Briefwechsel Hasse–van der Waerden

Version von Donnerstag, 17.04.2003, Gesamtfile
Für PDFLaTeX/hyperref
und LaTeX2e/hyperref

Hasse an van der Waerden 09.07.34 – 02.02.68
van der Waerden an Hasse 29.05.28 – 03.12.64

(Seiten "Hasse–van der Waerden" vollständig)

Zuletzt geändert am 21.10.2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Letters Hasse–van der Waerden

1.1 29.05.1928, v d Waerden to Hasse

Göttingen, 29. 5. 28.

Lieber Herr Professor,

Eingeschlossen schicke ich Ihnen ein Manuskript, das unter günstigen Bedingungen vielleicht den Anfang einer Verständigung zwischen der Jungschen Richtung in der Theorie der algebraischen Flächen und der Idealtheorie anbahnen könnte. Es wird Ihnen wahrscheinlich klarmachen, was mit den Jungschen Primteilern genau gemeint ist und wie sie sich einordnen, während Prof. Jung hier vielleicht sehen wird, was die Idealtheorie mit seinen Sachen zu tun hat. Ich habe die Arbeit noch etwas umgearbeitet und vereinfacht durch stärkere Heranziehung der Primäridealzerlegung; ich schicke Ihnen aber die ältere Fassung, weil sie die Primärideale vermeidet und daher vermutlich etwas leichter für Nichteingeweihte zu verstehen ist. Ich schicke Ihnen jetzt die Arbeit mit der Bitte, sie nach Einsichtnahme an Prof. Jung weiter zu geben und eventuell diesem Aufklärung zu geben über die ihm unbekannten algebraischen Begriffe, die in dem Manuskript vorkommen.

Die Arbeit ist für die Annalen gedacht: Frl. Noether wird sie einschicken.

Mit besten Grüßen

Ihr ergebener

B. L. v. d. Waerden

1.2 20.08.1928, v d Waerden to Jung

Herrn
Prof. Dr. H. W. E. Jung,
Halle a/d Saale.

Amsterdam, 20. 8. 28.

Sehr geehrter Herr Kollege,

Ich danke Ihnen schön für Ihren ausführlichen Brief vom 4. Juli. Ich hatte leider soviel zu tun, daß ich Ihnen erst jetzt darüber schreiben kann.

Ich bedaure es sehr, mich in meiner Arbeit offenbar noch in einigen Punkten nicht genügend klar ausgedrückt zu haben, wodurch noch Raum für einige Mißverständnisse übriggeblieben ist. Um mich bequem beziehen zu können, schließe ich § 5 meiner Arbeit noch einmal ein (ich brauche die Kopie nicht wieder zu haben).

Es ist ein Mißverständnis, daß meine Ideale definitionsgemäß so eingeschränkt sind, daß sie nicht alle Primdivisoren erzeugen. Denn ich habe in Satz 12 bewiesen, daß alle Primdivisoren von höheren Primidealen erzeugt werden, und meine Definition der Primdivisoren stimmt mit der Ihren inhaltlich genau überein. Allerdings muß man, wie der Wortlaut von Satz 12 zeigt, um alle Primdivisoren zu erhalten, sich nicht auf Ideale in *einem* Ring im Funktionenkörper beschränken, sondern zu jedem Primdivisor einen passenden Ring suchen. Dann aber erhält man alle, auch die "Punktprimteiler", die bei einer passenden Repräsentation des Körpers durch eine algebraische Fläche als "ausgezeichnete Kurven" erscheinen.

Daß ein Primteiler eines Körpers durch einen anderen derselben Stufe teilbar sein kann, ist, wie ich Ihnen zu zeigen hoffe, ein Irrtum. Nehmen wir den Fall von 2 unabhängigen Veränderlichen, und Primteiler 1. Stufe (d. h. Zuordnungen zu Funktionen einer Veränderlichen). Ich nenne einen Primteiler $\underline{P}_1$ durch $\underline{P}_2$ teilbar (und Sie werden wohl von derselben Definition ausgehen), wenn alle Funktionen die durch $\underline{P}_1$ teilbar sind, auch durch $\underline{P}_2$ teilbar sind. In diesem Falle werden zwei Funktionen, die für $\underline{P}_1 = 0$ einander gleich werden, auch für $\underline{P}_2 = 0$ einander gleich. Ist nun $\underline{K}$ der Ausgangskörper, $\underline{K}_1$ und $\underline{K}_2$ die Körper einer Veränderlichen, und sind

$f \longrightarrow f_1$ bzw. $f \longrightarrow f_2$ die durch $\underline{P}_1$ und $\underline{P}_2$ vermittelten Zuordnungen, so wird $f_1 \longrightarrow f_2$ eine Abbildung des Körpers $\underline{K}_1$ auf den Körper $\underline{K}_2$ + Symbol ∞, welche wieder alle algebraischen Relationen erhält.

Entweder nun ist diese Zuordnung eineindeutig, dann ist $\underline{P}_1 = \underline{P}_2$. Oder die Zuordnung $\underline{K}_1 \longrightarrow \underline{K}_2$ ist ein Primteiler 1. Stufe des Körpers $\underline{K}_1$, dann ist $\underline{K}_2$ kein Körper einer Veränderlichen mehr.

In Ihrem Beispiel

$$\underline{\mathfrak{P}}_1 = (\underline{\mathfrak{C}})_{y^2=x}\,, \qquad \underline{\mathfrak{P}}_2 = (\underline{\mathfrak{C}})_{y=tx^4,\,x\to 0}$$

wird nicht jede Funktion, die durch $\underline{P}_1$ teilbar ist, auch durch $\underline{P}_2$ teilbar, z. B. die Funktion $\frac{y^2-x}{x}$ nicht, denn sie nimmt für $\underline{P}_2 \to 0$ den Wert -1 an. Dasselbe äußert sich auch darin, daß (nach einer passenden birationalen Transformation) der Körper $\underline{K}$ durch eine solche Fläche repräsentiert werden kann, auf der $\underline{P}_1$ und $\underline{P}_2$ durch zwei verschiedene Kurven dargestellt werden.

Ihre (soviel ich Ihre Arbeiten kenne, früher nie so genau ausgesprochene) Definition der Teilbarkeit durch $\underline{P}^\rho$ ist mit meiner idealtheoretischen inhaltlich identisch. Was ich bewiesen habe, sind im wesentlichen nur die "sehr einfachen und trivialen" Tatsachen, die Sie in Ihrem Brief nennen. Aber diese mußten doch einmal genau formuliert und bewiesen werden! Um in der Angelegenheit der algebraischen Funktionen, wie Sie es sagen, Ordnung zu bringen, sind präzise und einfach formulierte Begriffe notwendig; diese zusammenzustellen, war das Ziel meines Zusatzparagraphen. Die eigentlichen Schwierigkeiten kommen — das gebe ich voll zu — erst nachher.

Daß ich bei meiner Einordnung versucht habe, die in der Algebra übliche Terminologie nicht zu verletzen, werden Sie wohl verstehen. Unter "Körper" verstand man bis jetzt immer einen Bereich, wo eine *eindeutige* Multiplikation definiert ist, und das ist mit der Existenz einer Konstanten ∞ mit der Eigenschaft $0.\infty$ = Unbestimmt, unverträglich. Man darf das Symbol ∞ einführen, aber nicht es als Element eines Funktionenkörpers betrachten.

Da Herr Hasse Ihrem Brief eine Unterschrift zugefügt hat, werde ich mit einem Wort gleichzeitig seine Frage beantworten, warum ich die Primteiler in Primdivisoren umbenannt habe. Der Begriff Teiler tritt bei Idealen auf. Nun sind aber Divisoren und Ideale streng zu trennen. Bei mir würde das Wort "Primteiler" als "Primidealteiler" aufgefaßt werden können, was zu Konfusionen Anlaß geben würde. (Man denke an den Ausdruck: "Primteiler einer Funktion f", der sowohl für Idealteiler als für Divisoren Sinn hat). Da das Wort "Divisor" bei Hensel konsequent für die Dedekind–Weberschen

“Polygone”, nicht für Ideale, verwendet wird, lag es auf der Hand, dieses zu wählen.

Ich werde die Stelle auf S. 8, die Herrn Hasse nicht klar war, verdeutlichen. Es sollte aus $\underline{bc} \equiv 0\ (\underline{a^*})$, c niederes Ideal, auf $\underline{b} \equiv 0\ (\underline{a^*})$ geschlossen werden. Aus $\underline{bc} \equiv 0\ (\underline{a})$ folgt $\underline{bc}c_1 \equiv 0\ (\underline{a})$ nach Definition von $\underline{a^*}$, daraus $\underline{b} \equiv 0\ (\underline{a^*})$ wieder nach Definition. Mein Dank für die Bemerkung.

Zur Erleichterung für Sie schicke ich gleich eine Kopie dieses Briefes an Herrn Hasse.

Sollten wir noch einmal korrespondieren, so können Sie selbstverständlich die Hauptarbeiten von M. Noether und die Grundbegriffe Ihrer Arbeiten sowie von denen der Italiener bekannt voraussetzen.

Mit den besten Grüßen

Ihr ergebener

B. L. v. d. Waerden

1.3 03.12.1930, v d Waerden to Hasse

Groningen, 03. 12. 30.

Lieber Herr Hasse,

Besten Dank für Ihren Brief und Kritik an meiner kleinen Note in Annalen 104.

Sehe ich recht, so betrifft Ihre Kritik hauptsächlich den 2. Teil dieser Note, wo ich, nachdem einmal bewiesen ist daß die zu $G_n^{(f)}$ (in Ihren Bezeichnungen) gehörige linear–abgeschlossene Gruppe $\overline{G}_n^{(f)}$ die Gesamtheit der mit $S_f^{(n)}$ vertauschbaren Matrices ist, daraus die Reduktion der Gruppe $G_n^{(f)}$ explizite herleite.

Daß die Aufstellung der Gesamtheit aller mit einer vollreduziblen Darstellung vertauschbaren Matrices kinderleicht und jedem Fachmann längst bekannt ist, wußte ich. Daß sie in der Schurschen Arbeit "neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere" explizit (und methodisch vernünftiger als in meiner Note) durchgeführt wurde, war mir leider entgangen. Daß man das Ergebnis als "Schursches Lemma" bezeichnet, wußte ich nicht: ich glaubte, das Schursche Lemma beziehe sich auf eine irreduzible Gruppe. Aber wie gesagt, das Ergebnis kam mir als eine Selbstverständlichkeit vor. Daß ich es trotzdem noch begründet habe, hat 2 Gründe: erstens wollte ich mich leichtverständlich ausdrücken auch für die vielen Physiker, die mit den viel zu komplizierten Beweisen in Weyls Quantenbuch kämpfen, und zweitens wollte ich das unter "drittens" genannte Nebenresultat, auf das Weyl das Hauptgewicht legt, auch mit herausbekommen und das geht am leichtesten, indem man die Transformationen $e_1, e_2, \dots$ wirklich angibt.

Hätte ich erwartet, daß man mir aus der ausführlichen Begründung der erwähnten Trivialität einen Vorwurf machen würde, so hätte ich mich deutlicher ausgedrückt und statt "sehr leicht" geschrieben "bekanntlich sehr leicht". Es war mir aber nicht der Mühe wert, die Literatur nachzuschlagen nach möglichen Zitaten.

Unverständlich ist mir nur, daß Weyl, der doch aus der Schurschen Arbeit von 1927 so gut wie ich wissen müßte, daß alles ankommt auf die Tatsache, daß $\overline{G}_n^{(f)}$ die Gesamtheit der mit $S_f^{(n)}$ vertauschbaren Matrices ist, nicht gesehen hat, daß diese Tatsache in seinem Satz über die "symmetrischen Transformationen" schon trivialerweise enthalten ist, sondern einen mehr als 10 Seiten langen Beweis gibt für dieselben Endergebnisse, die ich auf 2 und Sie auf 1/2 Seite herleiten. Diesen einfachen Zusammenhang hervorzuheben, war der Zweck meiner kleinen Note, deren Tendenz Ihnen jetzt vielleicht besser verständlich sein wird.

Der Weylsche direkte Beweis für die ebengenannte Grundtatsache gefällt mir übrigens besser als die mir im Grunde unverständliche Spurenrechnung in der Schurschen Arbeit von 1927. Wieso nennen Sie die beiden Beweise "nicht wesentlich verschieden" ?

Was Sie die "geometrische Einkleidung" nennen: in Wirklichkeit die rein algebraische Auffassung der Matrices als lineare Transformationen oder Automorphismen eines Linearformenmoduls, hat ähnliche Vorteile wie die Dedekindsche Automorphismenauffassung in der Galoisschen Theorie, und ermöglicht die Anwendung der Theorie der Gruppen mit Operatoren in der Darstellungstheorie; vgl. dazu E. Noether, Math. Zeitschr. 30. Aber natürlich ist es nur eine "façon de parler".

Die beim Schurschen Beweis sich mitergebende Vollständigkeit der Darstellungen kann auf anderem Wege mit der Methode des § 3 der Schurschen Arbeit von 1927 erhalten werden.

Ich schicke eine Kopie dieses Briefes an Herrn Schur.

Mit freundlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.4 09.07.1931, v d Waerden to Hasse

LEIPZIG, 9. JULI 1931.

LIEBER HERR HASSE,

Ich habe es nachträglich sehr bedauert, daß ich zu Ihrem Vortrag in Halle nicht da war. Levi und Deuring kamen ganz entzückt zurück.

Ich wollte Ihnen heute eine Sache mitteilen, die ich mir in den letzten Tagen überlegt habe, nämlich eine explizite Formel für das quadratische Reziprozitätsgesetz in quadratischen Zahlkörpern. Die Beweismethode ist völlig elementar und, wie ich nachträglich bemerkte, schon von Dirichlet in Crelle Bd 9 für den Fall des Gaußschen Körpers angegeben. Es wird nämlich einfach das quadr. Reziprozitätsgesetz für den quadratischen Körper auf das für den rationalen zurückgeführt. Da Sie in Ihrem Bericht die explizite Formel für das Reziprozitätsgesetz nur angeben für den ℓ–ten Kreiskörper und für solche Erweiterungskörper, wo $1-\zeta$ nicht zerfällt, so will ich Ihnen die Formel für beliebige quadratische Körper und $\ell = 2$ einmal vorlegen.

1. Es sei k ein quadratischer Körper über dem rationalen Grundkörper Γ. Dann gilt zunächst nach Ihrem Bericht, § 10, (8) für jedes rationale a die triviale Formel:

$$\left(\frac{a|k}{c}\right) = \left(\frac{a|\Gamma}{\mathrm{N}c}\right) \qquad \text{für jedes ungerade Ideal } c\,. \tag{1}$$

Weiter gilt, wenn q eine in k unzerlegbare ungerade rationale Primzahl ist:

$$\left(\frac{\alpha|k}{q}\right) \equiv \alpha^{\frac{q^2-1}{2}} = (\alpha\alpha^q)^{\frac{q-1}{2}} \equiv (\alpha\alpha')^{\frac{q-1}{2}} = (\mathrm{N}\alpha)^{\frac{q-1}{2}} \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\mathrm{N}(\alpha)|\Gamma}{q}\right) \mod q\,,$$

mithin

$$\left(\frac{\alpha|k}{q}\right) = \left(\frac{\mathrm{N}\alpha|\Gamma}{q}\right) \tag{2}$$

(vgl. Ihre Formel § 14,IV, die aber tiefer liegt).

Aus (1) und (2):

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{\alpha|k}{q}\right)\left(\frac{q|k}{\alpha}\right) = \left(\frac{\mathrm{N}(\alpha)|\Gamma}{q}\right)\left(\frac{q|\Gamma}{\mathrm{N}(\alpha)}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{\mathrm{N}\alpha-1}{2}}$$

für $q > 2$, α ungerade.

Damit sind die rationalen Primfaktoren schon erledigt; wir können uns fortan auf solche Zahlen von k beschränken, die keinen rationalen Faktor mehr enthalten. Nebenbei bemerkt: Auch die Ergänzungssätze bei rationalem Primnenner kommen ohne Mühe heraus.

2. Sind $\alpha = \frac{a+b\sqrt{d}}{2}$ und $\gamma = \frac{c+e\sqrt{d}}{2}$ ungerade ganze Zahlen ohne rationale Faktoren, so setzen wir $\alpha e - \gamma b = ae - cb = r$. Dann ist $\alpha e \equiv r \pmod{\gamma}$ und $-\gamma b \equiv r \pmod{\alpha}$. Das ergibt ein Mittel, die Symbole $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ und $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ auf Symbole mit rationalem Zähler zurückzuführen.

Um die Formeln eleganter zu machen, setze ich für jedes ω:

$$\mathfrak{I}(\omega) = \frac{\omega - \omega'}{\sqrt{d}}.$$

$$\mathfrak{I}(\alpha'\gamma) = \frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'}{\sqrt{d}} = \frac{\gamma(\alpha'-\alpha) + \alpha(\gamma-\gamma')}{\sqrt{d}} = \gamma\mathfrak{I}(\alpha') + \alpha\mathfrak{I}(\gamma) =$$

$$= r \begin{cases} \equiv & \gamma\mathfrak{I}(\alpha') \mod \alpha \\ \equiv & \alpha\mathfrak{I}(\gamma) \mod \gamma \end{cases}$$

$$\left(\frac{r|k}{\alpha\gamma}\right) = \left(\frac{r|k}{\alpha}\right)\left(\frac{r|k}{\gamma}\right) = \left(\frac{\gamma|k}{\alpha}\right)\left(\frac{\mathfrak{I}(\alpha')|k}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha|k}{\gamma}\right)\left(\frac{\mathfrak{I}(\gamma)|k}{\gamma}\right)$$

Rechts treten Symbole $\left(\frac{\mathfrak{I}(\omega)|k}{\omega}\right) = \left(\frac{\mathfrak{I}(\omega)|\Gamma}{\mathrm{N}(\omega)}\right) = \left(\frac{\mathfrak{I}(\omega)|k}{\omega'}\right) = v(\omega)$ auf, welche für ungerades ω ohne rationalen Faktor stets $\neq 0$ sind, wie leicht ersichtlich. Links steht $v(\alpha'\gamma)$. Mithin folgt:

$$\text{(4)} \qquad \left(\frac{\gamma|k}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha|k}{\gamma}\right) = \frac{v(\alpha'\gamma)}{v(\alpha')v(\gamma)}.$$

3. Es bleibt die Aufgabe, die Symbole $v(\omega)$ zu berechnen. Ich berechne sie in der Form $\left(\frac{\mathfrak{I}(\omega)|\Gamma}{\mathrm{N}(\omega)}\right)$ und lasse das Zeichen Γ weg.

Fall 1. $\mathfrak{I}(\omega)$ ungerade. $\omega = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{d}$; $\mathfrak{I}(\omega) = y$.

$$v(\omega) = \left(\frac{\mathfrak{I}(\omega)}{\mathrm{N}(\omega)}\right) = \left(\frac{y}{\mathrm{N}\omega}\right) = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{N}\omega}{y}\right) = \varepsilon\left(\frac{4\mathrm{N}\omega}{y}\right) =$$

$$= \varepsilon\left(\frac{x^2 - dy^2}{y}\right) = \varepsilon\left(\frac{x^2}{y}\right) = \varepsilon = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} y-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}\omega-1}{2}+\frac{y-1}{2}\,\frac{N\omega-1}{2}}$$

Fall 2. $\mathfrak{I}(\omega)$ gerade. $\omega = x+y\sqrt{d}\,;\quad \mathfrak{I}(\omega) = 2y = 2^{\lambda}y',\ y'$ ungerade.

$$v(\omega) = \left(\frac{\mathfrak{I}(\omega)}{\mathrm{N}(\omega)}\right) = \left(\frac{2^{\lambda}y'}{x^2 - y^2 d}\right) = \left(\frac{2}{x^2 - y^2 d}\right)^{\lambda} \varepsilon \left(\frac{x^2 - y^2 d}{y'}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{x^2 - y^2 d}\right)^{\lambda} \varepsilon \left(\frac{x^2}{y'}\right) = \varepsilon\left(\frac{2}{x^2 - y^2 d}\right);$$

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} y'-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}\omega-1}{2}+\frac{y'-1}{2}\,\frac{\mathrm{N}\omega-1}{2}}.$$

Fall 2a. y ungerade, $\lambda = 1$.

$$v(\omega) = \varepsilon\left(\frac{2}{x^2 - y^2 d}\right) = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} y-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}\omega-1}{2}+\frac{y-1}{2}\,\frac{\mathrm{N}\omega-1}{2}+\frac{\mathrm{N}\omega^2-1}{8}}$$

Fall 2b. y gerade, $\lambda \geq 2$. $\mathrm{N}\omega \equiv x^2 \equiv 1 \bmod 4$, daher

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} y-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}\omega-1}{2}};$$

weiter $x^2 - y^2 d \equiv 1 - y^2 d \equiv 1 \pmod 8$ für $\lambda > 2$, somit auf jeden Fall

$$\left(\frac{2}{x^2 - y^2 d}\right)^{\lambda} = 1\,.$$

Mithin schließlich:

$$v(\omega) = \begin{cases} (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} \mathfrak{I}(\omega)-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}(\omega)-1}{2}+\frac{\mathfrak{I}(\omega)-1}{2}\,\frac{\mathrm{N}(\omega)-1}{2}} & \text{für } \mathfrak{I}(\omega) \equiv 1\ (2) \\ (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} \mathfrak{I}(\omega)-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}(\omega)-1}{2}+\frac{\mathfrak{I}(\omega)-2}{4}\,\frac{\mathrm{N}(\omega)-1}{2}+\frac{\mathrm{N}(\omega)^2-1}{8}} & \text{für } \mathfrak{I}(\omega) \equiv 2\ (4) \\ (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} \mathfrak{I}(\omega)-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}(\omega)-1}{2}} & \quad " \quad \mathfrak{I}(\omega) \equiv 0\ (4) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\gamma|k}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha|k}{\gamma}\right) = v(\alpha')v(\gamma)v(\alpha'\gamma)\,.$$

[Diese Formel enthält nachträglich (3) als Spezialfall.]

