Arithmetische Flächen

Seminar im Sommersemester 2016
Dr. M. Witte und K. Hübner

Inhalt

Gegeben sei eine glatte projektive Kurve C über einem Zahlkörper k. Da diese durch endlich viele Gleichungen gegeben ist, kann man sie zu einem glatten, projektiven Schema der relativen Dimension 1 über einem offenen Unterschema von $S = Spec(\mathcal{O}_k)$ fortsetzen. Es stellt sich nun die Frage, ob man eine reguläre Fortsetzung $\mathcal{C}$ über ganz S finden kann, und ob und in welchem Sinne diese eindeutig ist. Eine solche Fortsetzung ist dann ein ganzes, eigentliches und flaches S-Schema der Dimension 2. Man spricht auch von einer arithmetischen Fläche. Die arithmetische Fläche $\mathcal{C}$ wird dann reguläres Modell von C genannt. Es stellt sich heraus, dass man stets reguläre Modelle finden kann. Unter den regulären eigentlichen Modellen gibt es stets ein kleinstes, das sogenannte *minimale reguläre Modell*. Alle anderen regulären Modelle entstehen aus diesem durch Aufblasung (in Geschlecht ≥ 1). Die regulären Modelle sind jedoch im allgemeinen nicht glatt, sondern es gibt schlechte Fasern. Für manche Punkte s von S wird man gar kein Modell $\mathcal{C}$ finden, so dass $\mathcal{C}$ in s glatt ist. Dies sind die Punkte schlechter Reduktion von C.

Ziel des Seminares ist es, die Theorie von arithmetischen Flächen und der minimalen Modelle zu entwickeln. Diese Theorie hat viele Anwendungen in der Arithmetik. Insbesondere ist sie essentiell für das Studium k-rationaler Punkte auf der Kurve C.

Wir gehen nach

Liu, Q. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, Paperback, 2006.

vor. Alle Zitate unten beziehen sich auf dieses Buch.

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich vornehmlich an Studenten im Studiengang *Master Mathematik*. Gute Grundkenntnisse der algebraischen Geometrie werden vorausgesetzt.

Zeit und Ort

Dienstag, 14 – 16, Ort wird noch bekanntgegeben.

Kontakt

Dr. Malte Witte,
INF 288, Raum 109
`witte@mathi.uni-heidelberg.de`,
Tel. +49-6221-54-5642

Anmeldung und Vortragsvergabe

bei der Vorbesprechung am Donnerstag, 04.02.2016 INF 288, HS 4.

Vorträge

Vortrag 1: Gefaserte Flächen und Desingularisierung

Abschnitt 8.3.1 (Theorem 3.16 ohne Beweis). Dazu (auch ohne Beweis) Thm. 3.42 und 3.44 vorstellen. Dann Example 3.53 und 3.54. Sei $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ das Spektrum eines Zahlrings oder allgemeiner ein beliebiges Dedekindschema. Unter einer gefaserten Fläche verstehen wir ein ganzes, projektives und flaches S-Schema X der Dimension 2. Ist X außerdem regulär (und die Basis S eindimensional), so sprechen wir von einer arithmetischen Fläche. Jede gefaserte Fläche über $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ (oder S exzellent und eindimensional) kann durch eine endliche Folge von Aufblasungen und Normalisierungen in eine arithmetische Fläche transformiert werden.

Vortrag 2: Bewertungen und Modelle

Punkte der Kodimension 1 auf einer gefaserten Fläche X entsprechen Bewertungen des Funktionenkörpers von X. Bewertungen spielen eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie der Zariski-Schule und sind auch heute noch nützlich. In diesem Vortrag soll die Verbindung zwischen der modernen Schema-Sprache nach Grothendieck mit der bewertungstheoretischen nach Zariski in Verbindung gebracht werden. Abgedeckt werden soll Abschnitt 8.3.2 und Ex. 3.14.

Vortrag 3: Kontraktion

Es soll Abschnitt 8.3.3 über Kontraktion („Herunterblasen“) behandelt werden. Ziel ist es, zu zeigen, dass man vertikale Divisoren auf einer normalen gefaserten Fläche zu Punkten kontrahieren kann, falls S das Spektrum eines henselschen DBR ist. Alles bringen und Ex. 3.5, 3.8 und 3.20 vorrechnen.

