# GEOMETRIE UND KOMMUTATIVE ALGEBRA - WS 2016/17

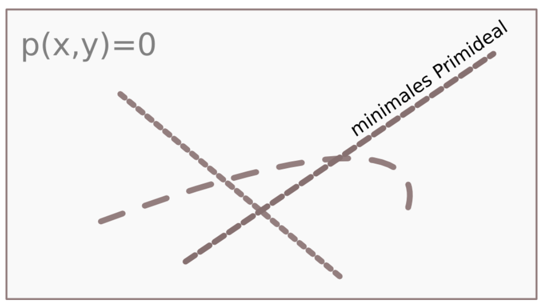
## Notation

- $k$ ist immer ein algebraisch abgeschlossener Körper.
- Eine Varietät über $k$ ist immer irreduzibel.
- Ringe: $A$, $R$,... Ideale: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$; Primideale: $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, Maximalideale: $\mathfrak{m}$.

## Vorträge

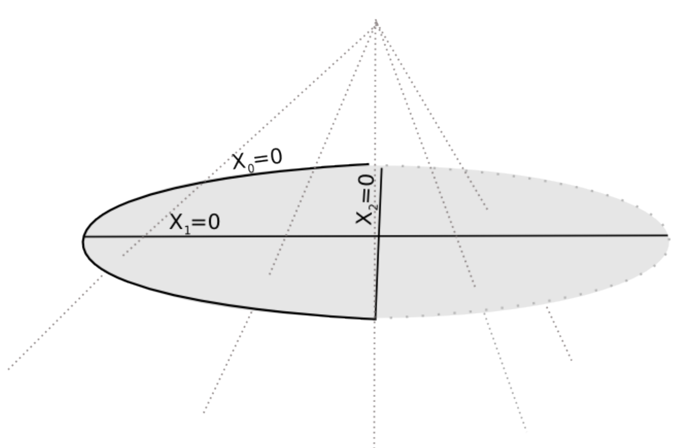
**1 - Dimensionstheorie - Lukas Waas(M).** Definition der Dimension eines Ringes ([AM69, pp. 89-90] oder [Har77, p. 6]) und der Höhe eines Primideals ([AM69, p. 120]). Beide Definitionen sind auch in [Eis94, p. 225]. Beispielen zu erklären: $dim(k) = 0$, wobei $k$ ein Körper ist; $dim(A) = 1$ wobei $A$ ein Hauptidealring ist, der kein Körper ist (insbesondere, $dim(k[x]) = 1$); $dim(A) = 0$ wobei $A$ ein artinsch Ring ist ([AM69, Prop. 8.1]). Ziel dieser Vortrag ist Krulls Hauptidealsatz ([AM69, Cor. 11.17] oder [Eis94, Thm. 10.1]) zu zeigen. Wir folgen den Beweis von [Eis94]. Am Ende ist [Eis94, Thm. 10.2] zu zeigen (ohne [Eis94, Cor. 2.17] zu benutzen, man kann es explizit beweisen).

Bild:




**2 - Graduierte Ringe und projektive Räume - Menelaos (B).** Definitionen: graduierte Ringe, $\mathbb{P}^n_k$ und algebraische Teilmengen von $\mathbb{P}^n_k$, Zariski Topologie über $\mathbb{P}^n_k$ ([Har77, pp. 8-9] oder [GW10, Sec. 1.20-1.21]). Beweisen Sie [Har77, Prop. 2.2] und [Har77, Cor. 2.3]. Definieren Sie projektive und quasi-projektive Varietäten.