Die sgn–Faktoren im Umkehrfaktor stimmen mit dem üblichen

$$(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} \alpha-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \gamma-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn} \alpha'-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} \gamma'-1}{2}} \qquad \big(\text{bezw. 1 für imaginärquadr. Körper}\big)$$

überein. Die übrigen Faktoren hängen, wie es sein muß, nur von den Restklassen von α und γ mod 4 ab und werden $= 1$, wenn α oder γ primär ist. Sie lassen sich noch etwas bequemer schreiben *).

Wie weit die Methode verallgemeinerungsfähig ist, weiß ich nicht. Jedenfalls bleibt sie anwendbar, wenn der rationale Grundkörper Γ ersetzt wird durch einen solchen, in dem die Klassenzahl 1 und das explizite Reziprozitätsgesetz schon bekannt ist. So erhält man z. B. sicher das quadratische und wahrscheinlich auch das biquadratische Rez. Gesetz für die quadratischen Körper über $\Gamma(i)$; ebenso sicher das quadratische und wahrscheinlich auch das kubische Rez Ges für quadratische Körper über dem der dritten Einheitswurzeln. Usw.

Sehr gerne möchte ich von Ihnen wissen, ob diese Ergebnisse vielleicht längst bekannt sind und ob Sie die Methode nicht für zu primitiv halten um weiter zu tragen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

---

*) Setzt man $\varphi(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{für } \mathfrak{I}(\omega) \equiv 0, 1, 2, 4, 5 \pmod 8 \\ -1 & \text{für } \mathfrak{I}(\omega) \equiv 3, 6, 7 \pmod 8 \end{array} \right\}$, und $\psi(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{für } \mathfrak{I}(\omega) \equiv 0, 1, 3 \pmod 4 \\ -1 & \text{für } \mathfrak{I}(\omega) \equiv 2 \pmod 4 \end{array} \right\}$,
so wird $v(\omega) = \bigl(\operatorname{sgn} \mathfrak{I}(\omega)\bigr)^{\frac{\operatorname{sgn} \mathrm{N}(\omega)-1}{2}} \cdot \varphi(\omega)^{\frac{\mathrm{N}(\omega)-1}{2}} \cdot \psi(\omega)^{\frac{\mathrm{N}(\omega)^2-1}{8}}$, und

$$\frac{v(\alpha'\gamma)}{v(\alpha')v(\gamma)} = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn}\alpha-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn}\gamma-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn}\alpha'-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn}\gamma'-1}{2}}.$$

$$\cdot\left(\frac{\varphi(\alpha'\gamma)}{\varphi(\alpha')}\right)^{\frac{\mathrm{N}(\alpha)-1}{2}} \left(\frac{\varphi(\alpha'\gamma)}{\varphi(\gamma')}\right)^{\frac{\mathrm{N}(\gamma)-1}{2}} \left(\frac{\psi(\alpha'\gamma)}{\psi(\alpha')}\right)^{\frac{\mathrm{N}(\alpha)^2-1}{8}} \left(\frac{\psi(\alpha'\gamma)}{\psi(\gamma)}\right)^{\frac{\mathrm{N}(\gamma)^2-1}{8}}$$

1.5 21.07.1931, v d Waerden to Hasse

Leipzig, 21. 7. 31.

Lieber Herr Hasse,

Besten Dank für Ihren Brief. Die Verallgemeinerung meiner Reziprozitätsformeln ist mir noch nicht gelungen. Welche mehr organischen Formeln für das explizite quadratische Reziprozitätsgesetz sind Ihnen bekannt ? Von der „Fülle von Formeln", die Sie in Ihrem Brief erwähnen, die man aufstellen kann, erwähnen Sie in Ihrem Bericht nur einige, in der immer einschränkende Bedingungen wie $\alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ vorkommen.

Mit algebraischen Zahlen habe ich mich schon früher beschäftigt; siehe meinen „logarithmenfreien Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes".

Gestern wurde der Wittsche Beweis in unserem Seminar vorgetragen. Er ist besonders elegant, aber mich hat es gestört, daß die Abschätzung mit den Einheitswurzeln nicht elementar ist. Ich habe mir jetzt folgenden elementaren Beweis für diesen Teil überlegt :

Es handelt sich darum, zu beweisen daß für ganzzahliges $z > 1$ und $q > 1$ stets

$$\Phi_q(z) > z - 1$$

ist, wo Φ_q das Kreisteilungspolynom

$$\Phi_q(t) = \prod_{d|q} \left(t^{\frac{q}{d}} - 1\right)^{\mu(d)} \tag{1}$$

bedeutet.

In $\Phi_q(z)$ kommen nach (1) für $q > 1$ gewisse $z^\lambda - 1$ im Zähler und andere $z^\lambda - 1$ im Nenner vor, und zwar, wenn $q = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_k^{z_k}$ gesetzt wird, im Zähler und Nenner je 2^{k-1} Faktoren. Ich mache die Nennerfaktoren größer, indem ich dort $z^{\lambda'} - 1$ durch $z^{\lambda'}$ ersetze; ebenso wird der Zähler nicht größer, wenn dort $z^\lambda - 1$ durch $z^\lambda - z^{\lambda-1} = z^\lambda \left(1 - \frac{1}{z}\right)$ ersetzt wird. So findet man, da der Grad von $\Phi_q(t)$ gleich $\varphi(q)$ ist :

$$\Phi_q(z) > z^{\varphi(q)} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{2^{k-1}} .$$

Nun ist

$$\varphi(q) \geq (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1) \geq (3-1)^{k-1} \cdot (2-1) \; = \; 2^{k-1},$$

mithin

$$\Phi_q(z) > z^{2^{k-1}} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{2^{k-1}} \geq z - 1\,, \qquad\qquad \textbf{Q. E. D.}$$

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.6 15.02.1933, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
den 15. Februar 1933

Lieber Herr Hasse,

Mit großer Freude habe ich Ihre wunderschöne Arbeit über das Normenrestsymbol in Math Ann 107 gelesen. Zum ersten Mal habe ich jetzt das Gefühl, die Normenresttheorie und das Artinsche Reziprozitätsgesetz wirklich verstanden zu haben. Wirklich ein Sieg der $\mathfrak{p}$–adik und der hyperkomplexen Methode zugleich!

Heute sah ich mir Ihre Polemik mit U. Wegner in Math Ann 106 etwas genauer an, und bemerkte, daß mit der Einschränkung, die Wegner in seiner Anmerkung gibt, sein Satz immer noch falsch ist. Beispiel:

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - a)\,, \qquad a \text{ keine dritte Potenz}\,, \tag{1}$$

spaltet für alle Primzahlmoduln p einen Linearfaktor ab. Für $p \equiv 1\ (3)$ zerfällt nämlich $x^2 + x + 1$, während für $p \not\equiv 1\ (3)$ die Zahl a mod p eine dritte Wurzel besitzt. Dasselbe Beispiel widerlegt auch Wegners unsinnigen gruppentheoretischen Hilfssatz 2, denn die Gruppe der Gleichung (1) hat die Transitivitätsgebiete $\{12\}\,\{345\}$ und besteht aus den Substitutionen

$$1,\ (345),\ (354),$$

$$(12)(34),\ (12)(45),\ (12)(35),$$

von denen jede eine Nummer fest läßt.

Ich bezweifle aber, ob es sich lohnt, die Sache noch einmal in die Annalen zu bringen. Was meinen Sie dazu ?

Wissen Sie, daß man völlig elementar (ohne Hilbertschen Irreduzibilitätssatz) beweisen kann, daß die erdrückende Mehrzahl aller ganzzahligen Gleichungen gegebenen Grades keinen Affekt haben ?

Mit herzlichem Gruß

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.7 11.10.1933, v d Waerden to Hasse

Leipzig, 11. Okt. 1933

Lieber Herr Hasse,

Als Deuring mir erzählte, in welch überraschend trivialer Weise man jetzt den zum Artinschen Reziprozitätsgesetz benötigten Existenzsatz beweisen kann, d. h. also den Spezialfall $z = 1$ Ihres Existenztheorems (3.0) (Math. Ann. 107), habe ich auch einen elementaren Beweis des ganzen Existenztheorems (3.0) gesucht und gefunden. Der Beweis beruht auf folgendem einfachen Gedankengang. Gegeben seien $a_1, \ldots, a_r$, alle > 1 (Ihre Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$) und k (das K. G. V. Ihrer $k_1, \ldots, k_r$). Man nimmt zuerst $k = \ell^\nu$ an und konstruiert für die einzelnen a_λ gesondert Primzahlmoduln p_λ, so daß a_λ mod p_λ zum Exponenten $\ell^{\nu+\omega}$ gehört, wobei ω nur so hoch gewählt werden muß, daß $\ell^\omega > r$ ist. Würde man jetzt die Klasseneinteilungen mit Klassenzahlen ℓ^{μ_λ}, die zu den einzelnen p_λ gehören, einfach durchkreuzen, so würde man eine nicht zyklische Klasseneinteilung mit der gewünschten Eigenschaft erhalten. Diese besitzt aber eine zyklische Vergröberung, welche alle gewünschten Eigenschaften hat. Man findet diese Vergröberung einfach indem man die allgemeinste zyklische Faktorgruppe der nicht–zyklischen Klassengruppe aufsucht und die verfügbaren Koeffizienten dann so einrichtet, daß die Exponenten von $a_1, \ldots, a_r$ nicht unter ℓ^ν herabsinken.

Eine erneute Durchkreuzung (im Fall $\ell = 2$) mit einer Klassenteilung der Klassenzahl 2, die durch eine Primzahl $p_{r+1} \equiv 3 \pmod 4$ geliefert wird, und erneute Vergröberung sichert dann auch den Exponenten 2 der Zahl -1. Der Übergang von $k = \ell^\nu$ zu $k = \ell_1^{\nu_1} \ell_2^{\nu_2} \cdots$ gibt dann keine Schwierigkeit mehr, da die Durchkreuzung jetzt direkt zu einer zyklischen Klasseneinteilung führt.

Ich schicke Ihnen gerne den vollständig ausgeführten Beweis zu. Für die Publikation möchte ich aber gerne wissen, wo die vereinfachte Fassung des Chevalleyschen Beweises für $r = 1$ steht: Deuring sagte mir etwas von einer amerikanischen Arbeit, wo es drin stünde.

Besten Dank für Ihren Brief über die Jahresbericht–Aufgabe. Ihre Lösung mit Hilfe der Kreiskörper–Klassenkörpertheorie und die Verallgemeinerungsmöglichkeit zu den Graden ℓ und ℓ^n hatte ich (wenigstens im Fall $\ell = 2$) mir auch schon überlegt. Das Merkwürdige an der Sache ist aber, daß es im Fall meiner Aufgabe eine elementare, für beliebige abstrakte Grundkörper gültige Lösung gibt: die Bedingung heißt einfach, daß die Diskriminante d im Grundkörper einer Summe von zwei Quadraten gleich sein soll. Diese elementare Methode läßt sich auf die höheren zyklischen Fälle nicht so leicht, dafür aber auf gewisse nicht–abelsche Fälle erweitern. Z. B.: Wann läßt ein abelscher Körper 4. Grades $\mathsf{P}(\sqrt{d}, \sqrt{\delta})$ sich zu einem Körper mit Quaternionengruppe erweitern ? Es sind da noch viele dunkle Zusammenhänge, auch mit der Algebrentheorie (vgl. Brauer, Crelle 168).

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.8 12.11.1933, v d Waerden to Hasse

Leipzig, 12. Nov. 1933

Lieber Herr Hasse,

Besten Dank für Ihre Briefe. Entschuldigen Sie bitte die verspätete Antwort.

Ich habe bei meinem Beweis des Existenzsatzes wohl an Charaktere gedacht, konnte mir aber nicht recht vorstellen, daß ihre explizite Benutzung die Sache vereinfachen würde, da die einzelnen Beweisschritte doch in der additiven und multiplikativen Schreibweise dieselben sind. Jetzt, wo ich sehe, daß die Überlegungen etwas einfacher werden, habe ich meinen Beweis entsprechend umgeändert. Nur am Schluß (Beweis von Satz 3), wo keine wesentliche Vereinfachung erzielt wird, habe ich die begriffliche Fassung der formelmäßigen vorgezogen. Ich wollte die Arbeit ursprünglich in die Annalen geben, da sie an Ihre Annalenarbeit sich anschließt, aber ich werde sie auf Ihre freundliche Aufforderung hin gerne bei Ihnen für Crelle's Journal einreichen.

Daß Sie mich zum Hensel–Festband nicht aufgefordert haben, stimmt nicht: Sie haben mich in sehr freundlicher Form aufgefordert und ich habe nur darum nichts eingesandt, weil ich zufällig nichts hatte, was zu Hensels Lebenswerk irgendwie in Beziehung stünde.

Ihre schönen Lösungen meiner Aufgabe haben mich sehr erfreut. Lösung 1 erweckt durch die Ankündigung „auf klassenkörpertheoretischer Grundlage" den Eindruck, als ob eine tiefe (womöglich transzendente) Theorie zugrunde läge, während doch nur die Theorie der Kreiskörper benutzt wird. Aus demselben Grunde hat auch die Lösung auf Kummerscher Grundlage kein neues prinzipielles Interesse. Um so interessanter in Lösung 3, die für beliebige Grundkörper gilt, und die Beziehung zu den Algebren klarlegt.

Zu Ihrem Brief vom 15. möchte ich folgendes fragen. Sie schreiben: Enthält k eine primitive ℓ^n–te Einheitswurzel ζ und ist K_0/k zyklisch mit erzeugender Substitution S_0, so ist $K = K_0(\sqrt[\ell^n]{\beta})$ nur dann galoissch über k, wenn

$$\beta^{\mathsf{S}_0} = \beta^r \gamma^{\ell^n}, \qquad (r,\ell) = 1, \qquad \gamma \text{ aus } K_0 .$$

Wie beweisen Sie das ? Wahrscheinlich ist meine Frage ganz dumm; denn Sie schreiben „ergibt ... in geläufiger Weise".

Der Satz, daß K_0 vom Grade ℓ^h sich dann und nur dann zu einem zykl. Körper K vom Grade ℓ^{n+h} erweitern läßt, wenn

$$(\zeta,\, K_0, S_0) \sim k$$

ist, wo ζ eine primitive ℓ^n–te Einheitswurzel und S_0 die erzeugende Subst. von K_0/k ist, ist ein Spezialfall des Satzes 7 der Arbeit von R. Brauer „Über die Konstruktion der Schiefkörper", Crelle 168, p. 53. Der Satz ist bei Brauer etwas schwierig. Er heißt vollständig so:

k sei vollkommen. $k(\vartheta)$ enthalte eine primitive n–te Einheitswurzel ζ und habe die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$. Die einfache Algebra $\mathfrak{A}$ sei durch

$$(1) \qquad u_S u_T = u_{ST} c_{S,T}^{-1}, \quad \zeta u_S = u_S \zeta^S$$

$$(S, T \text{ in } \mathfrak{G}\,; \;\; c_{S,T} \text{ eine Potenz von } \zeta)$$

definiert. Dann und nur dann ist $\mathfrak{A} \sim k$, wenn $k(\vartheta)$ sich zu einem Körper K vom Grade n über $k(\vartheta)$ erweitern läßt, dessen Galoissche Gruppe $\mathfrak{H}$ zu der durch die Relationen (1) definierten, von den u_S und ζ erzeugten Gruppe isomorph ist, wobei der von ζ erzeugten Gruppe $\mathfrak{N}$ die zu $k(\vartheta)$ gehörige Untergruppe von $\mathfrak{H}$ und dem Element u_S stets die Restklasse S nach dieser Untergruppe entspricht.

Ihr Satz läßt sich also in der Tat, wie Sie vermuteten, ohne arithmetische Hilfsmittel beweisen.

Mit dem Brauerschen Satz lassen sich offenbar allerlei metabelsche Einbettungsprobleme behandeln. Ich habe die Absicht, diese Probleme einem Doktoranden zur Bearbeitung zu übergeben, falls nicht mein brennendes Interesse an der Sache mich dazu verleitet, ihm zuvorzukommen.

Das Problem Grell werde ich mir ernsthaft durch den Kopf gehen lassen. Die Stelle von Deuring habe ich aber, falls Deuring nach Göttingen kommt, mehr oder weniger dem Herrn Seifert versprochen, der stellenlos in Dresden sitzt und von dem ich viel halte: eigentlich noch mehr als von Grell. Seifert hat Deuring schon einmal vertreten.

Ich schicke Ihnen Ihre Lösungen meiner Aufgabe gleichzeitig mit meinem Manuskript für Crelle in einigen Tagen zu.

Mit bestem Gruß

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.9 30.06.1934, P.C. v d Waerden to Hasse

Lieber Herr Hasse,

Aus Ihrer Aufgabensammlung lerne ich Algebra, so z. B. den Kroneckerschen Satz (S. 147). Dieser gilt übrigens auch ohne die Vor. der Separabilität und läßt sich ohne Galoissche Theorie so beweisen:

Behauptung: Multipliziert man die Grade m_i alle mit n und die n_i alle mit m, so kommt jede beliebige Zahl q gleich oft unter den $m_i n$ wie unter den $n_i m$ vor.

Beweis: Wenn $q = m_i n$ und α_μ eine Wurzel von $\varphi_i(x)$ ist, so ist m_i der Grad von α_μ über $K(\beta)$, also von $K(\alpha_\mu, \beta)$ über β, also $q = m_i n$ der Grad von $K(\alpha_\mu, \beta)$ über K. Wenn q etwa a mal unter den m_i vorkommt, so gibt es a Faktoren $\varphi_i(x)$ vom Grade m_i, welche zusammen am_i Wurzeln α_μ besitzen (mehrfache Wurzeln von $f(x)$ werden ebenso oft gezählt); also gibt es am_i Körper $K(\alpha_\mu, \beta)$ vom Grade q. Da dasselbe für alle Konjugierten β_ν von β gilt, gibt es insgesamt $am_i n = aq$ Körper $K(\alpha_\mu, \beta_\nu)$ vom Grade q über K. Diese Charakterisierung der Zahl a ist aber invariant bei Vertauschung der Rollen von $f(x)$ und $g(x)$.

Folgerung: Bei passender Anordnung der m_i und n_i ist

$$m_i n = n_i m,$$

also

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{m}{n}.$$

Herzliche Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.10 09.07.1934, Hasse to v d Waerden

9. Juli 34

Lieber Herr von der Waerden !

Ich habe gestern in Marburg mit Neumann gesprochen. Er steht dem Gedanken, Herrn Rellich die bei Weggang freiwerdende Assistentenstelle + Lehrauftrag zu übertragen, freundlich gegenüber. Ehe er bestimmt zusagt, will er sich noch über Rellichs wissenschaftliche Qualitäten erkundigen. Ich habe ihm dazu Friedrichs vorgeschlagen.

In anderem Zusammenhange möchte ich Sie bitten, falls Sie sich dazu berufen fühlen, mir ein paar Worte über Kählers wissenschaftliche Arbeiten zu schreiben.

Kürzlich bekam ich einen Brief von Suetuna. Er schreibt mir:
"das Beispiel von van der Waerden für die überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{10^n x\right\} 10^{-n}$, wobei $\left\{x\right\}$ den Abstand von x zur benachbartesten ganzen Zahl bedeutet, ist, wenn man darin 10 durch 2 ersetzt, ein altes Beispiel von Takagi, das er vor 31 Jahren in einer hiesigen Zeitschrift veröffentlichte."