Vortrag 4: Schnitttheorie auf regulären Flächen

Wir studieren das Schnittprodukt auf regulären Flaächen auf elementare Weise, ohne auf die allgemeine Theorie von Fulton zurückzugreifen. Abschnitt 9.1.1, Beweise von 1.9 und 1.11 können weggelassen werden. Dann Abschnitt 9.1.2 bis einschließlich Example 1.22. Abschnitt 9.1.2 Theorem 1.23, dann Corollary 1.24 aber den Begriff der kohomologischen Flachheit vermeiden sondern das Ergebnis in der Form

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \xrightarrow{\sim} H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$$

formulieren. Dann alles bis 1.27 und 1.29 bis 1.32 aus Abschnitt 9.1.3.

Vortrag 5: Der kanonische Divisor

Führe die Eigenschaft „lokal vollständiger Durchschnitt“ für Morphismen nach Abschnitt 6.3.2 ein. Dann definiere die kanonische Garbe nach Abschnitt 6.4.2. Formuliere unter Verwendung der kanonischen Garbe das Riemann-Roch Theorem 7.3.26 (ohne Beweis) für Kurven, die lokal vollständige Durchschnitte sind. Dann zeige man Cor. 3.31. Schließlich gehe man zu Abschnitt 9.1.3 und mache 1.34 bis 1.37.

Vortrag 6: Faktorisierungssatz und Projektionsformel

Nach dem Faktorisierungssatz lässt sich jeder Morphismus $f\colon Y \to X$ regulärer gefaserter Flächen in eine endliche Folge von Aufblasungen von Punkten faktorisieren. Das Schnittprodukt auf X und Y hat die vom Fall $S = \operatorname{Spec} k$ bekannten Transformationseigenschaften bezüglich f, wenn man sich auf vertikale Divisoren beschränkt. Abschnitt 9.2.1, insbesondere Theoreme 2.2 und 2.7. Dann Theorem 2.12 und alles aus Abschnitt 9.2.2 was man dazu braucht.

Vortrag 7: Castelnuovos Kriterium

Falls S nicht das Spektrum eines henselschen DBR ist, ist es nicht immer möglich, vertikale Divisoren zu kontrahieren. Das Kriterium von Castelnuovo beschreibt, wann genau wir einen Divisor auf einer regulären gefaserten Fläche so kontrahieren können, dass der Kontraktionspunkt sogar wieder regulär ist. Hier soll Castelnuovos Kriterium bewiesen werden (der ganze Abschnitt 9.3.1).

Vortrag 8: Minimalflächen

Jede reguläre arithmetische Fläche kann nur endlich oft heruntergeblasen werden (ohne die Regularität zu verlieren), dann landet man bei einer relativen Minimalfläche, die keine Kontraktionen mehr zuläßt. Ist die generische Faser vom Geschlecht ≥ 1, so gibt es ein eindeutiges minimales Modell. Abschnitt 9.3.2 und 9.3.3 bis einschließlich Theorem 3.21

Vortrag 9: Reguläre Modelle und Reduktion glatter Kurven

Hier soll der Inhalt von Abschnitt 10.1 dargestellt werden. Insbesondere soll erklärt werden, was (potentiell) gute Reduktion ist, und Kriterien (1.24, 1.29) gegeben werden. Sei S ein Dedekindschema der Dimension 1 mit Funktionenkörper k. Ein reguläres Modell einer k-Kurve C ist eine arithmetische Fläche $\mathcal{C}$ über S mit generischer Faser C. Die spezielle Faser von $\mathcal{C}$ in einem abgeschlossenen Punkt s von S heißt eine Reduktion von C in s. Die Reduktionen enthalten viel Information über die Arithmetik der Kurve C. Eine Kurve C hat gute Reduktion in s, wenn C in der Umgebung von s ein glattes Modell besitzt. Nicht jedes s ist von guter Reduktion, aber es gibt Kriterien (1.24, 1.29), in welchen s die Kurve C gute Reduktion hat.