Bild: $\mathbb{P}^2_k$

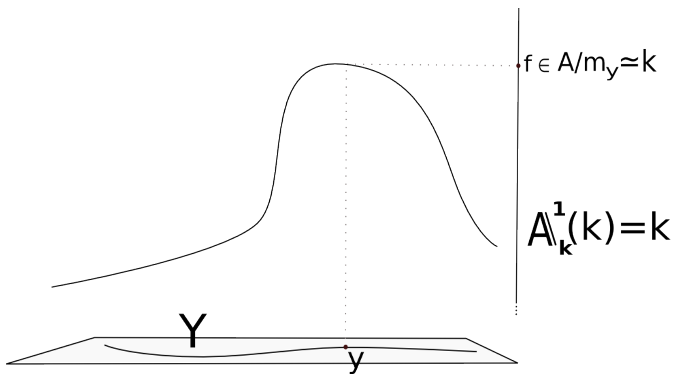


**3 - Reguläre und rationale Abbildungen - Max Witzelsperger (M).** Definition einer regulären Abbildung $f : Y \to X$ wobei $X$ und $Y$ zwei quasi-projektive Varietäten sind. Definition regulären Morphismen ([Har77, p. 15]). Beweisen Sie, dass reguläre Morphismen $f : X \to K$ stetig sind ([Har77, Lemma 3.1]). Geben Sie ein Gegenbeispiel der andere Richtung.

Sei $Y \subset k^n$ eine affine Varietät (d.h. eine irreduzible algebraische Teilmenge) und $\mathcal{O}(Y)$ die Menge der regularen Abbildungen $f : Y \to K$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}(Y) \simeq K[X_1, \dots X_n]/I(Y)$.

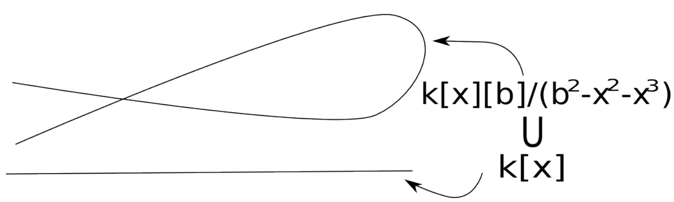
Zeigen Sie, dass die Menge der regulären Abbildungen $f : X \to Y$ wobei $X \subset K^n$ und $Y \subset K^m$ zwei algebraischen Teilmengen sind, isomorph zu $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)))$ ist (sehen Sie den Beweis von [GW10, Prop. 1.33]). Defintion einer rationalen Abbildung ([Har77, p. 24]). Zeigen Sie, dass die Menge der rationalen Abbildungen $Y \dashrightarrow k$, wobei $Y$ eine affine Varietät ist, isomorph zu den Quotientskörper von $\mathcal{O}(Y)$ ist.

Bild:



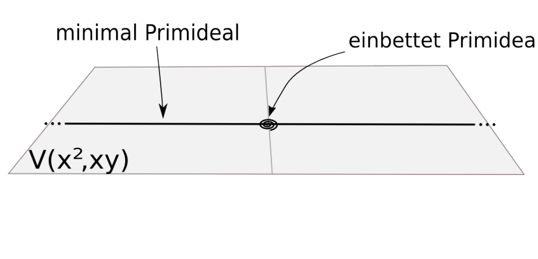

**4 - Noethernormalisierung und Dimension einer algebraischer Teilmenge - Akinori (M).** Bewesien Sie Noethernormalisierungssatz ([AM69, Ex. 16 p. 69], wir nehmen an, dass $K$ algebraisch abgeschlossen, insbesonders unendlich, ist). Zeigen Sie, dass wenn $A \subset B$ ein ganz Ringerweiterung ist, ist $\dim A = \dim B$ ([Gat13, Lemma 11.8], wir nehmen an Going Up und Lying over Lemmata, die Sie in Algebra 2 Vorlesung oder in [AM69, Thm 5.9-5.10] finden können). Wir nehmen an, dass $\dim K[X_1, \dots, X_n] = n$. Zeigen Sie dann $\dim A = \mathrm{trdeg}_K \mathrm{Quot}(A)$ ([Gat13, p. 11.31]).