Ihre Untersuchungen zu meiner Algebra–Aufgabensammlung habe ich nun genau studiert, finde sie sehr schön und danke Ihnen herzlich dafür.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.11 10.07.1934, v d Waerden to Hasse

Leipzig, 10. Juli 1934

Lieber Herr Hasse !

Besten Dank für Ihre Mitteilungen, die mich natürlich sehr gefreut haben.

Von Kählers Arbeiten hat diejenige über „Forme differenziale e funzione algebriche" (Mem. R. Acc. d'Italia III, 1932) auf mich und, wie ich verschiedentlich erfuhr, auch auf die italienischen Geometer, den grössten Eindruck gemacht. Erstens bringt diese Arbeit das, worum ich mich schon Jahre lang ohne vollen Erfolg bemüht hatte: eine brauchbare exakte Definition des Begriffes der "Stelle" bei algebraischen Funktionenkörpern von mehr als einer Variablen; anschliessend eine invariante Def. der einfachen und mehrfachen Differentiale 1. Gattung und einen Beweis der Übereinstimmung mit der üblichen nicht–invarianten Definition; mithin einen exakten Invarianzbeweis für die letztere. Zweitens hat Kähler dort eine Reihe von neuen kovarianten Differentialformen gefunden, welche die Cartanschen Differentialformen weiter verallgemeinern und welche zu sehr wertvollen und interessanten neuen Invarianten im Stil der "Mehrgeschlechter" von Enriques–Castelnuovo führen. Also ein sehr wertvoller und (im Gegensatz zum üblichen Stil der italienischen Geometer) völlig klar und exakt dargestellter Beitrag zur algebraischen Geometrie.

Diese und auch seine anderen Arbeiten zeigen neben einer vielseitigen und gründlichen Kenntnis auf verschiedenen Gebieten der Analysis und Geometrie seine Fähigkeit, Methoden eines Gebiets mit Erfolg auf Probleme eines anderen anzuwenden.

Über seine grössere Abhandlung über die Integrale algebraischer Differentialgleichungen (Abh. Math. Sem. Hamburg 7, 1930) kann ich natürlich kein sachverständiges Urteil abgeben. Jedenfalls aber scheint es mir sehr zu begrüssen, dass die klassischen Gebiete der Differentialgleichungen im Komplexen, der automorphen Funktionen und der Abelschen Integrale jetzt auch in der jüngeren deutschen Mathematikergeneration gepflegt werden, und zwar von einem Mathematiker, der neben den hergebrachten Methoden auch die modernsten topologischen, funktionentheoretischen und algebraisch–geometrischen Methoden auf diese klassischen Probleme anzuwenden versteht.

Ich möchte noch die besondere Klarheit und Ausgeglichenheit seiner Darstellung hervorheben, welche nur bei einem Menschen möglich ist, welcher ganz über dem behandelten Stoff steht. Ich habe von seiner Gesamtpersönlichkeit nur den günstigsten Eindruck gewinnen können.

Mit besten Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.12 22.11.1934, Hasse to v d Waerden

Göttingen
22. 11. 34

Lieber Herr v. d. Waerden !

Ein Herr Dr. *Karl Maruhn* aus Leipzig C1, Elsässerstr. 5^{I} hat sich an mich gewandt mit der Bitte, ihm u. U. hier eine Assistentenstelle zu geben. Er ist Lichtenstein–Schüler (prom. 1930, Staatsex. 1931) und jetzt Studienassessor. Er legt mir drei in der M. Z. erschienene Arbeiten über hydromechanische Probleme vor. Natürlich darf ich nicht annehmen, dass Sie diese Arbeiten massgebend begutachten können. Ich wäre Ihnen jedoch dankbar, wenn Sie mir Ihren persönlichen Eindruck von Herrn Dr. Maruhn schildern könnten, vorausgesetzt dass Sie ihn dort kennengelernt haben.

Mit bestem Dank im voraus und herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.13 30.11.1934, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
den 30. Nov. 1934

Lieber Herr Hasse !

Den Herrn Dr. Maruhn kenne ich gut. Er ist einer der besten Schüler von Lichtenstein. Er hat damals ein Problem aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren gelöst, das Lichtenstein für sehr schwierig hielt, mit durchaus eigenen Gedanken, wenn auch natürlich auf den Methoden Lichtensteins fussend.

Er ist ein sehr netter, sympathischer Mensch, der sich lebhaft für allerlei mathematische Probleme interessiert, also nicht so in einem engen Kreis eingesponnen ist wie manche andere Lichtensteinschüler. Er macht vor allem einen sehr flotten, gewandten, anpassungsfähigen Eindruck. In der Ausführung von kleinen Assistentenleistungen (er war Hilfsassistent bei Lichtenstein) ist er soviel ich weiss zuverlässig und gewissenhaft.

Im Gesamteindruck der Persönlichkeit ist er am Ehesten mit Ihrem Schüler Reichardt zu vergleichen.

Ihre Dreimänner–Korrespondenz habe ich erhalten. Ich brauche Ihnen wohl nicht zu versichern, dass ich Ihre Handlungsweise vollkommen billige. Wäre es nicht erwünscht, der Allgemeinheit nun bald bekannt zu geben, wer jetzt Redakteur des Jahresberichts ist, damit der wissenschaftliche Betrieb seinen Fortgang nehmen kann ?

Mit besten Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.14 17.01.1935, v d Waerden to Hasse

Leipzig, 17. Jan. 1935.

Lieber Herr Hasse [1]

Ich habe Herrn Richter die Situation bez. der Aufnahme seiner Arbeit in Crelle's Journal mitgeteilt, und er zieht es jetzt vor, die Arbeit doch in die Annalen zu geben. Zur Vermeidung unnötiger Porti möchte ich Sie bitten, die Arbeit direkt an Herrn Blumenthal senden zu wollen, den ich verständigt habe.

Nun noch eine andere Frage. Ich hatte die Absicht, wenn Deuring nach Göttingen kommen sollte, Richter zum Assistenten zu nehmen. Da nun Deuring einstweilen hier bleiben wird, habe ich für Richter nichts. Nun ist er völlig mittellos und ganz ausgezeichnet. Er hat promoviert und macht in diesem Semester sein Staatsexamen. Ich empfehle nicht gerne einen Menschen und ich hetze auch nicht gerne einen in die akademische Karriere, aber Richter hat sich jedesmal wieder so lange ich ihn kenne als derart ausgezeichnet erwiesen, daß ich glaube, es in diesem Fall verantworten zu können. Außerdem ist es ganz gut für ihn, wenn er einmal irgendwo anders hinkommt, da er bisher immer in Leipzig war. Und wenn es auch nur eine Stellung von begrenzter Dauer wäre, so wäre ihm damit doch schon viel geholfen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

[1] Dieser Brief ist offensichtlich falsch datiert. Gemeint ist offenbar der 17.01.1936, also nicht 1935. Vgl. den Brief von Hasse an van der Waerden vom 20. Januar 1936, der offenbar die Antwort auf diesen Brief ist.

1.15 16.12.1935, Hasse to v d Waerden

Göttingen,
den 16. Dezember 1935

Lieber Herr v. d. Waerden !

Herr Deuring wird Ihnen von seiner Probe–Vorlesung hier berichtet haben. Jeder, der sich hier für ihn eingesetzt hatte, war durch den Ausgang aufs Tiefste enttäuscht. Herr D. hat uns, wie man sagen kann, eine Schlacht verloren. Da ich den Eindruck habe, dass Herr D. selbst nicht vollständig begriffen hat, welche Situation nunmehr entstanden ist und da auch inzwischen in vielerlei Besprechungen eine gewisse Klärung der zuerst auseinandergehenden Meinungen eingetreten ist, so habe ich den Wunsch, mich einmal mündlich mit Ihnen über die ganze Sache zu unterhalten. Schriftlich könnte ich Ihnen kaum all die vielen Inponderabilien vermitteln, die für die Beurteilung mitsprechen. Da ich am 3. Januar in anderer Angelegenheit in Berlin sein muss, so könnte ich am Nachmittag des 4. 1. bei Ihnen in Leipzig vorsprechen. Bitte lassen Sie mich doch wissen, ob ich Sie dann antreffen werde.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.16 17.12.1935, v d Waerden to Hasse

Leipzig, 17. Dez. 1935.

Lieber Herr Hasse !

Es ist mir außerordentlich wertvoll, eine Gelegenheit zu haben, mich mit Ihnen über Deurings Misserfolg, über seine weitere Zukunft und das was uns nun zu tun steht, auszusprechen. Ich bin Ihnen sehr dankbar, daß Sie dafür sogar nach Leipzig kommen wollen und stehe am 4. Jan. den ganzen Tag zu Ihrer Verfügung. Vielleicht können Sie es sich so einteilen, daß Sie schon vormittags kommen und bei uns zu Mittag essen. Ich will Sie aber in Ihrer Bewegungsfreiheit nicht behindern.

Mit den besten Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.17 21.12.1935, Hasse to v d Waerden

Göttingen,
den 21. Dez. 1935.

Lieber Herr v. d. Waerden !

Besten Dank für Ihre freundlichen Zeilen. Ich kann heute noch nicht übersehen, wie lange mich meine Besprechungen in Berlin am 3./4. Januar festhalten werden, ich hoffe aber, dass ich am 4. so von dort abfahren kann, dass ich im Laufe des Vormittags in Leipzig bin. Dann werde ich gern von Ihrer liebenswürdigen Einladung Gebrauch machen bei Ihnen zu Mittag zu essen. Endgültige Nachricht gebe ich Ihnen, sobald ich übersehe, wie meine Pläne in Berlin sich gestalten werden.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.18 20.01.1936, Hasse to v d Waerden

Göttingen,
den 20. Januar 1936.

Lieber Herr v. d. Waerden ! [1]

Wegen der Dissertation Richter habe ich das Gewünschte veranlasst.

So gern ich es sehen würde, wenn Herr Richter hierher käme, so kann ich ihm doch leider im Augenblick keine Assistentenstelle in Aussicht stellen. Die zwei planmässigen und 7 ausserplanmässigen Stellen hier sind sämtlich besetzt (Ullrich, Ziegenbein; Witt, Teichmüller, Mittmann, Gentzen, Wagner, Bödewadt, Böhle). Im Augenblick ist auch nicht abzusehen, dass eine Stelle frei wird und selbst dann müsste ich naturgemäss meinem hiesigen Schüler, H. L. Schmid, der in letzter Zeit sehr fleissig und erfolgreich gearbeitet hat, zunächst das Vorrecht einräumen. Vielleicht wäre es aber angängig Herrn R. als Hilfs–Assistenten hier anzustellen, wobei natürlich die Bezahlung erheblich niedriger ist. Voraussetzung dabei würde auch sein, dass die Fachschaft keinen stichhaltigen Grund zu Einwendungen findet. Auf jeden Fall wäre es auf lange Sicht hin gut, wenn Herr R. zunächst diesen Weg nähme, denn wenn er einmal hier und "man" ihn als Hilfsassistenten kennen gelernt hat, ist es nachher viel leichter, für ihn eine Assistentenstelle zu erwirken, als wenn er direkt von ausserhalb kommt. Ich würde mich sogar freuen, wenn sich die Sache so regeln liesse, denn ich glaube, ich könnte von Herrn R. gerade bei der Herstellung des Manuskriptes meines Buches wertvolle Hilfe haben. So liesse es sich dann auch rechtfertigen, dass wir, bei vorhandenen Mitteln, über die übliche Hilfsassistenten–Vergütung von 50,– Mk. im Monat hinausgehen.

Haben Sie nochmals vielen Dank für die freundliche Aufnahme in Leipzig. Mit herzlichen Grüssen, auch an Ihre verehrte Frau Gemahlin

stets I h r

H. Hasse

[1] Dies ist offenbar die Antwort Hasses auf den Brief von v.d.Waerden vom 17. Januar. Jener Brief war offenbar falsch datiert mit der Jahreszahl 1935 statt 1936.

1.19 08.06.1936, Hasse to v d Waerden

8. 6. 36

Lieber Herr van der Waerden,

beiliegend sende ich Ihnen Aufzeichnungen eines Hörers von mir namens Pickert mit der freundlichen Bitte, sich diese einmal anzusehen und mir zu sagen, was Sie davon denken. Ich selbst kann mir kein rechtes Bild von dem Wert dieser Untersuchungen machen, da ich in den Methoden nicht zu Hause bin. Ich nehme aber an, daß es Ihnen in kurzer Zeit möglich sein wird ein Urteil zu bilden, denn Herr Pickert ist zu diesen Dingen durch Ihr Buch angeregt worden. Was er vor allen Dingen wissen möchte ist, ob es sich lohnt, Untersuchungen in dieser Richtung fortzutreiben.

Ich selbst habe an ihn die Frage gerichtet, ob nicht etwa alles, was er gemacht hat, dadurch verhältnismäßig trivial und direkt einzusehen ist, daß man einen allgemeinen Struktursatz folgender Art an die Spitze stellt: Jedes kommutative hyperkomplexe System ist isomorph zu einem Restklassenring nach einem Polynom über dem Koeffizientenkörper. Ist dieser Satz überhaupt richtig ? Und ist das nicht eine einfache Folge aus der Krullschen Theorie der Abelschen Gruppen mit Operatoren ?

Mit herzlichen Grüßen von Haus zu Haus

Ihr

H. Hasse

1.20 12.09.1936, v d Waerden to Hasse

GRAZ, 12. SEPT. 1936.

LIEBER HERR HASSE,

Es wird mir doch nicht gut möglich sein, nach Bad Salzbrunn zu kommen, so sehr ich das bedauere.

Ich hoffe, daß Sie Herrn Richter in Salzbrunn kennen lernen werden und einmal mit ihm reden. Ich würde es für sehr günstig für seine Entwicklung halten, wenn er einmal an einer anderen Universität als Leipzig ein oder zwei Semester verbringen könnte. Wenn Sie in Göttingen doch für diesen Winter eine kleine Stelle für ihn hätten, von der er dort leben kann, wäre das sehr schön. Er hat in Leipzig zwar, wie ich glaube, Arbeit beim „Poggendorff" in Aussicht, aber die ist auch nur vorübergehend und wird nur sehr schlecht bezahlt. Ich weiß übrigens nicht genau, wie es sich damit verhält. Bitte reden Sie doch einmal mit ihm, wenn Sie ihn sehen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. WAERDEN

1.21 16.09.1936, P.C. v d Waerden to Hasse

Leipzig,
Postcard 16. Sept.

Lieber Herr Hasse !

Ausgerechnet am 19. Okt. nachmittags habe ich eine Besprechung in Berlin, die sich nicht verschieben läßt.

Es tut mir unendlich leid, daß ich Ihre Bitten immer wieder abschlagen muß. Ich werde aber, wenn es Ihnen passt, auf dem Wege nach Holland am 23. oder 24. Oktober in Göttingen vorbeikommen und Sie dann aufsuchen.

Beste Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.22 21.09.1936, Hasse to v d Waerden

Göttingen,
21. 9. 36

Lieber Herr v. d. Waerden,

Auch ich habe es sehr bedauert, daß ich Sie am 19. 9. nicht in Leipzig antraf. Ich hörte schon in Salzbrunn von F. K. Schmidt, daß Sie an diesem Tage in Berlin sein müßten. Natürlich freue ich mich sehr, daß Sie am 23. oder 24. 10. hier vorbeikommen. Bitte lassen Sie mich doch noch kurz vorher die geplante Zeit Ihrer Ankunft wissen. Herrn Richter habe ich übrigens in Bad Salzbrunn nicht getroffen.

Mit besten Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.23 02.12.1936, v d Waerden to Hasse

Leipzig, 2. Dez. 1936

Lieber Herr Hasse,

Entschuldigen Sie bitte, daß ich, durch Familienangelegenheiten abgelenkt, Ihnen noch nicht über den Zeitpunkt der geplanten Göttinger Vorträge geschrieben habe.

Mein Hamburger Vortrag wird am Sonnabend, den 9. Januar stattfinden. Ich könnte also vorher (etwa Mittwoch, Donnerstag oder Freitag) in Göttingen vortragen und von dort nach Hamburg fahren, wenn das mit Ihren Plänen in Einklang steht. Ich möchte dann über den Multiplizitätsbegriff im allgemeinen, insbesondere über Vielfachheiten von Schnittpunkten, sowie mehrfache Punkte von algebraischen Flächen reden.

Mit besten Grüßen [1]

Ihr

B. L. v. d. Waerden

---

[1] Added by Hasse:
"1.) Multiplizitätsbegriff, Vielfachheit von Schnittpunkten — mehrfache Punkte von algebr. Fl. — 2 Stunden
2.) Theorie der algebr. Moduln, 2 Stunden"

1.24 04.12.1936, Hasse to v d Waerden

4. 12. 36

LIEBER HERR VAN DER WAERDEN,

vielen Dank für Ihre Mitteilung, die ich schon sehnlichst erwartet habe. Ich möchte danach die Veranstaltung hier an den von Ihnen genannten Tagen Mittwoch den 6. I. bis Freitag den 8. I. stattfinden lassen, und zwar hatte ich gedacht, daß wir durchschnittlich jeden Vormittag und Nachmittag einmal zu Vorträgen zusammenkommen. Ich bitte gleichzeitig noch die Herren Jung, Geppert und Deuring sich mit Vorträgen zu beteiligen. Mit Jung hatte ich schon 4 Stunden verabredet. Sie selbst wollten ja wohl nicht so viel sprechen, also vielleicht 2 Stunden. Brauchen Sie dann mehr, so steht noch immer Zeit zur Verfügung, da wir in diesen Tagen hier die Vorlesungen der Interessierten ausfallen lassen. Vielleicht wäre es doch ganz schön, wenn Sie auch uns hier über das noch berichten, was Sie in Hamburg erzählen wollen, nämlich Ihre neue Theorie der algebraischen Moduln. Das macht Ihnen ja dann keine Mehrarbeit. Ich hoffe nur, daß wir es verstehen werden. Für Unterbringung wird natürlich gesorgt und die Reisekosten ersetzt, außerdem werden wir auch für die Vorträge selbst noch ein Honorar geben können. Da ich noch vor Weihnachten ein Programm für die Veranstaltung herausbringen will, wäre ich Ihnen dankbar, wenn Sie mich bald wissen ließen, ob Sie mit dem Vorschlag:

> van der Waerden: Multiplizitätsbegriff, Vielfachheit von Schnittpunkten, mehrfache Punkte von algebraischen Flächen .... 2 Std.
> Theorie der algebraischen Moduln .... 2 Std.

einverstanden sind, oder welche Änderungen Sie wünschen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. HASSE

1.25 14.12.1936, Hasse to v d Waerden

14. 12. 36

Lieber Herr v. d. Waerden,

Beiliegend das eben im Entwurf zusammengestellte Programm. Hoffentlich ist es Ihnen recht so. Ich musste aus Gleichverteilungsgründen eine Zweispaltung Ihres ersten Vortrags eintreten lassen. Vielleicht ist Ihnen das sogar gar nicht unangenehm. Im übrigen können wir ja noch immer Umstellungen vornehmen, die uns allen gut scheinen.

Ist es Ihnen recht, wenn Sie das eine Gastzimmer des Instituts beziehen — das andere habe ich Herrn Geppert angeboten — oder wollen Sie lieber ein Hotelzimmer haben ?

Ich bitte dann noch um freundliche Mitteilung Ihrer Ankunftszeit, damit wir für einen würdigen Empfang am Bahnhof sorgen können.

Beste Wünsche fürs Fest

Ihr

H. Hasse

1.26 23.12.1936, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
23. Dez. 1936.

Lieber Herr Hasse !

Besten Dank für Ihren Brief. Ich werde sehr gerne im Institut wohnen. Ich werde vermutlich schon am Dienstag um 17^{02} in Göttingen ankommen; es ist aber auch möglich, dass ich erst am Mittwoch in der Früh kommen kann. Ich bitte Sie also, sich doch keine Mühe zu geben und mich nicht abzuholen.

Mit dem Programm der Vorträge bin ich ganz einverstanden.

Mit den besten Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.27 08.03.1937, Hasse to v d Waerden

8. 3. 37

Lieber Herr van der Waerden,

Fräulein Noether hat eine Bestimmung hinterlassen, daß einigen ihrer früheren mathematischen Freunde Andenken aus ihrer Bibliothek hinterlassen werden. Diese Bücher sind an mich gelangt, und gleichzeitig habe ich von F. Noether die Anweisung für die Verteilung erhalten. Danach bekommen Sie: A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, was ich Ihnen gleichzeitig zugehen lasse.

