Seminar Bewertungstheorie

Seminar im Sommersemester 2013
Prof. Dr. A. Schmidt, J. Schmidt

Inhalt

Auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist eine natürliche Abstandsfunktion durch

$$d(x, y) = |x - y|$$

gegeben, wobei $|\ |$ der Absolutbetrag ist. Durch einen wohlbekannten Vervoll-ständigungsprozess erhält man die reellen Zahlen, die für die Analysis unverzichtbar sind. Dieses Vorgehen kann von $\mathbb{Q}$ auf beliebige Körper verallgemeinert werden, wobei der Absolutbetrag durch sogenannte *Bewertungen* ersetzt wird. Selbst auf den rationalen Zahlen gibt es noch mehr Bewertungen als den gewöhnlichen Absolutbetrag (zu jeder Primzahl eine). Diese sind in der Zahlentheorie von großer Bedeutung.

Im Rahmen des Seminars wollen wir Bewertungen auf Körpern kennenlernen. Nachdem wir die grundlegenden Begriffe der Bewertungstheorie erarbeitet haben, studieren wir Fortsetzungen von Bewertungen auf geeignete Körpererweiterungen, Verzweigungs- und Trägheitsverhalten solcher Fortsetzungen, sowie die Galoistheorie bewerteter Körper. Wir wollen uns dabei an dem Buch [EP05] orientieren.

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich vornehmlich an Studentinnen und Studenten in den Studiengängen *Bachelor Mathematik* (ab dem 4. Semester) und *Master Mathematik*. Vorkenntnisse im Umfang der Vorlesung *Algebra I* werden vorausgesetzt. Allen, die planen, sich in den Bereichen Algebra, Zahlentheorie bzw. algebraische Geometrie zu vertiefen, ist dieses Seminar sehr zu empfehlen.

Zeit und Ort

Dienstags, 14 – 16 Uhr, INF 288, HS 1, erster Termin 16.04.2013

Kontakt

Johannes Schmidt,
INF 288, Raum 008
`jschmidt@mathi.uni-heidelberg.de`,
Tel. +49-6221-54-6271

Anmeldung und Vortragsvergabe

bei der Vorbesprechung am Dienstag, 05.02.2013, 14 Uhr c.t., INF 288, HS 3. Danach per Email an obige Adresse.

Vorträge

Vortrag 1: Geordnete abelsche Gruppen und Bewertungen auf Körpern
(16.04.2013)

Zunächst soll der Inhalt von [EP05] Kapitel 2.1 ausschließlich Thm. 2.1.4 und vorhergehende Bemerkungen behandelt werden. Danach (zumindest als Skizze): Thm. 2.2.1. Die Eindeutigkeitsaussage von Cor. 2.2.3 sollte erwähnt werden. Der Fall $\Gamma = 0$, $\Gamma' = \mathbb{Z}$ und $\gamma = 1$ sollte als erstes Beispiel einer nichttrivialen Bewertung (X-adische Bewertung von $k(X)$) angeführt werden. Ebenfalls (als Skizze) sollte Cor. 2.2.2 erwähnt werden (Gaußfortsetzung von k auf $k(X)$).

Vortrag 2: Abhängigkeit von Bewertungen und induzierte Topologie einer Bewertung
(23.04.2013)

Der gesamte Inhalt von [EP05] Kapitel 2.3: Abhängige Bewertungen, Erweiterungsringe von $\mathcal{O}$ in K vs. Primideale von $\mathcal{O}$ vs. konvexe Untergruppen von Γ, Komposition von Bewertungen sowie die induzierte Topologie auf K, erste Eigenschaften und der Zusammenhang zur Abhängigkeit von Bewertungen.

Vortrag 3: Vervollständigung eines bewerteten Körpers
(30.04.2013)

Wie in [EP05] Kapitel 2.4 soll der Begriff der Vollständigkeit und Vervollständigung eingeführt werden (insbesondere muss mit durch Kardinalzahlen indizierten Cauchy-Folgen gearbeitet werden). Danach soll die Existenz und Eindeutigkeit einer Vervollständigung gezeigt werden ([EP05] Thm. 2.4.3). In Kapitel 2.4 ist eine Skizze angegeben, die Details sollten wie im Beweis von Thm. 1.1.4 ausgeführt werden. Weiter sollen Prop. 2.4.4 und Thm. 2.4.5. angegeben werden – sollte es die Zeit erlauben: mit Beweis(-Skizze).