Bild:



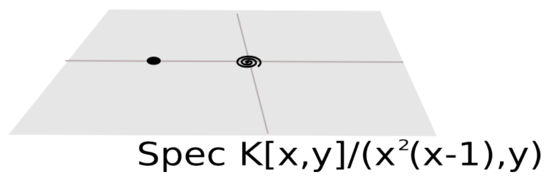

**5 - Minimale Primideale und irreduzible Komponenten - Joseph Meyer (M).** Definition aus primäre Ideal ([AM69, p. 50]) und Primärzerlegung ([AM69, p. 51]). Zeigen Sie, dass wenn $I \subset A$ ein Ideal von einen noethersch Ring ist, dann hat er eine Primärzerlegung ([AM69, Thm. 13]). Definieren Sie minimalen und eingebetteten Primideale, zusammen mit [AM69, Thm. 4.5] (ohne Beweis). Zeigen Sie, dass die minimalen Primideale von $A/I$ (die sind in Bijektion mit die minimalen Primidealen von $A$ über $I$) sind die irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Spec}\, A/I$, und dass $\mathrm{Spec}\, A/I$ genau dann irreduzibel ist, wenn jede Nullteiler ein Nilpotent ist. Geben Sie den Beispiel [AM69, p. 50].

Bild:



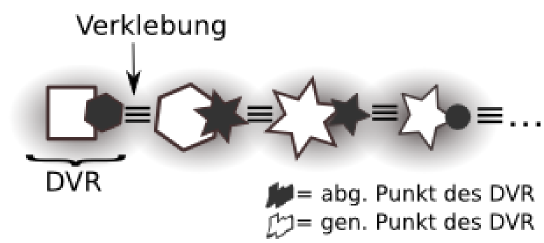
**6 - Zusammenhangskomponenten und diskrete Räume - Dario Weißmann(M).** Definition der Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raums, beweisen Sie [Eis94, Ex. 2.25] (der erste Teil wurde in der Vorlesung schon beweist). Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass wenn $X$ ein noetherscher topologischer Raum ist, hat $X$ endliche viele irreduzible Komponenten. Zeigen Sie dass er hat endliche viele Zusammenhangskomponenten, insbesondere zeigen Sie, dass es gilt für $\operatorname{Spec} A$, wobei $A$ noethersch ist (z.B. eine endliche $K$-algebra). Beweisen Sie den Struktursatz für artinsche Ringe ([AM69, Thm. 8.5]). Deswegen brauchen Sie auch [AM69, Cor. 6.11], [AM69, Cor. 7.15](ohne [AM69, Prop. 7.14] zu benutzen: benutzen Sie ansonsten, dass Idealen endlich erzeugt in artinschen Ringe sind), [AM69, Prop. 8.1] und [AM69, Prop. 8.3], während [AM69, Prop. 6.3]) und [AM69, Prop. 1.11] kennen wir schon. Zeigen Sie, dass wenn $A$ artinsch ist, ist $\operatorname{Spec} A$ endlich und diskret.

Bild:



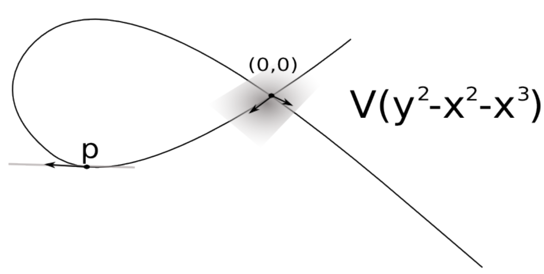

**7 - Abgeschlossene Punkte und lokale eigenschaften - Milan Malcic (M).** Die Definition von lokale eigenschaft wurde (hoffentlich) in der Vorlesung schon gegeben (Def. 3.13). Beispiel von lokale eigenschaften: Übung 2.19 in [Eis94, p. 83]. Erklären warum abgeschlossene Punkten zu haben ist *nicht* eine lokale Eigenschaft. Zeigen Sie, dass alle quasi-kompakte Schemata einen abgeschlossene Punkt haben ([Sch13, Prop. 4.1]). Zeigen Sie, dass Abgeschlossene Punkte (sehr!) dicht in einer Schema lokal von endlichen Typ über $K$ sind([GW10, Def. 3.34, Prop. 3.35]). Wenn $Y$ eine algebraische Teilmenge ist, ist $Y$ die Menge von abgeschlossenen Punkten von $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(Y)$, insbesondere zeigen Sie, dass es gilt: $\dim Y = \dim \operatorname{Spec} \mathcal{O}(Y)$.