Mit besten Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.28 01.04.1937, Hasse to v d Waerden

1. 4. 37

Lieber Herr van der Waerden,

ich habe mich sehr gefreut, die neuste Frucht Ihrer Arbeit vom Verlag Springer in Ihrem Auftrage zugesandt zu erhalten und danke Ihnen recht herzlich dafür. Wir werden wahrscheinlich in diesem Semester Ihre Arbeitsreihe über algebraische Geometrie genau durchsprechen. Ich habe in den letzten Tagen im Anschluß an Deurings Korrespondenzarbeit einige weitere Fortschritte in Richtung auf die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern gemacht. Es zeigte sich dabei, daß man das, was aus der algebraischen Geometrie mehrerer Variabler gebraucht wird, bis jetzt jedenfalls vollständig von der Theorie einer Variablen aus beherrscht. Es ist aber sehr gut möglich, daß für den weiteren Verlauf auch noch Ihr allgemeines Prinzip der Korrespondenzen und relationstreuen Spezialisierungen anzuwenden sein wird.

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr

H. Hasse

1.29 23.08.1937, Hasse to v d Waerden

23. 8. 37

Lieber Herr van der Waerden,

ich glaube, ich habe bereits mehrmals mit Ihnen über die Aufgabe gesprochen oder korrespondiert, ein Dreieck durch seine 3 Winkelhalbierenden zu bestimmen. Mein früherer Mathematiklehrer Wolff hat sich damit stark beschäftigt und kürzlich auch eine Arbeit darüber in Crelles Journal geschrieben. Er bittet mich nun, daß ich Ihnen ein Separatum seiner Arbeit zusende — es folgt mit gleicher Post — und Ihnen nahelege, die Frage der algebraischen Auflösbarkeit oder Nichtauflösbarkeit der dortigen Gleichung 11^* zu überdenken. Die Gleichung sieht gewiß recht kraus aus, aber vielleicht gelingt es Ihnen mit Ihrer großen Erfahrung auf diesem Gebiet doch, aus dem Zusammenhang, der zu dieser Gleichung führt, einen Einblick in die Galoisgruppe der Gleichung zu gewinnen. Jedenfalls wäre ich Ihnen für eine gelegentliche Äußerung dankbar, damit ich meinen Freund, Herrn Wolff, beruhigen kann. Er hängt sehr an dieser Sache, die ja auch gewiß nicht uninteressant ist.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.30 25.08.1937, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
25. Aug. '37.

Lieber Herr Hasse !

Besten Dank für die Zusendung der interessanten Arbeit von Hermann Wolff. Ich habe schon etwas daran herumgerechnet und gefunden, dass die Gruppe nur die symmetrische oder die alternierende sein kann. Ich gehe nämlich von der Zerlegung (14) der Arbeit–Wolff aus und beweise zunächst, dass die Gruppe der zerfallenden Gleichung $F_1(t)F_3(t)G_3(t) = 0$ eine Dreierpermutation enthält, welche die drei Wurzeln von $F_3(t)$ zyklisch vertauscht. Zu dem Zweck lasse ich zunächst den Linearfaktor $F_1(t)$ weg und setze dann $v_\alpha = \infty$; dann bleibt F_3 irreduzibel, während G_3 voll zerfällt; daraus folgt die Existenz der behaupteten Dreierpermutation. Sodann wende ich den Dedekindschen Satz (Mod. Alg. I, Neuauflage, S. 200) an mit der Modifikation, die daran angebracht werden muss, wenn das Polynom $f(x)$ mod $\mathfrak{p}$ nicht doppelwurzelfrei bleibt. Es folgt, dass die Gruppe der ursprünglichen Gleichung eine Dreierpermutation (234), höchstens multipliziert mit einigen Transpositionen (56), (78) oder (9 10), enthält. Daraus und aus der Transitivität folgt, *) dass die Gruppe die alternierende umfasst.

Wenn ich noch heraus habe, welcher von den beiden Fällen vorliegt, werde ich die Sache ausführlicher darstellen und Ihnen zuschicken.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

*) P. S. Das ist nicht ganz richtig. Man muß noch die imprimitiven Gruppen, die der Zerlegung $10 = 5 + 5$ entsprechen, ausschließen. Das ist aber auf Grund der Zerlegung (14) von Wolff ebenfalls möglich.

1.31 25.08.1937, v d Waerden to Hasse

Zweiter Brief gleichen Datums.

Leipzig,
25 Aug. 1937.

Lieber Herr Hasse !

Es geht noch viel einfacher, und zwar... nach der p–adischen Methode ! Die Gruppe der Gleichung ist die symmetrische. Beweis:

Man erweitere den Grundkörper zum Körper der Potenzreihen nach absteigenden Potenzen von a_4 (also für die Stelle $a_4 = \infty$), deren Koeffizienten rationale Funktionen von a_2 und a_3 sind. Für $a_4 = \infty$ reduziert sich die Gleichung (nach Division durch a_4) auf

$$\frac{1}{4}(a_2 t - a_3)(t^3 - a_2 t + a_3) = 0$$

Nach dem Henselschen Lemma zerfällt also die Gleichung über dem erweiterten Grundkörper in Faktoren 1., 3. und 6. Grades:

$$F(t) = f_1(t) f_3(t) f_6(t) \tag{1}$$

Die Zerlegung von $f_3(t)$ in Linearfaktoren erfordert die Auflösung der allgemeinen Gleichung 3. Grades

$$t^3 - a_2 t + a_3 = 0 \,. \tag{2}$$

In $f_6(t)$ sind die Glieder niedrigster Ordnung [1]

$$t^6 + \frac{1}{4} a_2 a_4 \,;$$

die Zerlegung von $f_6(t)$ in Linearfaktoren erfordert somit die Lösung der reinen Gleichung

$$t^6 + \frac{1}{4} a_2 a_4 = 0 \,. \tag{3}$$

[1] Hier und in der folgenden Gleichung ist durch Bleistift (offenbar durch Hasses Hand) vermerkt, dass $a_2 a_4$ durch $\frac{a_4}{a_2}$ zu ersetzen ist.

Die durch die Gleichungen (2) und (3) definierten Normalkörper sind offenbar zueinander fremd. Die Galoissche Gruppe von (1) ist also das direkte Produkt einer symmetrischen Gruppe S_3, die nur die drei Wurzeln von $f_3(t)$ permutiert, und einer Gruppe der Ordnung $6.2 = 12$, die nur die Wurzeln von $f_6(t)$ permutiert.

Die ursprüngliche Galoissche Gruppe von $F(t)$ ist transitiv und enthält das eben beschriebene direkte Produkt als Untergruppe. Sie enthält also insbesondere eine Transposition; ausserdem ist sie primitiv, denn sonst würde sie nach Adjunktion einer Wurzel in Faktoren 2. oder 5. Grades zerfallen, was nach (1) nicht der Fall ist. Also ist sie die symmetrische S_{10}.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.32 30.08.1937, v d Waerden to Hasse

Bozen,
30. Aug. 1937.

Lieber Herr Hasse,

Daß die Eisensteinsche Gleichung[1] $f_6(t) = 0$ auf die reine Gleichung $t^6 + \frac{1}{4}a_2 a_4 = 0 \longrightarrow \frac{a_4}{a_2}$ zurückgeführt werden kann, zeigt man so: Nach Adjunktion von $w = \sqrt[6]{-\frac{a_4}{a_2}}$ und einer primitiven 6. Einheitswurzel ζ mache man die Substitution

$$t = w \cdot x$$

Die transformierte Gleichung zerfällt dann für $w = ???$ $a_4 = \infty$ in lauter verschiedene Linearfaktoren, also zerfällt sie nach dem Henselschen Lemma selbst (im Bereich der Potenzreihen nach w^{-1}) in Linearfaktoren. Also bewirkt die Auflösung der Gleichung $t^6 + \frac{1}{4}\frac{a_4}{a_2} = 0$ gleichzeitig den Zerfall von $f_6(t)$.

Die Teilerfremdheit der beiden Körper folgt auch ohne Verzweigtheitsbetrachtungen daraus, daß es sich bei den definierenden Gleichungen

$$t^6 + a_2 a_4 \quad \longrightarrow \quad \frac{a_4}{a_2}, \qquad t^3 + a_2 t + a_3 = 0$$

um völlig verschiedene Variabeln handelt. Man führe z. B. zunächst $\frac{a_4}{a_2} = a_6$ als neue Variable statt a_4 ein. Man hat dann die Gleichungen

$$t^6 + a_6 = 0, \qquad t^3 + a_2 t + a_3 = 0.$$

Nach Adjunktion sämtlicher Wurzeln der ersten Gleichung bleibt die zweite eine allgemeine Gleichung 3. Grades, weil ihre Koeffizienten völlig neue Unbestimmte sind. Eine solche hat aber die symmetrische Gruppe.

In der Gruppe der Gleichung $t^6 + \frac{a_4}{a_2} = 0$ habe ich mich natürlich geirrt: Nach Adjunktion einer Wurzel w und von $\zeta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ zerfällt die Gleichung voll; ihre Gruppe ist daher eine Diedergruppe der Ordnung 12. Ich hatte 6 versehentlich als Primzahl betrachtet!

[1] See the footnote in the letter of 25.08.1937

Um die ganze Sache möglichst elementar zu erklären, würde ich von der Darstellung der Wurzeln der Gleichung $F(t) = 0$ als Potenzreihen nach gebrochenen Potenzen von a_4^{-1} ausgehen. Es ist ja wohl klar, daß die Puiseuxsche Reihenentwicklung eine rein algebraische Angelegenheit ist, die folglich nicht nur im Körper der komplexen Zahlen gilt, sondern auch dann, wenn der Körper der rationalen Funktionen von a_2 und a_3 als Grundkörper genommen wird, vorausgesetzt, daß algebraische Erweiterungen dieses Grundkörpers zugelassen werden. Setzt man nun in der üblichen Weise diese Entwicklungen an, so findet man für die 10 Wurzeln von $F(t)$ die folgenden Entwicklungen:

Bezeichnungen: $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ sind die Wurzeln von $t^3+a_2t+a_3 = 0$.
$w = \sqrt[6]{-\frac{a_4}{a_2}}$
$\zeta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ (primitive 6. Einheitswurzel)

Wurzeln von $F(t)$:

$$t_1 = c_0 + c_1 a_4^{-1} + \ldots \qquad \text{(rationale Koeff.)}$$

$$\begin{cases} t_2 &= \vartheta_1 + \cdots \\ t_3 &= \vartheta_2 + \cdots \\ t_4 &= \vartheta_3 + \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_5 &= w + \cdots \\ t_6 &= \zeta w + \cdots \\ t_7 &= \zeta^2 w + \cdots \\ t_8 &= \zeta^3 w + \cdots \\ t_9 &= \zeta^4 w + \cdots \\ t_{10} &= \zeta^5 w + \cdots \end{cases}$$

Alle Wurzeln lassen sich somit rational darstellen, sobald man dem Körper der Potenzreihen in a_4^{-1} die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$t^6 + \frac{a_4}{a_2} = 0 \qquad \text{und} \qquad t^3 + a_2 t + a_3 = 0 \tag{1}$$

adjungiert hat.

Nach Adjunktion der Wurzeln der ersteren Gleichung bleibt die letztere, wie oben gezeigt, allgemein und ihre Gruppe die Symmetrische S_3. Die Permutationen von S_3 lassen t_1 und t_5 bis t_{10} invariant und vertauschen t_2, t_3, t_4 ebenso wie $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Es gibt somit in der Gruppe der Gleichung $F(t) = 0$ eine Transposition.

Nach Adjunktion der 6. Einheitswurzel ζ und der Lösungen der zweiten Gleichung (1) zum Koeffizientenkörper der Potenzreihen bleibt die erste Gleichung (1) nach dem Eisensteinschen Kriterium irreduzibel. Ihre Gruppe ist bekanntlich zyklisch und wird erzeugt von einer Substitution der Ordnung 6, die w in ζw überführt und t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10} zyklisch vertauscht. Multipliziert man diese Permutation noch mit einer geeigneten Perm. der symmetrischen Gruppe S_3, so erhält man die Permutation

$$S = (t_2 t_3 t_4)(t_5 t_6 t_7 t_8 t_9 t_{10}) .$$

Eine imprimitive Gruppe kann niemals die Permutation S enthalten. Das ist eine rein kombinatorische Angelegenheit: Man probiere alle Zerlegungen der 10 Nummern der Wurzeln in 5 Imprimitivitätsgebiete zu je 2 oder 2 Imprimitivitätsgebiete zu je 5 durch und überlege sich, daß die Permutation S, weil sie die Ziffer 1 fest läßt, auch das zugehörige Imprimitivitätsgebiet (aus 2 oder 5 Ziffern) fest lassen müßte; aber S läßt kein Paar und keine Fünferkombination fest.

Somit ist die Galoissche Gruppe primitiv (und transitiv); außerdem enthält sie eine Transposition (23). Man betrachte nun die Menge[2] aller Nummern, die sich mit der Nummer 2 durch Ketten von Transpositionen wie (23), (35), (58), (89), (91) in der Gruppe verbinden lassen. Diese Menge wird durch alle Permutationen der Gruppe entweder in sich oder in dazu fremde Mengen übergeführt. Da die Gruppe transitiv und primitiv ist, muß die Menge alle Nummern von 1 bis 10 enthalten. Die Transpositionen der Gruppe erzeugen somit die symmetrische S_{10}.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

[2] Der Text von hier bis zum Schluss ist am Rand mit Bleistift markiert und trägt (offenbar von Hasses Hand) den Vermerk “unklar!”.

1.33 22.06.1938, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
22. Juni 1938.

Lieber Herr Hasse!

Durch besondere Umstände bin ich leider verhindert, am Montag schon nach Göttingen zu kommen. Ich werde am Dienstag im Lauf des Tages eintreffen. Demzufolge kann ich auch an dem Abend im Schwarzen Bären nicht teilnehmen. Ich bitte Sie, mich entschuldigen zu wollen.

Herzliche Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

Bemerkung: Offensichtlich ist dieser Brief falsch datiert. Wahrscheinlich ist der 22. Juni 1939 gemeint, also nicht 1938. Siehe den Brief vom 7. 6. 1939.

1.34 01.07.1938, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
1. Juli 1938.

Lieber Herr Hasse,

Ich habe in letzter Zeit viel nachgedacht, korrespondiert und gelesen über die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik und über die Rolle, welche Zenon darin angeblich gespielt hat. Das Ergebnis habe ich in einer kleinen Abhandlung niedergelegt, die noch nicht ganz fertig ist, aber die ich Ihnen trotzdem jetzt schon zur Ansicht schicke, weil ich Sie und Scholz darin ziemlich scharf angreife. An Scholz habe ich sie nicht geschickt, weil ich endlose Diskussionen befürchte. Damit aber die Angegriffenen sich von Vornherein verteidigen können, schicke ich sie Ihnen.

Bitte fassen Sie den angriffslustigen Ton nicht als persönlich gegen Sie gemeint auf; das würde mir sehr leid tun. Ich habe ihn gewählt, damit das was ich eigentlich beweisen will, klarer hervortritt und nicht im Beweismaterial erstickt wird. Ich müßte sonst viel mehr Worte brauchen, und das ist mir zuwider. Sollten Sie sich aber unverhofft persönlich angegriffen fühlen, so bin ich bereit, die scharfen Kanten etwas abzuschleifen; denn mir ist es nur um die Sache zu tun, die mich allerdings brennend interessiert.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.35 04.07.1938, Hasse to v d Waerden

4. Juli 1938

Lieber Herr v. d. Waerden,

Ich habe das vollste Verständnis dafür, dass man in einer wissenschaftlichen Angelegenheit, die nicht reine Mathematik ist, zu einer anderen Überzeugung gelangen kann. Ich müsste nicht Mathematiker sein, wenn ich Ihnen verübeln sollte, dass Sie glauben gefunden zu haben, dass Scholz und ich geirrt haben.

Ich bin ferner in der glücklichen Lage, Sie persönlich zu kennen und Ihre ganze frische und "angriffslustige" Art in Diskussionen zu lieben. Ich weiss daher, wie Sie gemeint haben, was Sie da niedergeschrieben haben, und es hat mich amüsiert, aber in keiner Weise gegen Sie verstimmt.

Ich möchte Ihnen aber ganz offen sagen, dass ich es nicht schön finden würde, wenn Sie Ihre Ausführungen in dieser äusseren Form, vom Untertitel angefangen, veröffentlichten. Denn wenn ich mir den Menschen v. d. Waerden, den ich kenne und in seiner ganzen Art schätze, hinter diesen Ausführungen wegdenke, so entsteht allerdings ein ganz anderer Eindruck, und ich kann nicht glauben, dass Sie *diesen* Eindruck in der Öffentlichkeit erwecken wollen. Scholz, der für die von uns gemeinsam gegebene Schilderung der Wirksamkeit Zenons vom historisch–philologischen Standpunkt verantwortlich ist, ist schliesslich ein ernst zu nehmender Mensch von hohem geistigen Niveau und angesehenem wissenschaftlichen Namen. Wenn er, und mit ihm ich, nach Ihrer Ansicht geirrt haben, so können Sie das doch auch nach gutem altem wissenschaftlichen Brauch sine ira et studio, in diesem Falle heisst das ohne uns ins Lächerliche zu ziehen, in ernstem Tone begründen und der Öffentlichkeit unterbreiten. Ich sehe nicht ein, wieso das mehr Raum und grössere Darstellungskunst erfordern sollte. Und wenn es wirklich so sein sollte, so meine ich, Sie sind diese Mehrleistung uns schuldig, und ebenso auch Ihrem eigenen Namen.

Zur Sache selbst möchte ich mich nicht äussern, ehe ich nicht mit Scholz darüber in Verbindung getreten bin. Auch verbietet mir schon die dringliche Arbeit an meinem Buch, der ich mich in den kommenden Monaten ausschliesslich und mit höchster Intensität widmen muss, mich jetzt in diese mir seit langem fernliegenden Dinge erneut hereinzudenken. Es ist ja auch vielleicht richtiger, wenn Sie zunächst einmal ohne vorherige sachliche Diskussion mit Scholz oder mir die Ergebnisse, zu denen Sie gekommen sind, abschliessen und veröffentlichen. Ich schreibe also Scholz zunächst garnichts darüber.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.36 02.01.1939, P.C. v d Waerden to Hasse

Leipzig,
Postcard 2. Jan. '39.

Lieber Herr Hasse!

Seit einigen Wochen ist das Manuskript Ihrer algebraischen Zahlentheorie in meinem Besitz. Da ein Buch von mir im Erscheinen begriffen ist, habe ich jetzt leider keine Zeit, mir das Ms näher anzusehen. Ich werde mich daher erst in einigen Monaten, wenn mein Buch erschienen ist, mit der Sache beschäftigen können. Wenn Sie keinen anderen Wunsch haben, bleibt das Paket bis dahin bei mir liegen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.37 11.01.1939, Hasse to v d Waerden

11. 1. 1939.

Lieber Herr van der Waerden!

Wenn Sie doch jetzt nicht zur Durchsicht des Manuskriptes meiner Zahlentheorie kommen, so senden Sie mir doch, bitte, das Manuskript zurück.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener

H. Hasse

1.38 15.02.1939, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
15. Febr. 1939.

Lieber Herr Hasse!

Es täte mir sehr leid, wenn durch die Auseinandersetzung zwischen Ihnen und der Redaktion der gelben Sammlung das gute Einvernehmen, das zwischen uns in den letzten Jahren bestanden hat, gefährdet wäre. Mir liegt daher daran, dass Sie über unsere Gründe und Motive vollständig aufgeklärt werden. Sie werden dann sehen, dass es mir ebenso wie Springer und F. K. Schmidt völlig fern liegt, Sie verärgern oder schlecht behandeln zu wollen. Unser einziger Wunsch war von Anfang an, ein gutes Buch über elementare und algebraische Zahlentheorie nach modernen Gesichtspunkten herauszubringen, und ich glaube auch heute noch, dass Sie mit Ihrem klaren Stil und Ihrem Blick für die wesentlichen Gesichtspunkte der geeignete Mann dafür sind. Es müsste doch sehr merkwürdig zugehen, wenn mit etwas gutem Willen auf beiden Seiten nicht eine Lösung gefunden werden könnte, die allen berechtigten Gesichtspunkten Rechnung trägt und Ihre jahrelange Arbeit nicht im Sande verlaufen lässt.