Vortrag 4: Beispiele: Die Bewertungen von $\mathbb{Q}$ und $k(X)$ sowie die p-adischen Zahlen und formale Laurentreihen
(07.05.2013)

Für p prim in $\mathbb{Z}$ oder $k[X]$ soll [EP05] Kapitel 1.3 für das Beispiel der p-adischen Bewertung von $\mathbb{Q}$ oder $k[X]$ behandelt werden. Sollte die Zeit nicht ausreichen, kann der Beweis des Henselsschen Lemmas (Thm. 1.3.1) ausgelassen werden. Auch soll die Grad-Bewertung v_∞ von $k(X)$ eingeführt, sowie die Klassifikation aller Bewertungen von $\mathbb{Q}$ bzw. $k(X)$ trivial auf k gezeigt werden (s.h. [EP05] Thm. 2.1.4).

Vortrag 5: Approximation
(14.05.2013)

Ziel des Vortrages ist der Beweis von [EP05] Thm. 2.4.1 und Thm. 2.4.7. Sollte noch Zeit sein, so sollte als Nachtrag zum vorherigen Vortrag das Beispiel aus Rem. 2.4.6 besprochen werden.

Vortrag 6: Fortsetzung von Bewertungen auf algebraische Erweiterungen I
(21.05.2013)

Der gesamte Inhalt von [EP05] Kapitel 3.1 (Fortsetzungen auf beliebige Erweiterungen, Satz von Chevalley) sowie der Inhalt von Kapitel 3.2 bis einschließlich 3.2.5 (induzierte Erweiterungen von Restklassenkörpern und Wertegruppen) soll behandelt werden.

Vortrag 7: Fortsetzung von Bewertungen auf algebraische Erweiterungen II
(28.05.2013)

Der Inhalt von [EP05] Kapitel 3.2 Lem. 3.2.6 bis Thm. 3.2.13 soll behandelt werden (die Normalisierung eines Bewertungsringes in einer algebraischen Erweiterung).

Vortrag 8: Fortsetzung von Bewertungen auf normale und galoissche Erweiterungen
(04.06.2013)

Der verbleibende Teil von [EP05] Kapitel 3.2 soll behandelt werden (Thm. 3.2.14 bis Prop. 3.2.16). Danach soll für L/K endlich galoissch mit Fortsetzungen $\mathcal{O}_i/\mathcal{O}$ des Bewertungsringes die „Fundamentale Ungleichung“

$$\sum_i e(\mathcal{O}_i/\mathcal{O})f(\mathcal{O}_i/\mathcal{O}) \leq [L : K]$$

gezeigt werden ([EP05] Lem. 3.3.1 und 3.3.2).

Vortrag 9: Henselsche Bewertungen
(11.06.2013)

Der Inhalt von [EP05] Kapitel 4.1 bis einschließlich des Krasnerschen Lemmas (Thm. 4.1.7). Sollte noch genug Zeit sein, so soll der Begriff der algebraischen Maximalität eines bewerteten Körpers sowie Thm. 4.1.10 behandelt werden.

Vortrag 10: Proendliche Gruppen und Galoistheorie
(18.06.2013)

Der gesamte Inhalt von [EP05] Kapitel 5.1: Der Begriff der proendlichen Gruppe und erste Eigenschaften, $\mathrm{Gal}(N/K)$ ist proendlich für N/K galoissch sowie die proendliche Galois-Korrespondenz (letztere als Zitat).

Vortrag 11: Unverzweigte Erweiterungen
(25.06.2013)

Der gesamte Inhalt von [EP05] Kapitel 5.2: Zerlegungsgruppe und -körper von $\mathcal{O}^s/\mathcal{O}$, Henselisierung, Trägheitsgruppe und -körper von $\mathcal{O}^s/\mathcal{O}$.

Vortrag 12: Träge Erweiterungen I
(02.07.2013)

Der Inhalt von [EP05] Kapitel 5.3. bis einschließlich Thm. 5.3.3 (1) und (2) soll behandelt werden (inklusive Lem. 5.3.4).

Vortrag 13: Träge Erweiterungen II und die Fundamentale Ungleichung
(09.07.2013)

Der Rest von [EP05] Thm. 5.3.3 (d.h. (3) bis (6)) soll behandelt werden. Mittels Cor. 5.3.8 soll danach Thm. 3.3.3 und Thm. 3.3.4 bewiesen werden.

Literatur

[EP05] A.J. Engler and A. Prestel, *Valued Fields*, Springer 2005.
`http://link.springer.com/book/10.1007/3-540-30035-X/`