geq 1$“ ersetzen.

Vorträge

Vortrag 1: Einführung und Vortragsverteilung (Alexander Schmidt)

Vortrag 2: Henselsche Paare
Man definiere den Begriff „henselsches Paar“ und formuliere dann Gabbers „Affines Analogon des eigentlichen Basiswechselsatzes“ [Gab94, Thm. 1]. Dann präsentiere man Gabbbers Beweis und auch den der Fußnote auf Seite 326, die die Kategorien der endlichen étalen Schemata behandelt (und damit die Fundamentalgruppe).

Vortrag 3: Reduktion von Theorem 1 auf Satz 2.
Man definiere Schemata vom Typ $K(\pi, 1)$ und erkläre das $K(\pi, 1)$-Kriterium [Ach17, Prop. 4.1.2]. Dann präsentiere man [Ach17, 5.3.2] als Folgerung aus dem, was wir in Vortrag 2 gelernt haben. Dann zeige man die étale Variante des Noetherschen Normalisierungslemmas [Ach17, Prop. 5.2.1] und erkläre Cor. 5.2.3. Schließlich folgere man Theorem 1 aus Satz 2 ([Ach17], Abschnitt 5.4.

Vortrag 4: Swan-Charakter und universelle lokale Azyklizität
Ziel ist ein Beweis von [Ach17, Cor. 2.2.2]. Dazu benötigt man [Lau81, Thm. 2.1.1] welches der Hauptinhalt dieses Vortrages ist.

Vortrag 5: Affine Räume sind $K(\pi, 1)$e. Man stelle das „Bertini“-Theorem [Ach17, 1.3.1] vor und beweise es im Fall gebändigter (non-fierce) Verzweigung [Ach17, 3.1.3]. Dann zeige man [Ach17, 5.1.1] unter Annahme von 1.3.1

Vortrag 6: Der allgemeine Fall des „Bertini“-Theorems
Man erkläre T. Saitos Theorem [Sai17, Thm. 7.6] (= [Ach17, 2.3.3]) und dessen Folgerung [Ach17, 2.3.4]. Dann benutze man dies um den allgemeinen Fall des Bertini-Theorems abzuhandeln. [Ach17, §3.2].

Vortrag 7: Ètale kontrahierbare glatte Varietäten in positiver Charakteristik sind trivial.
Man stelle das Ergebnis von [HSS14] vor beschränke sich aber auf den Fall glatter, quasi-projektiver Varietäten (wo reiche Divisoren „groß“ sind).

Literatur

[Ach17] P. Achinger. Wild ramification and $K(\pi, 1)$-spaces. *arXiv:1701.03197 [math.AG]*, 2017.
[AM69] M. Artin and B. Mazur. *Etale homotopy.* Springer-Verlag, Berlin, 1969.
[Gab94] O. Gabber. Affine analog of the proper base change theorem. *Israel J. Math.*, 87(1-3):325–335, 1994.
[HSS14] A. Holschbach, J. Schmidt, and J. Stix. Étale contractible varieties in positive characteristic. *Algebra Number Theory*, 8(4):1037–1044, 2014.
[Lau81] G. Laumon. Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne). In *The Euler-Poincaré characteristic*, volume 83 of *Astérisque*, pages 173–219. Soc. Math. France, Paris, 1981.
[Sai17] Takeshi Saito. The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf. *Invent. Math.*, 207(2):597–695, 2017.

Alexander Schmidt, Ruprecht-Karls-Universität, Mathematisches Institut, Im Neuenheimer Feld 205, 69120 Heidelberg, Deutschland
E-mail address: schmidt@mathi.uni-heidelberg.de