Eine solche Lösung zu suchen, hatte ich mir vorgenommen. Dafür wäre selbstverständlich ein gründliches Studium Ihres Manuskriptes notwendig, und auch die Formulierung und Begründung meiner Vorschläge hätte viel Zeit in Anspruch genommen. Da Sie nun seinerzeit erklärt hatten, vor September 1939 keine Zeit für irgendwelche textliche Änderungen zu haben, hatte ich mir vorgenommen, im Frühjahr nach Fertigstellung meines Buches das Manuskript gründlich zu studieren und Ihnen dann Vorschläge zu machen. Ich hatte, wie Sie ganz richtig vermuteten, die Hoffnung, dass Sie bis dahin mehr Abstand zu der Sache gewonnen haben würden, was eine Einigung erleichtern würde. Ich weiss aus eigener Erfahrung, dass ich oftmals, wenn Emmy Noether eine gründliche Änderung eines Manuskriptes von mir verlangte, diese zuerst entrüstet zurückgewiesen habe, und dann nach einigen Wochen oder Monaten die Arbeit doch umgearbeitet habe.

Da nun der Lauf der Ereignisse mich dazu bringt, Ihnen jetzt schon meine Ansichten auseinanderzusetzen, bin ich natürlich nicht so gut vorbereitet und kann auch noch keine endgültigen Vorschläge machen, Ich habe von

Ihrem Manuskript etwa die Hälfte gelesen und habe das Inhaltsverzeichnis des Ganzen ein wenig studiert. Ich kann Ihnen also nur erläutern, warum wir die ungeänderte Annahme Ihres Manuskriptes nicht befürworten konnten, und in welche Richtung meine Änderungsvorschläge gehen würden. Die präzisen Kürzungsvorschläge, die Herr Schmidt Ihnen gemacht hat, kenne ich nicht; meine Vorschläge sind unabhängig und unbeeinflusst entstanden und wir haben nur nachträglich festgestellt, dass sich unsere Ansichten im grossen und ganzen decken.

Der erste Teil, der die elementare Zahlentheorie behandelt, und den Sie mir damals in Göttingen schon zeigten, gefällt mir sehr gut. Ich hatte mir damals vorgestellt, und zweifellos ist das auch Ihre ursprüngliche Absicht gewesen, dass es nun in derselben Weise weitergehen würde, also dass die Zahlentheorie unter Berücksichtigung aller wichtigen Gesichtspunkte, insbesondere vom Gesichtswinkel der Bewertungstheorie aus, weiter entwickelt werden würde. Statt dessen ist aus den folgenden 200 oder 300 Seiten ein fast vollständiges Lehrbuch der Bewertungstheorie geworden, das viel mehr enthält, als man in der Zahlentheorie jemals gebrauchen kann, z. B. die Klassifikation aller perfekter bewerteter Körper — gewiss sehr interessant, aber doch nur für Forscher, die die höchsten Berge der modernen Algebra besteigen wollen, nicht für Studenten der Zahlentheorie. Ich finde, die Forscher sollte man — nach einer Einleitung, wie sie etwa mein Buch enthält — auf die sehr schön geschriebenen Originalabhandlungen verweisen. Den Studenten der Zahlentheorie aber sollte man zeigen, wie schön und einfach manche Teile der Zahlentheorie vom Bewertungsstandpunkt aus dargestellt werden können. Das war doch sicher auch Ihre ursprüngliche Absicht, aber unmerklich ist, so stelle ich mir vor, die Bewertungstheorie unter Ihren Händen gewachsen, und jetzt können Sie sich nicht mehr von ihr trennen.

Dass Sie die algebraischen Zahlen zu den algebraischen Funktionen in Parallele setzen, ist sehr schön. Aber ist es zu diesem Zweck nötig, die Theorie der algebraischen Funktionen bis zum Riemann–Rochschen Satz durchzuführen, unter Mitnahme auch solcher Gegenstände wie die Differentiale, die überhaupt keine Parallele in der Zahlentheorie haben ? Dazu kommt nun noch die Kollision mit dem Buch von Deuring, das bald in derselben Sammlung erscheinen wird, und in dem die ganze arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen noch einmal behandelt werden wird. Diese Kollision ist es vor allem, die mich dazu gebracht hat, von dem Abdruck Ihres Manuskriptes in der jetzigen Form abzuraten. Es geht doch nicht an, dass ein und derselbe Gegenstand ohne jede Notwendigkeit in zwei Büchern derselben Sammlung behandelt wird. Ausserdem scheint es mir, dass gerade diese Paragraphen ohne jede Mühe von Ihrem Buch getrennt werden könnten. Ihre strikte Ablehnung ist mir unverständlich.

Zum Schluss erwähne ich noch einen analogen Fall, der Ihnen zeigen soll, dass mein Verhalten in keiner Weise gegen Sie persönlich gerichtet ist, sondern von rein sachlichen Gesichtspunkten diktiert wird, und dass ich gegen mich selbst als Autor nach genau denselben Gesichtspunkten verfahre. In meinem Buch über algebraische Geometrie das jetzt bald erscheint, hatte ich ursprünglich drei Paragraphen den Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung gewidmet. Ein reizender Gegenstand, über den Steiner, Hesse, Riemann, M. Noether und andere schöne Abhandlungen geschrieben haben. Ich habe mit grosser Mühe und Liebe mir das Wichtigste zusammengesucht und es mit den einfachsten, zum Teil neuen Beweisen versehen. Als aber das Buch über den vorgesehenen Umfang hinauswuchs, habe ich die drei Paragraphen, da sie im Zusammenhang des Buches entbehrlich waren, rücksichtslos wieder gestrichen. Das Buch sollte eben eine "Einführung" sein und nur die Elemente, die man in der ganzen algebr. Geometrie immer braucht, enthalten. Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Methoden waren auch sonst genug da, also musste das umfangreichste Beispiel wegfallen.

Ich hoffe sehr, dass Sie nun unseren Standpunkt besser verstehen.

Ihrem Wunsch gemäss, werde ich das Zeno–Manuskript nicht so publizieren. Die Umgestaltung zu einer gutbürgerlichen Abhandlung wird wohl noch ein halbes Jahr dauern.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.39 15.03.1939, Hasse to v d Waerden

15. 3. 1939.

Lieber Herr van der Waerden,

Ich danke Ihnen für Ihren ausführlichen Brief, und bitte Sie meine Stellungnahme zu der Angelegenheit aus dem in Abschrift beiliegenden Schreiben an Herrn Dr. Springer zu ersehen. Ich möchte noch hinzufügen, dass ich jederzeit bereit bin, meine Gründe betreffs der inhaltlichen Gestaltung in mündlicher Besprechung näher zu erläutern. Ich halte es auch für möglich, dass sich bei einer solchen Aussprache Ihre Bedenken über eine vermeintliche Kollision mit dem geplanten Deuringschen Buch zerstreuen lassen.

Zu Ihrem Entschluss in der Zenon–Angelegenheit beglückwünsche ich Sie.

Herzlichst Ihr

H. Hasse

1.40 29.03.1939, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
Postcard 29. 3. 39

Lieber Herr Hasse !

Da Sie eine mündliche Aussprache über Ihr Buch angeregt haben, und da wir auch die Frage, die wir Siegel vorlegen wollen, noch präzisieren müssen, möchte ich gerne einmal übers Wochenende nach Göttingen kommen.

Vielleicht wäre es gut, wenn ich zu einer Zeit komme, wo auch Siegel in Göttingen anwesend ist. Wann würde es passen ?

Herzliche Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.41 31.03.1939, Hasse to v d Waerden

31. 3. 1939

Lieber Herr van der Waerden,

Es ist sehr freundlich von Ihnen, dass Sie nach Göttingen kommen wollen. Siegel ist allerdings jetzt nicht hier. Ich nehme an, dass er wie gewöhnlich erst zu Beginn der Vorlesungen wieder anwesend ist, also ab 13. April. Ich werde Ihnen dann noch Nachricht geben, wann es ihm und mir passt.

Mit besten Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.42 16.04.1939, Hasse to v d Waerden

16. 4. 1939

Lieber Herr v. d. Waerden,

Zu meiner grossen Freude ist es mir gelungen, Herrn Philip Hall aus Cambridge, King's College für eine Vortragsreihe über Gruppentheorie in der Mathematischen Gesellschaft Göttingen zu gewinnen. Ich möchte dies zum Anlass nehmen, um gleichzeitig eine möglichst grosse Zahl von gruppentheoretisch interessierten deutschen Mathematikern nach Göttingen zu Vorträgen einzuladen und so eine Art gruppentheoretische Woche hier zu veranstalten. Bei der Vorbereitung hierzu haben mich die Herren Magnus und Zassenhaus in dankenswerter Weise unterstützt. Wir sind dabei bald zu der Notwendigkeit gekommen, gewisse Teile der Gruppentheorie auszuschliessen, um einer Überfüllung und Überlastung der Vortragswoche vorzubeugen. So haben wir uns die Norm gestellt, dass die Vorträge in innerem Zusammenhang mit den Hallschen Arbeiten stehen sollen. Die Hallschen Vorträge sollen ausgesprochen den Mittelpunkt der Veranstaltung bilden, und die Vorträge von deutscher Seite sollen sich daran anlehnen. Auf Vorschlag der Herren Magnus und Zassenhaus möchte ich Sie nun bitten, ob Sie sich an dieser Veranstaltung dadurch beteiligen wollen, dass Sie uns ein einstündiges Referat über die letzte grosse Arbeit von Fitting halten. Dieser Vortrag würde in engem Zusammenhang mit einem der Hallschen Hauptvorträge stehen, nämlich dem über die Konstruktion von auflösbaren Gruppen. Herr Hall hat in seiner Korrespondenz mit mir direkt den Wunsch geäussert, dass ein solcher Vortrag zur Ergänzung seines eigenen gehalten werden möchte. Ich lege Ihnen einen Entwurf für das Programm der Veranstaltung bei, soweit es bis jetzt schon feststeht, und habe mir erlaubt, darin auch schon den von Ihnen erbetenen Vortrag vorläufig einzusetzen, damit Sie sehen, wie das ganze Bild sein wird. Für eine zusagende Antwort oder ev. Anregungen zur Gestaltung des Programms wäre ich Ihnen sehr dankbar.

Für Reise– und Aufenthaltskosten steht der Gastvorlesungsfonds unseres Instituts zur Verfügung. Wir haben beschlossen, unsere Vorlesungen während dieser Woche ausfallen zu lassen, und konnten das umso eher tun, als ja das Sommersemester diesmal um einen ganzen Monat verlängert wurde.

Morgen erwarten wir hier Herrn Siegel zurück. Ich werde dann sobald als möglich mit ihm sprechen und einen Termin festlegen, für die in Aussicht genommene gemeinsame Besprechung über die Frage meines Buches. Ich darf annehmen, dass es Ihnen am Wochenende am besten passt. Sonst bitte ich Sie um Ihre Wünsche hinsichtlich des Wochentages. Vielleicht möchten Sie übrigens zu den Vorträgen des italienischen Mathematikers Bassi herkommen, die am 27. oder 28. April liegen. Er spricht über Topologie der Mannigfaltigkeiten. Eine Einladung dazu geht Anfang dieser Woche heraus.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.43 23.04.1939, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
23. April 1939.

Lieber Herr Hasse!

Sehr gerne werde ich den geplanten Vortrag über die letzte Arbeit von Fitting im Juni übernehmen. Das ganze Programm sagt mir sehr zu, und ich wüsste gar nicht, was ich noch für Vorschläge dazu machen sollte, da doch alles ideal angeordnet ist.

Wenn die Besprechung über Ihr Buch vorher stattfinden soll, passt es mir, wie ich schon schrieb, am Wochenende am Besten. Zu den Vorträgen von Bassi kann ich leider schlecht kommen, obwohl mich das Thema sehr interessiert, da ich dann am Donnerstag und Freitag 3 bis 4 Vorlesungsstunden ausfallen lassen müsste. Ich erwarte Ihre Nachsicht, wenn Sie mit Siegel gesprochen haben werden.

Mit bestem Dank für Ihre Einladung und herzlichen Grüssen bin ich

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.44 24.04.1939, Hasse to v d Waerden

24. 4. 1939

Lieber Herr v. d. Waerden !

Der Vortrag von Bassi, von dem ich Ihnen schrieb, ist nun auf Sonnabend den 28. 4. vormittags angesetzt worden. Leider ist aber Siegel hochwahrscheinlich an diesem Tage nicht in Göttingen. Er will seinen erkrankten Vater in Berlin besuchen. An dem nächsten Wochenende (6.—7– Mai) würde Siegel, wie er mir heute sagt, hier sein. Für den Fall, dass Sie dann hierherkommen wollen, steht Ihnen natürlich das Institutsgastzimmer gerne zur Verfügung.

1.45 02.06.1939, Hasse to v d Waerden

2. 6. 1939.

Lieber Herr van der Waerden!

Bei meiner Anwesenheit in Paris traf ich Severi, der zum Jubiläum von Cartan gekommen war. Er war sehr erstaunt, dass Sie die Einladung zum Voltakongress noch nicht bekommen hätten. Ihm lag daran, möglichst schnell in den Besitz der Zusagen zu kommen, um über unter Umständen freiwerdende Plätze noch anderweitig verfügen zu können. Die Einladung an Sie ist übrigens nicht, wie ich Ihnen sagte, durch den holländischen diplomatischen Dienst gegangen, sondern durch den deutschen. Nur in der für Severi massgeblichen Verteilung der Einladungen auf Nationen sind Sie als Holländer gerechnet. Severi bat mich, mich darum zu kümmern, dass die Einladung an Sie möglichst schnell in Ihre Hände kommt. Ich will dazu gerne tun, was in meiner Kraft steht, falls es noch nötig sein sollte. Darum bitte ich Sie, mir kurz mitzuteilen, ob die Einladung vielleicht schon inzwischen eingegangen ist.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

PS Morgen werden die Einladungen zu unserer Gruppenwoche herausgehen. Die dabei befindliche Frage wegen der Unterbringung im Hotel ‚Sonne' kommt für Sie nicht in Frage, da wir vorgesehen haben, dass Krull und Sie im Institut wohnen sollen. Ich hoffe, dass Ihnen das recht ist. Ganz so freigebig wie damals bei den Vorträgen über algebraische Geometrie können wir diesmal wegen der grossen Anzahl der Vorträge nicht sein. Ich hoffe, dass Sie mit dem für Sie zur Verfügung stehenden Betrag von RM 120.– für Reise– und Aufenthaltskosten gut auskommen werden.

1.46 07.06.1939, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
7. Juni 1939.

Lieber Herr Hasse!

Besten Dank für die Zusendung des Programms der Gruppenwoche, und für die Erlaubnis zum Übernachten im Institut. Ich komme entweder Sonntag oder Montag Nachmittag in Göttingen an. Es ist wohl nicht nötig, dass ich noch vorher Bescheid gebe, wann ich komme.

Die Einladung für den Volta–Kongress habe ich nicht erhalten. Ich weiss auch noch nicht, ob ich im Oktober wohl nach Italien werde fahren können, falls die Einladung doch noch kommen sollte.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

Vgl. hierzu den Brief, datiert am 22. Juni 1938. Offensichtlich ist jener Brief falsch datiert und gehört daher hierhin.

1.47 31.07.1939, v d Waerden to Hasse

Laren N–H,
31. 7. 39

Lieber Herr Hasse!

Das Buch von Severi war in Leipzig nirgends zu haben. Ich habe daraufhin von der Univ.–Bibliothek aus anfragen lassen bei den anderen deutschen Bibliotheken, aber mit negativem Erfolg. Ich werde jetzt noch einmal in Amsterdam nachfragen, ob es dort vorhanden ist.

Mit besten Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.48 01.02.1940, v d Waerden to Hasse

LEIPZIG,
1. FEBR. 1940.

LIEBER HERR HASSE!

Sie sagten mir im Sommer, Sie wollten Ihre Zahlentheorie in den Sommerferien fertigstellen. Ich würde mich freuen, wenn Sie mir einmal mitteilen wollen, wie weit das Buch jetzt gediehen ist. Auch Springer würde auf eine diesbezügliche Mitteilung sicherlich grossen Wert legen.

Hier geht alles seinen gewohnten Gang, von den Kohlenschwierigkeiten, die uns zwingen, in der Universität zu lesen, abgesehen. Reichardt hat vor Weihnachten eine ausgezeichnete Probevorlesung gehalten und wird hoffentlich bald Dozent.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

B. L. V. D. WAERDEN

1.49 06.02.1940, Hasse to v d Waerden

6. 2. 40.

Lieber Herr van der Waerden!

Meine Absicht, das Manuskript meines Buches im September–Oktober dieses Jahres den verabredeten kleinen Änderungen zu unterziehen, wurde durch den Krieg vereitelt. Ich konnte in diesen beiden ersten Monaten unmöglich meine Gedanken auf diese Aufgabe konzentrieren. Ausserdem hatte ich das Gefühl, dass es nicht sehr zweckmässig ist, dieses Buch während des Krieges erscheinen zu lassen. Ich glaubte vielmehr, ein Erscheinen unmittelbar nach Kriegsschluss sei in jeder Hinsicht günstig. Damals rechnete ich allerdings mit einer verhältnismässig kurzen Kriegsdauer. Heute sieht die Sache ja nun so aus, als ob der Krieg noch lange Zeit dauern wird. Es würde dann vielleicht doch besser sein, das Manuskript nicht bis zum Ende liegen zu lassen, da es sonst veraltet.

Ich habe gelegentlich schon Anläufe genommen, die verabredeten Änderungen durchzuführen. Dabei habe ich festgestellt, dass es verhältnismässig leicht sein wird, die beiden Paragraphen über Basisdarstellung der Einheiten und die p–adische Exponentialfunktion zu streichen, und dass sich auch in dem dritten Teil kleine Kürzungen leicht durchführen lassen. So z. B. könnte ich die ausgedehnten numerischen Beispiele über quadratische Zahlkörper zusammenstreichen und könnte auch die inzwischen durch meine eigenen Überlegungen überholten Betrachtungen über die Normalerzeugung algebraischer Funktionenkörper weglassen. Dagegen wurde mir bei näherem Zusehen klar, dass die von Ihnen gewünschte Umstellung in der Strukturtheorie der bewerteten Körper ein so gewaltsamer Einschnitt ist, dass ich den zweiten Abschnitt des Buches fast ganz neu schreiben müsste. Dazu kann ich mich jetzt umso weniger entschliessen, als ich damit rechnen muss, im Laufe dieses Jahres einberufen zu werden. Ich möchte dann nicht die Einberufung gerade in einem Moment erhalten, wenn ich alles auseinandergerissen und noch nicht wieder zusammengefügt habe.

Ich möchte Sie nun bitten, mir ganz offen zu schreiben, was bei dieser Sachlage Ihnen als Herausgeber und auch dem Verlag am besten erscheint.

Unser Institut hat noch für 10 Tage Kohlen, dann müssen wir schliessen, wenn kein Wunder geschieht.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

1.50 02.03.1940, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
2. März 1940.

Lieber Herr Hasse!

Ich bitte sehr um Entschuldigung, dass ich Ihren freundlichen Brief vom 6. 2. bisher noch nicht beantworten konnte. Die von Ihnen aufgeworfenen Fragen bezüglich der Umarbeitung und Drucklegung Ihres Buches während des Krieges haben zu einer Korrespondenz zwischen Verlag und Herausgebern geführt, die sich durch allerhand zufällige Umstände, die nichts mit der Sache selbst zu tun haben (Reisen, Postverzögerung u. s. w.) länger hinausgezogen hat. Ich hoffe, Ihnen in einer Woche endgültige Antwort zukommen zu lassen und bitte Sie, sich bis dahin zu gedulden.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener

B. L. v. d. Waerden

1.51 20.10.1940, Hasse to v d Waerden

Berlin,
den 20. 10. 40

Lieber Herr v. d. Waerden,

Kürzlich erhielt ich durch Vermittlung eines Gefr. Wapler, der 1938/39 Assistent bei H. Brandt war und jetzt als Soldat in Paris ist, beiliegendes Ms. von Dieudonné. Wapler hatte Dieudonné bei einem Besuch im Institut Henri Poincaré kennen gelernt und hatte von ihm das Ms. mit der Bitte erhalten, es mir zur Begutachtung weiterzuleiten. Dieudonné, der bisher nicht auf diesem Gebiete gearbeitet hat, fühlte sich nämlich unsicher, ob seine Ergebnisse in sachlicher oder methodischer Hinsicht neu und genügend interessant seien.