Bild:
Beispiel von ein Schema ohne abgeschlossenen Punkten



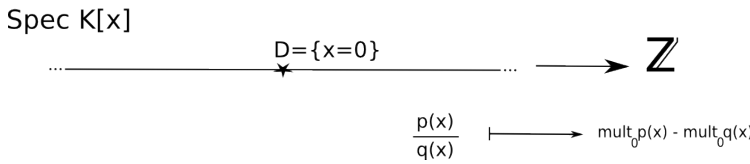

**8 - Reguläre Ringe und Jacobi Matrix - Rustam Steingart (M).** Sei $A$ ein lokaler noetherscher Ring mit Maximalideal $\mathfrak{m}$. Benutzen Sie Nakayama Lemma (mehr spezifisch [AM69, Prop. 2.8]) zu zeigen [AM69, Thm. 11.22], aber *nur* $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Wiederholen Sie die Definition der Hohe eines Primideal, und benutzen Sie Krulls Hauptidealsatz von Vortrag 1 [Har77, Prop. 5.2A] zu zeigen. Geben Sie die Definition eines regularen lokalen Ringes und einer nichtsingularen Varietät ([Har77, pp. 31-32]). Beweisen Sie [Har77, Thm. 5.1], d.h. regularität eines Punkts ist unabhängig von die Darstellung der Varietät. Geben Sie [Har77, Thm. 5.3], ohne Beweis. Zeigen Sie, dass $K[x,y]/x^n - 1$ nonsingular ist genau dann, wenn $\operatorname{char} k \nmid n$ .

Bild:



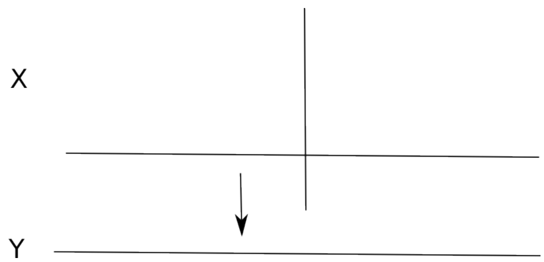
**9 - DVR und Divisoren über normalen Varietäten - Sebastian Dobrzynski (M).** Erinnen Sie die Definition von DVR (z.B. [AM69, p. 94]). Ziel dieser Vortrag ist zu zeigen, dass jeder Kodimension 1 Punkt eines normalen Schemas $X$ von endlichen Typ definiert eine diskrete Bewertung über $K(X)$. Zeigen Sie [Eis94, p. 11.2] und erklären Sie warum das impliziert, dass wenn $P$ ein Kodimension 1 punkt in $X$ ist, ist $\mathcal{O}_P$ regulär und ein $DVR$. Definieren Sie Weil Divisoren [GW10, Def. 11.34] und Cartier Divisoren [GW10, Def. 11.24] und definieren Sie die Abbildung cyc ([GW10, Eq. 11.13.3] nur wenn $X$ normal ist).

Bild:




**10 - Flache Ringe und relative Dimension - Akin Ünal (M).** Dimension der Fasern eines flachen Morphismus ( [Har77, Prop. III 9.5, Cor. 9.6]).

Bild:
Beispiel eines nicht flachen Morphismus




**11- Tensorprodukt und $f^*$ - Lukas Bold (M).** Definition von $f_*$, Beispiel wo $f_*$ nicht exakt ist, $f^*$ und $f_*$ sind adjungierte Funktoren, Projektionsformel.

## References


[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, 1969, pp. ix+128.

[DPS15] V. Di Proietto and A. Shiho. *On the homotopy exact sequence for the log algebraic fundamental group.* `http://www.mi.fu-berlin.de/users/diproietto/files/logHES.pdf`. 2015.

[Eis94] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Vol. 150. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1994, pp. xvi,785.

[Gat13] A. Gathmann. *Commutative Algebra - Chapter 11.* `http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/commalg-2013/chapter-11.pdf`. 2013.

[GW10] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic geometry I.* Advanced Lectures in Mathematics. Schemes with examples and exercises. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010, pp. viii+615. ISBN: 978-3-8348-0676-5. DOI: `10.1007/978-3-8348-9722-0`. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9722-0`.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Vol. 52. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.

[Sch13] K. Schwede. *Gluing schemes and a scheme without closed points.* `http://math.stanford.edu/~vakil/files/schwede03.pdf`. 2013.