Ich selbst bin ja seit einer Reihe von Jahren aus diesen Dingen ganz heraus gekommen. Zudem habe ich leider gar keine Zeit, um mich in Ruhe und Gründlichkeit mit mathematischen Fragen zu befassen, es sei denn mit solchen, die ich "offhand" erledigen kann, und dazu gehört diese hier nicht. Eine flüchtige Durchsicht gibt mir allerdings den Eindruck, als ob tatsächlich in der D. schen Arbeit nichts grundsätzlich Neues darinsteckt. Es mag sein, dass er in der invarianten Beschreibung der Struktur beliebiger (nicht halbeinfacher) hyperkomplexer Systeme etwas weiter kommt als Dickson und seine Schule. Eine völlig befriedigende Lösung dieses Problems, so wie ich sie mir seit Jahren wünsche, gibt er jedoch nicht. Nach seinem Begleitbrief hat er das Ziel gehabt, "einen genauen Überblick über die Struktur der allgemeinen hyperkomplexen Systeme zu erhalten, ohne Bezug auf den Begriff des Radikals zu nehmen". Es erscheint mir fraglich, ob dies methodische Prinzip bei Wahl der idealtheoretischen und modultheoretischen Schlussweise gesund ist. Wenn man schon einmal mit diesen Methoden arbeitet, so sehe ich keinen Grund, weswegen man den von diesem Standpunkt aus doch sehr vernünftigen und beherrschenden Begriff des Radikals umgehen soll — und um mehr als ein *Umgehen* handelt es sich nach meinem Urteil nicht. Ich selbst wünsche mir als Zahlentheoretiker allerdings auch seit Jahren eine vom Begriff des Radikals freie Begründung der Strukturtheorie der Algebren, aber doch ganz anders: Da nun einmal in der Zahlentheorie ausschliesslich die halbeinfachen Algebren eine Rolle spielen, möchte ich für die Vorlesung und für ein

Lehrbuch eine Begründung haben, bei *tatsächlich* von vornherein nur von halbeinfachen Algebren über einem Körper die Rede ist, wobei halbeinfach nicht negativ durch das Fehlen eines Radikals definiert ist, sondern positiv durch das Nichtverschwinden einer Determinante, jedenfalls nicht durch Bezugnahme auf die Ideale in der Algebra.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie sich das D. sche Ms. einmal ansehen und mir schreiben würden, was Sie darüber denken.

Ohne von Dieudonné's Anwesenheit in Paris und diesem Ms. zu wissen — es erreichte mich erst in den letzten Tagen — war ich übrigens Anfang des Monats selbst dienstlich in Paris und habe dort Julia besucht. Er war durch die Ereignisse seelisch sehr stark mitgenommen. Unter Tränen berichtete er mir von seinem persönlichen Schicksal — er hat grossen materiellen Schaden erlitten — und bekannte sich trotz allem und vielleicht noch bestimmter als im Mai 1939 bei meinem Besuch in Paris zu der Notwendigkeit, dass die französischen und deutschen Wissenschaftler enge Beziehungen pflegen und sich gegenseitig verstehen lernen sollten. Dies Bekenntnis ist ihm sicherlich nicht leicht gefallen, und nicht alle Pariser Mathematiker werden so denken wie er. Er erzählte mir noch, dass A. Weil, der ja franz. Reserveoffizier ist, irgendwo in Frankreich im Gefängnis sitzt, weil er den Kriegsdienst verweigert hat. Vorher war er schon einmal im Gefängnis, und zwar im Winter in Finnland. Dort wurde er bei seiner Rückkehr aus Russland unter dem Verdacht der Agententätigkeit für Russland verhaftet. Julia hat sich deutlich von Weil distanziert. Wie alle Franzosen, mit denen ich zusammenkam, war auch Julia *sehr* schlecht auf die Engländer zu sprechen. Er sagte, die Engländer hätten Frankreich belogen und betrogen, und zwar nicht erst nach der Niederlage, sondern schon vorher. Man wisse jetzt, dass die englische Politik und Kriegsleitung Frankreich grundsätzlich bereits Ende März 1940 aufgegeben habe, und dass alle militärischen Massnahmen der Engländer auf dem Kontinent während unserer Offensive allein unter diesem Gesichtspunkt gestanden haben.

Ich könnte Ihnen noch manches Interessante aus dem Gespräch mit Julia und überhaupt aus meinen Erlebnissen und Eindrücken in Frankreich erzählen, doch reicht leider meine Zeit nicht dazu. Vielleicht habe ich bald einmal wieder Gelegenheit, Sie in Leipzig zu besuchen, und ähnlich wie im Sommer eine so anregende und offene Unterhaltung über die Zeitfragen mit Ihnen und Ihrer Frau zu führen.

Mit Julia habe ich einen Verbindungskanal. Wenn Sie irgendetwas von ihm oder über französische Mathematiker wissen wollen, so kann ich das vermitteln.

Herzliche Grüsse, auch an Ihre Frau

stets Ihr

H. Hasse

1.52 No Date, Hasse to v d Waerden

z. Zt. Berlin W 50,
Kurfürstendamm 12
Pension Kurfürstenhof

Lieber Herr v. d. Waerden,

Im Anschluss an unsere Unterhaltung in Jena[1] sende ich Ihnen beiliegend meine Aufzeichnungen über die rein–algebraische Begründung der Theorie des Abelschen Funktionenkörpers. Diese findet sich in den letzten 4 §§, die in besonderem Deckblatt beiliegen. Damit Sie aber die Möglichkeit haben, etwaige Unklarheiten in der benutzten Terminologie und Bezeichnung zu verstehen, lege ich Ihnen auch die vorangehenden 4 §§ bei. Hierin wird Sie vielleicht, im Anschluss an Ihren Vortrag in Jena, meine Fassung des Beweises auf S. 23/24 für einen wichtigen Satz der Theorie der Funktionenkörper einer Veränderlichen interessieren.

Zu dem Ganzen möchte ich bemerken, dass ich den Plan eines so umfassenden Berichts, wie er in der vorangestellten Inhaltsangabe niedergelegt ist, leider aufgeben musste, einmal weil ich keine Zeit habe, und dann weil mir für Kap. I, Kap. II noch wesentliche Punkte der Beweise für g grösser als 1 fehlen. So habe ich ins Auge gefasst, den Inhalt der "Einleitung", die auf den beiliegenden Blättern ausgearbeitet ist, demnächst im Jahresbericht zu veröffentlichen, und ferner meine Beweise der Sätze von Weil und Siegel für $g = 1$ je in besonderen Arbeiten zu veröffentlichen.

Ich wäre Ihnen nun sehr dankbar, wenn Sie sich vor allem etwas in die §§ 7, 8 (der neuen Fassung) vertiefen würden, weil ich darin, wie gesagt, das Gefühl habe, mich auf Glatteis zu bewegen. Ich bin sicher, dass Ihre Methoden in der algebraischen Geometrie geeignet sind, die dort offengebliebenen Lücken zu schliessen, besonders den Beweis der Sätze auf S. 54 und S. 62. Auch der Beweis des Satzes auf S. 44 mit rein–algebraischen Mitteln scheint mir überfällig. Es ist wirklich eine Schande, dass die moderne Algebra diese Schwierigkeit noch immer nicht überwunden hat.

Ich hoffe, im Januar Gelegenheit zu haben, Sie in Leipzig zu besuchen, und würde mich sehr freuen, wenn wir dann über diese Dinge sprechen könnten.

[1] The date isn't mentioned in this letter, but its archive number is the direct successor of the one of the letter of 20. 10. 1940

Mit freundlichen Grüssen

stets Ihr

H. Hasse

1.53 31.10.1940, v d Waerden to Hasse

LEIPZIG,
31. OKT. 1940.

LIEBER HERR HASSE!

Haben Sie besten Dank für Ihren sehr interessanten Brief vom 20. Was Sie über Frankreich und die französischen Mathematiker schreiben, ist sehr bemerkenswert.

Die Ergebnisse des Manuskriptes von Dieudonné scheinen mir grösstenteils neu zu sein. Er kommt in der Tat in der invarianten Beschreibung der Algebren mit Radikal ein gutes Stück weiter als alle bisherigen Forscher. Die Methoden sind die bekannten modultheoretischen, die auch der Darstellung in meinem Buch zugrunde liegen; das wichtigste Hilfsmittel ist im Grunde der Remaksche "Sockel": die Summe aller minimalen Untermoduln eines gegebenen Moduls (Remak, J. f. M. 162), dessen Eigenschaften für den vorliegenden Fall neu hergeleitet werden. (Das ist übrigens von jeher das Schicksal des Sockels gewesen: Jeder, der ihn einmal benutzte, hat ihn neu entdeckt und seine Eigenschaften neu hergeleitet, was ja auch sehr einfach ist.)

Dass die Methoden Dieudonnés somit nicht neu sind, stört mich jedoch nicht: Man kann ja auch mit vorhandenen Methoden neue Ergebnisse finden. Das ist ja gerade das Merkmal einer fruchtbaren Methode: dass sie weiter trägt als der Zweck, für den sie zuerst erdacht wurde. Störender ist, dass die Ergebnisse nicht in klar gegliederten Sätzen zusammengefasst werden. Man muss erst alle Beweise lesen und sich zahlreiche Bezeichnungen ($\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{a}'_i$, $\mathfrak{b}'_i$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{v}_0$, e', e'_i, e'', e''_i, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_{ij}$, $\mathfrak{a}'_0$, $\mathfrak{b}'_0$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{a}'_{i0}$, $\mathfrak{b}'_{j0}$, usw.) merken, um zu verstehen, was eigentlich bewiesen wird. Auch vermisst man die Beziehungen zum bisher Bewiesenen, vor allem (wie Sie mit Recht hervorheben) zum Begriff des Radikals. Durch eine in diesem Sinne klarer gegliederte Neufassung würde das Neue in der Arbeit zweifellos besser hervortreten.

Ich schicke Ihnen das Manuskript eingeschlossen zurück.

Mit herzlichen Grüssen, auch an Ihre Frau, wenn Sie einmal nach Göttingen kommen

Ihr ergebener

B. L. v. d. Waerden

1.54 31.12.1941, v d Waerden to Hasse

Leipzig,
Sylvester 1941.

Lieber Herr Hasse!

Endlich[1 2] bin ich soweit, dass ich ihr (schönes und wichtiges) Manuskript ganz gelesen und verarbeitet habe und auch Ihre Fragen in der Hauptsache beantworten kann. Sie haben ganz recht mit Ihrer Vermutung, dass die fehlenden Beweise, insbesondere zu S. 54 und 62, sich mit meinen algebraisch–geometrischen Methoden erbringen lassen. Ich werde die Beweise gleich mitteilen, will mich aber an die Reihenfolge Ihres Manuskriptes halten und zunächst ein paar Bemerkungen zu den vorangehenden Seiten machen.

Zu S. 41, unten. Sie definieren $\mathfrak{X}$ bis auf äquivalente Punktgruppen eindeutig durch die Äquivalenz

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}} \sim \mu \frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{a}}$$

und behaupten dann, dass der Transzendenzgrad von $\mathfrak{X}$ nur von μ abhängt. Dass das nicht ganz stimmt, zeigt folgendes Gegenbeispiel:

Es Sei $K = \Omega(x, y)$ ein hyperelliptischer Körper vom Geschlechte $g = 2$, definiert durch die Gleichung $y^2 = x^6 - 1$.

$\mathcal{O}$ sei der divisor von x. ξ_1, ξ_2 seien Unbestimmte, und

$$\Omega_g = \Omega(\xi_1, \xi_2)$$

μ sei der Nullmultiplikator, der jedem Divisor den Einsdivisor zuordnet:

$$\mu\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{a}}\right) = \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{O}}.$$

[1] Added by v. d. Waerden on the top margin of this page:
"Bischofswerda, 15. April 1944. — Lieber Herr Hasse! Eben habe ich das Manuskript der 5. Fassung meiner Arbeit, von der dieser Brief die 1. Fassung war, der Hamburger Vortrag die 3., und die 4. verbrannt, fertig gestellt. Ich werde es dann abschreiben und Herrn Sperner zuschicken. — Herzliche Grüße Ihr B. L. v. d. W."

[2] Right below the date 'Sylvester 1941' v. d. Waerden wrote:
"S3, Fockestr. 8a — jetzt N 22, Kleiststr. 11."

Schliesslich sei $\mathfrak{X}$ der Zählerdivisor von $(x-\xi_1)$. Wegen $\left(\frac{x-\xi_1}{x}\right) = \frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}}$ ist $\mathfrak{X} \sim \mathcal{O}$, also

$$\mu\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{a}}\right) = \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{O}} \sim \frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}}$$

Der Transzendenzgrad von $\mathfrak{X}$ ist 1, des äquivalenten $\mathcal{O}$ aber Null. Der Transzendenzgrad von $\mathfrak{X}$ ist also nicht eindeutig bestimmt.

Für Ihre weiteren Schlüsse schadet das selbstverständlich gar nichts denn Sie brauchen den Transzendenzgrad von $\mathfrak{X}$, soviel ich sehe, nur zur Definition des Begriffs "regulärer Multiplikator". Diese Definition ist aber auf alle Fälle eindeutig, denn wenn $\mathfrak{X}$ höchsttranzendent ist, so ist $\mathfrak{X}$ auch eindeutig bestimmt.

Zu S. 45, unten. Bei der Einführung des Begriffs "algebraische Punkte von K/Ω" würde ich vorschlagen, das Wort "Homomorphismen" zu vermeiden. Denn unter Homomorphismen von K/Ω stellt sich der Algebraiker doch immer homomorphe Abbildungen des ganzen Körpers vor, bei denen jedes Körperelement bestimmt abgebildet wird. Besser würde vielleicht der Ausdruck "relationstreue Spazialisierungen" passen. Wie Sie sich vielleicht erinnern, verstehe ich unter einer relationstreuen Spezialisierung von $X_0, \ldots, X_g$ eine solche, bei der alle homogenen algebraischen Relationen $F(X_0, \ldots, X_g) = 0$ erhalten bleiben. Bei Ihren "Punkten" werden nicht nur $X_0, \ldots, X_g$ relationstreu spezialisiert, sondern auch noch alle die Körperelemente, die ganz algebraisch von ihnen abhängig sind; aber diese geringfügige Begriffserweiterung würde mich nicht stören. In den von Ihnen betrachteten Fällen, wo es sich stets um singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeiten handelt, ist übrigens die Hinzunahme der von $X_0, \ldots, X_g$ ganz abhängigen Körperelemente nicht einmal nötig.

Nun zum Beweis des Satzes auf S. 54!

Es sei M eine feste Divisorenklasse vom Grade $3g$ und es seien $x_0, x_1, \ldots, x_{2g}$ die zugehörigen homogenen M–Koordinaten. Durch $x_0(\overline{\mathfrak{p}}) : \ldots : x_{2g}(\overline{\mathfrak{p}}) = \overline{\mathfrak{p}}_0 : \overline{\mathfrak{p}}_1 : \ldots : \overline{\mathfrak{p}}_n$ sind die Koordinaten der Punkte $\overline{P}$ im projektiven Raum S_{2g} definiert, die den Stellen $\overline{\mathfrak{p}}$ des Körpers K entsprechen. Alle diese Punkte bilden, wie Sie auf S. 25 selbst hervorheben, eine Kurve mit lauter einfachen Punkten im Raum S_{2g}.

Die Hyperebenen

$$v_0\overline{p}_0 + v_1\overline{p}_1 + \ldots + v_{2g}\overline{p}_{2g} = 0$$

dieses Raumes schneiden die Kurve genau in den Punktgruppen der Divisorenklasse M. Durch $2g$ Punkte der Kurve kann man immer mindestens eine solche Hyperebene legen; sie schneidet die Kurve dann in weiteren g Punkten, die mit ihnen zusammen eine Punktgruppe von M bilden.

Ist nun $\frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}} \sim \frac{\mathfrak{X}'}{\mathcal{O}'}$, also $\mathfrak{X}\mathcal{O}' \sim \mathfrak{X}'\mathcal{O}$, und legt man durch $\mathfrak{X}\mathcal{O}'$ eine solche Hyperebene, die die Kurve noch in einer Restgruppe $\mathfrak{R}$ schneidet, so ist $\mathfrak{X}\mathcal{O}'\mathfrak{R} \sim \mathfrak{X}'\mathcal{O}\mathfrak{R}$, und da $\mathfrak{X}\mathcal{O}'\mathfrak{R}$ zu M gehört, so gehört auch $\mathfrak{X}'\mathcal{O}\mathfrak{R}$ zur Klasse M; also wird $\mathfrak{X}'\mathcal{O}\mathfrak{R}$ auf der Kurve auch von einer Hyperebene ausgeschnitten. Die vorausgesetzte Äquivalenz $\frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}} \sim \frac{\mathfrak{X}'}{\mathcal{O}'}$ besagt also genau: *Es gibt zwei Hyperebenen v und w und eine Punktgruppe $\mathfrak{R}$, so dass v die Punktgruppe $\mathfrak{X}\mathcal{O}'\mathfrak{R}$ und w die Punktgruppe $\mathfrak{X}'\mathcal{O}\mathfrak{R}$ ausschneidet.* Diese geometrische Aussage wollen wir nun durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ ausdrücken.

Das Haupthilfsmittel (das an die Stelle der von Ihnen benutzten Determinanten tritt) ist die *zugeordnete Form* einer Punktgruppe, die von mir im Grunde schon 1927 (Math. Ann. 97) gebildet, aber erst von Chow (Math. Ann. 114) für die Theorie der algebraischen Funktionenkörper nutzbar gemacht wurde. Es seien $u_0, \ldots, u_{2g}$ Unbestimmte. Die zugeordnete Form eines Punktes P ist einfach die Linearform $(pu) = p_0 u_0 + \ldots + p_{2g} u_{2g}$. Die zugeordnete Form einer Punktgruppe $\mathfrak{A}$ ist das Produkt der zugeordneten Formen ihrer Punkte. Die Koeffizienten der zugeordneten Form stimmen wohl im wesentlichen mit Ihren "homogenen M–Koordinaten" von $\mathfrak{A}$ überein; jedenfalls können sie diese vertreten.

Ist $\mathfrak{A}$ die volle Schnittpunktsgruppe einer Hyperebene v mit der Kurve C, so ist die zugeordnete Form von $\mathfrak{A}$ nach Chow (1. c. § 2) ganzrational und homogen in $v_0, \ldots, v_{2g}$; sie kann mit $G(u, v)$ bezeichnet werden. — Bezeichnen nun $X(u), X'(u), O(u), O'(u), R(u)$ die zugeordneten Formen der Punktgruppen $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \ldots, \mathfrak{R}$, so kann die obige geometrische Beziehung algebraisch durch

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \lambda X(u) \cdot O'(u) \cdot R(u) \\ G(u, w) &= \mu X'(u) \cdot O(u) \cdot R(u) \end{aligned} \tag{1}$$

ausgedrückt werden, wobei die Proportionalitätsfaktoren λ und μ nicht von den u abhängen dürfen.

Vergleicht man in (1) links und rechts die Koeffizienten der Potenzprodukte der u, so erhält man Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} g_j(v) &= \lambda h_j(\mathfrak{X}, \mathcal{O}', \mathfrak{R}) \\ g_j(w) &= \mu h_j(\mathfrak{X}', \mathcal{O}, \mathfrak{R}) \end{aligned}$$

Elimination von λ und μ ergibt homogene Gleichungen

$$g_j(v)h_k(\mathfrak{X},\,\mathcal{O}',\,\mathfrak{R}) - g_k(v)h_j(\mathfrak{X},\,\mathcal{O}',\,\mathfrak{R}) \,=\, 0 \tag{2}$$

$$g_j(w)h_k(\mathfrak{X}',\,\mathcal{O},\,\mathfrak{R}) - g_k(w)h_j(\mathfrak{X}',\,\mathcal{O},\,\mathfrak{R}) \,=\, 0 \tag{3}$$

Im dem Symbol $\mathfrak{R}$ stecken die g Punkte $p^{(1)},\ldots,p^{(g)}$, aus denen die Punktgruppe $\mathfrak{R}$ besteht. Sie müssen die Gleichungen der Kurve C erfüllen:

$$f_\ell(p^{(\nu)}) \,=\, 0 \qquad (\nu \,=\, 1,\,2,\ldots,\,g) \tag{4}$$

Aus den homogenen Gleichungen (2), (3), (4) kann man die $v,\,w,\,p^{(1)},\ldots$ $,p^{(g)}$ eliminieren durch Bildung des Resultantensystems

$$R_i(\mathfrak{X},\,\mathcal{O}',\,\mathfrak{X}',\mathcal{O}) \,=\, 0\,. \tag{5}$$

Die resultierenden Gleichungen (5) sind homogen in den homogenen M– Koordinaten der Punktgruppen $\mathfrak{X},\,\mathcal{O}',\,\mathfrak{X}',\,\mathcal{O}$ und drücken genau die Äquivalenz

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}} \,=\, \frac{\mathfrak{X}'}{\mathcal{O}'}$$

aus.

In den Formeln (5) kann man nun die relationstreue Spezialisierung $\mathfrak{X} \longrightarrow \overline{\mathfrak{P}},\;\mathfrak{X}' \longrightarrow \overline{\mathfrak{P}}'$ ausführen, wie in Ihren Determinantenformeln, aber ohne die lästigen Ausnahmen. Man kann etwa so schliessen: Ist eine relationstreue Spezialisierung $\mathfrak{X} \longrightarrow \overline{\mathfrak{P}}$ gegeben, so kann man diese bekanntlich (Einf. alg. Geom. S. 107) zu einer relationstreuen Spezialisierung $(\mathfrak{X},\,\mathfrak{X}') \longrightarrow (\overline{\mathfrak{P}},\,\overline{\mathfrak{P}}')$ fortsetzen. Bei dieser bleiben insbesondere die Relationen (5) erhalten, also gilt jedenfalls die Äquivalenz

$$\frac{\overline{\mathfrak{P}}}{\mathcal{O}} \sim \frac{\overline{\mathfrak{P}}'}{\mathcal{O}'} \tag{6}$$

Ist nun $\overline{\mathfrak{P}}'$ nicht spezial, so ist $\overline{\mathfrak{P}}'$ durch (6) eindeutig bestimmt, also ist dann die induzierte Spezialisierung $\mathfrak{X}' \longrightarrow \overline{\mathfrak{P}}'$ eindeutig.

Ganz analog ergibt sich der Satz auf S. 62. Ist z. B. der Multiplikator μ eine ganze Zahl m, so hat man der Reihe nach

$$\begin{array}{ll}
\frac{\mathfrak{Y}_2}{\mathcal{O}} \sim \left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathcal{O}}\right)^2 & ,\text{oder}\;\; \mathfrak{Y}_2\mathcal{O} \sim \mathfrak{Y}^2 \\
\frac{\mathfrak{Y}_3}{\mathcal{O}} \sim \frac{\mathfrak{Y}_2}{\mathcal{O}} \cdot \frac{\mathfrak{Y}}{\mathcal{O}} & ,\text{oder}\;\; \mathfrak{Y}_3\mathcal{O} \sim \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y} \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\frac{\mathfrak{Y}_m}{\mathcal{O}} \sim \frac{\mathfrak{Y}_{m-1}}{\mathcal{O}} \cdot \frac{\mathfrak{Y}}{\mathcal{O}} & ,\text{oder}\;\; \mathfrak{Y}_m\mathcal{O} \sim \mathfrak{Y}_{m-1}\mathfrak{Y}
\end{array}$$

Übersetzt man das mittels der Formel (5), so erhält man

$$\begin{aligned} R_i(\mathfrak{Y}_2, \mathcal{O}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}) &= 0 \\ R_i(\mathfrak{Y}_3, \mathcal{O}, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}) &= 0 \end{aligned}$$

usw; eliminiert man schliesslich $\mathfrak{Y}_2, \ldots, \mathfrak{Y}_{m-1}$ unter Berücksichtigung der Gleichung der Kurve genau so wie früher $\mathfrak{R}$, so ergibt sich für $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}_m$

$$S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathcal{O}) = 0$$

als Äquivalent der Beziehung

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}} \sim \left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathcal{O}}\right)^m$$

Durch eine kleine Modifikation der Rechnung kann man auch auf $\frac{\mathfrak{X}}{\mathcal{O}} \sim \left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{a}}\right)^m$ kommen.

Ist der Multiplikator μ durch einen Körpermeromorphismus oder nach Deuring durch eine algebraische Korrespondenz definiert, so wird man in ähnlicher Weise die Definition der Korrespondenz in algebraische Gleichungen zwischen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ umzusetzen haben. Wenn das nicht ohne weiteres gelingen sollte, müsste man die Beweismethode der Sätze 4 und 5 von ZAG IX (Chow u. v. d. W., Math. Ann. 113, S. 701) zu Hilfe nehmen.

Ich hoffe, dass diese Andeutungen Ihnen genügen. Was die algebraische Bestimmung des Grades des n–Teilungskörpers betrifft, so haben Sie ganz recht: sie ist "überfällig"; aber so ohne weiteres ist sie mir nicht gelungen. Ich werde das Problem weiter im Auge behalten; mit den Methoden der abzählenden Geometrie müsste es eigentlich gehen.

Ihr Manuskript schicke ich Ihnen in ein paar Tagen eingeschrieben zurück. Und nun wünsche ich Ihnen alles Gute für das neue Jahr!

Mit herzlichen Grüssen [3]

Ihr

B. L. v. d. Waerden

[3] Hand–written remark added by v. d. Waerden: "Darf ich Sie noch einmal an Ihr Versprechen erinnern, in den Weihnachtsferien sich das Manuskript Ihres Buches anzusehen und mir Vorschläge zu machen — in Hinblick auf eine möglichst baldige Drucklegung ?"

1.55 09.01.1942, Hasse to v d Waerden

Berlin,
den 9. 1. 1942

Lieber Herr van der Waerden,

Mit Ihrem Brief haben Sie mir eine sehr grosse Freude gemacht. Sie glauben gar nicht wie glücklich ich bin, nicht nur dass die von mir ausgesprochenen Behauptungen überhaupt sinnvoll und richtig sind, sondern dass ich durch Sie eine Methode gelernt habe, wie man diese und dann auch ähnliche Fragen angreifen kann. Ich bin überzeugt, dass ich mit dieser Methode in meinem Programm erheblich weiterkommen werde, wenn ich einmal die Zeit habe, die mathematische Forschungsarbeit wieder mit vollen Segeln aufzunehmen.

Besten Dank auch für Ihren Hinweis auf das Versehen bei der Definition des Transzendenzgrades eines Multiplikators, das ja zum Glück ohne Konsequenzen ist und leicht ausgemerzt werden kann.

In Ihrem Beweis meiner beiden Sätze fehlt mir hier zum vollen Verständnis noch die zitierte Arbeit von Chow und Ihre Einführung in die algebraische Geometrie, auf die Sie wegen der Fortsetzung der relationstreuen Spezialisierung verweisen. Darüber möchte ich sehr gerne einmal mündlich mit Ihnen sprechen. Eine Gelegenheit dazu wird sich am Sonntag den 18. Januar bieten, wenn Ihnen das passt. Ich habe am 16. und 17. in Halle zu tun und könnte gut den Sonntag in Leipzig verbringen. Wir könnten dann auch über verschiedene andere Dinge sprechen, so über die Frage "Homomorphismus" oder "relationstreue Spezialisierung", über die Drucklegung meines Buches und über Prof. Houtermans, den ich neulich hier kennen lernte. Bitte geben Sie mir doch noch kurz Nachricht, ob Ihnen mein Besuch am Sonntag Vormittag oder Nachmittag passen würde.

Mit nochmals herzlichem Dank für die viele Mühe, die Sie sich mit meinem Ms. gegeben haben, und besten Grüssen auch an Ihre verehrte Gattin,

Ihr

H. Hasse

1.56 22.06.1942, Hasse to v d Waerden

Berlin,
den 22. 6. 1942

Lieber Herr van der Waerden!

Nachdem nun meine Arbeit über die algebraischen Funktionenkörper und Abelschen Funktionenkörper im Jahresbericht DMV erschienen ist, möchte ich Sie noch einmal an Ihr freundliches Versprechen erinnern, die ergänzenden Beweise zusammenzustellen und im Jahresbericht nachfolgen zu lassen.

Ich studiere augenblicklich mit grossem Interesse Quantentheorie, Wellenmechanik und Diracsche Theorie und hole damit ein Versäumnis nach, das mich schon seit Beendigung meines Studiums gedrückt hat. Das sind in der Tat gewaltige Fortschritte der Physik, seit ich sie aus den Augen verloren habe.

Mit herzlichen Grüssen, auch an Ihre verehrte Gattin,

stets Ihr

H. Hasse

1.57 30.07.1942, P.C. v d Waerden to Hasse

Leipzig,
Postcard 30. Juli 1942

Lieber Herr Hasse!

Besten Dank für Ihren Brief vom 22. 6. Ich fahre jetzt in die Berge und werde erst nach den Ferien dazu kommen, die Beweise druckreif zu machen.

Mit herzlichem Gruß

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.58 23.01.1943, Hasse to v d Waerden, Fragment

23. 1. 1943

Lieber Herr v. d. Waerden!

Schon lange wollte ich Ihnen schreiben, kam aber durch meine dienstlichen und manche anderen Verpflichtungen nicht dazu. Heute muss es aber aus bestimmtem Anlass sein, auf den ich nachher zu sprechen komme, und da will ich dann auch gleich das andere mitschreiben, was mir so lange schon auf der Seele liegt.

Es hat mir damals für Sie so sehr leid getan, dass Sie nicht mit nach Rom fahren konnten. Ich habe mich bemüht, dies doch noch durchzusetzen, aber leider ohne Erfolg. Wie Ihnen wohl nicht unbekannt ist, widersetzt sich die Leipziger Dozentenschaft bei jeder Anfrage, die über Sie an sie gerichtet wird, und so auch diesmal. Nicht nur, dass man Ihnen die formale Tatsache übelnimmt, dass Sie sich geweigert haben sollen, Ihre holländische Staatsangehörigkeit aufzugeben; es werden auch Äusserungen von Ihnen angeführt, aus denen gefolgert wird, dass Sie nicht rückhaltlos hinter dem nationalsozialistischen Staat stehen. Auf Grund von Unterhaltungen, die ich mit Ihnen in den Jahren 1940 und 1941 hatte, hatte ich eigentlich den Eindruck gewonnen, dass diese Dinge auch für Sie der Vergangenheit angehören, und dass Sie heute nicht nur auf Grund Ihres Leipziger Amtes, das Ihnen Deutschland zur zweiten Heimat macht, sondern auch auf Grund der ganzen europäischen Entwicklung und nicht zuletzt auch durch Ihre aus dem deutschen Süden stammende Frau und Ihre in deutschem Geist gross werdenden Kinder ein inneres Verhältnis zum neuen Deutschland gefunden haben. Jedenfalls habe ich mich über Sie bei jeder Gelegenheit in diesem Sinne ausgesprochen, sowohl Herrn Süss gegenüber, als vor allem Dr. Dames, Dr. Führer und Dr. Fischer im Reichserziehungsministerium. Ich möchte so gerne, dass Ihre Person endlich von diesen alten Anwürfen frei wird, nicht nur weil ich Sie als Mensch und Mathematiker hoch schätze, sondern auch im Interesse unserer Wissenschaft überhaupt. Denn es ärgert mich, dass bei Gelegenheiten, wie kürzlich der Kongress in Rom, ein von allen Seiten so anerkannter Mathematiker wie

Sie, der doch nun einmal in den Augen der Welt zu uns deutschen Mathematikern zählt, nicht mit dabei sein soll. Für ein paar Worte von Ihnen hierzu wäre ich Ihnen sehr dankbar, obwohl ich es auch verstehen würde, wenn Sie lieber dieses Thema mir gegenüber gar nicht berühren möchten.

Der Kongress in Rom verlief sehr harmonisch, wenngleich er unter dem Schatten der Ereignisse in Nordafrika stand. Severi hatte es trotz der teilweise ganz ungeheuren Schwierigkeiten [fertiggebracht] ein sehr erlesenes Programm zusammenzustellen. Es zeichnete sich vor allem dadurch aus, dass man nicht mit Vorträgen überfüttert wurde, dass aber trotzdem auf den meisten Gebieten ein zusammenfassender Vortrag über die neuere Entwicklung gehalten wurde, der sich sehen lassen konnte. Von uns waren ausser mir nur noch Blaschke und Carathéodory da. Gröbner sollte kommen, doch hatten die Italiener sein Visum durch einen handschriftlichen Zusatz für den Aufenthalt in Südtirol ungültig gemacht, und dies hat ihn so verstimmt, dass er nicht gefahren ist. Sonst waren Rumänien und Bulgarien stark vertreten, Ungarn durch v. Kérékjarto, Schweden durch Carleman, die Schweiz durch Fueter und Speiser. "International" in wahrem Sinne war der Kongress natürlich nicht. Severi begegnete aber meiner diesbezüglichen Andeutung mit dem Bemerken, dass er mit Absicht "Con*verno* internazionale *di* matematici" und nicht "Con*gresse* internazionale *dei* matematici" geschrieben hätte.

Ich habe Ihnen vor allem von Conforto, der einen sehr schönen Vortrag über die algebraische Geometrie der Mannigfaltigkeiten hielt, herzliche Grüsse zu bestellen. Er gab mir sein neuestes Werk über Thetafunktionen für Sie mit, das ich Ihnen heute zusammen mit einigen Separaten von mir als Päckchen zugehen lasse. Unter meinen Separaten ist auch mein geplanter Vortrag für den Voltakongress, der ja 1939 stattfinden sollte, aber dann auf unbestimmte Zeit verschoben wurde. Man gab mir in Rom im ganzen 10 Abzüge davon. "Erschienen" im eigentlichen Sinne ist dieser Vortrag noch nicht. Vielleicht interessiert er sie ein wenig. Das Wesentliche daraus habe ich ja dann später in deutscher Sprache und sachlich noch etwas besser in meiner ebenfalls beiliegenden Arbeit im Jahresbericht noch einmal gesagt. Ich möchte bei dieser Gelegenheit Sie noch einmal an Ihr Versprechen erinnern, die Beweise für die beiden darin enthaltenen grundlegenden Sätze über Abelsche Funktionen, die Sie mir damals kurz schrieben und auch mündlich erläuterten, im Jahresbericht herauszubringen.

Nun komme ich zu dem eigentlichen Anlass dieses heutigen Briefes. Wie Sie wohl gehört haben, sollen wir in Göttingen das Extraordinariat für Wirtschaftsmathematik (ehemals Bernstein) neu be–...

1.59 28.01.1943, v d Waerden to Hasse, Fragment

Leipzig,
d. 28. 1. 43

Lieber Herr Hasse!

Für Ihre Mitteilungen über die Gründe der Ablehnung meiner Romreise bin ich Ihnen ausserordentlich dankbar, nicht weniger auch dafür, dass Sie sich bei allen Instanzen so energisch für mich eingesetzt haben. Ich habe mir die grösste Mühe gegeben, herauszukriegen, von welcher Stelle die gegen mich erhobenen Vorwürfe ausgehen, war deswegen auch schon in Berlin, habe es aber nicht herausgekriegt. Der Leiter der Leipziger Dozentenschaft behauptete, er habe nichts gegen mich, sei aber gebunden durch eine Aktennotiz von Auswärts, über die er sich nicht hinweg setzen könne. In der Aktennotiz wird meine Haltung in Pyrmont als gegen den Nationalsozialismus oder gegen die Deutschen gerichtet gerügt, aber Sie wissen ja selber, dass ich dort nur gemeinsam mit Ihnen und anderen guten Deutschen und Nationalsozialisten für das Ansehen der Deutschen Wissenschaft gekämpft habe. Der Vorwurf, dass ich "mich geweigert hätte, meine holländische Staatsangehörigkeit aufzugeben", ist ebenso unsinnig. Kein Mensch hat je von mir verlangt, meine holländische Staatsangehörigkeit aufzugeben. Sondern als ich zur Berufungsverhandlung nach Dresden kam, fragte mich der Ministerialrat: "Sie möchten wohl ihre Holländische Staatsangehörigkeit behalten ?" Als ich "ja" sagte, wurde in die Ernennung die Klausel eingefügt: "Der Erwerb der deutschen Staatsangehörigkeit ist hiermit nicht verbunden". Von einer Weigerung kann also nicht die Rede sein. Und überhaupt! Den Holländern wird immer und immer wieder von höchster Stelle gesagt, dass sie als gleichberechtigte Partner am Aufbau des neuen Europa teilnehmen sollen. Wenn nun irgend einer von jeher seine Bereitschaft zu europäischer Kulturarbeit Seite an Seite mit den Deutschen durch die Tat gezeigt hat, bin ich es doch! Aber die Gleichberechtigung, wird mir auf Grund kleinlicher Vorwürfe enthalten! Wenn ich nur wüsste, von welcher Stelle diese Vorwürfe immer wieder ausgehen, so wäre es mir ein Leichtes, mich zu rechtfertigen. Aber die Leipziger sagen, die eigentliche Quelle jener Aktennotiz läge in Berlin, und die

Berliner sagen Ihnen wiederum, die Leipziger Dozentenschaft sei an allem Schuld.

Jedenfalls bin ich Ihnen für Ihren Hinweis sehr dankbar: Ich werde gleich mit dem neuen Leiter der Leipziger Dozentenschaft reden. Ich nehme an, dass ich mich auf Ihren Brief beziehen kann. Wenn Sie Ihrerseits der Legende von der "Weigerung, die deutsche Staatsangehörigkeit anzunehmen" entgegentreten wollen, so oft Sie davon hören, wäre ich Ihnen zu grösstem Dank verpflichtet.

Dank auch für Ihre Separatasendung. Meine Beweise zu Ihren Sätzen werde ich druckfertig machen, sobald ich Zeit dafür finde; ich hoffe es wird zu Ostern sein.

Herr Birger Meidell ist sicher ein sehr guter Versicherungsmathematiker, und auch seine Gesamtpersönlichkeit bürgt dafür, dass er die Stelle durchaus ordentlich ausfüllen würde. Er hat, nach Zentralblatt– und Fortschritte–Referaten zu urteilen, eine ganze Reihe von recht verdienstvollen Arbeiten über verschiedene Finanz– und Versicherungsmathematische Probleme geschrieben, die ich mir nicht näher angeschaut habe, weil ich doch nicht fachkundig genug bin um sie zu beurteilen. Grosse mathematische Gedanken sind in diesen Arbeiten naturgemäss nicht zu erwarten. Zwei wahrscheinlichkeits–theoretische CR–Noten habe ich von ihm gefunden, die ganz nett sind. Mit mathematischer Statistik scheint er sich gar nicht befasst zu haben. Wenn Sie ein wirklich sachkundiges Urteil über ihn haben wollen, müssten Sie sich, wie ich Herrn Herglotz schon schrieb, entweder an Bruno de Finetti (Triest) oder an H. Cramer (Djursholm bei Stockholm) wenden. Ich kann Ihnen...

1.60 Weihnachten 1943, P.C. v d Waerden to Hasse

BISCHOFSWERDA,
WEIHNACHTEN 1943.

POSTCARD

LIEBER HERR HASSE,

Das ist rührend, daß Ihnen meine persönliche Angelegenheit so am Herzen liegt, daß Sie deswegen extra nach Leipzig kommen wollen. Ich bin ab 10. Jan. wieder dort und wohne bei Hund, Lerchenrain 41. Bitte vorher anzurufen, denn in einigen Wochen will ich zu Bredereck in die Probsteistraße umziehen.

Sie mögen recht haben, daß Ihr Bericht sich für den Jahresbericht der D. M. V. am meisten eignet. Sehr schön, daß Sie für die Annalen einen anderen Beitrag in Aussicht stellen. Mit den besten Weihnachts– und Neujahrswünschen

Ihr

B. L. V. D. WAERDEN

1.61 20.02.1944, P.C.v d Waerden to C.Hasse

Bischofswerda,
Postcard 20. Febr. 1944

Liebe Frau Hasse !

Wie ist es Ihrem Gatten bei den letzten furchtbaren Angriffen auf Berlin gegangen ? Vorgestern habe ich eine Karte an seine Berliner Adresse am Sandwerder 5 (stimmt das ?) geschrieben, in der ich ihm mitteilte, daß das Unterrichtsministerium im Haag bei mir angefragt hat, ob ich eine Ernennung zum Professor für Geometrie in Utrecht annehmen würde. Ich wollte diese Angelegenheit vorher mit ihrem Gatten besprechen und habe angefragt, ob ich mich einmal in Berlin oder in Leipzig (oder sonstwo) mit ihm treffen könnte. Von Dienstag früh bis Sonnabend 11 Uhr habe ich in Leipzig Vorlesungen, aber Dienstag kann ich mich freimachen. Ich weiß nicht, ob diese Karte ihn erreichen wird, deswegen schreibe ich jetzt an Sie. Mir ist sehr viel daran gelegen, möglichst bald mit Herrn Hasse zusammenzukommen, da meine ganze Zukunft und die meiner Familie von dieser Entscheidung abhängt. Ich würde auch ev. Sonntag nach Göttingen fahren, falls ich ihn dort antreffen würde.

Herzliche Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.62 21.02.1944, P.C. v d Waerden to Hasse

Bischofswerda,
Postcard 21. 2. 44

Lieber Herr Hasse!

Zur Berichtigung meiner Postkarte muß ich erwähnen, daß ich am 28. 2. (Montag) den ganzen Tag Prüfungen habe, also dann nicht verreisen kann. Am 4. 3. ist das Semester zu Ende; dann kann ich also besser disponieren. Am Besten wäre es vielleicht, ich käme einmal nach Göttingen.

Da die Post in Leipzig durch den letzten Terrorangriff vielleicht wieder in Unordnung geraten ist, teile ich Ihnen umstehend meine Bischofswerdaer Adresse mit, unter der ich jedes Wochenende zu erreichen bin. Herzliche Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.63 27.02.1944, P.C. v d Waerden to Hasse

Bischofswerda,
Postcard 27. Febr. 1944.

Lieber Herr Hasse

Gestern habe ich versucht, nach Berlin zu fahren. Ich bin aber nur bis Jüterbog gekommen, da die Züge alle viele Stunden Verspätung hatten. Ich will es jetzt nächsten Sonntag, 5. März wieder versuchen. Im Lauf des Vormittags hoffe ich, Am Sandwerder 5 oder 7 vorzusprechen. Dann fahre ich weiter nach Dresden oder Bischofswerda.

Herzliche Glückwünsche zur Geburt Ihres Sohnes! Hoffentlich wird er eine bessere Zeit erleben.

Falls Sie Sonntag verhindert sein sollten, bitte ich um eine Postkarte nach Leipzig N 22, Kleiststr. 11.

Herzl. Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.64 06.03.1944, v d Waerden to Hasse

Bischofswerda,
6. März 1944

Lieber Herr Hasse!

Was ich Ihnen gestern über meine Amerikaeinladung sagte, präzisiere ich jetzt schriftlich, damit Sie sich ernsthaft darauf beziehen können.

Im Frühjahr 1934 erhielt ich von der Universität Princeton die Einladung, im Sept. auf ein Jahr als Gastprofessor dorthin zu gehen. Ich hatte schon zugesagt, da starb Lichtenstein. Dadurch und durch die Entlassung Levis würde, wenn ich auch noch weggefahren wäre, eine empfindliche Lücke in Leipzig entstanden sein. Ich hielt es dann doch für besser, in Leipzig zu bleiben. Später erfuhr ich, daß die Princetoner die Absicht hatten, mich für dauernd dort zu behalten. Ich habe das aber entschieden abgelehnt. Ich sage Ihnen das noch einmal ausdrücklich um Ihnen zu zeigen, daß ich mich auch in diesem Fall trotz der reichen wissenschaftlichen Wirkungsmöglichkeiten, die Amerika mir geboten hätte, eindeutig für Deutschland entschieden habe, wie ja überhaupt durch meine ganze Tätigkeit in Deutschland.

Einen Punkt habe ich noch nicht erwähnt. Nach dem Leipziger Bombenangriff hat der Dekan Heinz, der im selben Hause mit unserem sein Institut hat, und der auch Gaudozentenführer ist, sich dem Rektor gegenüber besonders lobend geäußert über meine Aktivität und Einsatzbereitschaft bei der Beseitigung der Schäden im Institut. Vielleicht könnte der Göttinger Dozentenschaftsleiter sich beim sächsischen Gaudozentenführer die Bestätigung dieser Äußerung einholen.

Wie ich schon sagte, teile ich nicht Ihre optimistische Ansicht, daß ich ruhig jetzt nach Utrecht gehen könnte und daß ich dann später schon noch einmal nach Deutschland berufen würde. Denn: einen Ausländer nach Deutschland hereinzuholen ist ein Schritt, zu dem man sich nur in besonderen Fällen entschließt. Und dann: Wenn ich mich jetzt bei der Wahl zwischen Holland und Deutschland für Holland entscheide, so wird man mir das immer wieder vorhalten können.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.65 14.03.1944, v d Waerden to Suess

Leipzig,
14. März 1944.

Herrn Prof. Dr. Süß, Vorsitzender der D. M. V.

Sehr geehrter Herr Kollege!

Erlauben Sie, daß ich mich in der folgenden persönlichen Angelegenheit an Sie wende.

In den letzten Jahren sind mir mehrfach Schwierigkeiten gemacht worden, die mich schwer getroffen haben. Ich bin mehrfach zu Vorträgen ins Ausland eingeladen worden, das erste Mal schon vor diesem Kriege, aber die Erlaubnis dazu wurde mir jedesmal versagt. Ich bin zu einer Berufung nach München vorgeschlagen worden, aber die Berufung ist nicht erfolgt. Eben hat die Fakultät in Göttingen mich wieder vorgeschlagen; die tatsächliche Berufung aber scheint wieder zu scheitern.

Nun habe ich soeben einen Ruf nach Utrecht erhalten. Vor die Notwendigkeit gestellt, mich für oder gegen diesen Ruf zu entscheiden, drängt sich mir die Frage auf, ob die eben geschilderten Widerstände nicht ein Zeichen dafür sind, daß man von maßgebender Seite meinem Wirken in Deutschland keinen oder jedenfalls keinen sehr großen Wert beilegt. Ich selbst würde das sehr bedauern. Denn ich habe [...] Kräfte für Deutschland und die deutsche Wissenschaft eingesetzt zu haben. Ich habe praktisch alle meine Arbeiten und Bücher in deutscher Sprache geschrieben, ich habe den wesentlichen Teil meiner Mathematik in Deutschland gelernt und wieder gelehrt, ich habe eine deutsche Frau geheiratet und meine Kinder rein deutsch erzogen.

Als ein Zeichen dafür, daß meine Befürchtung nicht zutrifft, würde ich es ansehen, wenn ich den Ruf nach Göttingen, an dem mir sehr viel liegt, wirklich erhalten würde.

Sollten Sie im Stande sein, als Vorsitzender der D. M. V. in dieser Frage Stellung zu nehmen, so würde ich Sie bitten, sich mit Herrn Hasse (Bln–Wannsee, Am Sandwerder 7) in Verbindung zu setzen, mit dem ich über den

Ruf nach Göttingen gesprochen habe und dem ich einen Durchschlag dieses Briefes zuschicke.

Mit den besten Grüßen und Dank

Ihr sehr ergebener

B. L. v. d. Waerden

1.66 20.06.1944, P.C. v d Waerden to Hasse

Bischofswerda, den
Postcard 20. Juni 1944

Lieber Herr Hasse

Nachdem ich 31 Seiten voll gerechnet habe, einige auf Nichts auslaufende Versuche nicht eingerechnet, ist es mir endlich gelungen, die Galoissche Gruppe des Problems–Fränz zu bestimmen: Von den 12 Lösungen des Problems sind zwei rational, nämlich

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(2 - z_a - z_b) \\ z_2 = \frac{1}{2}(2 - z_a - z_b) \end{cases}$$

und die Gruppe der übrigen 10 ist die symmetrische $\mathfrak{S}_{10}$. Ich werde in den nächsten Monaten noch versuchen, die Begründung zu vereinfachen, aber diese Gleichungen sind sehr heimtückisch. Allerlei Potenzreihenentwicklungen schienen darauf hinzudeuten, daß die Gruppe diejenige imprimitive Gruppe $\mathfrak{G}_{5,5}$ sein könnte, die die Funktion $x_1x_2x_3x_4x_5 + x_6x_7x_8x_9x_{10}$ invariant läßt.

Wollen Sie das Ergebnis Herrn Fränz mitteilen ? Seine Adresse war am 23. 11. Berlin–Zehlendorf, Berlinerstr. 37.

Am 10. Juli halte ich in Freiburg einen Vortrag und werde bei der Gelegenheit mit Süß sprechen.

Herzliche Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.67 23.06.1944, Hasse to Fränz

23. 6.

Sehr geehrter Herr Dr. Fränz,

Im Anschl. an meinen heutigen Anruf anbei der Brief von v. d. W. mit der Bitte um gel. Rückgabe. Ich würde es sehr begrüßen, wenn v. d. W., wie verabredet, einen offiziellen Auftrag zur Bearbeitung dieses Problems durch den BHF erhielte.

Mit frdl. Gruß und Heil Hitler,

Ihr sehr ergebener

Hasse

1.68 03.04.1950, P.C. v d Waerden to Hasse

Laren N–H,
Postcard 3. April 1950

Lieber Herr Hasse

Herzlichen Dank für Ihre sehr wertvollen Separate. Die „invariante Kennzeichnung" ist fabelhaft schön!

Beste Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.69 29.04.1950, P.C. v d Waerden to Hasse

Laren,
Postcard 29. April 1950

Lieber Herr Hasse

Dank für Ihre Postkarte aus Rom. Nach meiner Statistik habe ich Ihnen voriges Jahr meine Arbeit „Divisorenklassen..." in Comm. Helv. 20(1947), in der ich Ihre Fragen beantwortet habe, zugeschickt, zusammen mit 5 anderen Separaten. Wenn die Sendung nicht angekommen ist, schreiben Sie mir bitte, dann werde ich dasselbe noch einmal schicken.

Herzliche Grüße

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.70 06.03.1952, Hasse to v d Waerden

den 6. März 1952

Lieber Herr van der Waerden,

vielleicht interessiert es Sie zu wissen, dass einer meiner besten Schüler Herr Peter Roquette sich in diesem Jahr als Forschungsstipendiat im Lorenzenhof in Oberwolfach aufhält. Roquette hat in dem Jahr 3 wunderschöne Arbeiten geschrieben. Die erste gibt einen neuen stark begrifflichen und wirklich sehr eleganten Beweis des Brauerschen Hauptsatzes über induzierte Charaktere und des daraus folgenden Satzes über den minimalen Darstellungskörper einer endlichen Gruppe. Die zweite, seine Dissertation, verallgemeinert die Deuringsche Korrespondenztheorie auf den Fall, dass auch das Argument der Korrespondenz im Divisor des Doppelkörpers ist und entwickelt daraus einen rein arithmetischen, ebenfalls sehr eleganten Beweis der Riemannschen Vermutung in Funktionenkörpern, der es nicht erforderlich macht, sich in das hochkomplizierte Buch von A. Weil zu vertiefen. Die dritte Arbeit entwickelt mit denselben Methoden die Korrespondenztheorie im abelschen Funktionenkörper im Anschluss an meinen Bericht in der DMV und Ihre anschliessenden Beweise der dort noch offen gebliebenen Vermutungen. Auch hier gelingt es Roquette in einfachster Weise auf bewertungstheoretischem Wege zum Ziel zu gelangen. Durch Spezialisierung seiner allgemeinen Methoden erhält er übrigens eine elegante Neudarstellung der Deuringschen Korrespondenztheorie, bei der sogar die Ausnahmeprimdivisoren in strukturinvarianter Weise gekennzeichnet werden.

Ich wollte Sie das alles wissen lassen, weil ich mir denken könnte, dass Sie vielleicht Herrn Roquette einmal zum Vortrag nach Zürich einladen möchten. Er selbst würde das ausserordentlich dankbar empfinden. Er sucht sehr nach mathematischem Kontakt und kam stark enttäuscht aus Göttingen zurück, wo er zwar vortragen durfte, aber Deuring nur 10 Minuten für eine Unterhaltung erübrigen konnte.

Mit freundlichen Grüssen von Haus zu Haus

Ihr

1.71 11.03.1952, v d Waerden to Hasse

Zürich,
den 11. März 1952

Lieber Herr Hasse,

Was Sie über die Arbeiten von Roquette schreiben, interessiert mich ausserordentlich. Ich werde veranlassen, dass er im Frühsommer nach Zürich zum Vortrag eingeladen wird.

Herzliche Grüsse [1] [2]

Ihr

B. L. v. d. Waerden

---

[1] Added by H. Hasse:
"Auf Reisen, Heidelberg, — 15. 3. 52
L. H. R.
Beistehendes sollen Sie wissen. Bitte um Rücksendung nach Ahrensburg. H. Gr. — Ihr H. Hasse"

[2] Added by P. Roquette:
"Vielen Dank! Ich werde, wenn die Einladung kommt, gerne einmal nach Zürich fahren. — Roquette; 20.3."

1.72 12.03.1952, v d Waerden to Hasse

Berkeley,
12. März 1952

Lieber Herr Hasse

In Ihren Arbeiten H I–H III haben Sie die Theorie der quadratischen Formen über dem rationalen Zahlkörper entwickelt, in drei anschließenden Arbeiten dieselbe Theorie für beliebige Zahlkörper. Eine Mathematikerin hier, Mrs Robinson, die die ersten drei Arbeiten sehr gut kennt und schätzt, möchte gerne auch die anschließenden Arbeiten verstehen und für ihre logischen Untersuchungen auswerten. Sie stößt dabei auf Schwierigkeiten, weil darin die Theorie der Normenrestsymbole und verwandte Dinge vorausgesetzt werden. Durch die Fußnoten wurde sie auf frühere Arbeiten von Ihnen und Hensel verwiesen, die ihrerseits wieder ältere Arbeiten als bekannt voraussetzen. Sie fragte mich nun, ob ich sie beraten könnte, was sie am besten studieren sollte um das alles zu verstehen. Ich erinnerte mich an eine sehr schöne Arbeit von Ihnen, in der Sie die Normenrestsymbole mittels Algebrenklassen erklärt haben; es gelang mir aber nicht, diese Arbeit hier wiederzufinden. Nun wenden wir uns an Sie mit der Bitte, uns einige Hinweise zu geben, welche Bücher oder Originalarbeiten nach Ihrer Meinung die beste Einführung bieten würden.

Hier herrscht ein reges mathematisches Leben. Die Leute sind sehr nett und das Klima ist wunderbar.

Mit bestem Dank im Voraus für Ihre Mühe und herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.73 20.03.1958, Hasse to v d Waerden

Ahrensburg,
20. 3. 1958

Lieber Herr v. d. Waerden,

Es ist in der Tat mühsam (und veraltet) sich die Theorie des Normenrestsymbols aus den Arbeiten von Hensel und mir anzueignen, die meinen Jugendarbeiten über quadratische Formen vorangehen. Ich habe in der Tat später einfachere und elegantere Begründungen der Theorie des Normenrestsymbols gegeben. Allerdings setzen diese das Artinsche Reziprozitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern voraus. Dies Gesetz und meine anschliessende Normenresttheorie sind in den §§ 1–4, 6–8, 9–12 von Teil II meines sogen. Zahlberichts (Jber. DMV, Erg. Bd. VI, Leipzig 1930) zusammenhängend und wohl auch mit ein wenig didaktischen Intentionen dargestellt. Meine Marburger Vorlesung "Klassenkörpertheorie", 1932/33, ausgearbeitet unter meiner ständigen Überwachung von Wolfgang *Franz*, ist leider in ihrem Teil III nur bis zum Artinschen Reziprozitätsgesetz und der Bestimmung des Normenrestindex gekommen, ohne dann die Einführung des Normenrestsymbols zu vollziehen. Sie ist in einigen hundert Exemplaren (hektographiert) ins In– u. Ausland gegangen; es ist aber wohl fraglich, ob Sie sie drüben auftreiben können. Jedenfalls ist sie die geeignete Grundlage für das Studium der anschliessend unter dem Einfluss von E. Noether entstandenen Arbeit, auf die Sie in Ihrem Brief anspielen, ohne sie lokalisieren zu können:

> Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln. — Math. Ann. 107 (1933).

Man muss dazu allerdings vorher noch lesen:

> Über $\wp$–adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme. — Math. Ann. 104 (1931).

Gerade für das Durchschauen der *logischen* Struktur erscheint mir die erstgenannte Arbeit recht wesentlich, zumal in ihrem "Anhang" nochmals auf den Hauptsatz über die quadratischen Formen mit algebraischen Zahlkoeffizienten zurückgekommen wird.

Ihrerseits bilden diese letztgenannten Arbeiten die Überleitung zu Chevalleys Neubegründung nicht nur der Normenresttheorie (lokale Klassenkörpertheorie) sondern auch des Reziprozitätsgesetzes von Artin (globale Klassenkörpertheorie), zunächst in seiner Thèse (Einführung des Idelbegriffs):Journ-Coll. Sci. Tokyo 9(1933), wie dann in seiner Arbeit: Ann of Math. 41(1940) (Heranziehung unendlicher Erweiterungen und topologischer Hilfsmittel).

Ich glaube, Ihnen damit die wesentliche Literatur genannt zu haben. Es sollte mich freuen, wenn Ihre Schülerin etwas Schönes herausbekommt.

Unsere "Kinder", die sich ja eng angefreundet haben, scheinen nun auch weiterhin vereint zu bleiben. Wir sind Ihrem Schwiegersohn sehr dankbar, dass er sich für unseren so eingesetzt hat.

1.74 26.06.1959, Hasse to v d Waerden

26. Juni 1959

Lieber Herr van der Waerden,

Sie würden Herrn Kähler und mir einen sehr grossen Gefallen tun, wenn Sie uns mit einer gutachtlichen Äusserung über die wissenschaftlichen Persönlichkeiten und die Leistungen von Hans Reichardt und auch von Heinrich Grell zu Hilfe kämen. Der Anlass ist folgender:

Wir hatten als ordentliche Mitglieder der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin einen gutbegründeten Antrag auf Zuwahl von Reichardt als ordentliches Mitglied gestellt, sind aber mit diesem Antrag bisher nicht durchgekommen, weil von anderer Seite ein entsprechender Antrag für Grell eingerichtet und simultane Behandlung beider Anträge verlangt wurde, was wir nicht mitmachen wollten. Zur Erleichterung lege ich Ihnen ein Verzeichnis der wissenschaftlichen Schriften von beiden bei.

Mit herzlichen Grüssen, denen sich auch Herr Kähler anschliesst,

Ihr

H. Hasse

1.75 20.02.1961, v d Waerden to Hasse

Zürich,
den 20. Februar 1961

Lieber Herr Hasse,

Einer unserer Studenten, Herr E. *Hungerbühler*, möchte gerne im kommenden Sommersemester in Hamburg studieren.

Herr Hungerbühler hat bei uns die 1. und 2. Vorprüfung zum Diplom in Mathematik mit Erfolg abgelegt und interessiert sich besonders für Zahlentheorie. Wären Sie so freundlich, ihm mitzuteilen, welche Vorlesungen über Algebra und Zahlentheorie im nächsten Sommersemester beabsichtigt sind ? Seine Adresse ist:

Edgar Hungerbühler
Wasserwerkstrasse 96
Zürich 37

Mit vielem Dank für Ihre Mühe und besten Grüssen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.76 01.02.1963, Hasse to v d Waerden

1. 2. 63

In herzlichem Gedenken wünscht Ihnen weiteres erfolgreiches Schaffen und häusliches Glück

Helmut Hasse

1.77 21.11.1964, v d Waerden to Hasse

Zürich,
21. Nov. 1964

Lieber Herr Hasse

Am Mittwoch, 9. Dezember (wahrscheinlich am Abend) werde ich in Hamburg auf Einladung von Herrn von Weizsäcker einen Vortrag über „Platon und der Orient" halten. Vorher (am Mittwoch gegen Mittag oder am frühen Nachmittag) oder nachher (am liebsten am Donnerstag Nachmittag) möchte ich mich gerne mit Ihnen und Herrn Witt etwas über Quadratische Formen und Algebren unterhalten. Können wir dafür eine passende Zeit und einen Ort vereinbaren ?

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.78 24.11.1964, Hasse to v d Waerden

24. November 1964

Lieber Herr van der Waerden,

recht herzlichen Dank für die Ankündigung Ihres Besuches. Ihr Vortrag wird ja wohl in der Joachim–Jungius–Gesellschaft stattfinden. Leider wird es mir nicht möglich sein, zu Ihrem Vortrag hinzukommen, da ich am Mittwoch Abend bereits anderweitig gebunden bin. Auch am Donnerstag werde ich nicht in Hamburg sein.

Natürlich möchte ich mich sehr gern mit Ihnen unterhalten. Herr Witt ist allerdings für das Wintersemester Gast an der Universität Columbia, New York. Wenn Ihnen meine Gesellschaft allein genügt, so möchte ich vorschlagen, daß wir am Mittwoch irgendwo zu Mittag essen. Ich bin ab 11 Uhr (Ende unseres Zahlentheorie–Seminars) zu Ihrer Verfügung. Wir treffen uns am besten im Mathematischen Seminar und gehen dann gemeinsam etwa in das dicht benachbarte Restaurant des Studentenheims oder auch zum Dammtor–Bahnhof.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

1.79 03.12.1964, v d Waerden to Hasse

8006 Zürich,
den 3. Dezember 1964

Lieber Herr Hasse,

Was ich mit Herrn Witt besprechen möchte, hat sich inzwischen erledigt. Mit Ihnen aber möchte ich mich sehr gerne über Quadratische Formen und anderes unterhalten. Ich werde also zwischen 11^{10} und 11^{15} sehr gerne zu Ihnen ins Mathematische Institut kommen.

Herzliche Grüsse

Ihr

B. L. v. d. Waerden

1.80 02.02.1968, Hasse to v d Waerden

2. 2. 68

In herzlichem Gedenken viele gute Wünsche

Helmut Hasse

Kapitel 2

Name Index

Kapitel 3

Subject Index